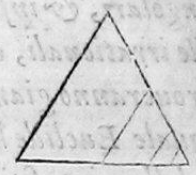
SCHOLIO.

Euclide nel decimo libro ha proposto di trattare delle grandezze commensurabili, & incommensurabili, & delle rationali, & irrationali, perciochè le incommensurabili non sono le medesime che le irrationali, concioſiacoſa che quelle ſiano di ſua natura, ma le irrationali & rationali per poſitione de gli huomini. che ſe la natura fa il diametro del quadrato incommensurabile al ſuo lato, nõ lo fa à caſo, ma per le ragioni che ſono in eſſa. & però lo irrationale non è di quelli che ſono per ſua natura incommensurabili: ma lo incõmensurabile, facẽdo la natura ciò ſecondo qual ſi voglia miſura, che niuna coſa ha commune con altri. primieramente dunque tratta delle commensurabili, & incommensurabili, ricercando qual ſia la lor natura. poi viene alle rationali & irrationali, non gia à tutte (onde alcuni opponendoſi a queſto lo riprendono) ma alle ſpetie piu ſemplici, dalle quali compoſti inſieme ſi generano infinite irrationali, & alcune di quelle etiando Apollonio ha poſte in iſcritto. ma alla ſcienza appartiene conſiderare le cagioni, i principij, & i ſemplici non i ſingolari, & infiniti. iſpone dunque Euclide tredice ſpecie ſemplici delle irrationali, che in tre modi ſi ſono trouate, ne coſi altre ſemplici ſi troueranno giamai. uno di queſti modi è per mezo dell'analogia, per lo quale Euclide ha trouato una ſpetie de irrationali. l'altro è per mezo della compoſitione, per lo quale ne ha trouate ſei ſpetie. il terzo è per mezo della diuiſione; & per quello ha trouate le ſei ſpetie rimanenti. i Pythagorici primi de gli altri ſono uenuti in conſideratione della ſymmetria, cioè della commenſurabilità, per la cognitione de numeri, concioſiacoſa, che l'unità ſia commune miſura di tutti, & nelle grandezze la commune miſura trouar non ſi poſſa. la cagione di ciò è che'l numero diuiſo in qualunque modo laſcia una particella minor di tutte, che non ſi può ſegare. ma la grandezza diuiſa in infinito non laſcia particella alcuna, la quale, perche ſia minore di tutte, non ſi poſſa ſegare; anzi quella ſegata infinitamente fa infinite particelle, ciaſcuna delle quali infinitamẽte ſi ſegherà. et la grandezza in quanto ſi diuide è partecipe del principio infinito, & inquanto appartiene al tutto è partecipe del termine. ma il numero inquanto ſi diuide è partecipe del termine, & inquanto appartiene al tutto è partecipe dell'infinito. perche dunque biſogna che le miſure ſiano minori delle coſe, che ſono miſurate, et ogni numero è miſurato; è neceſſario che la miſura ſia minore di tutti. & nel numero ſi troua la commune miſura per eſſer terminato, come fù detto.

ma nelle grandezze non ſi troua. & però non è di tutte le grandezze vna certa miſura commune. il che intendendo i Pythagorici trouorono nelle grandazze la miſura come meglio ſù poſſibile; concioſiacoſa, che chiamaſſero commenſurabili tutte quelle grandezze, le quali dalla medeſima miſura ſono miſurate; & incommenſurabili quelle che dalla medeſima non ſono miſurate. & di queſte anchora quelle che ſono miſurate da vn'altra miſura commune, chiamorono commenſurabili fra loro; & quelle, che non ſono miſurate, incommenſurabili. & pigliando la miſura in queſto modo tutte poſſono eſſere commenſurabili; & anchor tutte rationali, & tutte irrationali, referendole a qualche coſa, percioche il commenſurabile, & incommenſurabile ſi troua in eſſe per natura, ma il rationale, & irrationale per poſitione. oltre a ciò le commenſurabili, & incommenſabili ſono di tre maniere ſecondo le tre dimenſioni, cioè le linee, le ſuperficie, & i ſolidi, come dimoſtrò Theone, & alcuni altri. Ma che la grandezza ſi poſſa diuidere infinitamente lo dimoſtrorono con queſto theorema.

Pigliando il triangolo equilatero, ſegano la baſe per mezo, & ad vna portione di eſſa tagliando vna linea vguale nell'altro lato del triangolo, dal punto della diuiſione tirano vna parallela ſino alla baſe; & di nuouo ſi ſarà conſticuito il triangolo equilatero, la cui baſe ſegando per mezo fanno ſimilmente, & coſi facendo non peruengono mai alla cima del triangolo, percioche ſeguerebbe che due lati del triangolo foſſero vguali al rimanente, che è impoſſibile.



Ma che la cognitione di queſte coſe ſia vtile, & non vana ſi può cauare da quello, che narrano i Pythagorici, cioè che colui, il quale prima ardì di paleſare la contemplatione delle quantità irrationali, in mare annegò. & queſto eſsere auuenuto, perche ogni irrationale & diforme per tutto vuole eſſere occultato. dicono anchora, che ſe per auuentura alcuno hauendo appreſo qualche coſa delle quantità irrationali, la publicaſſe, ſubitamente è mandato nel luogo del profondo, & quiui perpetuamente è tormentato. in tanta veneratione hebbero queſti huomini la cognitione delle quantità irrationali.

DE GLI ELEMENTI DI EVCLIDE

LIBRO DECIMO

CON LI SCHOLII ANTICHI,
ET COMMENTARII
Di Federico Commandino da Vrbino.

DIFFINITIONI.

I.



COMMENSVRABILI si chiamano le grandezze, le quali da vna medesima misura sono misurate.

II.

Incommensurabili si chiamano quelle grandezze, delle quali non si troua alcuna misura commune.

III.

Le linee rette, in potenza sono commensurabili, quando il medesimo spatio misura i quadrati fatti da loro.

IL COMMANDINO.

Euclide non ha diffinito le linee rette commensurabili in lunghezza separatamente, percioche si comprendono nella prima diffinitione delle grandezze commensurabili, conciosiacosa che le linee rette commensurabili in lunghezza siano quelle, le quali da vna medesima misura sono misurate.

IIII.

Le linee rette in potenza sono incommensurabili, quando alli quadrati fatti da quelle non si troua alcun spatio commune.

V.

Stando le cose in questo modo, si dimostra che à qualunque retta linea proposta sono infinite linee & commensurabili, & incommensurabili, alcune in lunghezza & potenza, alcune in potenza solamẽte. & la retta linea proposta sia chiamata rationale.

VI.

Et le linee commenſurabili à quella in lunghezza, & potenza, ò vero in potenza ſolamente, ſi chiameranno rationali.

VII.

Et le incommenſurabili, irrationali ſaranno dette.

VIII.

Et il quadrato della retta linea propoſta chiamiſi rationale.

IX.

Et i ſpatij commenſurabili à quello, rationali.

X.

Et i ſpatij incommenſurabili, irrationali ſaranno nominati.

XI.

Et le linee rette che poſſono produrre ſpatij incommenſurabili nominerannoſi irrationali: & ſe ſono quadrati, i lati loro; ma ſe rettilinei di altra ſorte, quelle che deſcriuono i quadrati vguali ad eſsi.

IL COMMANDINO.

Sono altresì alcune communi notitie, delle quali Euclide ſi ſerue in queſto libro cioè.

COMMVNI NOTITIE.

I.

Ogni grandezza moltiplicata può auanzare ogni altra grandezza propoſta della medeſima ſorte.

II.

Qualunque grandezza miſura vn'altra, miſurerà anchora quella, che detta grandezza miſura.

III.

Qualunque grandezza miſura il tutto, & vna parte tratta da quello, miſurerà altresì il rimanente.

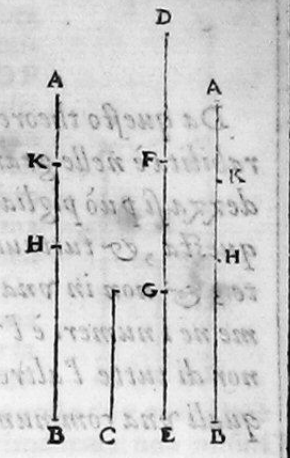
IIII.

Qualunque grandezza miſura due ò piu grandezze, miſurerà ſimilmente quella, che di eſſe ſi compone.

THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

Propoſte due grandezze diſuguali, ſe dalla maggiore ſi tragga vna parte maggiore della metà, & da quello che rimane ſimilmente ſi tragga vna parte maggiore della metà, & ciò ſi faccia ſempre, alla fine rimarrà vna certa grandezza, la quale d'ogni minor grandezza propoſta ſarà minore.

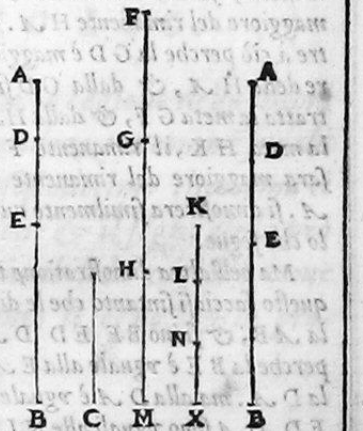
Siano due grandezze diſuguali A B C; delle quali A B ſia maggiore. Dico che ſe dalla A B ſi tragga vna parte maggiore della metà, & ſimilmente da quello che rimane, ſi tragga più della metà, & queſto ſempre ſi faccia, ne rimarrà finalmente vna grandezza, che ſarà minore della grandezza C. percioche la C moltiplicata diuerrà alla fine maggiore della A B. moltiplichiſi, & ſia D E, multiplice della C, & maggiore della A B. & diuidaſi la D E in parti vguali alla C cioè D F F G G E, & dalla A B traggaſi vna parte maggiore della metà B H, & parimente dalla A H traggaſi vna parte maggiore della metà H K: & queſto facciaſi ſempre ſin tanto che le diuiſioni che ſono nella A B ſiano di moltitudine vguali à quelle che ſono nella D E. ſiano dunque le diuiſioni A K K H H B di moltitudine vguali alle diuiſioni D F F G G E. & perche la D E è maggiore della A B, & ſiè tratta dalla D E vna parte minore della metà E G, & dalla A B vna parte maggiore della metà B H, il rimanente G D ſarà maggiore del rimanente H A. oltrè à ciò perche G D è maggiore della H A, & ſiè tratta dalla G D la metà G F, & dalla H A vna parte maggiore della metà H K, il rimanente F D ſarà maggiore del rimanente A K. & la F D è vguale alla C. adunque la C è maggiore della A K; & perciò la A K è minore della C. onde della grandezza A B è rimaſa la A K minore della minor grandezza propoſta C. il che biſognaua dimoſtrare.



