13. EQUAZIONI ALGEBRICHE

1. Principi di equivalenza

Si dice **identità** un'uguaglianza tra due espressioni contenenti una o più variabili che è vera per tutti i valori che si possono attribuire alle variabili, purché le espressioni abbiano significato.

Esempio: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; questa uguaglianza è vera per qualsiasi valore delle variabili a e b.

Si dice **equazione** una uguaglianza tra due espressioni algebriche contenenti una o più variabili, dette incognite, verificata solo per determinati valori delle incognite.

Esempio: $x+2x=3$ è verificata per $x=1$, infatti $1+2=3$, ma non è verificata per altri valori di x, per esempio per $x=2$ risulta $2+4=3$ falso.

Si chiamano **soluzioni** di un'equazione i valori che sostituiti alle incognite rendono vera l'equazione. Risolvere un'equazione significa trovare l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione.

Due equazioni si dicono **equivalenti** se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

Primo principio di equivalenza: data un'equazione, aggiungendo a entrambi i membri uno stesso numero od una stessa espressione contenente l'incognita si ottiene un'equazione equivalente. Se si aggiunge un'espressione che dipende da un'incognita non si devono modificare le condizioni di esistenza dell'equazione stessa.

Esempio: data l'equazione $3x = 1 - 2x$ si può aggiungere a entrambi i membri $+2x$, si ottiene l'equazione equivalente $3x + 2x = 1 - 2x + 2x$.

Conseguenze dirette del primo principio di equivalenza sono la regola del trasporto e la regola di cancellazione.

Regola del trasporto: data un'equazione, trasportando un termine da un membro all'altro e cambiandolo di segno si ottiene un'equazione equivalente.
Esempio: data l'equazione $3x + 1 = 2x - 5$ possiamo portare +1 dopo l'uguale e 2x prima dell'uguale, otteniamo l'equazione equivalente $3x - 2x = -5 - 1$.

Regola di cancellazione: data un'equazione, termini uguali presenti in entrambi i membri possono essere cancellati, ottenendo un'equazione equivalente.
Esempio: data l'equazione $3x + 1 + 2x = 2x - 5$ possiamo cancellare 2x prima dell'uguale e lo stesso 2x dopo l'uguale, ottenendo l'equazione equivalente $3x + 1 = -5$.

Secondo principio di equivalenza: data un'equazione, moltiplicando ambo i membri per un numero diverso da zero si ottiene un'equazione equivalente. Si può anche moltiplicare per un'espressione contenente l'incognita purché l'espressione non si annulli qualunque sia il valore dell'incognita stessa, e che non restringa le condizioni di esistenza.
Esempio: data l'equazione $3x = 4$ possiamo dividere primo e secondo membro per 3 ottenendo l'equazione equivalente $\frac{3x}{3} = \frac{4}{3}$, semplificando $x = \frac{4}{3}$.

Conseguenze dirette del secondo principio di equivalenza sono:
Regola della divisione per un fattore comune diverso da zero: data un'equazione in cui tutti i termini hanno un fattore comune diverso da zero, dividendo per tale numero si ottiene un'equazione equivalente.
Esempio: nell'equazione $3x - 6 = 9x + 18$ si possono semplificare tutti i termini per 3, si ottiene l'equazione equivalente $x - 2 = 3x + 6$.

Regola del cambiamento di segno: data un'equazione, cambiando segno a tutti i termini di

entrambi i membri si ottiene un'equazione equivalente.
Esempio: nell'equazione $-3x=-2$ si possono cambiare di segno tutti i termini ottenendo l'equazione equivalente $3x=2$.

Un'equazione si dice **equazione algebrica** o **polinomiale** se è riconducibile, mediante i principi di equivalenza, a un polinomio uguagliato a zero. Il grado del polinomio è detto **grado dell'equazione**.

Teorema fondamentale dell'algebra: ogni equazione algebrica di grado n ammette esattamente n soluzioni nell'insieme dei numeri complessi (alcune delle soluzioni possono coincidere).

2. Equazioni di primo grado

Un'equazione di primo grado si può sempre ricondorre allla forma normale $ax+b=0$
La soluzione dipende dai valori delle costanti a e b:

- se $a=0$ e $b\neq 0$ l'equazione non ha soluzione e si dice *impossibile*
- se $a=b=0$ l'equazione è soddisfatta per qualsiasi valore della variabile e si dice *indeterminata*
- se $a\neq 0$ l'equazione si dice determinata ed ha una e una sola soluzione $x=-\dfrac{b}{a}$.

