

Sia $f(x, y) = x^4 - y^2 + 6 - 2x^2 + 4y$; sia (x_0, y_0) l'unico punto di massimo relativo di f .
Calcolare $f(x_0, y_0)$.

SOLUZIONE. $\nabla f = 0$ porta al sistema

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x = 0 \\ -2y + 4 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $P_1 = (0, 2)$, $P_2 = (1, 2)$ e $P_3 = (-1, 2)$. L'Hessiano di f è dato da

$$H = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che

$$H(P_1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

che ha determinante positivo; essendo $-2 < 0$, si ha che P_1 è punto di massimo. Si ha poi

$$H(P_2) = H(P_3) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

la quale ha determinante negativo. Quindi P_2 e P_3 sono punti di sella. Allora si ha $f(0, 2) = 10$.