Dimoſtreremo parimente ſe ſarà anchor tratta la metà.

IN ALTRO MODO.

Propongāſi due grandezze diſuguali A B C; & ſia la C minore. & perche la C è minore, moltiplicata alla fine ſarà maggiore della grandezza A B. facciaſi come la F M; & diuidaſi in parti vguali alla C MH HG GF: & dalla A B traggaſi vna parte maggiore che la metà B E, & dalla E A vna parte maggiore che la meta E D. & queſto facciaſi ſempre, ſin tāto che le diuiſioni che ſono nella F M ſiano vguali à quelle che ſono nella A B. ſiano dūque come B E E D D A: & alla D A ſia vguale ciaſcuna di eſſe K L L N N X. & queſto facciaſi ſin tanto che le diuiſioni di K X ſianovguali alle diuiſioni di F M. & perche la B E è maggiore della metà di A B, ſarà la B E maggiore della E A. la B E dunque è molto maggiore della D A. ma alla D A è vguale la X N. onde la B E è maggiore della X N. ſimilmente perche la E D è maggiore della metà di E A, ſarà la E D maggiore della D A. ma la N L è vguale alla D A. adunque la E D è maggiore della N L, & tutta la B D è maggiore della X L. ma alla D A è vguale la L K. onde tutta la A B ſarà maggiore della X K. ma etiandio la M F è maggiore della B A. adunque la M F è molto maggiore della X K. & perche X N N L L K ſono fra loro vguali, & ſono vguali fra loro M H H G G F, & è la moltitudine di quelle che ſono nella M F, vguale alla moltitudine di quelle che ſono nella X K, ſarà come la K L alla F G, coſi la K X alla F M. ma la F M è maggiore della X K. adunque anchor la G F è maggiore della L K. & è la



12. del quinto
14 del quinto

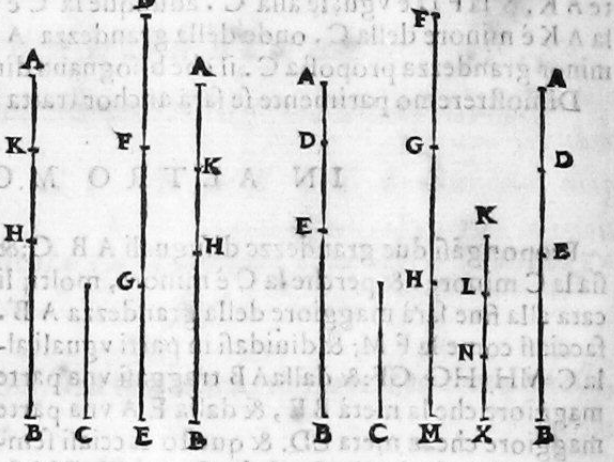
FG vguale alla C, & la KL alla AD. adunque la C sarà maggiore della AD. il che bisognaua dimostrare.

SCHOLIO.

Da questo theorema si fa chiaro, che la asymetria ciò è la incommensurabilità è nelle grandezze. percioche se di qual si voglia proposta grandezza si può pigliare vna minore, & similmente vn'altra minore di questa, & tuttauia una minore, le grandezze si segano infinitamente, & non in vna misura determinata, che sia minore di tutte, si come ne i numeri è l'vnità. se dunque non è vna misura determinata, minor di tutte l'altre; saranno alcune grandezze incommensurabili, le quali vna commune grandezza, essendo indeterminata, non misurera.

IL COMMANDINO.

* Dimostreremo parimente se sarà ancor tratta la metà] *Traggasi dalla AB la meta BH, et dalla AH la meta HK: & questo facciasi sempre, sin tanto che le diuisioni di AB siano vguali alle diuisioni di DE. & perche la DE è maggiore della AB & dalla DE sie tratta vna parte minore della meta, & dalla AB si è tratta la meta, sara il rimanente GD maggiore del rimanente HA. oltre à ciò perche la GD è maggiore della HA, & dalla GD si è tratta la meta GF, & dalla HA la meta HK, il rimanente FD sara maggiore del rimanente KA. si dimostrera similmente quello che segue.*

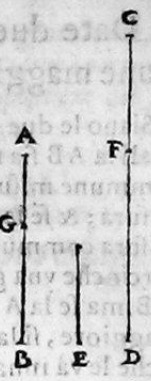


Ma nell'altra dimostratione traggasi dalla AB la meta BE, & dalla EA la meta ED, & questo facciasi sintanto che le diuisioni che sono nella FM siano vguali alle diuisioni che sono nella AB, & siano BE ED DA: & alla DA sia vguale ciascuna di esse KL LN NX. & perche la BE è vguale alla EA, & la EA è maggiore della AD, sara la BE maggiore della DA. ma alla DA è vguale la XN. adunque la BE è maggiore della XN. & perche ED DA sono vguali alle NL LK, tutta la AB sara maggiore di tutta la XK, similmente si dimostrera il rimanente.

THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

Se proposte due grandezze disuguali, & tratta sempre la minore della maggiore, la rimanente non misuri quella che le uà innanzi, le grandezze saranno incommensurabili.

Propoſte due grandezze diſuguali A B C D, delle quali la A B ſia minore, & tratta ſempre la minore della maggiore, la rimanente non miſuri quella che le ua innanzi. Dico le grandezze A B C D eſſere incommenſurabili. percioche ſe ſiano commẽſurabili, vna grandezza le miſurerà. miſurile, ſe eſſer può, & ſia E: & la A B miſurando D F laſci la C F minore di ſe ſteſſa: & la C F miſurando B G laſci la A G minore di ſe ſteſſa: & queſto facciaſi ſempre in fin à tanto che rimanga vna grandezza, che ſia minore di E. facciaſi dunque, & rimanga la A G minore di E. & perche E miſura la A B & la A B miſura la D F, etiandio E miſurerà la D F. ma ella miſura tutta la C D. adunque miſurerà altresì la rimanente C F; & C F miſura la B G. onde anchor E miſura la B G. ma ella miſura tutta la A B. miſurerà dunque anchor la rimanente A G, la maggiore la minore, che è impoſsibile. per la qual coſa niuna grandezza miſura le A B C D, & però ſaranno le grandezze A B C D incommẽſurabili. ſe dunque propoſte due grandezze diſuguali, & tratta ſempre la minore della maggiore, la rimanente non miſuri quella che le và innanzi, le grandezze ſaranno incommenſurabili. il che biſognaua dimoſtrare.



SCHOLIO.

Alcune grandezze eſſere in lunghezza incommenſurabili da queſto theorema ſi comprende. percioche alcune eſſere commenſurabili appare manifeſtamente. & delle grandezze commẽſurabili il trouare la maggior commune miſura, non è di ciaſcuno, ma di huomo dotto. l'inuentione della quale c'inſegna nel ſeguente theorema.

VN ALTRO SCHOLIO.

Hauendo nell'antecedente theorema ſpiegata la cagione della incommenſurabilità, in queſto ne da il ſegno dalle grandezze incommẽſurabili, cioè quando ſiano incommẽſurabili. & nel ſeſtodecimo theorema ci fa nota la proprieta loro, di modo che & la cagione & il ſegno & la proprieta ſi conoſce. ma nelle grandezze commenſurabili la cagione come manifeſta laſciò di dire, moſtrandoci ſolamente il ſegno, & la proprieta.

IL COMMANDINO.

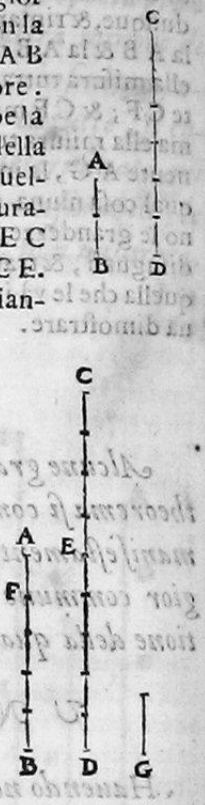
Et queſto facciaſi ſempre ſin'à tanto che rimanga vna grandezza che ſia minore di E.

Perche la A B miſurando la D F laſcia la C F minore di ſe ſteſſa, & la C F miſurando la B G laſcia la A G minore di ſe ſteſſa, ſara la A G minore della B G. adunque dalla A B ſi è tratta vna parte maggiore della meta di eſſa, cioè B G, & coſi ſi ſara ſempre; & traendoſi dalla A B ſempre vna parte maggiore della meta, rimarrà finalmente qualche grandezza, che ſara minore della E. per l'antecedente.

PROBLEMA I. PROPOSITIONE III.

Date due grandezze commenſurabili trouare la loro commune maggior miſura.

Siano le due grandezze date commenſurabili A B C D, delle quali la A B ſia minore. biſogna delle A B C D trouare la maggior commune miſura. adunque ò vero la A B miſura la C D, ò non la miſura; & ſe la A B miſura la C D, & miſura ſe ſteſſa, ſarà la A B miſura commune delle A B C D. & è manifeſto che è la maggiore. percioche vna grandezza maggiore della A B non miſurarebbe la A B. ma ſe la A B non miſura la C D, trattà ſempre la minore della maggiore, ſi laſciera finalmente v na grandezza che miſurera quella che le và innanzi; percioche A B C D non ſono incommenſurabili, & la A B miſurando la E D laſci la E C minor di ſe, & la E C miſurando la F B laſci la A F minore di ſe, & la A F miſuri la C E. perche dunque la A F miſura la C E, & la C E miſura la F B, etiandio la A F miſura la F B & miſura ſe ſteſſa. onde miſurerà anchor tutta la A B. ma la A B miſura la D E. adunque la A F miſura la D E, & miſura la C E. onde miſura etiandio tutta la C D. adunque la AF miſura le A B C D, & perciò è la commune miſura loro. Dico che è anchor maggiore. & ſe non è coſi, ſara alcuna grandezza maggiore della A F, che miſurera le A B C D. miſurile dunque & ſia G. & perche la G miſura la A B, & la A B miſura la E D, la G miſura etiandio la E D. & miſura tutta la C D. adunque miſurerà anchor la rimanente C E. ma la C E miſura la F B, & perciò la G miſura la F B. ma miſura anche tutta la A B. miſurera dunque la rimanente A F, la maggiore la minore, che non è poſsibile. onde vna grandezza maggiore della A F non miſurera le grandezze A B C D, & la AF ſara maggiore commune miſura delle A B C D. date dunque due grandezze commenſurabili A B C D, ſi è trouara la loro commune maggior miſura A F. il che biſognaua fare.



