4. Insiemi numerici

4.1 Insiemi numerici

Insieme dei numeri **naturali** $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots,\}$

Insieme dei numeri **interi relativi** $\mathbb{Z}=\{...,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,\ldots\}$

Insieme dei numeri **razionali**

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{n}{m}:n\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\right\}=\left\{0,\frac{1}{1},-\frac{1}{1},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},...,+\frac{2}{3},-\frac{2}{3},...\right\}$$

L'insieme dei numeri **reali** contiene propriamente quello dei razionali $\mathbb{Q}$ e degli irrazionali.

$$\mathbb{R}=\left\{0,+1,-1,\ldots,+\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\ldots,\sqrt{2},\sqrt{3},\pi,e,\ldots\right\}$$

$\mathbb{R}(+,\cdot)$ è un campo

$\mathbb{R}$ rispetto alla relazione d'ordine usuale $\leq$ è totalmente ordinato

L'ordinamento è completo, nel senso che ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, con un maggiorante in $\mathbb{R}$, ha un estremo superiore in $\mathbb{R}$ (assioma di Dedekind)

Insieme dei numeri **complessi** $\mathbb{C}=\left\{a+ib:a,b\in\mathbb{R};i^2=-1\right\}$

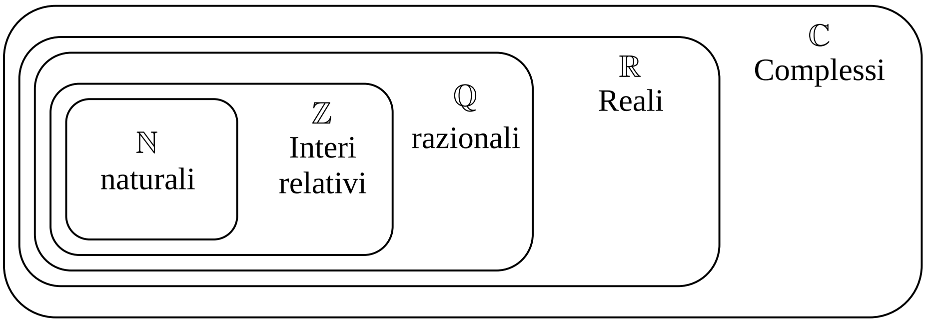

Figura 1. Rappresentazione degli insiemi numerici

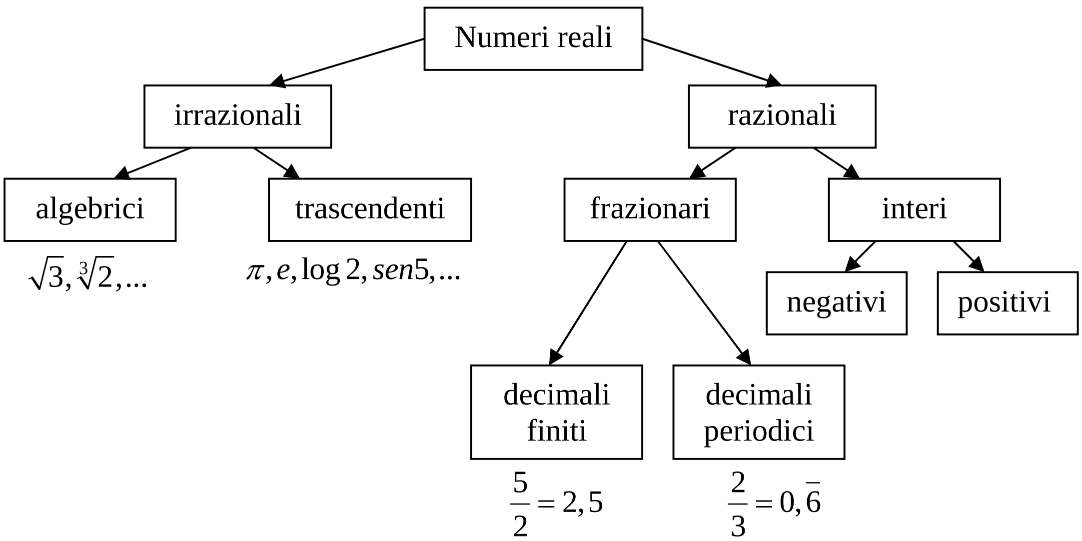

Figura 2. Classificazione dei numeri

Numeri razionali sono quei numeri che possono essere espressi come rapporto tra due numeri interi.
Numeri irrazionali sono quei numeri che non sono razionali, in particolare la loro scrittura come numeri decimali è illimitata e non è periodica.
Numeri algebrici sono quei numeri che sono soluzioni di un'equazione polinomiale algebrica, del tipo $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$, dove $a_i \in \mathbb{Z}$.
Numeri trascendenti sono i numeri irrazionali che non sono algebrici.