Equazioni fratte o frazionarie: sono le equazioni in cui l'incognita compare al denominatore.
Le equazioni frazionarie si risolvono seguendo i passi:

- stabilire l'insieme di definizione, ossia escludere i valori dell'incognita che annullano i denominatori.
- calcolare il denominatore comune e ridurre tutte le frazioni allo stesso denominatore comune
- eliminare i denominatori comuni
- risolvere l'equazione intera ottenuta
- verificare se le soluzioni trovate appartengono all'insieme di definizione.

Esempio:

$$\frac{1}{x^2-9}+\frac{2}{x-3}=\frac{3}{x+3}$$

Scomporre in fattori i denominatori

$$\frac{1}{(x-3)(x+3)}+\frac{2}{x-3}=\frac{3}{x+3}$$

Ricerca delle condizioni di esistenza o insieme di definizione: porre i denominatori diversi da 0:
$x+3\neq 0$ e $x-3\neq 0$, cioè $x\neq -3 \wedge x\neq +3$
Ridurre tutte le frazioni allo stesso denominatore

$$\frac{1}{(x-3)(x+3)}+\frac{2(x+3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{3(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$

Elimare i denominatori comuni e risolvere l'equazione

$$1+2(x+3)=3(x-3)$$
$$1+2x+6=3x-9$$
$$2x-3x=-9-1-6$$
$$-x=-16$$

$x=16$ la soluzione è accettabile in quanto è diversa da +3 e da -3.

3. Equazioni di secondo grado

Un'equazione di secondo grado o quadratica, in una sola variabile x a coefficienti reali, è riconducibile alla forma normale

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{con } a \neq 0$$

Equazione incompleta pura: un'equazione di secondo grado incompleta pura è della forma

$$ax^2 + c = 0 .$$

Si risolve nel seguente modo:

$$ax^2 + c = 0 \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Se $-\frac{c}{a} > 0$ l'equazione ammette due soluzioni reali opposte.

Se $-\frac{c}{a} < 0$ l'equazione non ammette soluzioni reali, ammette due soluzioni immaginarie.

Se $c = 0$ l'equazione si presenta nella forma $ax^2 = 0$ ed ha come unica soluzione (doppia) $x = 0$

Esempio: $4x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{3}{2}$

Equazione incompleta spuria: un'equazione spuria di secondo grado è della forma

$$ax^2 + bx = 0 .$$

Si risolve nel seguente modo:
Raccogliendo x a fattore comune l'equazione si scrive come $x \cdot (ax + b) = 0$

Per la legge di annullamento del prodotto le due soluzioni (reali) sono $x_1 = 0$ e $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Esempio: $3x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(3x-5) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x = \frac{5}{3}$

Equazione completa: un'equazione completa di secondo grado si presenta nella forma

$$ax^2 + bx + c = 0 .$$

Si risolve per mezzo della formula risolutiva $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Se il coefficiente *b* è pari si può utilizzare anche la formula ridotta: $x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - ac}}{a}$

Se *a=1* e *b* è pari si può utilizzare la formula detta ridottissima $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$

La quantità $\Delta = b^2 - 4ac$ si chiama *discriminante*, a seconda del segno che assume si ha:

1. $\Delta > 0$ due soluzioni reali distinte: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
2. $\Delta = 0$ due soluzioni reali coincidenti: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
3. $\Delta < 0$ nessuna soluzione reale, due soluzioni complesse coniugate:

$$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Esempi:

- $2x^2+5x+2=0$

applicando la formula risolutiva $x_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 2\cdot 2}}{2\cdot 2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\dfrac{-5\pm 3}{4}$

le soluzioni sono $x_1=\dfrac{-5-3}{4}=-\dfrac{8}{4}=-2$ $\quad x_2=\dfrac{-5+3}{4}=-\dfrac{2}{4}=-\dfrac{1}{2}$

- $x^2-6x+5=0$

Si può applicare la formula ridottissima $x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-5}=3\pm\sqrt{4}=3\pm 2$, le soluzioni sono

$$x_1=3-2=1 \quad x_2=3+2=5$$

4. Relazioni fra i coefficienti e le radici di un'equazione di 2° grado

Data un'equazione di secondo grado $ax^2+bx+c=0$, che ha come soluzioni x_1 e x_2, fra le radici e i coefficienti a,b,c sussistono le seguenti relazioni:

