7. Potenze e radicali

7.1 Definizione di potenza

Definizione. Dato un naturale $n \in \mathbb{N}$, per ogni $a \in \mathbb{R}$ si definisce l'elevamento a potenza a^n come il prodotto di n fattori uguali ad a.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{\text{n volte}}$$

La definizione si estende ai seguenti casi casi particolari $a^1 = a$, $a^0 = 1$. Non si assegna alcun valore al simbolo 0^0.
Si può definire ricorsivamente come segue:

$$a^n = \begin{cases} 1 \text{ se n=0} \\ a \cdot a^{n-1} \text{ se n>0} \end{cases}$$

Il numero a si chiama **base**, il numero n si chiama **esponente**.

Potenza con esponente negativo. La definizione si estende anche agli esponenti negativi. Se h è un intero negativo, allora la potenza a^h è definita per ogni $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e risulta

$$a^h = \frac{1}{a^{-h}}$$

Esempi. $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$.

Potenza con esponente frazionario. Si estende la definizione anche al caso di esponente razionale, purché la base sia non negativa. Nel caso in cui l'esponente h sia un razionale, $h = \frac{n}{m}$, risulta

$$a^h = a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

Esempi. $3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2}$; $3^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}}$; $\left(\frac{4}{5}\right)^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^3} = \sqrt{\frac{125}{64}}$.

Potenza con esponente reale

Consideriamo la potenza a^b con $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$.
Essendo b un numero irrazionale, per definizione di numeri irrazionali, è l'elemento separatore di due classi contigue di numeri razionali. A partire da esse si costruiscono due altri classi contigue di potenze con esponente razionale, l'elemento di separazione è proprio la potenza cercata.
Esempio. $3^{\sqrt{2}}$

$\sqrt{2}$ è l'elemento separatore di $\begin{cases} 1 \quad 1,4 \quad 1,41 \quad 1,414 \quad 1,4142 \quad ... \\ 2 \quad 1,5 \quad 1,42 \quad 1,415 \quad 1,4143 \quad ... \end{cases}$

$3^{\sqrt{2}}$ è l'elemento separatore di $\begin{cases} 3^1 \quad 3^{1,4} \quad 3^{1,41} \quad 3^{1,414} \quad 3^{1,4142} \quad ... \\ 3^2 \quad 3^{1,5} \quad 3^{1,42} \quad 3^{1,415} \quad 3^{1,4143} \quad ... \end{cases}$

Sia $b = b_0, b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots$ la rappresentazione decimale della potenza.
Si costruisce la successione $\beta_0 = b_0$; $\beta_1 = b_0, b_1$; $\beta_2 = b_0, b_1 b_2$; $\beta_3 = b_0, b_1 b_2 b_3$; …
questa successione tende a b.
Si costruisce la succesione delle potenze $a_0 = a^{\beta_0}$; $a_1 = a^{\beta_1}$; $a_2 = a^{\beta_2}$; …
si tratta di potenze con esponenti razionali, poiché β_0, β_1, … sono numeri razionali. Questa successione è crescente. Si definisce

$$a^b = \sup_n \left\{ a^{\beta_n} \right\}$$

7.2 Proprietà delle potenze

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$
$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad a \neq 0$	$\dfrac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$\left(3^2\right)^5 = 3^{2 \cdot 5} = 3^{10}$
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$3^4 \cdot 2^4 = 6^4$
$\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n, \quad b \neq 0$	$\dfrac{3^7}{2^7} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^7$
$p \cdot a^n + q \cdot a^n = (p+q) \cdot a^n$	$2 \cdot 3^5 + 4 \cdot 3^5 = 6 \cdot 3^5$

7.3 Radici

Definizione. La radice n-esima o radicale di un numero reale a, indicata con il simbolo $\sqrt[n]{a}$ è un numero b tale che $b^n = a$. Il numero b si dice **radice**, il numero n si dice **indice**, il numero a si dice **radicando**.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

La radice di indice 2 si dice anche radice quadrata e si indica $\sqrt{a}$ senza esplicitare l'indice.
Esempi. $\sqrt{4} = 2$ infatti $2^2 = 4$; $\sqrt[3]{8} = 2$ infatti $2^3 = 8$; $\sqrt[4]{81} = 3$ infatti $3^4 = 81$.