4.2 Proprietà delle quattro operazioni

$a+b=b+a$	proprietà commutativa della somma
$a+(b+c)=(a+b)+c$	proprietà associativa della somma
$a+0=0+a=0$	0 è l'elemento neutro della somma
$a\cdot b=b\cdot a$	proprietà commutativa della moltiplicazione
$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$	proprietà associativa della moltiplicazione
$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$	proprietà distributiva della moltiplcazione rispetto alla somma
$1\cdot a=a\cdot 1=a$	1è l'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione
$a\cdot 0=0\cdot a=0$	0 è l'elemento assorbente rispetto alla moltiplicazione
$a-b=(a\pm c)-(b\pm c)$	proprietà invariantiva della sottrazione
$a-0=a$	0 è l'elemento neutro (a destra) della sottrazione
$(a+b):c=(a:c)+(b:c)$	proprietà distributiva della divisione rispetto alla somma
$a:1=a$	1 è l'elemento neutro (a destra) della divisione

4.3 Numeri primi e divisibilità

Numero primo. Un numero naturale >1 si dice primo se è divisibile soltanto per se stesso e per 1.
Numero composto. Un numero naturale >1 che non è primo si dice composto.
Il numero 1 non è un numero primo.
Il numero 0 non è primo perché ne ha infiniti.
L'unico numero primo pari è 2.
Teorema fondamentale dell'aritmetica. Ogni numero composto ammette un'unica rappresentazione come prodotto di fattori primi, a meno dell'ordine di fattori.
Divisibilità per 2. Un numero è divisibile per 2 se e solo se la sua ultima cifra, cioè la cifra delle unità, è pari, cioè è 0, 2, 4, 6, 8.
Divisibilità per 3. Un numero è divisibile per 3 se e solo se la somma delle sue cifre vale 3, 6, 9 o un multiplo di 3. Per verificare se il numero ottenuto è multiplo di 3 si può reiterare il procedimento.
Esempio: 123 è divisibile per 3 perché la somma delle cifre è 6, che è divisibile per 3. Il numero 122 non è divisibile per 3 perché la somma delle cifre è 5, che non è divisibile per 3. Il numero 869565 è divisibile per 3, infatti 8+6+9+5+6+5=39 la cui somma delle cifre è 3+9=12, che è multiplo di 3.
Divisibilità per 4. Un numero è divisibile per 4 se e solo se le sue due ultime cifre sono 00 o un multiplo di 4.
Divisibilità per 5. Un numero è divisibile per 5 se e solo se la sua ultima cifra, cioè la cifra delle unità, è 0 o 5.
Divisibilità per 6. Un numero è divisibile per 6 se rispetta contemporaneamente i criteri di divisibilità per 2 e per 3.
Divisibilità per 7. Un numero (maggiore di 10) è divisibile per 7 se e solo se la differenza (in valore assoluto) fra il numero ottenuto togliendo la cifra delle unità e il doppio della cifra delle unità è 0, 7 o un multiplo di 7. Per verificare se il numero ottenuto è multiplo di 7 si può reiterare il procedimento.
Esempio: 1078 è divisibile per 7, infatti $107-2\cdot 8=107-16=91$. Per capire se 91 è divisivile per 7

basta reiterare il procedimento: $9-2\cdot1=9-2=7$, quindi 91 è divisibile per 7, ovvero è un suo multiplo, di conseguenza anche 1078 è divisibile per 7.

Divisibilità per 8. Un numero è divisibile per 8 se termina con tre zeri o se è divisibile per 8 il numero ottenuto dalle sue ultime tre cifre. Oppure si può considerare la somma fra la penultima cifra e il doppio della terzultima, raddoppiare il risultato ottenuto e sommarlo all'ultima cifra, se il numero così ottenuto è multiplo di 8 allora lo è anche il numero di partenza. Per verificare se il numero ottenuto è multiplo di 8 si può reiterare il procedimento.

Esempio: 7720 è disivibile per 8, infatti $2+7\cdot2=16$ (somma fra la penultima cifra e il doppio della terzultima), $16\cdot2+0=32$ (somma fra il doppio del risultato dell'operazione precedente e l'ultima cifra), e banalmente 32 è multiplo di 8.

Divisibilità per 9. Un numero è divisibile per 9 se e solo se la somma delle sue cifre vale 9 o un multiplo di 9. Per verificare se il numero ottenuto è multiplo di 9 si può reiterare il procedimento.