COROLLARIO.

Da queſto theorema è chiaro, che ſe vna grandezza miſura due grandezze, miſurerà anchor la lor cõmune maggior miſura.

SCHOLIO.

Si come foſſe manifeſto eſſere le grandezze commenſurabili, uiene a queſto theorema, ſenza dimoſtrarlo prima, come fece in quelle che ſono incommenſurabili; percioche è certo tutte le grandezze moltiplici di qualcuna eſſere commenſurabili, facendoſi comparatione di loro con quella, della quale elle ſ no moltiplici.

IL COMMANDINO.

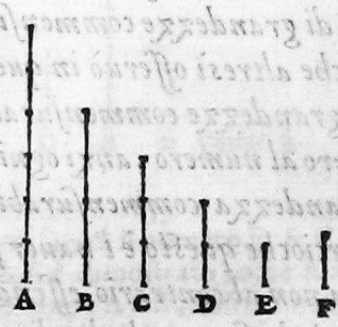
Da queſto theorema è chiaro, che ſe vna grandezza miſura due grandezze, miſurera anchor la loro commune maggior miſura] *Segue quello dall'ultima parte della dimoſtratione, come habbiamo moſtrato ne numeri alla ſeconda propoſitione del ſettimo libro.* *

PROBLEMA II. PROPOSITIONE IIII.

Date tre grandezze commenſurabili, trouare la loro commune maggior miſura.



Siano date tre grandezze commẽſurabili A B C. biſogna trouare la maggior commune miſura loro. pigliſi delle due A B la maggiore commune miſura, che ſia D. adunque la D ò miſurerà la C ò nò. miſurila prima. & perche la D miſura la C, & miſura le A B, miſurerà etiandio le A B C. onde la D è commune miſura delle A B C. & è manifeſto eſſere la maggiore. percioche grandezza maggiore della D non miſurerà le A B C. & s'egli è poſsibile, miſurile vna grandezza maggiore della D, che ſia E. perche dunque la E miſura le grandezze A B C, miſurerà anchor le A B, & la D commune maggior miſura delle A B, la maggiore la minore che non è poſsibile. Ma la D non miſuri la C. Dico prima le C D eſſere commẽſurabili, percioche eſſendo le A B C commẽſurabili, le miſurerà vna grandezza che miſura le A B. adunque miſura la maggior cõmune miſura della A B che è D; & miſura la C. onde la detta grandezza miſura D C, & però C D ſono commenſurabili. pigliſi la loro maggior commune miſura, & ſia E. & perche la E miſura la D, & la D miſura le A B, anchor la E miſurerà le A B: & miſura la C. adunque la E è commune miſura delle A B C. Dico eſſere etiandio la maggiore. percioche s'egliè poſsibile, ſia vna grandezza maggiore della E. & ſia F, che miſuri le grandezze A B C. & perche la F miſura le A B C, miſurera anchor le A B, & la maggior commune miſura delle A B, che è la D. adunque la F miſura la D: & miſura anchor la C. onde la F miſura le C D, & la maggior commune miſura delle C D, che è la E. la F dunque miſurera la E, la maggior la minore, che è impoſsibile. adunque vna grandezza maggiore della E non miſurera le grãdezze A B C D. per la qual coſa la E ſara la maggior commune miſura delle A B C, ſe la D non miſuri la C; ma ſe la miſuri, ſara la D. date dunque tre grandezze commenſurabili ſi è trouata la maggiore commune miſura loro. il che biſognaua fare.



COROLLARIO.

Da qui è manifeſto che ſe vna grandezza miſura tre grandez-

ze, misura anchor la loro commune maggior misura. & similmente in piu grandezze si troverà la commune maggior misura loro. & il corollario procederà.

SCHOLIO.

Perche alle grandezze incommensurabili seguita il non hauer proportione, quale ha il numero al numero, & il suo conuerso, vuol dimostrare che alle grandezze commensurabili seguita l'hauer proportione, quale ha il numero al numero, & al contrario. ma per dimostrare ciò ha bisogno di questo lemma, in che modo di due, ò vero di tre grandezze commensurabili, si troui la commune maggior misura. così fece anchora nel primo libro degli arithmetici, percioche doppo l'hauer mostrato quali siano i numeri incommensurabili, chiamati da lui primi, conciosiacosa che non in tutto siano incommensurabili, come le grandezze, volendo dimostrare ogni numero ad ogni numero hauer proportione o moltiplice, o superparticolare, ò superpartiente, ò moltiplice superparticolare, ò moltiplice superpartiente quali egli per breuità chiamò dal minore, ò parte, ò uer parti, intendendo per parte il submoltiplice o uero il subsuperparticolare, ò uero submoltiplice superparticolare: et per parti intendendo il subsuperpartiente, o uero submoltiplice superpartiẽte. uolendo dunque cio mostrare haueua bisogno di quel lema, in che modo di grandezze commensurabili si troui la commune maggior misura. il che altresì osseruò in questo luogo. poi nel quinto theorema mostrerà le grandezze commensurabili fra loro hauer proportione, quale ha il numero al numero. anzi ogni grandezza commensurabile minore d'ogni grandezza commensurabile maggiore, ò vero esser parte, o uer parti; percioche questo è l'hauer proportione, quale ha il numero al numero, ma non al contrario essendo il numero piu ampio. onde egli l'ha usato. ma è da sapere che le dimostrationi prese da gli arithmetici sono incommutabili.

VN ALTRO SCHOLIO.

Dapoi che ha insegnato, quali siano le grandezze incommensurabili, mostrerà quello che seguiti ad esse. & anchor quel che seguiti alle grandezze commensurabili nel quinto & sesto theorema. & perche haueua bisogno di vna commune misura di quelle, che sono commensurabili, piglia cio nel terzo & quarto theorema, in che modo delle grandezze commensurabili si possano trouare le communi misure. il settimo

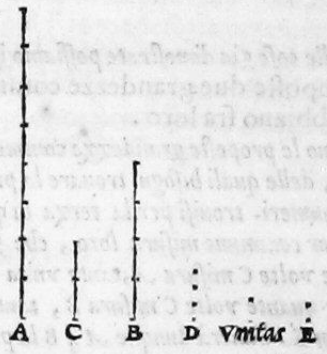
theore-

theorema ricerca quelle coſe, che ſeguitano alle grandezze incommenſurabili, non ſemplicemente ma ſecondo la ſpetie, cioè incommenſurabili in lunghezza, ò potenza; perche delle incommenſurabili ſecondo la priuatione non ha ragionato, come di quelle che non ſono vtili al trattato delle quantità irrationali. in queſto luogo c'inſegna la generatione di quelle, che in lunghezza, ò uero in potenza ſono commenſurabili, ò vero incommenſurabili, hauendo di ciò biſogno nel nono theorema, & ne i ſeguenti, ne quali per l'analogia & per la compoſitione & diuiſione la commenſurabilita & incommenſurabilita ſi ricerca inſino al terzodecimo theorema.

THEOREMA III. PROPOSITIONE V.

Le grandezze commenſurabili hanno fra loro la proportione, che ha il numero al numero.

Siano le grandezze commenſurabili A B. Dico la grandezza A alla B hauere la proportione c'ha il numero al numero. percioche eſſendo le AB commenſurabili, qualche grandezza le miſurerà. miſurile & ſia C: & quante volte C miſura A, tante vnita ſiano in D: & quante volte C miſura B, tante vnita ſiano in E. perche dunque C miſura A per l'vnità che ſono in D; & l'vnità miſura D per le vnita che ſono in eſſo; vgualmente l'vnità miſurerà il numero D, & la grandezza C miſurerà la A. adunque come C ad A, coſi è l'vnità à D, & conuertēdoſi come A a C coſi D all'vnità. ſimilmente perche C miſura B per l'vnità che ſono in E, & l'vnità miſura il numero E per le vnità che ſono in eſſo: vgualmente l'vnità miſurerà il numero E, & C miſurerà B. è dunque come C à B, coſi l'vnità ad E. & ſi è dimoſtrato come A à C coſi eſſere D all'vnità. onde per l'vgual proportione come A à B, coſi è il numero D al numero E: & perciò le grandezze commenſurabili A B hanno fra loro la proportione, che ha il numero D al numero E. il che biſugnaua dimoſtrare.



SCHOLIO.

Queſto è proprio delle grandezze commenſurabili, cioè la minore della maggior o uero è parte, o uero parti. ſe dunque è parte, o uero hauerà la proportione quale ha l'unità al numero, o uero quale ha il numero al numero. ma ſe è parti, hauerà la proportione, quale ha il numero al numero; percioche la parte fa la proportione ſubmoltiplice; & le parti fanno vna dell'altre ſubproportionali. onde ſe ſiano linee rette, et piani, quelli piani

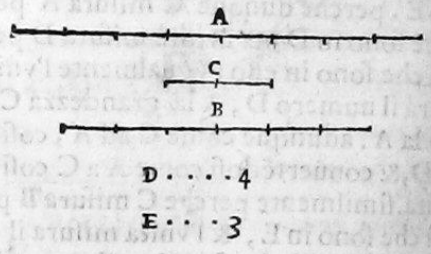
che ſi fanno dalle linee et i ſolidi che ſi fanno da piani haueran̄o la proportione c'ha il numero al numero, ma ſe ſiano piani et ſolidi che ſi fanno da eſſi, non ſeguita che le linee rette habbiano la proportione c'ha il numero al numero, ſe pero la proportione de numeri non ſia come de quadrato à quadrato: & ſe ſiano ſolidi, li piani & le linee rette che gli vanno innanzi non ſempre haueran̄o la proportione che ha il numero al numero, ſe la proportione non ſia come di cubo a cubo. & ſe i ſolidi non hanno la proportione che ha il numero al numero, ne anche i piani ne le linee rette l'haueranno, percioche non ſono commenſurabili. in queſto theorema & nel ſeguente tratta delle grandezze commenſurabili & incommenſurabili ſemplicemente, ma nel ſettimo delle incommenſurabili in longhezza. onde è manifeſto che anchora delle incommenſurabili in potenza. nell'ottauo theorema finalmente inſegna la generatione delle commenſurabili & incommenſurabili in longhezza & potenza.