Somma delle radici: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ **Prodotto delle radici:** $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$

Pertanto un'equazione di secondo grado si può sempre scrivere nella forma $x^2-Sx+P=0$, dove S è la somma delle soluzioni, P è il prodotto delle soluzioni: $S=x_1+x_2$, $P=x_1\cdot x_2$

Altre relazioni

Differenza delle radici: $x_1-x_2=\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Somma dei reciproci delle radici: $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=-\dfrac{b}{c}$

Somma dei quadati delle radici: $x_1^2+x_2^2=\dfrac{b^2-2ac}{a^2}$

Somma dei reciproci dei quadrati delle radici: $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}=\dfrac{b^2-2ac}{c^2}$

Somma dei cubi delle radici: $x_1^3+x_2^3=\dfrac{3abc-b^3}{a^3}$

Somma dei reciproci dei cubi delle radici: $\dfrac{1}{x_1^3}+\dfrac{1}{x_2^3}=\dfrac{3abc-b^3}{c^3}$

Da queste relazioni discendono le seguenti proprietà:
- Le radici sono opposte se e solo se $b=0$
- Le radici sono reciproche se e solo se $a=c$
- Le radici sono antireciproche se e solo se $a=-c$
- Una radice è zero se e solo se $c=0$
- Se $\Delta>0$, allora le radici sono concordi se e solo se $\dfrac{c}{a}>0$, e sono discordi se e solo se $\dfrac{c}{a}<0$

5. Regola dei segni o regola di Cartesio (equazioni di 2° grado)

Data l'equazione $ax^2+bx+c=0$ con $\Delta \geq 0$ a ogni permanenza nei segni dei coefficienti corrisponde una soluzione negativa, a ogni variazione dei segni nei coefficienti corrisponde una soluzione positiva.

Più precisamente:

a	b	c	
+	+	+	due permanenze, quindi due soluzioni negative
+	+	-	una permanenza e una variazione: una soluzione negativa, una positiva
+	-	-	una variazione e una permanenza: una soluzione positiva e una negativa
-	+	-	due variazioni: due soluzioni positive

6. Scomposizione di un trinomio di secondo grado

Dato un trinomio ax^2+bx+c, e dette x_1, x_2 le soluzioni dell'equazione $ax^2+bx+c=0$, risulta

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

Esempio: Dato il trinomio $2x^2+5x+2$

Le soluzioni di $2x^2+5x+2=0$ sono $x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{-5\pm 3}{4} \rightarrow \quad x_1=-2; x_2=-\frac{1}{2}$

Il trinomio si scompone $2(x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

7. Equazioni parametriche (di 2° grado)

Si dicono equazioni parametriche le equazioni che contengono, oltre all'incognita solitamente indicata con la lettera x, anche una o più lettere dette parametri. Le soluzioni variano a seconda dei valori dei parametri.

- Determinare le soluzioni quando è assegnato il valore del parametro.

Esempio: $kx^2+(k-2)x+k+1=0$, determinare le soluzioni per *k=-1*

Svolgimento. Sostituire a k il valore assegnato e risolvere l'equazione

$(-1)x^2+(-1-2)x-1+1=0$ diventa $-x^2-3x=0$, le soluzioni sono $-x(x+3)=0 \rightarrow x=0; x=-3$

- Determinare il valore del parametro quando è assegnata una soluzione dell'equazione.

Esempio: $kx^2+(k-2)x+k+1=0$, determinare *k* in modo che l'equazione abbia soluzione *x=9*.

Svolgimento. Sostituire il valore della soluzione alla x e risolvere l'equazione nell'incognita k

$$k9^2+(k-2)9+k+1=0 \rightarrow 81k+9k-18+k+1=0 \rightarrow 91k=17 \rightarrow k=\frac{17}{91}$$

- Determinare il valore del parametro in modo che le soluzioni siano opposte $x_1=-x_2$

Esempio: $kx^2+(k-2)x+k+1=0$, determinare *k* in modo che $x_1=-x_2$

Svolgimento. Imporre *S=0*, la somma delle soluzioni nulla:

$$S=0 \quad \rightarrow \quad -\frac{b}{a}=0 \quad \rightarrow \quad -\frac{k-2}{k}=0 \quad \rightarrow \quad k-2=0 \quad \rightarrow \quad k=2$$