Divisibilità per 10. Un numero è divisibile per 10 se e solo se la sua ultima cifra è 0.

Divisibilità per 11. Un numero è divisibile per 11 se e solo se la differenza, in valore assoluto, fra la somma delle cifre di posto pari e la somma delle cifre di posto dispari è 0, 11 o un multiplo di 11. Per verificare se il numero ottenuto è multiplo di 11 si può reiterare il procedimento.

Esempio: 1703669 è divisibile per 11, infatti $|(1+0+6+9)-(7+3+6)|=|16-16|=0$, da cui la tesi.

Divisibilità per 12. Un numero è divisibile per 12 se e solo se rispetta contemporaneamente i criteri di divisibilità per 3 e per 4.

Divisibilità per 13. Un numero è divisibile per 13 se e solo se la somma fra il quadruplo dell'ultima cifra e il numero ottenuto dalle cifre rimanenti è 0, 13 o un multiplo di 13. Per verificare se il numero ottenuto è multiplo di 13 si può reiterare il procedimento.

Esempio: 25792 è divisibile per 13, infatti $4\cdot2+2579=2587$. Per mostrare che 2587 è divisibile per 13 reiteriamo il procedimento, $7\cdot4+258=28+258=286$. Reiterando le operazioni si ottiene $6\cdot4+28=24+28=52=13\cdot4$, dunque 286, è divisibile per 13, di conseguenza 2587 è divisibile per 13, così come 25792, che conclude la verifica.

Divisibilità per 14. Un numero è divisibile per 14 se e solo se rispetta contemporaneamente i criteri di divisibilità per 2 e per 7.

Divisibilità per 15. Un numero è divisibile per 15 se e solo se rispetta contemporaneamente i criteri di divisibilità per 3 e per 5.

Divisibilità per 17. Un numero è disivibile per 17 se e solo se la differenza, in valore assoluto, fra il quintuplo della cifra delle unità e il numero ottenuto con le restanti cifre è 0, 17 o un multiplo di 17. Per verificare se il numero ottenuto è multiplo di 17 si può reiterare il procedimento.

Esempio: 3383 è divisibile per 17, infatti $|3\cdot5-338|=|15-338|=323$. Reiterando il procedimento $|3\cdot5-32|=|15-32|=17$.

Divisibilità per 25. Un numero è divisibile per 25 se e solo se le sue due ultime cifre sono 00, 25, 50 o 75.

Divisibilità per 100. Un numero è divisibile per 100 se e solo se le sue due ultime cifre sono 00.

Divisibilità per 10^k ($k\geq1$). Un numero è divisibile per 10^k ($k\geq1$) se e solo se le sue ultime k cifre sono tutte 0.

Divisibilità per $a\cdot b$ (con a e b primi fra di loro)

Un numero è divisibile per $a\cdot b$ (con a e b primi fra di loro) se e solo se rispetta contemporaneamente i criteri di divisibilità per a e per b.

