Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = x^4 - 2x^2.$$

SOLUZIONE. La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}$, è pari, e da

$$f(x) = x^2(x^2 - 2)$$

si ha che $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ o $x = \pm\sqrt{2}$. Inoltre $f(x) > 0$ se e solo se $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$, mentre $f(x) < 0$ se e solo se $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. I limiti agli estremi del dominio sono dati da

$$\lim_{x\to\pm\infty}(x^4 - 2x^2) = +\infty.$$

f non ha asintoti. Essendo polinomiale, f è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ e risulta

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1).$$

Ne segue che $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ o $x = \pm 1$. Poi, $f'(x) > 0$ se e solo se $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$, mentre invece $f'(x) < 0$ se e solo se $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$. Quindi f decresce in $(-\infty, -1)$, ha un punto di minimo locale (ed assoluto) in $x_{1m} = -1$, cresce in $(-1, 0)$, ha un punto di massimo locale (non assoluto) in $x_M = 0$, decresce in $(0, 1)$, ha un secondo punto di minimo locale (ed ancora assoluto) in $x_{2m} = 1$, ed infine cresce in $(1, +\infty)$. Allora

$$\min_{\mathbb{R}} f = f(-1) = f(1) = -1$$

Quanto alla convessità si ha

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

da cui si trova che f è convessa in $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, ha un punto di flesso in $x_{1F} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, è concava in $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, ha un secondo punto di flesso per $x_{2F} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, ed infine f è convessa in $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$.