- Determinare il valore del parametri in modo che le soluzioni siano uguali

Esempio: $2kx^2+2(k-2)x+3k+2=0$, determinare *k* in modo che $x_1=x_2$

Svolgimento. Imporre $\Delta=0 \rightarrow B^2-4AC=0 \rightarrow 4(k-2)^2-4\cdot 2k\cdot(3k+2)=0$

$4(k^2-4k+4)-24k^2-16k=0 \rightarrow -20k^2-32k+16=0$ dividendo per -4

$5k^2+8k-4=0 \rightarrow k_{1,2}=-4\pm\sqrt{16+20}=-4\pm 6 \rightarrow k_1=-10; k_2=+2$

- Determinare il valore del parametro in modo che la somma delle soluzioni sia un valore numerico assegnato.

Esempio: $kx^2+(k-2)x+k+1=0$, determinare k in modo che $x_1+x_2=-3$

Svolgimento. Imporre $S=-3 \to -\dfrac{b}{a}=-3 \to -\dfrac{k-2}{k}=-3 \to k-2=3k \to k=-1$

- Determinare il valore del parametro in modo che il prodotto delle soluzioni sia un valore numerico assegnato

Esempio: $kx^2+(k-2)x+k+1=0$, determinare k in modo che $x_1 \cdot x_2=2$

Svolgimento. Imporre $P=2 \to \dfrac{c}{a}=2 \to \dfrac{k+1}{k}=2 \to k+1=2k \to k=1$

- Determinare il valore del parametro in modo che l'equazione abbia radici reali e distinte

Esempio: $(k-2)x^2+2kx+k+1=0$, determinare k in modo che l'equazione abbia due radici reali e distinte.

Svolgimento. $\Delta>0 \to b^2-4ac>0$

$$4k^2-4(k-2)(k+1)>0 \to 4k^2-4(k^2-k-2)>0 \to 4k^2-4k^2+4k+8>0 \to 4k+8>0 \to k>-2$$

- Determinare il valore del parametro in modo che la somma dei reciproci delle soluzioni sia un valore numerico assegnato.

Esempio: $x^2-(k+1)x+k=0$, determinare k in modo che $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=-1$

Svolgimento. $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=-1 \to \dfrac{x_2+x_1}{x_1x_2}=-1 \to \dfrac{S}{P}=-1$; $S=-\dfrac{b}{a}=k+1$; $P=\dfrac{c}{a}=k$; sostituendo si ha:

$$\frac{k+1}{k}=-1 \to k+1=-k \to 2k=-1 \to k=-\frac{1}{2}$$

- Determinare il valore del parametro in modo che la somma dei quadrati delle radici sia un valore numerico assegnato.

Esempio: $x^2-(k+1)x+k=0$, determinare k in modo che $x_1^2+x_2^2=1$

Svolgimento. $x_1^2+x_2^2=1 \to (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=1 \to S^2-2P=1$; riprendendo i valori di S e di P ottenuti al punto precedente abbiamo $(k+1)^2-2k=1 \to k^2+2k+1-2k=1 \to k^2=0 \to k=0$.

Analisi dell'esistenza in R e del segno delle radici al variare di un parametro

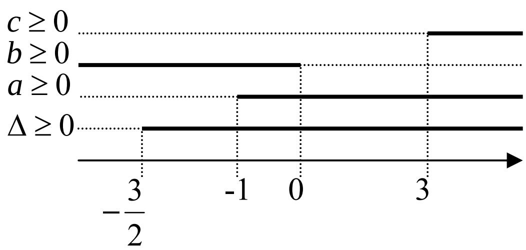
Esempio: $(k+1)x^2-2kx+k-3=0$

$\Delta \geq 0 \quad \to \quad 4k^2-4(k+1)(k-3)\geq 0 \to k \geq -\dfrac{3}{2}$

$a \geq 0 \quad \to \quad k+1 \geq 0 \quad \to \quad k \geq -1$

$b \geq 0 \quad \to \quad -2k \geq 0 \quad \to \quad k \leq 0$

$c \geq 0 \quad \to \quad k-3 \geq 0 \quad \to \quad k \geq 3$



1° caso k<-3/2; $\Delta<0$ nessuna radice reale.
2° caso k=-3/2; $\Delta=0$ → due radici reali e coincidenti; 2 variazioni → 2 radici positive.
3° caso -3/2<k<-1; $\Delta>0$ → 2 radici; 2 variazioni → 2 radici positive.
4° caso k=-1; si annulla il coefficiente di x^2 → equazione di 1° grado → 1 radice; positiva.
5° caso -1<k<0; $\Delta>0$ → 2 radici; 1 permanenza e 1 variazione → 1 radice positiva e 1 negativa.
6° caso k=0; si annulla il coefficiente di x → equazione incompleta pura → 2 radici opposte.
7° caso 0<k<3; $\Delta>0$ → 2 radici; 1 variazione e 1 permanenza → 1 radice positiva e 1 negativa.
8° caso k=3; si annulla il termine noto → equazione spuria → 1 radice 0, 1 radice positiva.