4.4 Numeri primi da 1 a 10000

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97 101 103 107 109 113 127
131 137 139 149 151 157 163 167 173 179 181 191 193 197 199 211 223 227 229 233 239 241 251 257
263 269 271 277 281 283 293 307 311 313 317 331 337 347 349 353 359 367 373 379 383 389 397 401
409 419 421 431 433 439 443 449 457 461 463 467 479 487 491 499 503 509 521 523 541 547 557 563
569 571 577 587 593 599 601 607 613 617 619 631 641 643 647 653 659 661 673 677 683 691 701 709
719 727 733 739 743 751 757 761 769 773 787 797 809 811 821 823 827 829 839 853 857 859 863 877
881 883 887 907 911 919 929 937 941 947 953 967 971 977 983 991 997 1009 1013 1019 1021 1031 1033
1039 1049 1051 1061 1063 1069 1087 1091 1093 1097 1103 1109 1117 1123 1129 1151 1153 1163 1171
1181 1187 1193 1201 1213 1217 1223 1229 1231 1237 1249 1259 1277 1279 1283 1289 1291 1297 1301
1303 1307 1319 1321 1327 1361 1367 1373 1381 1399 1409 1423 1427 1429 1433 1439 1447 1451 1453
1459 1471 1481 1483 1487 1489 1493 1499 1511 1523 1531 1543 1549 1553 1559 1567 1571 1579 1583
1597 1601 1607 1609 1613 1619 1621 1627 1637 1657 1663 1667 1669 1693 1697 1699 1709 1721 1723
1733 1741 1747 1753 1759 1777 1783 1787 1789 1801 1811 1823 1831 1847 1861 1867 1871 1873 1877
1879 1889 1901 1907 1913 1931 1933 1949 1951 1973 1979 1987 1993 1997 1999 2003 2011 2017 2027
2029 2039 2053 2063 2069 2081 2083 2087 2089 2099 2111 2113 2129 2131 2137 2141 2143 2153 2161
2179 2203 2207 2213 2221 2237 2239 2243 2251 2267 2269 2273 2281 2287 2293 2297 2309 2311 2333
2339 2341 2347 2351 2357 2371 2377 2381 2383 2389 2393 2399 2411 2417 2423 2437 2441 2447 2459
2467 2473 2477 2503 2521 2531 2539 2543 2549 2551 2557 2579 2591 2593 2609 2617 2621 2633 2647
2657 2659 2663 2671 2677 2683 2687 2689 2693 2699 2707 2711 2713 2719 2729 2731 2741 2749 2753
2767 2777 2789 2791 2797 2801 2803 2819 2833 2837 2843 2851 2857 2861 2879 2887 2897 2903 2909
2917 2927 2939 2953 2957 2963 2969 2971 2999 3001 3011 3019 3023 3037 3041 3049 3061 3067 3079
3083 3089 3109 3119 3121 3137 3163 3167 3169 3181 3187 3191 3203 3209 3217 3221 3229 3251 3253
3257 3259 3271 3299 3301 3307 3313 3319 3323 3329 3331 3343 3347 3359 3361 3371 3373 3389 3391
3407 3413 3433 3449 3457 3461 3463 3467 3469 3491 3499 3511 3517 3527 3529 3533 3539 3541 3547
3557 3559 3571 3581 3583 3593 3607 3613 3617 3623 3631 3637 3643 3659 3671 3673 3677 3691 3697
3701 3709 3719 3727 3733 3739 3761 3767 3769 3779 3793 3797 3803 3821 3823 3833 3847 3851 3853
3863 3877 3881 3889 3907 3911 3917 3919 3923 3929 3931 3943 3947 3967 3989 4001 4003 4007 4013
4019 4021 4027 4049 4051 4057 4073 4079 4091 4093 4099 4111 4127 4129 4133 4139 4153 4157 4159
4177 4201 4211 4217 4219 4229 4231 4241 4243 4253 4259 4261 4271 4273 4283 4289 4297 4327 4337
4339 4349 4357 4363 4373 4391 4397 4409 4421 4423 4441 4447 4451 4457 4463 4481 4483 4493 4507
4513 4517 4519 4523 4547 4549 4561 4567 4583 4591 4597 4603 4621 4637 4639 4643 4649 4651 4657
4663 4673 4679 4691 4703 4721 4723 4729 4733 4751 4759 4783 4787 4789 4793 4799 4801 4813 4817
4831 4861 4871 4877 4889 4903 4909 4919 4931 4933 4937 4943 4951 4957 4967 4969 4973 4987 4993
4999 5003 5009 5011 5021 5023 5039 5051 5059 5077 5081 5087 5099 5101 5107 5113 5119 5147 5153
5167 5171 5179 5189 5197 5209 5227 5231 5233 5237 5261 5273 5279 5281 5297 5303 5309 5323 5333
5347 5351 5381 5387 5393 5399 5407 5413 5417 5419 5431 5437 5441 5443 5449 5471 5477 5479 5483
5501 5503 5507 5519 5521 5527 5531 5557 5563 5569 5573 5581 5591 5623 5639 5641 5647 5651 5653
5657 5659 5669 5683 5689 5693 5701 5711 5717 5737 5741 5743 5749 5779 5783 5791 5801 5807 5813
5821 5827 5839 5843 5849 5851 5857 5861 5867 5869 5879 5881 5897 5903 5923 5927 5939 5953 5981
5987 6007 6011 6029 6037 6043 6047 6053 6067 6073 6079 6089 6091 6101 6113 6121 6131 6133 6143
6151 6163 6173 6197 6199 6203 6211 6217 6221 6229 6247 6257 6263 6269 6271 6277 6287 6299 6301
6311 6317 6323 6329 6337 6343 6353 6359 6361 6367 6373 6379 6389 6397 6421 6427 6449 6451 6469
6473 6481 6491 6521 6529 6547 6551 6553 6563 6569 6571 6577 6581 6599 6607 6619 6637 6653 6659
6661 6673 6679 6689 6691 6701 6703 6709 6719 6733 6737 6761 6763 6779 6781 6791 6793 6803 6823
6827 6829 6833 6841 6857 6863 6869 6871 6883 6899 6907 6911 6917 6947 6949 6959 6961 6967 6971
6977 6983 6991 6997 7001 7013 7019 7027 7039 7043 7057 7069 7079 7103 7109 7121 7127 7129 7151
7159 7177 7187 7193 7207 7211 7213 7219 7229 7237 7243 7247 7253 7283 7297 7307 7309 7321 7331
7333 7349 7351 7369 7393 7411 7417 7433 7451 7457 7459 7477 7481 7487 7489 7499 7507 7517 7523
7529 7537 7541 7547 7549 7559 7561 7573 7577 7583 7589 7591 7603 7607 7621 7639 7643 7649 7669
7673 7681 7687 7691 7699 7703 7717 7723 7727 7741 7753 7757 7759 7789 7793 7817 7823 7829 7841
7853 7867 7873 7877 7879 7883 7901 7907 7919 7927 7933 7937 7949 7951 7963 7993 8009 8011 8017
8039 8053 8059 8069 8081 8087 8089 8093 8101 8111 8117 8123 8147 8161 8167 8171 8179 8191 8209
8219 8221 8231 8233 8263 8243 8263 8269 8273 8287 8291 8293 8297 8311 8317 8329 8353 8363 8369
8377 8387 8389 8419 8423 8429 8431 8443 8447 8461 8467 8501 8513 8521 8527 8537 8539 8543 8563
8573 8581 8597 8599 8609 8623 8627 8629 8641 8647 8663 8669 8677 8681 8689 8693 8699 8707 8713
8719 8731 8737 8741 8747 8753 8761 8779 8783 8803 8807 8819 8821 8831 8837 8839 8849 8861 8863
8867 8887 8893 8923 8929 8933 8941 8951 8963 8969 8971 8999 9001 9007 9011 9013 9029 9041 9043
9049 9059 9067 9091 9103 9109 9127 9133 9137 9151 9157 9161 9173 9181 9187 9199 9203 9209 9221
9227 9239 9241 9257 9277 9281 9283 9293 9311 9319 9323 9337 9341 9343 9349 9371 9377 9391 9397
9403 9413 9419 9421 9431 9433 9437 9439 9461 9463 9467 9473 9479 9491 9497 9511 9521 9533 9539
9547 9551 9587 9601 9613 9619 9623 9629 9631 9643 9649 9661 9677 9679 9689 9697 9719 9721 9733
9739 9743 9749 9767 9769 9781 9787 9791 9803 9811 9817 9829 9833 9839 9851 9857 9859 9871 9883
9887 9901 9907 9923 9929 9931 9941 9949 9967 9973 10007 10009 10007 10009 10037 10039 10061 10067
10069 10079 10091 10093 10099 10103 10111 10133 10139 10141 10151 10159 10163 10169 10177 10181
10193 10211 10223 10243 10247 10253 10259 10267