IL COMMANDINO.

Dalle coſe gia dimoſtrate poſſiamo iſpedire quel problema.

Propoſte due grandezze commenſurabili, trouare ne numeri qual proportione habbiano fra loro.

Siano le propoſte grandezze commenſurabili AB, delle quali biſogni trouare la proportione ne numeri. trouiſi per la terza di queſto la maggior commune miſura loro, che ſia C & quante volte C miſura A, tante vnita ſiano in D: & quante volte C miſura B, tante vnita ſiano in E. haurà dunque A à B la proportione che ha il numero D al numero E. & ſe ſiano linee rette AB, i quadrati loro ſaranno commenſurabili, & haueranno la proportione che ha il numero quadrato al numero quadrato. ma ſe ſiano ſuperficie, ò li numeri D E ſono quadrati, ò non quadrati: & ſe non ſono quadrati, ò hanno la proportione che ha il numero quadrato al numero quadrato, ò nò. & ſe ſiano quadrati, ò habbiano la proportione che ha il numero quadrato al numero quadrato, le linee rette, che poſſono eſſe ſuperficie, ò le ſuperficie vguali ad eſſe, ſaranno in lunghezza commenſurabili. ma ſe li numeri non habbiano la proportione che ha il numero quadrato al numero quadrato, ſaranno in longhezza incommenſurabili, ben che ſiano commenſurabili in potenza. le qual coſe tutte ſi dimoſtreranno nella nona proportione di queſto libro.

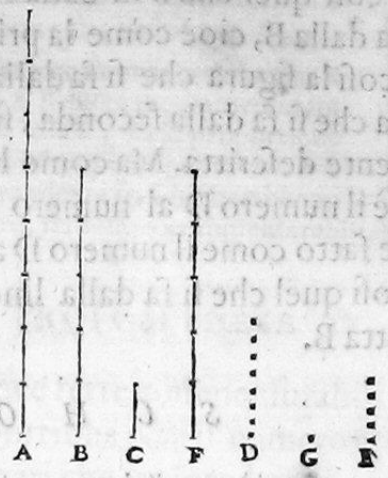


THEOREMA IIII. PROPOSITIONE VI.

Se due grandezze hanno fra loro la proportione, che ha il numero al numero, ſaranno commenſurabili.

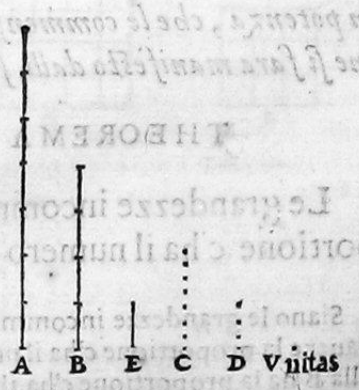
Due grandezze A B habbiano fra loro la proportione che ha il numero D

al numero E. Dico le grandezze A B essere commensurabili. Percioche quante vnita sono nel D, in tante parti vguali si diuida la grandezza A, & ad vna di esse sia vguale la C. & quante vnita sono in E, di tante grandezze vguali alla C, com pongasi la grandezza F. perche dunque quante vnità sono in D, tante grandezze sono in A vguali alla C, qual parte è l'vnità di D, la medesima parte sarà la C della A. come dunque la C alla A, cosiè l'vnità à D. ma l'unità misura il numero D. adunque etiandio la C misurerà la A. & perche è come la C alla A, cosi l'vnità al numero D, sarà conuertendosi come la A alla C, cosi il numero D all'vnità. similmente perche quante vnità sono in E, tante grãdezze sono in F vguali alla C, come la C alla F, cosi sara l'vnita al numero E. & siè dimostrato che come la A alla C, cosi è D all'vnita. adunque per l'vgual proportione come la A alla F, cosi è D ad E. ma come D ad E, cosi la A alla B. & come dunque la A alla B, cosi la A alla F. & hauendo la A all'vna & l'altra di esse B F la medesima proportione, sara la B vguale alla F. & la C misura la F. adunque misurera etiandio la B. ma misura anche la A. onde la C misura le A B. adunque la A è commensurabile alla B, & perciò se due grandezze hanno fra loro la proportione che ha il numero al numero, saranno commensurabili. il che bisognaua dimostrare. 9. del sesto



IN ALTRO MODO.

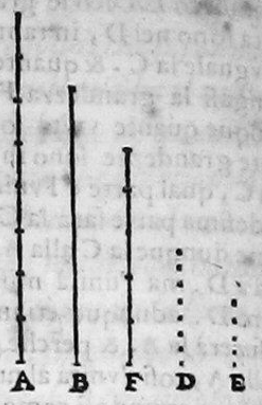
Due grandezze A B habbiano fra loro la proportione c'ha il numero C al numero D. Dico le grandezze essere commensurabili. percioche quante vnita sono nel C, in tante parti vguali diuidasi la A: & ad vna di essa sia la E vguale. è dunque come l'vnita al numero C, cosi la E alla A: & è come la C alla D, cosi la A alla B. onde per l'vgual proportione come l'vnita al numero D, cosi la E alla B. ma l'vnita misura il D. adunque anchor la E misura la B; & la E misura la A: perche l'vnita misura il C. onde la E misurera l'vna & l'altra di esse A B. & però le A B sono commensurabili, & la E è la commune misura loro.



COROLLARIO.

Da questo è chiaro che se siano due numeri, come D E, & vna linea retta come A, si può fare come il numero D al numero

E, cosi la linea retta A ad vn'altra linea retta F. & se delle A F si pigli la proportionale di mezo come B, sarà come la A alla F, cosi quel che si fa dalla A à quel che si fa dalla B, cioè come la prima alla terza, cosi la figura che si fa dalla prima à quella che si fa dalla seconda, simile & similmente descritta. Ma come la A alla F, cosi è il numero D al numero E. sarà dunque fatto come il numero D al numero E, cosi quel che si fa dalla linea retta A à quel che si fa dalla linea retta B.



SCHOLIO.

Se li quadrati ò parallelogrammi ò vero quali si vogliano spatij habbiano la proportione c'ha il numero al numero, saranno le grandezze commensurabili. ma quando habbiano la proportione c'ha il numero quadrato al numero quadrato & esse saranno commensurabili, & le linee rette che possano generar quelle, saranno commensurabili in lunghezza, ò vero quando le linee rette habbiano fra loro la proportione c'ha il numero al numero, & esse saranno commensurabili in lunghezza, & li quadrati che si fanno da esse, ò vero li spatij vguali alli quadrati loro haueranno necessariamente la proportione c'ha il numero quadrato al numero quadrato. si stendono dunque piu le commensurabili in potenza, che le commensurabili in lunghezza, & contengono più, come si fara manifesto dalli seguenti theoremi.

THEOREMA V. PROPOSITIONE VII.

Le grandezze incommensurabili non hanno fra loro la proportione c'ha il numero al numero.

Siano le grandezze incommensurabili A B. Dico la A alla B non hauere la proportione c'ha il numero al numero. percioche se la A alla B ha la proportione c'ha il numero al numero, la A sarà commensurabile alla B. ma non è commensurabile. adunque la A alla B ha la proportione c'ha il numero al numero. onde le grandezze incommensurabili non hanno fra loro la proportione c'ha il numero al numero, il che bisognaua dimostrare.



THEOREMA VI. PROPOSITIONE VIII.

Se due grandezze fra loro non hanno la proportione c'ha il numero al numero, saranno incommensurabili.

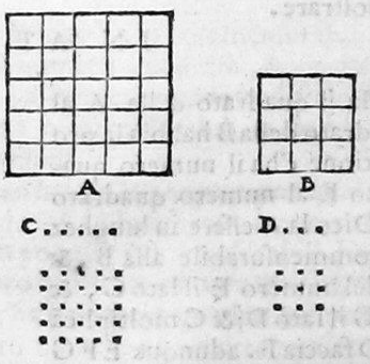


Due grandezze A B non habbiano fra loro la proportione c'ha il numero al numero. Dico le grandezze A B essere incommensurabili. percioche se la A è commensurabile alla B, ha la proportione c'ha il numero al numero. ma non l'ha. adunque le grandezze A B sono incommensurabili. onde se due grandezze fra loro non hanno la proportione c'ha il numero al numero, saranno incommensurabili. Il che bisognaua dimostrare.

THEOREMA VII. PROPOSITIONE IX.

I quadrati che si fanno da linee rette commensurabili in lunghezza, hanno fra loro la proportione c'ha il numero quadrato al numero quadrato. & i quadrati che fra loro hanno la proportione c'ha il numero quadrato al numero quadrato, haueranno anchora i lati commensurabili in lunghezza. ma i quadrati che si fanno da linee rette incommensurabili in lunghezza, non hanno fra loro la proportione c'ha il numero quadrato al numero quadrato. & i quadrati che fra loro non hanno la proportione c'ha il numero quadrato al numero quadrato, ne anche haueranno i lati commensurabili in lunghezza.

A



Siano le linee rette A B cõmensurabili in lũghezza. Dico il quadrato che si fa dalla A al quadrato che si fa dalla B haure la proportione c'ha il numero quadrato al numero quadrato. percioche la A essendo in lunghezza cõmensurabile alla B, haurà alla B la proportione c'ha il numero al numero. habbia quella c'ha il numero C al numero D. perche dunque è come la A alla B, cosi il numero C al numero D, & la proportione del quadrato che si fa dalla A al quadrato della B è doppia della proportione che ha la A alla B, percioche le figure simili

5 di questo.

