8. Logaritmi: definizioni e proprietà

8.1 Definizioni

Definizione. Dati $a,b \in \mathbb{R}^+$, con $a \neq 1$, si definisce **logaritmo in base a di b** l'esponente che deve essere applicato ad a per ottenere come risultato b. Formalmente

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b, \text{con } a,b \in \mathbb{R}^+, a \neq 1, \forall c \in \mathbb{R}$$

Il numero a si dice **base** del logaritmo, il numero b si dice **argomento** del logaritmo.

La scrittura $c = \log_a b$ si legge "*c* è il logaritmo in base *a* di *b*".

Il logaritmo in base dieci $\log_{10}$ si dice anche **logaritmo decimale** e si indica solitamente con Log. Nell'utilizzo dei logaritmi si usa spesso come base il numero *e*, detto **numero di Nepero**, che è un numero trascendente [cioè un numero che non può essere ottenuto risolvendo un'equazione algebrica, è un numero irrazionale] il cui valore è 2,7182818284…; il **logaritmo naturale** o neperiano $\log_e$ si indica più brevemente con il simbolo $\ln$.

Esempi. $\log_2 8 = 3$, infatti $2^3 = 8$; $\log_9 3 = \frac{1}{2}$, infatti $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$; $\log_x 1 = 0$ infatti $x^0 = 1$.

Rappresentazione semilogaritmica di un numero. Dato un numero in notazione esponenziale $x = m \cdot 10^k$, con $m \in [1,10)$ si ha:

$$Log(x) = Log\left(m \cdot 10^k\right) = Log(m) + k \quad \text{con } 0 \leq Log(m) < 1$$

Il numero m è detto **mantissa** di x, il numero k è detto **caratteristica** di *x*.

Esempi

$35.400 = 3,54 \cdot 10^4$ da cui $Log35400 = Log\left(3,5 \cdot 10^4\right) = Log10^4 + Log3,5 = 4 + Log3,54$

$Log0,000035 = Log\left(3,5 \cdot 10^{-5}\right) = -5 + Log3,5$

8. 2 Proprietà dei logaritmi

$\log_a 1 = 0$ $\log_a a = 1$ $a^{\log_a(b)} = b$

Segno del logaritmo:

$\log_a x > 0$ per $x > 1$ $\log_a x < 0$ per $0 < x < 1$

Il logaritmo trasforma prodotti in addizioni, quozienti in sottrazioni, potenze in prodotti:

$\log_a(b_1 \cdot b_2) = \log_a(|b_1|) + \log_a(|b_2|)$ $\log_a\left(\frac{b_1}{b_2}\right) = \log_a(|b_1|) - \log_a(|b_2|)$

$\log_a(b^n) = n \cdot \log_a(|b|)$ $\log_a(\sqrt[n]{b}) = \frac{1}{n} \cdot \log_a(|b|)$

$\log_a \frac{b_1}{b_2} = -\log_a \frac{b_2}{b_1}$ $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$

Cambiamento di base:

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ $\log_a b = \log_a c \cdot \log_c b$