4.5 Massimo comune divisore e minimo comune multiplo

Massimo comune divisore. Il massimo comune divisore (M.C.D.) di due o più numeri interi è il più grande numero naturale tra i divisori comuni a tutti i numeri dati.
Esempi: MCD(12,16)=4. Infatti i divisori di 12 sono 1, 2, 3, 4, 6, 12. I divisori di 16 sono 1, 2, 4, 8, 16. I divisori in comune sono 1, 2, 4. Il più grande dei divisori comuni è 4.
MCD(3,4)=1. MCD(7,0)=7.
Algoritmo per il calcolo del MCD. Per calcolare il massimo comune divisore tra due o più numeri, non eccessivamente grandi, si scompongono in fattori primi i numeri e si moltiplicano i fattori comuni, una sola volta, con il minimo esponente.
Esempio: MCD(150,120)=30. Infatti, $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$; $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. I fattori comuni con il minimo esponente sono 2, 3, 5.
Algoritmo di Euclide per il calcolo del MCD. Per il calcolare il massimo comune divisore tra due numeri naturali a e b, si controlla se b è zero. Se lo è, il MCD è a. Se non lo è, si divide a : b. Indicato con r il resto della divisione si ha: se r = 0, il MCD è b, altrimenti si ripete il procedimento con i numeri b ed r.
Esempio: Per calcolare MCD(150,120) si divide 150:120, si ha quoziente 1, resto 30. Si divide 120:30 si ha quoziente 4 resto 0. Il MCD è 30.
Minimo comune multiplo. Il minimo comune multiplo (mcm) tra due o più numeri interi è il più piccolo tra i multipli comuni a tutti i numeri dati.
Esempio: mcm(12,15)=60. Infatti, i multipli di 12 sono 12, 24, 36, 48, 60, … i multipli di 15 sono 15, 30, 45, 60, … Il più piccolo dei multipli in comune è 60.
Algoritmo per il calcolo del mcm. Per calcolare il minimo comune multiplo tra due o più numeri non eccessivamente grandi, si scompongono in fattori primi i numeri e si moltiplicano i fattori comuni e non comuni, presi una sola volta e con il massimo esponente.
Esempio: mcm(18,20)=180 Infatti, $18 = 2 \cdot 3^2$ e $20 = 2^2 \cdot 5$. Il mcm è dato da $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 180$