Cor. della 20. del sesto.

sono in doppia proportione de lati homologhi: & la proportione del quadrato di C al qundrato di D è doppia della proportione c'ha il numero C al numero D, essendo vn numero proportionale in mezo di due numeri quadrati: & hauendo il quadrato al quadrato doppia proportione di quella che ha il lato al lato: sara come il quadrato che si fa dalla A, al quadrato dalla B, cosi il numero quadrato che si fa dal numero C al quadrato che si fa dal D.

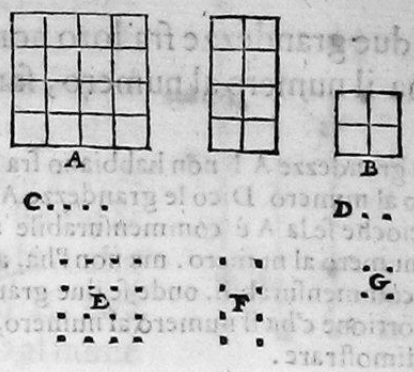
11. dell'ottauo

IN ALTRO MODO.

Perche la A è commensurabile alla B in lunghezza, hauera la proportione

cha

c'ha il numero al numero. habbia quella che ha C à D: & C moltiplicando se stesso faccia E; & moltiplicando D faccia F. & D moltiplicando se stesso faccia G. perche dunque C moltiplicando se stesso ha fatto E, & moltiplicando D ha fatto F, sarà come C à D, cioè come la A



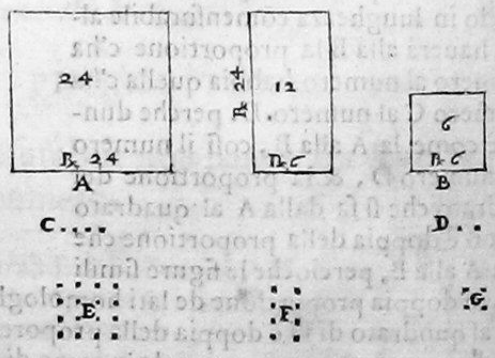
1. del sesto. alla B, cosi E ad F. ma come la A alla B, cosi il quadrato che si fa dalla A al rettangolo che si fa dalle A B. è dunque come il quadrato della A al rettangolo delle A B, cosi E ad F. & perche D moltiplicando se stesso ha fatto G, come C à D, cioè come la A alla B, cosi sarà F à G. & come la A alla B, cosi è il rettangolo che si fa dalle A B al quadrato

1. del sesto. della B. adunque come il rettangolo delle A B al quadrato della B, cosi F à G. ma come il quadrato che si fa dalla A al rettangolo dalle A B, cosi era E ad F. adunque per l'vgual proportione come il quadrato della A al quadrato della B, cosi E à G. & è l'vno & l'altro di essi E G quadrato, & E è fatto dal numero C, & G dal D. onde il quadrato che si fa dalla A al quadrato dalla B ha la proportione c'ha il numero quadrato al numero quadrato. Ma sia come il quadrato della A al quadrato della B, cosi il numero quadrato che si fa da C al numero quadrato che si fa da D. Dico la A essere in lunghezza commensurabile alla B. percioche come il quadrato della A al quadrato della B, cosi il numero quadrato che si fa da C al numero quadrato che si fa da D, ma la proportione del quadrato della A al quadrato della B è doppia della proportione che ha la A alla B: & la proportione del numero quadrato che si fa da C al numero quadrato che si fa da D è similmente doppia della proportione che ha il numero C al numero D. è dunque come la A alla B, cosi la C alla D. onde la A alla B ha la proportione c'ha il numero C al numero D: & però la A è in lunghezza commensurabile alla B. il che bisognaua dimostrare.

Cor. della 20. del sesto.
11. dell'ottauo
6. di questo.

IN ALTRO MODO.

Ma il quadrato della A al quadrato della B habbia la proportione c'ha il numero quadrato E al numero quadrato G. Dico la A essere in lunghezza commensurabile alla B, & sia del numero E il lato C, & del G il lato D; & C moltiplicãdo D faccia F. adunque E F G sono continuatamente proportionali nella proportione che è di C à D. & perche de quadrati che si fanno dalle A B è proportionale di mezo il rettangolo fatto dalle A B; & de numeri quadrati E G è proportionale di mezo il numero F, sara come il quadrato della A al rettangolo delle A B, cosi E ad F. & come il rettangolo dalle A B al quadrato di B, cosi F a G. ma come il quadrato della A al rettangolo delle A B, cosi la A alla B. adunque le A B sono commensurabili, perche hanno la proportione c'ha il numero E al numero F, cioè che ha C a

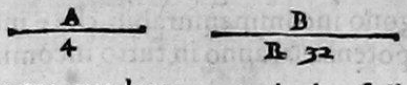


17. del settimo
17. del settimo

D, es-

D, essendo come C a D, cosi E ad F. concioſiacoſa, che C moltiplicando se ſteſſo habbia fatto E, & moltiplicando D habbia fatto F. è dunque come C a D, cosi E ad F.

Ma la A alla B sia incommensurabile in lũghezza. Dico il quadrato della A al quadrato della B non hauere la proportione c'ha il numero quadrato al numero quadrato. percioche se il quadrato della A al quadrato della B habbia la proportione c'ha il numero quadrato al numero quadrato, la A sara in lunghezza commensurabile alla B. ma non è. non ha dunque il quadrato della A al quadrato della B la proportione c'ha il numero quadrato al numero quadrato. oltre a ciò il quadrato della A al quadrato della B non habbia la proportione c'ha il numero quadrato al numero quadrato. Dico la A alla B essere in lunghezza incomensurabile. percioche se la A sia commensurabile in lunghezza alla B, hauera il quadrato della A al quadrato della B la proportione c'ha il numero quadrato al numero quadrato. ma non l'ha. non è dunque la A in lunghezza commensurabile alla B. la onde i quadrati che si fanno dalle linee rette commensurabili in lunghezza hanno fra loro la proprtione c'ha il numero quadrato al numero quadrato, & quello che seguita. il che bisognaua dimostrare.



COROLLARIO.

Dalle cose gia dimostrate è manifesto, che le linee rette commensurabili in lunghezza, sono anchora in tutto commensurabili in potenza. ma quelle che sono commensurabili in potenza, non sono in tutto commensurabili in lunghezza. & quelle che in lunghezza sono incommensurabili, non in tutto sono incommensurabili in potenza. ma quelle che sono incommensurabili in potenza, in tutto anchora sono in lunghezza incommensurabili.

Perche i quadrati che si fanno da linee rette in lunghezza commensurabili hanno la proportione c'ha il numero quadrato al numero quadrato, & quelle che hanno la proportione c'ha il numero quadrato al numero quadrato, sono commensurabili: saranno le linee rette in lunghezza commensurabili, & non solo in lunghezza, ma anchora in potenza commensurabili. C

Oltre à ciò perche tutti i quadrati che fra loro hanno la proportione qual'ha il numero quadrato al numero quadrato, hanno i lati in lunghezza commensurabili, come si è dimostrato, che sono anchora in potenza commensurabili, hauendo i quadrati loro la proportione c'ha il numero quadrato al numero quadrato; quei quadrati che non hanno la proportione c'ha il numero quadrato al numero quadrato, ma semplicemente che qualche altro numero ad vn'altro numero, sono commensurabili, cioè le linee rette, dalle quali si descriuono, sono in potenza commensurabili, & non in lunghezza. adunque le linee rette in lunghezza commensurabili in tutto sono commensurabili in potenza: & le commensurabili in potenza non sono in tutto commensurabili in lunghezza, se però i quadrati loro non habbiano la proportione c'ha il numero quadrato al numero quadrato. Dico etiandio quelle che in lunghezza sono incommensurabili non essere in tutto in potenza incommensurabili, percioche le commensurabili in potenza sono quelle che possono non hauere la proportione c'ha il numero al numero. & però essendo commensurabili in potenza sono in lunghezza incommensurabili. adunque quelle che sono in lunghezza incommensurabili, non in tutto sono incommensu- D F

mensurabili in potenza. ma essendo in lunghezza incommensurabili, possono in potenza essere & incommensurabili & commensurabili. & le incommensurabili in potenza sono in tutto incommensurabili in lunghezza, percioche se siano commensurabili in lunghezza, saranno anchora in potenza commensurabili. ma si pongono incommensurabili, che è inconueniente. adunque le incommensurabili in potenza saranno in tutto incommensurabili in lunghezza.

SCHOLIO.

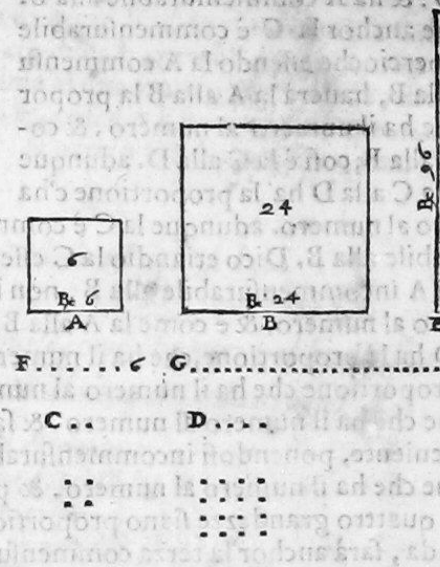
Questo theorema fu trouato da Theeteto, del quale fa mentione Platone nel Theeteto. ma quiui piu particolarmente è posto, & qui più vniuersalmente. concioſiacosà che in quel luogo dica, i quadrati che da i numeri quadrati si misurano, hauere anchora i lati commensurabili. la qual propositione è particolare, non comprendendo tutti li spatij commensurabili, de quali i lati similmente sono commensurabili; percioche i lati de due spatij quadrati commensurabili, cioè di 18 8 anchor che non si trouino secondo la misura de numeri, sono nondimeno commensurabili altramente, & essi spatij da numeri quadrati non si misurano, benche misurar si possano. meritamente dunque in questo luogo non gli ha diffiniti cosi, ma (come egli dice) che hanno la proportione, qual ha il numero quadrato al numero quadrato. & non senza proposito del numero quadrato si è fatta mentione, percioche se dicesse solamente quale ha il numero al numero, la diffinitione sarebbe soprabondante, concioſiacosà che i quadrati c'hanno fra loro la proportione doppia, douerebbono hauere i lati commensurabili. il che non hanno, per essere la proportione del maggior lato al minore, come del diametro del quadrato al suo lato. & se hauesse detto cosi, che si misurano da i numeri quadrati, la diffinitione sarebbe diminuta, che non comprende quelli, quali hauendo i lati commensurabili, da numeri quadrati non si misurano et hanno tal proportione qual ha il numero quadrato al numero quadrato. la onde ragioneuolmente ci è stato aggiunto, quale ha il numero quadrato al numero quadrato, percioche vi si comprendono tutti li spatij, che se bene non si misurano da numeri quadrati, essendo nondimeno commensurabili hanno i lati anchora commensurabili. & perche 18 8 sono commensurabili, che si descriuono da i lati commensurabili, troueremo i lati loro; concioſiacosà c'habbiano tal proportione, qual ha il numero quadrato al numero quadrato, essendo come 9 à 4, cosi 18 a 8. adunque pigliando i lati di 9 & 4, segheremo vgualmente i lati de quadrati propostì, & troueremo che sono commensurabili, per che come i quadrati a quadrati, cosi i lati a i lati.