9° caso k>3; $\Delta > 0$ $\to$ 2 radici; 2 variazioni $\to$ 2 radici positive.

8. Equazioni riconducibili a equazioni di secondo grado

Equazioni reciproche, sono quelle in cui i coefficienti dei termini equidistanti dagli estremi sono uguali a due a due oppure opposti a due a due.

Esempi

$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$, si annulla per x=-1, con la regola di Ruffini si abbassa di grado

$12x^4 - 25x^3 + 25x - 12 = 0$, si annulla sia per x=1, sia per x=-1, si può applicare due volte la regola di Ruffini.

Equazioni binomie, sono quelle che si possono scrivere nella forma $ax^n + b = 0$, con n intero positivo; le soluzioni sono

$x = \pm\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$ se n è pari

$x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$ se n è dispari

Purché queste radici esistano.

Esempi

$$x^4 = 81 \quad \to x^4 - 81 = 0 \to \left(x^2 - 9\right)\left(x^2 + 9\right) = 0 \to \begin{cases} x^2 - 9 = 0 \to x = \pm 3 \\ x^2 + 9 = 0 \text{ non ha soluzioni reali} \end{cases}$$

$$27x^3 + 1 = 0 \quad \to x^3 = -\frac{1}{27} \to x = \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}.$$

Equazioni trinomie, si presentano nella forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, si risolvono sostituendo $x^n = t$, dalla sostituzione si ottiene un'equazione di 2° grado.

Esempio: $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$, questo tipo di equazione è anche detta **biquadratica**, sostituendo $x^2 = t$ si ha $t^2 - 6t + 8 = 0$, che ha per soluzioni $t_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \begin{matrix} \nearrow 4 \\ \searrow 2 \end{matrix}$, tenendo conto della sostituzione

si ha $\begin{cases} x^2 = 4 \to x = \pm 2 \\ x^2 = 2 \to x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

Altre equazioni possono essere ricondotte a uno dei casi precedenti con opportune sostituzioni.

Esempio

$\left(3x-2\right)^3 - 8 = 0$ si risolve sostituendo $3x - 2 = t$, si ottiene $t^3 - 8 = 0 \quad \to t^3 = 8 \to t = 2$ ricordando la sostituzione precedente si ha $3x - 2 = 2 \quad \to 3x = 4 \to x = \frac{4}{3}$.

9. Equazioni di terzo grado

Un'equazione di terzo grado in forma normale si presenta come $c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4 = 0$. Affinché l'equazione sia effettivamente di terzo grado deve risultare $c_1 \neq 0$, dividendo quindi per c_1 l'equazione si può scrivere nella forma

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

1° caso: se $c = 0$, mettendo in evidenza x l'equazione diventa $x(x^2 + ax + b) = 0$. Pertanto una soluzione è $x = 0$, le altre si trovano risolvendo l'equazione di secondo grado $x^2 + ax + b = 0$.

2° caso: se $c \neq 0$ (in tal caso $x = 0$ non è soluzione), operando il cambiamento di variabile

$y = x + \frac{a}{3}$, da cui $x = y - \frac{a}{3}$, l'equazione diventa

$$y^3 - ay^2 + \frac{a^2}{3}y - \frac{a^3}{27} + ay^2 + \frac{3a^3}{27} - 2\frac{a^2}{3}y + by - \frac{ab}{3} + c = 0$$

Eseguendo le somme si arriva a $y^3 + y(b - \frac{a^2}{3}) + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0$

Posto $p = b - \frac{a^2}{3}$ e $q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$, l'equazione diventa

$$y^3 + py + q = 0 \qquad (1)$$

Nel seguito vedremo un metodo per risolvere l'equazione (1).