Proprietà di mcm e MCD. $mcm(a,b) = \dfrac{a \cdot b}{MCD(a,b)}$

Numeri coprimi. Due numeri si dicono primi tra di loro o coprimi se non hanno nessun divisore comune eccetto 1 o equivalentemente se il loro MCD=1.
Congruenza modulo n. Due numeri $a, b \in \mathbb{Z}$ sono congrui modulo n, si scrive $a \equiv b \bmod n$ se e solo se $a - b = kn, k \in \mathbb{Z}$, cioè se la loro differenza è un multiplo di n, o equivalentemente se a e b hanno lo stesso resto nella divisione per n.
Esempio: $28 \equiv 7 \bmod 3$, infatti 28-7=21 che è multiplo di 3. Inoltre 28:3=9 resto 1, 7:3=2 resto 1, quindi i due numeri hanno lo stesso resto nella divisione per 3.

4.6 Frazioni e numeri razionali

Una **frazione** è il quoziente tra due numeri interi $\dfrac{a}{b}$, con $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Il **numeratore** è a, il **denominatore** è b.

Una frazione $\dfrac{a}{b}$ è detta **frazione propria** se $a < b$, **frazione impropria** se $a \geq b$, **frazione apparente** se a è un multiplo di b.
Proprietà invariantiva delle frazioni. Moltiplicando, o dividendo, numeratore e denominatore di una frazione per uno stesso numero diverso da 0 si ha una frazione equivalente:

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot x}{b\cdot x} \text{ e } \frac{a}{b}=\frac{a:x}{b:x}\text{, con } x\neq 0.$$

Semplificazione e riduzione ai minimi termini. Per semplificare una frazione si divide numeratore e denominatore per uno stesso numero, fino a ottenere una frazione con numeratore e denominatore primi fra loro. Una frazione in cui numeratore e denominatore sono primi tra loro si dice **ridotta ai minimi termini**.

Confronto di frazioni. Tra due frazioni che hanno lo stesso denominatore è maggiore quella che ha il numeratore maggiore. Tra due frazioni che hanno lo stesso numeratore è magiore quella che ha il denominatore minore. Tra due frazioni con denominatori diversi si trasformano le frazioni in frazioni equivalenti che abbiamo lo stesso denominatore, quindi si confrontano i numeratori.

Esempi: $\frac{2}{3}<\frac{5}{3}$; $\frac{2}{3}>\frac{2}{5}$; per confrontare $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{7}$ si trasformano le frazioni in $\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 7}{4\cdot 7}=\frac{21}{28}$ e $\frac{2}{7}=\frac{2\cdot 4}{7\cdot 4}=\frac{8}{28}$, si ha $\frac{21}{28}>\frac{8}{28}$, quindi $\frac{3}{4}>\frac{2}{7}$.

Operazioni con le frazioni

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c} \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \qquad \frac{a}{b}:c=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{c}=\frac{a}{b\cdot c} \qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

$$\frac{a}{b}+c=\frac{a+c\cdot b}{b} \qquad \frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b} \qquad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}$$

Per ottenere una frazione semplificata si può addizionare in questo modo:

posto $m=mcm(b,d)$ si ha $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{(m:b)\cdot a+(m:d)\cdot c}{m}$, *esempio* $\frac{3}{10}+\frac{4}{15}=\frac{3\cdot 3+2\cdot 4}{30}=\frac{17}{30}$

Trasformazione in numero decimale. Ogni frazione può essere trasformata in un numero decimale limita o illimitato periodico, dividendo il numeratore per il denominatore della frazione:

Esempi: $\frac{7}{4}=7:4=1{,}75$. $\frac{3}{7}=3:7=0{,}\overline{428571}$.

Un numero decimale limitato si trasforma in frazione riportando al numeratore il numero senza la virgola e al denominatore un 1 seguito da tanti zeri quante sono le cifre decimali.

Esempio: $3{,}75=\frac{375}{100}$

Un numero decimale periodico si trasforma in una frazione che ha al numeratore la differenza tra il numero stesso senza la virgola e il numero cosituito dalle cifre prima del periodo, al denominatore tanti 9 quante sono le cifre del periodo e tanti zeri quante sono le cifre dell'antiperiodo.