IL COMMANDINO.

I quadrati che si fanno da linee rette commensurabili in lunghezza] *intendi le linee rette in lunghezza fra loro commensurabili non commensurabili alla razionale proposta, perche questo non solo auuiene alle razionali, ma etiadio alle irrationali, come di sotto apparirà.* A

Et i quadrati che fra loro hanno la proportione c'ha il numero quadrato al numero quadrato, haueranno anchora i lati commensurabili in lunghezza] *Per li quadrati che hanno fra loro la proportione c'ha il numero quadrato al numero quadrato, non solo si debbono intendere quelli che contengono altrettante quadrate misure, quante sono l'vnità ne numeri quadrati, ma anchor quelli che hanno fra loro la proportione c'ha il numero quadrato al numero quadrato.* B

Siano due numeri piani simili F G, & la linea retta A. & F sia 6 & G 24: & facciasi secondo il Corollario della sesta propositione di questo, come F à G così la A ad vn'altra linea, che sia E. & fra le A E presa la meza proportionale di mezo B sarà come la prima alla terza, cioè come la A alla E, così il quadrato della prima al quadrato della seconda, cioè così il quadrato della A al quadrato della B. ma come la A alla E, così era il numero F al numero G. come dunque il numero F al numero G, così sarà il quadrato della A al quadrato della B. & però il quadrato della A conterrà altrettante misure quadrate, come per essempio, altrettanti piedi quadrati, quante vnità sono in F, cioè 6: & il quadrato della B conterrà altrettanti piedi quadrati, quante vnità sono in G. cioè 24. & perche i numeri piani simili F G hanno fra loro la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato, haurà anchora il quadrato della A al quadrato della B la proportione c'ha il numero quadrato al numero quadrato. habbia quella che ha il numero quadrato che si fa da C al numero quadrato che si fa da D. si dimostrerà parimente i lati delli quadrati A B se ben non possono esprimersi con un certo numero, essere nondimeno in lunghezza fra loro commensurabili. & però hauere la proportione c'ha il numero al numero. i moderni così fatti lati chiamano, ò radici quadrate, ò radici semplicemente, percioche si dirà la A radice di 6, & la B radice di 24. & è la Rx 6 alla Rx 24 come 1 à 2, che essendo il quadrato di B quadruplo del quadrato di A sarà la B doppia della A, conciosiacosa che le figure rettilinee simili siano in doppia proportione de i lati homologhi.



Cor. della 20. del sesto.

16. dell'ottauo

Corol. 20. del sesto.

Perche i quadrati che si fanno dalle linee rette in lunghezza commensurabili] *dimostra come la prima parte del corollario seguita dalla prima parte del Theorema.* C

Oltre à cio perche tutti i quadrati che fra loro hanno la proportione qual ha il numero quadrato al numero quadrato] *similmente dimostra in che modo il medesimo seguita dalla seconda parte del theorema.* D

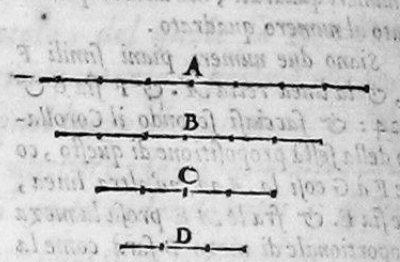
Quei quadrati che non hanno la proportione c'ha il numero quadrato al numero quadrato, ma semplicemẽte che qualch'altro numero ad vn'altro numero] *questo appartiene alla seconda parte del corollario, & seguita dall'vltima parte del theorema.* E

Dico etiandio quelle che in lunghezza sono incommensurabili] *questo appartiene alla terza parte del corollario, & si dichiara dalla terza parte del theorema.* F

Et le incommensurabili in potenza sono in tutto incommensurabili in lunghezza] *questa è l'vltima parte del corollario, che per l'impossibile si dimostra dalla prima parte del theorema.* G

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE X.

Se quattro grandezze ſiano proportionali, & la prima ſia commenſurabile alla ſeconda, ſarà anchor la terza commenſurabile alla quarta: & ſe la prima ſia incommenſurabile alla ſeconda, la terza altresì ſarà incommenſurabile alla quarta.



Siano quattro grandezze proportionali A B C D: & ſia come la A alla B, coſi la C alla D; & ſia A commenſurabile alla B. Dico che anchor la C è commenſurabile alla D. percioche eſſendo la A commenſurabile alla B, hauerà la A alla B la proportione che ha il numero al numero, & come la A alla B, coſi è la C alla D. adunque anchor la C alla D ha la proportione c'ha il numero al numero. adunque la C è commenſurabile alla D. Ma ſia la A incommenſurabile alla B. Dico etiandio la C eſſere incommenſurabile alla D. perche eſſendo la A incommenſurabile alla B, non hauera la A alla B la proportione c'ha il numero al numero. & è come la A alla B, coſi la C alla D. adunque ne anche la C alla D ha la proportione, che ha il numero al numero. perche ſe la C alla D habbia la proportione che ha il numero al numero, etiandio la A alla B hauerà la proportione che ha il numero al numero. & ſarà la A commenſurabile alla B. che è inconueniente, ponendoſi incommenſurabile. adunque la C alla D non ha la proportione che ha il numero al numero. & però la C è incommenſurabile alla D. onde ſe quattro grandezze ſiano proportionali & la prima ſia commenſurabile alla ſeconda, ſarà anchor la terza commenſurabile alla quarta: & ſe la prima ſia incommenſurabile alla ſeconda, la terza altresì ſarà incommenſurabile alla quarta. il che biſognaua dimoſtrare.

5. di queſto;

6. di queſto.

7. di queſto.

8. di queſto.

LEMMA I.

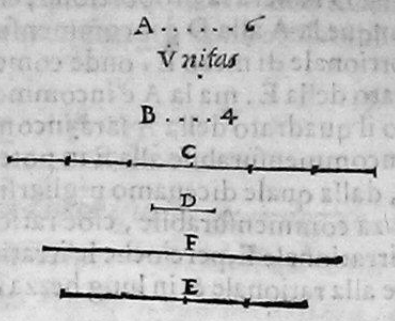
E ſtato dimoſtrato ne i libri arithmetici che i numeri piani ſimili hanno fra loro la proportione, c'ha il numero quadrato al numero quadrato: & ſe due numeri fra loro habbiano la proportione c'ha il numero quadrato al numero quadrato, quelli ſono ſimili piani. onde è manifeſto i numeri piani diſſimili, cioè che non hanno i lati proportionali, non hauere anchora la proportione c'ha il numero quadrato al numero quadrato, perche ſe l'haueſſero, ſarebbono piani ſimili. il che non ſi pone. i numeri dunque piani diſſimili non hanno fra loro la proportione c'ha il numero quadrato al numero quadrato.

A

LEMMA II.

Dati due numeri, & vna linea retta, fare come il numero al numero, coſi il quadrato della linea retta al quadrato d'vn'altra linea retta.

Siano dati due numeri A B, & la data linea retta C. bisogna trouare vn'altra linea retta, di modo che il quadrato che si fa dalla C al quadrato dell'altra linea retta, habbia la proportione, c'ha il numero primo al numero secondo. quante vnita sono nella A, in tante parti vguali diuidasi la linea retta C, & ad vna di esse sia vguale la D; & quante vnita sono in B, di tanti parti vguali alla D compongasi la linea retta E. è dunque come l'vnità ad A, cosi la D alla C. & conuertendosi come A all'vnità, cosi la C alla D. & è come l'vnità à B, cosi la D alla E. onde per l'vgual proportione come A à B, cosi è la linea retta C alla retta E. pigli si delle linee rette C E la proportionale di mezo F. è dunque come la C alla E, cosi il quadrato che si fa dalla C al quadrato della F; perche come la prima alla terza, cosi è il quadrato, che si fa dalla prima al quadrato della seconda, simile & similmente descritto. ma come la C alla E, cosi è A à B. come dunque A à B, cosi il quadrato della C al quadrato della F: & perciò C F sono le linee rette, che noi cercauamo, essendosi trouata la F.

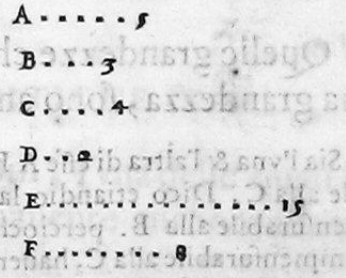


Cor. della 20. del sesto.

LEMMA III.

Trouare due numeri piani dissimili, cioè che non habbiano fra loro la proportione, c'ha il numero quadrato al numero quadrato.

Proponganſi quattro numeri A B C D, dimodo che non sia come A à C, cosi B à D: & facciasi da A B il numero E, & da C D il numero F. è manifesto, i numeri E F essere piani, & perciò dissimili, concioſiacosa che i lati non siano proportionali: il che bisognaua fare.



PROBLEMA III.
PROPOSITIONE XI.

