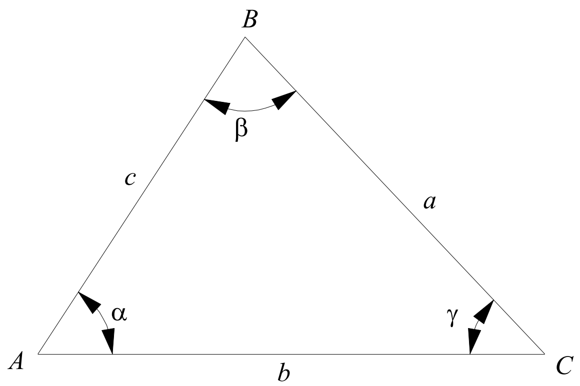
SOLUZIONE AL PROBLEMA "UNA MOLECOLA PARTICOLARE"
Jeckyll

Il Centro di Ricerche di Matematicamente sta studiando le proprietà fisiche di una nuova molecola di recente scoperta. Tale molecola è composta da 3 atomi di uno stesso elemento che si possono considerare *puntiformi*, non allineati e aventi distanza fissa fra loro; la molecola assume particolarità notevoli se viene *drogata* immettendo due elettroni che possiamo supporre ruotanti su un'orbita circolare, la prima inscritta nella molecola la seconda circoscritta ad essa. Il *drogaggio* viene effettuato tramite due laser conoscendo la distanza fra i centri delle due orbite. Qual è tale distanza?
(Dalle tabelle della fisica atomica e con un po' di calcoli sono note le misure delle altezze relative ai tre lati formati dalla molecola: 49,2 *nm*, 65,6 *nm*, 57 *nm*.)

Soluzione: la distanza tra il centro delle due orbite è pari a 10.2654 nm

Procedimento:

Di seguito schematizzeremo la molecola con il triangolo *ABC* di figura:



Indicando con h_a, h_b e h_c le altezze del triangolo rispetto ai tre lati *a*, *b* e *c*, dal testo del problema risultano:

$$\begin{cases} h_a = 49.2\ nm \\ h_b = 65.6\ nm \\ h_c = 57\ nm \end{cases} \tag{1}$$

(le unità di misura verranno in seguito sottintese).

Tenendo presente la formula dell'area di un triangolo si ottengono le seguenti relazioni tra le altezze e i lati del triangolo:

$$a\,h_a = b\,h_b = c\,h_c \tag{2}$$

dalle quali seguono le relazioni:

$$a = \frac{h_c}{h_a}c \qquad b = \frac{h_c}{h_b}c \tag{3}$$

Per una nota relazione trigonometrica sugli angoli di un triangolo si ha che:

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

dalla quale, tenendo in conto le (3), dopo qualche passaggio segue la relazione:

$$\cos\gamma = \frac{h_c^2\left(h_a^2 + h_b^2\right) - h_a^2 h_b^2}{2h_a h_b h_c^2} \tag{4}$$

Sostituendo nella (4) i valori (1) delle altezze e determinando l'angolo γ per mezzo della funzione inversa del coseno, si ottiene il valore:

$$\gamma = 56°,97722932 \text{ (notazione sessadecimale)} \tag{5}$$

Poiché tra l'altezza del triangolo rispetto al lato b h_b e il lato a si ha la relazione:

$$h_b = a\sin\gamma$$

tenendo conto della (5) segue immediatamente che:

$$a = \frac{h_b}{\sin\gamma} = 78.23923093$$

Noto il valore del lato a dalle (2) seguono anche:

$$\begin{cases} a = 78.23923093 \\ b = a\dfrac{h_a}{h_b} = 58.6794232 \\ c = a\dfrac{h_a}{h_c} = 67.53280986 \end{cases} \tag{6}$$

Un altro angolo che ci servirà in seguito è α che si ottiene dalla relazione:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Sostituendo in quest'ultima i valori di a, b e c riportati nelle (6) e calcolando la funzione inversa del coseno, si ottiene per α il valore:

$$\alpha = 76°,2590719$$

Adesso abbiamo tutti i dati necessari per determinare il centro della circonferenza inscritta al triangolo (incentro) ed il centro della circonferenza circoscritta al triangolo (circocentro). A tal proposito è utile ricordare che l'incentro è il punto di incontro delle bisettrici degli angoli di un triangolo, mentre il circocentro è il punto di incontro degli assi dei lati di un triangolo.

Assumendo un sistema di due assi cartesiani *xy* aventi l'origine in corrispondenza del vertice *A* del triangolo e l'asse *x* contenente il lato *b* del triangolo, le bisettrici r_A e r_C degli angoli α e γ avranno equazioni:

$$\begin{cases} r_A: \quad y = \tan\frac{1}{2}\alpha\ x \\ r_C: \quad y = -\tan\frac{1}{2}\gamma\ (x-b) \end{cases} \tag{7}$$

Risolvendo il sistema lineare definito dalle (7) si trovano le coordinate del centro della circonferenza inscritta al triangolo (incentro). Queste sono pari a:

$$\begin{cases} x = \dfrac{b\tan\frac{1}{2}\gamma}{\tan\frac{1}{2}\alpha + \tan\frac{1}{2}\gamma} = 23.98650106 \\ y = \dfrac{b\tan\frac{1}{2}\alpha\tan\frac{1}{2}\gamma}{\tan\frac{1}{2}\alpha + \tan\frac{1}{2}\gamma} = 18.82779456 \end{cases} \tag{8}$$

Invece per ottenere le coordinate della circonferenza circoscritta al triangolo si deve risolvere il sistema lineare individuato dalle equazioni degli assi dei lati *b* e *c*:

$$\begin{cases} x = \dfrac{b}{2} \\ y - \dfrac{c}{2}\sin\alpha = -\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\left(x - \dfrac{c}{2}\cos\alpha\right) \end{cases}$$

Risolvendo si ottengono le coordinate:

$$\begin{cases} x = 29.3397116 \\ y = 27.58682529 \end{cases} \tag{9}$$

Tenendo conto dei valori delle coordinate dei centri delle due circonferenze, si ottiene il valore della loro distanza che è pari a:

$$d = \sqrt{\left(x_I - x_C\right)^2 + \left(y_I - y_C\right)^2} = 10.2653535$$