Esempio: $12{,}34\overline{976}=\frac{1234976-1234}{99900}$

4.7 Assiomatizzazione degli insiemi numerici

Assiomi di Peano. Una definizione assiomatica dei numeri naturali è data dai seguenti 5 assiomi di Peano:

1. Esiste un numero naturale, 0.
2. Ogni numero naturale ha un successore .
3. Numeri diversi hanno successori diversi.
4. 0 non è il successore di nessun numero naturale.
5. Ogni insieme di numeri naturali che soddisfa gli assiomi 1 e 2 coincide con l'intero insieme dei numeri naturali.

Principio di induzione. Se una proprietà $P(n)$ sui numeri naturali verifica le condizioni

1. $P(0)$ è vera
2. $P(n) \Rightarrow P(n+1), \forall n \geq 1$

Allora $P(n)$ è vera per ogni n.

Sezioni di Dedekind. La costruzione dei numeri reali si può effettuare a partire dai numeri razionali tramite le sezioni di Dedekind. Due sottoinsiemi A e B di numeri razionali costituiscono una sezione di Dedekind se:

1. $A \cap B = \varnothing$;
2. $A \cup B = \mathbb{Q}$:
3. $\forall a \in A, \forall b \in B : a < b$

L'insieme dei numeri reali è definito come l'insieme delle sezioni di Dedekind.

Esempio. Il numero irrazione $\sqrt{2}$ è definito da $A = \{a \in Q / a < 0 \vee a^2 < 2\}$, $B = \{b \in \mathbb{Q} / a^2 > 2\}$.

Sistema assiomatico dei numeri reali.

1. $\mathbb{R}(+,\cdot)$ è un campo: le due operazioni godono delle proprietà commutativa, associativa, distributiva, hanno l'elemento neutro, ciascun elementi ha l'inverso rispetto a ciascuna operazione, tranno 0 che non ha l'inverso rispetto alla moltiplicazione.
2. $\mathbb{R}(\leq)$ è totalmente ordinato: $\forall x : x \leq x$ (riflessiva); $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisimmetrica); $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (transitiva); $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \vee y \leq x$ (totalità).

4.8 Valore assoluto

Definizione. Il valore assoluto è una funzione reale di variabile reale, $|\cdot|: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, che associa al numero x il numero stesso se x è non negativa, il suo opposto, $-x$, se invece x è negativo.
Il valore assoluto di x si indica con $|x|$, e risulta

$$|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x \leq 0 \end{cases}$$

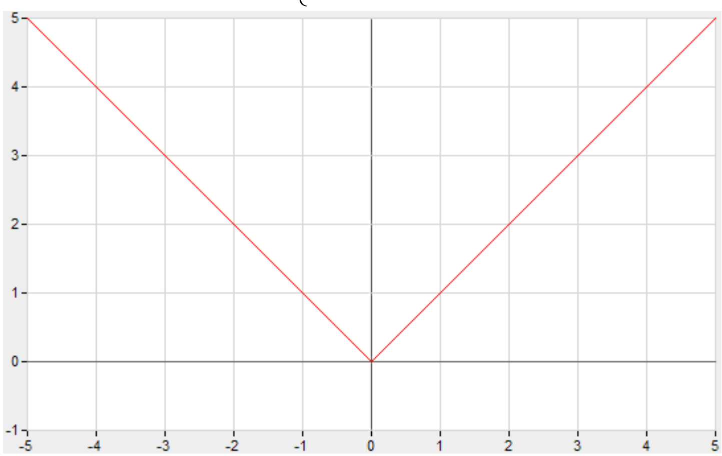

Figura 1. Grafico della funzione valore assoluto

Esempi: $|+3| = +3$; $|-3| = +3$.

Proprietà del valore assoluto. Il valore assoluto è una funzione positiva, in quanto gode delle due seguenti proprietà

$$|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad\qquad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Il valore assoluto è anche una funzione positivamente omogenea, infatti

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad\qquad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Vale anche la disuguaglianza triangolare, ovvero: $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
Grazie a queste tre condizioni il valore assoluto è una **norma**.
Come conseguenza diretta della disuguaglianza triangolare $||x| - |y|| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Inoltre, $\forall n \in \mathbb{N}$ pari, risulta $\sqrt[n]{x^n} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Le seguenti proprietà del valore assoluto sono utili per la risoluzione di equazioni e disequazioni:

1. $|x| = |c| \rightarrow x = \pm c$

2. $|x| = c \rightarrow x = \pm c$, con $c \geq 0$

3. $|x| \leq c \begin{cases} \nexists x \in \mathbb{R} & se \quad c < 0 \\ x = 0 & se \quad c = 0 \\ -c \leq x \leq c & se \quad c > 0 \end{cases}$