Alla proposta linea retta trouare due rette linee incõmensurabili. cioè vna incommensurabile in lunghezza solamente, & l'altra incommensurabile in lunghezza, & in potenza.

Sia la linea retta proposta A. bisogna trouare due linee rette incommensurabili alla A in lunghezza solamẽte, & l'altra etiandio in potẽza. & proponganſi due numeri B C, che non habbiano fra loro la proportione, c'ha il numero quadrato al numero quadrato, cioè piani dissimili: & facciasi come B à C, cosi il quadrato della A al quadrato della D. percioche questo si è insegnato prima. adũque il quadrato della A è commensurabile al quadrato della D. & perche B à C non ha la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato, ne anche il quadrato della A al quadrato



A

B

C

II. del quinto.

9. di questo. 13. del sesto. Corol. 20. del sesto.

della D haverà la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato. adunque la A alla D è incommensurabile in lunghezza. pigliſi delle A D la proportionale di mezo E. onde come la A alla D, cosi è il quadrato della A al quadrato della E. ma la A è incommensurabile in lunghezza alla D. adunque etiandio il quadrato della A sarà incommensurabile al quadrato della E; & però la A è incommensurabile alla E in potenza. adunque alla proposta linea retta rationale, dalla quale diceuamo pigliarsi le misure, come alla A, si è trouata la D in potenza commensurabile, cioè rationale in potenza solamente commensurabile, & la irrationale E, percioche le irrationali vniuersalmente si chiamano tutte quelle, che alla rationale & in lunghezza & in potenza sono incommensurabili.

D

IL COMMANDINO.

A Et se due numeri fra loro habbiano la proportione, c'ha il numero quadrato al numero quadrato, quelli essere piani simili] *questo non lo dimostra Euclide ne gli arithmetici, ma noi l'habbiamo dimostrato nella vigesima sesta dell'ottauo libro.*

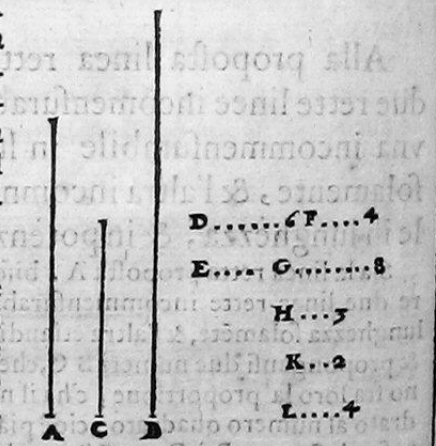
B Proponganſi due numeri B C, che non habbiano fra loro la proportione, c'ha il numero quadrato al numero quadrato, cioè piani dissimili] *questo è facile, & in pronto à ciascuno. ma nondimeno in che modo si faccia fu dichiarato nel terzo scholio degli antecedenti.*

C Et facciasi come B à C; cosi il quadrato della A al quadrato della D. percioche questo si è insegnato prima] *cioè nel corollario del sesto theorema. & se ben cio è manifesto da quello, nientedimeno perche il secondo lemma si troua ne testi greci, stimando noi essere vtile, l'habbiam posto in questo luogo.*

D Adunque etiandio il quadrato della A sarà incommensurabile al quadrato della E] *per l'antecedente theorema.*

THEOREMA IX. PROPOSITIONE XII.

Quelle grandezze che sono commensurabili ad vna medesima grandezza, sono anchora fra loro commensurabili.



Sia l'vna & l'altra di esse A B commensurabile alla C. Dico etiandio la A essere commensurabile alla B. percioche essendo la A commensurabile alla C, haverà la A alla C la proportione, c'ha il numero al numero, habbia quella, c'ha il numero D al numero E. similmente perche la B è commensurabile alla C, haverà la C alla B la proportione c'ha il numero al numero. habbia quella, che ha F à G. & date qual proportioni si vogliano; cioè quella che ha D ad E, & quella che ha F à G, piglinsi i numeri proportionali nelle date proportioni H K L: & sia come D ad E, cosi H à K; & come F à G, cosi K ad L. perche dunque come la A alla C, cosi è D ad E: & come D ad E, cosi H à K; sarà etiandio come la A alla C, cosi H à K. & perche come la B alla C, cosi è F à G, & come F à G, cosi K ad L; sarà etiandio come la B alla C, cosi K ad L: & è come la A alla C, cosi H à K. adunque per l'vgual proportione come la A alla B, cosi H ad L. & però la A alla B ha la proportione, c'ha il numero H al numero L.

5. di questo.

4. dell'ottauo.

11. del quinto.

onde

onde la A è commensurabile alla B. quelle grandezze dunque che sono commensurabili ad vna medesima grandezza, sono anchora fra loro commensurabili. il che bisognaua dimostrare. 6. di questo.

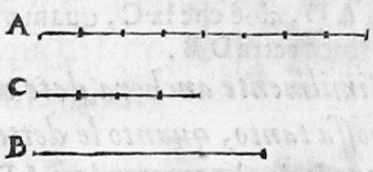
SCHOLIO.

Questo non si conuerte, percioche non tutte quelle grandezze, che sono commensurabili fra loro, sono anchora commensurabili ad vna medesima, si come l'vguali fra loro non sono vguali alla medesima. ma al contrario; perche possono essere incommensurabili ad vna medesima, & commensurabili, il che si dimostrera nel seguente theorema, & nel suo conuerso.

THEOREMA X. PROPOSITIONE XIII.

Se sono due grandezze, l'vna delle quali sia commensurabile ad vna medesima & l'altra incommensurabile, le grandezze saranno incommensurabili fra loro.

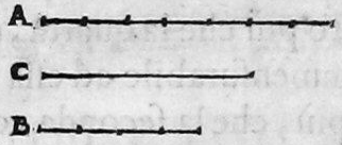
Siano due grandezze A B, & sia vn'altra C, & la A sia commensurabile alla C, & la B incommensurabile alla medesima C. Dico etiandio la A essere incommensurabile alla B. percioche se la A è commensurabile alla B, & è la C commensurabile alla A, sarà anchor la C commensurabile alla B. il che non si pone. Per l'antecedente.



THEOREMA XI. PROPOSITIONE XIIII.

Se sono due grandezze commensurabili, l'vna delle quali sia incommensurabile ad alcun'altra, la rimanente anchora alla medesima sarà incommensurabile.

Siano due grandezze commensurabili A B, & vna di esse A sia incommensurabile alla C. Dico anchor la rimanente B essere incommensurabile alla medesima C. percioche se la B è commensurabile alla C, & è la A commensurabile alla B, & la A sarà altresì commensurabile alla C. ma è anchor incommensurabile, il che non può essere. non è dunque la B commensurabile alla C, & però è incommensurabile. onde se sono due grandezze commensurabili l'vna delle quali sia incommensurabile ad alcun'altra, la rimanente anchora alla medesima sarà incommensurabile. il che bisognaua dimostrare.

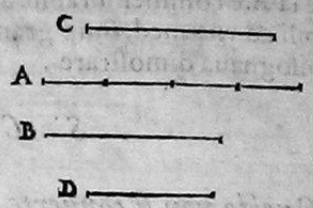


IL COMMANDINO.

Dalle cose poco fa dimostrate si può dimostrare anchor questo.

Quelle grandezze che sono commensurabili alle incommensurabili, sono anchora incommensurabili fra loro.

Siano due grandezze incommensurabili A B, & sia la C commensurabile alla A, & la D commensurabile alla B. Dico le C D essere incommensurabili fra loro. percioche essendo le A C commensurabili, & la A incommensurabile alla B, etiandio la C sarà incommensurabile alla B. similmente perche le B D sono commensurabili, & è la B incommensurabile alla C, anchor la D alla C sarà incommensurabile. il che bisognaua dimostrare.

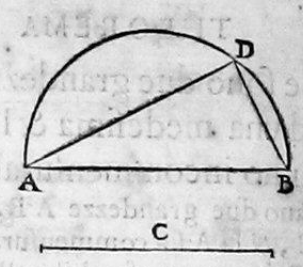


LEMMA.

Date due linee rette disuguali, trouare l'eccesso, nel quale la maggiore può piu, che la minore.

Siano due linee rette date disuguali A B C, delle quali la A B sia maggiore. bisogna trouare l'eccesso, nel quale può piu la A B, che la C. descriuasi nella linea retta A B il mezo cerchio A D B, & adattisi in esso la linea retta A D vguale alla C, & giungasi D B. è manifesto che l'angolo A D B è retto, & la A B può tanto piu che la A D, cioè che la C, quanto è il quadrato della linea retta D B.

1. del quarto. 31. del terzo. 47. del primo.



Similmente anchora date due linee rette, si trouera una retta linea, che possa tanto, quanto le dette due.

Siano le due linee rette date A D D B, & bisogni trouare la linea retta che possa tanto, quanto le dette due. adattinsi A D D B, dimodo che contengano l'angolo retto A D B, & giungasi A B. similmente è manifesto, che la linea retta A B può tanto, quanto le A D D B.

47. del primo

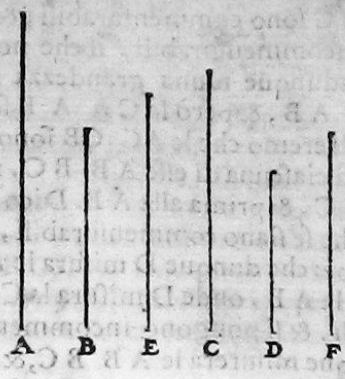
THEOREMA XII. PROPOSITIONE XV.

Se quattro linee rette siano proportionali, & la prima possa tanto piu, che la seconda, quanto è il quadrato di vna linea retta commensurabile ad essa in lunghezza; la terza anchora potrà tanto più che la quarta, quanto è il quadrato d'vna linea retta commensurabile ad essa in lunghezza. Et se la prima possa tanto più, che la seconda, quanto è il quadrato d'vna linea retta incommensurabile ad essa in lunghezza; similmente la terza potrà tanto più, che la quarta, quanto è il quadrato d'vna linea retta incommensurabile ad essa in lunghezza.