Operando il cambiamento di variabile $y = z - \frac{p}{3z}$, l'equazione si riscrive come

$$z^3 - pz + \frac{p^2}{3z} - \frac{p^3}{27z^3} + pz - \frac{p^2}{3z} + q = 0$$

Eseguendo le somme e moltiplicando ambo i membri per z^3 si arriva a $z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0$

Ponendo $t = z^3$, si trova un'equazione di secondo grado $t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$

le cui soluzioni sono $t = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$

e ricordando la sostituzione $t = z^3$

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Ricordando le altre sostituzioni effettuate si arriva alla seguente formula risolutiva della (1) nota come formula di Cardano

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Per ottenere il valore di x basta ricordare che $x = y - \frac{a}{3}$

Ponendo $u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ e $v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$, le tre soluzioni dell'equazione si possono scrivere come

$$\begin{cases} y_1 = u + v \\ y_2 = -\frac{u+v}{2} + \sqrt{3}i\frac{u-v}{2} \\ y_3 = -\frac{u+v}{2} - \sqrt{3}i\frac{u-v}{2} \end{cases}$$

Il discriminante dell'equazione di 3° grado è $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$

Se $\Delta > 0$ l'equazione ha 1 radice reale e 2 complesse coniugate
Se $\Delta = 0$ l'equazione ha 3 radici reali di cui 2 coincidenti

Se $\Delta < 0$ l'equazione ha 3 radici reali.

10. Equazioni di quarto grado

Un'equazione di quarto grado in forma normale si scrive come

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

con $a \neq 0$, altrimenti il grado dell'equazione sarebbe inferiore a 4.

1° caso: se $e = 0$ si può raccogliere a fattor comune x, ottenendo $x(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 0$, pertanto una soluzione è $x = 0$, le altre tre si trovano risolvendo l'equazione di terzo grado $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

2° caso: se $e \neq 0$ allora $x = 0$ non è soluzione dell'equazione. Operando il cambio di variabile $x = y - \frac{b}{4a}$ l'equazione diventa

$$a\left(y - \frac{b}{4a}\right)^4 + b\left(y - \frac{b}{4a}\right)^3 + c\left(y - \frac{b}{4a}\right)^2 + d\left(y - \frac{b}{4a}\right) + e = 0$$

Svolgendo i calcoli si riconduce l'equazione a questa forma

$$y^4 + 2\left(\frac{c}{2a} - \frac{3b^2}{16a^2}\right)y^2 - \left(\frac{bc}{2a^2} - \frac{d}{a} - \frac{b^3}{8a^3}\right)y - \left(\frac{3b^4}{256a^4} - \frac{b^2c}{16a^3} + \frac{db}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)$$

Ponendo $A = \frac{c}{2a} - \frac{3b^2}{16a^2}$, $B = \frac{bc}{2a^2} - \frac{d}{a} - \frac{b^3}{8a^3}$, $C = \frac{3b^4}{256a^4} - \frac{b^2c}{16a^3} + \frac{db}{4a^2} - \frac{c}{a}$, l'equazione si riscrive nella forma

$$y^4 + 2Ay^2 = By + C$$

Aggiungendo A^2 ad ambo i membri si ottiene, alla sinistra dell'uguale, un quadrato perfetto

$$(y^2 + A)^2 = By + C + A^2$$

Aggiungendo ora $w^2 + 2Aw + 2wy^2$ (con w per il momento ancora da determinare) si ottiene

$$(y^2 + A + w)^2 = 2wy^2 + By + w^2 + 2Aw + A^2 + C$$

Scegliamo w in modo che il membro di destra sia un quadrato perfetto, per far questo basta calcolarne il discriminante rispetto a y e porlo uguale a zero

$$B^2 - 8w(w^2 + 2Aw + A^2 + C) = 0$$

Questa è un'equazione di terzo grado a coefficienti reali, pertanto ammette (almeno) una soluzione reale. Sia D tale soluzione (reale), allora l'equazione di quarto grado diventa

$$(y^2 + A + D)^2 = 2D(y + \frac{B}{4D})^2$$

Estraendo la radice quadrata si trovano due equazioni secondo grado

$$\begin{cases} y^2 + A + D = \sqrt{2D}y + \sqrt{2D}\frac{B}{4D} \\ y^2 + A + D = -\sqrt{2D}y - \sqrt{2D}\frac{B}{4D} \end{cases}$$

Risolvendo tali equazioni si trovano quattro valori di y, e ricordando che $x = y - \frac{b}{4a}$ si determinano le quattro soluzioni dell'equazione di partenza.