4. $|x| < c \begin{cases} \nexists x \in \mathbb{R} & se \quad c \leq 0 \\ -c < x < c & se \quad c > 0 \end{cases}$

5. $|x| \geq c \begin{cases} x \in \mathbb{R} & se \quad c \leq 0 \\ x \leq -c \vee x \geq c & se \quad c > 0 \end{cases}$

6. $|x| > c \begin{cases} x \in \mathbb{R} & se \quad c < 0 \\ x \neq 0 & se \quad c = 0 \\ x < -c \vee x > c & se \quad c > 0 \end{cases}$

Infine, il valore assoluto di un numero può anche essere espresso per mezzo del massimo fra x e $-x$

$$|x| = \max\{x, -x\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

4.9 Funzione segno

Definizione

La funzione segno è una funzione reale di variabile reale, $sgn : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, che vale 1 quando il suo argomento è positivo, -1 quando il suo argomento è negativo, 0 quando $x = 0$. In formula

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x > 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \\ 1 \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

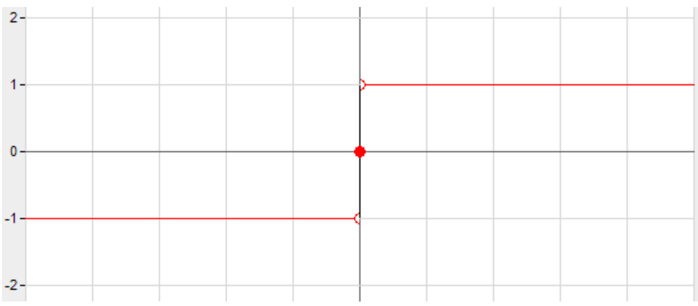

Figura 2. Grafico della funzione segno

Legame tra la funzione segno e il valore assoluto

$$sgn(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad\qquad |x| = x \cdot sgn(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

4.10 Parte intera

Definizione. Dato un numero reale x, si definisce **parte intera superiore** di x, e si indica con $\lceil x \rceil$, il più piccolo intero non minore di x. La **parte intera inferiore** di x è il più grande intero minore o uguale di x, e si indica con $\lfloor x \rfloor$. Spesso si usa il simbolo $[x]$ per indicare la parte intera inferiore.

Esempi: $\lceil 5{,}1 \rceil = 6$; $\lfloor 5{,}9 \rfloor = 5$; $[3{,}8] = 3$

Proprietà della parte intera

1. $\lfloor x \rfloor = x = \lceil x \rceil \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$
2. $\lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor \quad \forall x \in \mathbb{R}$
3. $\lceil \lceil x \rceil \rceil = \lceil x \rceil \quad \forall x \in \mathbb{R}$
4. $\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
5. $x \le \lceil x \rceil < x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
6. $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor \quad \forall x \in \mathbb{R}$
7. $x = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil \quad \forall x \in \mathbb{Z}$

4.11 Approssimazione

Per approssimare un numero x alla cifra di posto n si procede in più modi.
Approssimazione per troncamento. Si tronca il numero alla cifra significativa stabilità. In altre parole si sostituiscono con 0 tutte le cifre che seguono quella significativa.
Esempio: π troncato alla terza cifra significativa è 3,14.
Approssimazione per arrotondamento quando si sostituisce un numero x con quello troncato che è più vicino a x.
Arrotondamento per difetto se si taglia il numero alla cifra significata stabilita lasciando invariata l'ultima cifra se dopo di essa c'è una cifra da 0 a 4.
Esempio: 3,14 si approssima a 3,1
Arrotondamento per eccesso se si taglia il numero alla cifra significata stabilita aumentando di uno l'ultima cifra se dopo di essa c'è una cifra da 5 a 9.
Esempio: 3,14159 si approssima a 3,1416.
Se la cifra 5 è sta arrotondata per eccesso, nell'arrotondamento successivo si arrotonda per difetto.
Esempio: 3,245 si approssima a 3,25; al passo successivo si approssima a 3,2.

4.12 Fattoriale

Definizione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si definisce il fattoriale come il prodotto dei numeri naturali da 1 a n

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{k=1}^{n} k$$

Oppure ricorsivamente:

$$n! = \begin{cases} 1 \text{ se } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! \text{ se } n > 0 \end{cases}$$

Esempio: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
Proprietà del fattoriale. Direttamente dalla definizione discendono le seguenti proprietà

$$\frac{n!}{(n-1)!} = n \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \qquad \frac{n!}{n} = (n-1)! \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$\frac{n!}{m!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+2) \cdot (n-m+1) \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad n > m$$

Per numeri elevati si può utilizzare l'**approssimazione di Stirling** $n! \approx n^n \cdot e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.