Se la radice ha indice pari il radicando deve essere maggiore o uguale a zero.
Se la radice ha indice dispari il radicando può essere anche negativo.
Esempi. $\sqrt{-1}$ non esiste; $\sqrt[3]{-27} = -3$; $\sqrt[4]{-2}$ non esiste; $\sqrt[5]{-32} = -2$.

7.4 Proprietà delle radici

Dati $a, b > 0$, $m, n \in \mathbb{R}$ risulta

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{10}$
$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	$\dfrac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{5}$
$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[3]{5^4} = \left(\sqrt[3]{5}\right)^4 = 5^{\frac{4}{3}}$

$(\sqrt[m]{a^n})^h = \sqrt[m]{a^{n\cdot h}}$	$\left(\sqrt[3]{5^2}\right)^4 = \sqrt[3]{5^{2\cdot 4}}$
$\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$	$\sqrt[3]{5^3} = 5$
$\sqrt[k\cdot n]{a^{k\cdot m}} = \sqrt[n]{a^m}$	$\sqrt[6]{3^8} = \sqrt[3]{3^4}$
$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a\cdot\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3\cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$; $2\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^3\cdot 4} = \sqrt[3]{32}$
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}$
$\sqrt[m_1]{a^{n_1}}\cdot\sqrt[m_2]{a^{n_2}} = a^{\frac{n_1}{m_1}+\frac{n_2}{m_2}} = \sqrt[m_1\cdot m_2]{a^{n_1\cdot m_2+m_1\cdot n_2}}$	$\sqrt[3]{5^2}\cdot\sqrt[4]{5^7} = \sqrt[12]{5^{2\cdot 4+7\cdot 3}} = \sqrt[12]{5^{29}}$
$\dfrac{\sqrt[m_1]{a^{n_1}}}{\sqrt[m_2]{a^{n_2}}} = a^{\frac{n_1}{m_1}-\frac{n_2}{m_2}} = \sqrt[m_1\cdot m_2]{a^{n_1\cdot m_2-m_1\cdot n_2}}$	$\dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[4]{5^7}} = \sqrt[12]{5^{2\cdot 4-7\cdot 3}} = \sqrt[12]{5^{-13}} = \dfrac{1}{\sqrt[12]{5^{13}}}$

7.5 Razionalizzazione del denominatore

$\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}\cdot\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\dfrac{1}{2\sqrt{5}} = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{10}$
$\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\cdot\dfrac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \dfrac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$	$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$; $\dfrac{1}{\sqrt[7]{2^3}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{2^3}}\cdot\dfrac{\sqrt[7]{2^4}}{\sqrt[7]{2^4}} = \dfrac{\sqrt[7]{2^4}}{2}$
$\dfrac{1}{\sqrt{a}\pm b} = \dfrac{1}{\sqrt{a}\pm b}\cdot\dfrac{\sqrt{a}\mp b}{\sqrt{a}\mp b} = \dfrac{\sqrt{a}\mp b}{a-b^2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}-3} = \dfrac{1}{\sqrt{2}-3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}+3} = \dfrac{\sqrt{2}+3}{2-9} = \dfrac{\sqrt{2}+3}{7}$
$\dfrac{1}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}\cdot\dfrac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{a-b}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} = -\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$

$$\frac{c}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}} = \frac{c\left(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)} = \frac{c\left(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a\pm b}$$

7.6 Radicali doppi

Un radicale doppio è un'espressione del tipo

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$$

A volte è possibile trasformare un radicale doppio in una somma di radicali, per mezzo della seguente identità

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Esempi

$$\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{9-5}}{2}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{9-5}}{2}} = \sqrt{\frac{3+2}{2}} - \sqrt{\frac{3-2}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$$

$\sqrt{3+\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{9-2}}{2}} - \sqrt{\dfrac{3-\sqrt{9-2}}{2}} = \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}} - \sqrt{\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}}$ questo radicale doppio non si può ridurre.