Siano quattro linee rette proportionali A B C D, & sia come la A alla B, cosi la C alla D, & la A possa tanto più, che la B, quanto è il quadrato della E, & la C possa tanto più che la D, quanto è il quadrato della F. Dico se la A è commensurabile alla E, etiandio la C essere commensurabile alla F, & se la A è incommensurabile alla E, & la C parimente essere incommensurabile alla F. percioche essendo come la A alla B, cosi la C alla D, sarà come il quadrato della A al quadrato della B, cosi il quadrato della C al quadrato della D. ma al quadrato della A so-

22. del sesto.

no vguali li quadrati delle E B, & al quadrato della C ſono vguali i quadrati delle F D. come dunque i quadrati delle E B al quadrato della B, coſi i quadrati delle F D al quadrato della D. & diuidendoſi come il quadrato dalla E al quadrato della B, coſi il quadrato della F al quadrato della D, & però come la E alla B, coſi è la F alla D. & conuertendoſi come la B alla E, coſi la D alla F. & è come la A alla B, coſi la C alla D. adunque per l'vgual proprotione come la A alla E, coſi è la C alla F. onde ſe la A è commenſurabile alla E ſarà etiandio la C commenſurabile alla F, & ſe la A è incommenſurabile alla E, & la C ſarà incommenſurabile alla F. ſe dunque quattro linee rette ſiano proportionali, & quello che ſeguita. il che biſognaua dimoſtrare.



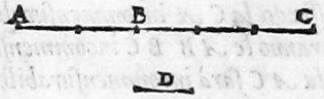
22. del ſeſto.

10. di queſto.

THEOREMA XIII. PROPOSITIONE XVI.

Se due grandezze commenſurabili ſi compongano, ſarà tutta la grandezza à ciaſcuna di loro commenſurabile. & ſe tutta la grandezza ſia commenſurabile ad vna di loro, le due grandezze poſte da principio ſaranno commenſurabili.

Componganſi due grandezze commenſurabili A B B C. Dico tutta la grandezza A C eſſere commenſurabile à ciaſcuna delle A B B C. percioche eſſendo le A B B C commenſurabili, qualche grandezza le miſurerà. miſurile, & ſia D. & perche la D miſura le A B B C, miſurerà anchor tutta la A C: & miſura le A B B C. adunque D miſura le A B B C & la A C. onde la A C è commenſurabile à ciaſcuna di eſſe A B B C. ma ſia la A C commenſurabile ad vna di eſſe A B B C, cioè alla A B. Dico etiandio le A B B C eſſere commenſurabili. percioche eſſendo le C A A B commenſurabili, qualche grandezza le miſurerà. miſurile, & ſia D. & perche D miſura le C A A B, miſurerà anchor la rimanente B C. & miſura la A B. adunque D miſura le A B B C. & però le A B B C ſono commenſurabili. la onde ſe due grandezze commenſurabili ſi compongano, ſarà tutta la grandezza à ciaſcuna di loro commenſurabile, & il rimanente. il che biſognaua dimoſtrare.



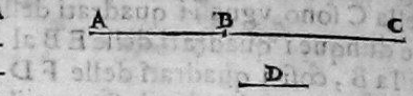
1. diff.
4. com. not.
3. com. not.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIONE XVII.

Se due grandezze incommenſurabili ſi compongano, tutta la grandezza à ciaſcuna di loro ſarà incommenſurabile: & ſe tutta la grandezza ſia incommenſurabile ad vna di loro, le due grandezze poſte da principio ſaranno incommenſurabili.

Componganſi due grandezze incommenſurabili A B B C. Dico anchor tutta la grandezza eſſere incommenſurabile à ciaſcuna di eſſe A B B C. percioche ſe non ſono incommenſurabili C A A B, qualche grandezza le miſurerà. miſurile & ſia D, ſe eſſer può. perche dunque D miſura le C A A B, miſurerà etian-

dio la rimanente B C. & misura la B A. adunque D misura le A B B C. & però le A B B C sono commensurabili; & si pongono incommensurabili. il che non può essere. adunque niuna grandezza misurerà le C A A B, & però le C A A B sono incommensurabili. similmente anchora dimostreremo che le A C C B sono incommensurabili. onde la A C è incommensurabile à ciascuna di esse A B B C. ma sia la A C incommensurabile ad vna di esse A B B C, & prima alla A B. Dico etiandio A B B C essere incommensurabili. percioche se siano commensurabili, qualche grandezza le misurerà, misurile & sia D. perche dunque D misura le A B B C, misurerà anchor tutta la A C. ma misura la A B. onde D misura la C A A B, & perciò le C A A B sono commensurabili. & si pongono incommensurabili, che non può essere. niuna grandezza dunque misurerà le A B B C, & saranno le A B B C incommensurabili. similmente dimostreremo la A C essere incommensurabile alla rimanente B C. se dunque due grandezze incommensurabili si compongano & quello che seguita. il che bisognaua dimostrare.



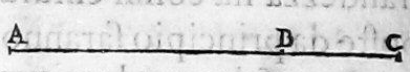
4. com. not.

IL COMMANDINO.

Dalle cose gia dimostrate quello anchora ne appare.

Se tutta la grandezza composta di due sia incommensurabile ad vna delle componenti, sarà etiandio alla rimanente incommensurabile.

Sia tutta la grandezza A C incommensurabile alla A B. Dico la A C essere etiandio incommensurabile alla rimanente B C. percio che essendo la C A incommensurabile alla A B, saranno le A B B C incommensurabili. & perche le A B B C sono incommensurabili, anchor la A C sarà incommensurabile all'vna & l'altra di esse. il che bisognaua dimostrare.

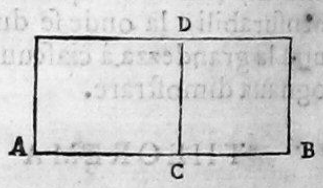


per l'antecedente.

LEMMA I.

Se ad vna retta linea sia adattato vn parallelogrammo che manchi della figura quadrata, il parallelogrammo adattato sarà vguale à quel rettangolo, che si contiene dalle parti di detta linea.

Adattisi ad vna linea retta A B il parallelogrammo A D, che manchi della figura quadrata D B. Dico il parallelogrammo A D essere vguale al rettangolo A C B. il che è chiarissimo da se stesso, per che essendo D B quadrato, la D C sarà vguale alla C B; & è il parallelogrammo A D quello che si contiene dalle A C C B. se dunque ad vna linea retta sia adattato vn parallelogrammo, & quello che seguita. il che bisognaua dimostrare.



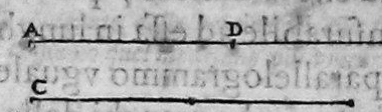
LEMMA II.

Se siano due linee rette diseguali, & la quarta parte del quadrato che si fa dalla minore, sia adattata alla maggiore, che manchi della figura quadrata, quello che si è adattato nõ passa per mezo di detta linea.

S'egli è possibile siano due linee rette diseguali A B C: & la quarta parte del qua

drato,

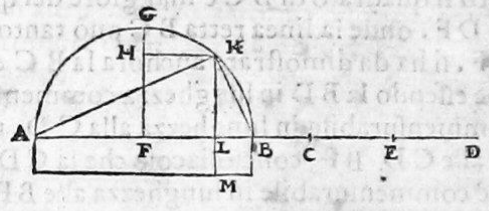
drato, che si fa dalla minore C, adattisi alla maggiore, che manchi della figura quadrata, cioè di quella, che si fa da D B, che è la metà di A B; sarà per lo precedente lemma, quello che si è adattato vguale à quello, che si contiene dalle parti A D D B, cioè vguale al quadrato di D B. percioche la A B si sega per mezo nel punto D. quello dunque, che si fa quattro volte da D B è vguale al quadruplo di quello che si è adattato. ma quello, che si fa quattro volte da D B è il quadrato di A B, perche le doppie in lunghezza sono in potenza quadruple. & il quadruplo di quello che si è adattato è il quadrato di C. adunque il quadrato, che si fa da A B è vguale al quadrato di C, cioè il quadrato della maggiore è vguale al quadrato della minore, che non è possibile. onde la quarta parte del quadrato, che si fa da C adattato alla A B non passa per mezo di detta linea.



LEMMA III.

Date due linee rette disuguali, adattare alla maggiore la quarta parte del quadrato, che si fa dalla minore, dimodo che manchi della figura quadrata.

Siano due linee rette date disuguali A B C D, & sia A B la maggiore, & bisogni fare cio che si è proposto. seghisi la C D per mezo nel punto E. egli è manifesto, che la quarta parte del quadrato di C D è il quadrato di C E. & descriuasi nella linea retta A B il mezo cerchio, & seghisi la A B per mezo nel punto F, poi dal punto F tirisi sopra la A B ad angoli retti la F G. perche dunque A B è maggiore di C D, sarà anchor la metà di A B maggiore della metà di C D, cioe maggiore di C E. pongasi la F H vguale alla C E; & per H tirisi la H K parallela alla A B, & dal punto K tirata la perpendicolare K L sopra la A B, giunganſi A K K B. il triangolo dunque A K B è rettangolo, & dall'angolo, retto alla base si è tirata la K L perpendicolare. onde il rettangolo A L B è vguale al quadrato, che si fa dalla K L. prolunghisi K L, & pongasi L M vguale ad L B, & compiscasi la figura. adunque il quadrato, che si fa dalla K L, cioè dalla F H è vguale al parallelogrammo A M. ma quello, che si fa dalla F H è vguale al quadrato della C E, cioè alla quarta parte del quadrato della C D: & è il parallelogrammo A M, che mancha della figura quadrata. il che bisognaua fare.



8. & 17. del 6.

THEOREMA XV. PROPOSITIONE XVIII.

Se siano due linee rette disuguali, & alla maggiore sia adattato un parallelogrammo vguale alla quarta parte del quadrato della minore, che manchi della figura quadrata, & diuida la linea in parti commensurabili in lunghezza; la maggiore potrà tanto piu che la minore, quanto è il quadrato di vna linea retta commensurabile ad essa in lunghezza. & se la maggiore possa

tanto piu che la minore, quanto è il quadrato d'vna linea retta commensurabile ad essa in lunghezza, & alla maggiore sia adattato vn parallelogrammo vguale alla quarta parte del quadrato della minore, che manchi della figura quadrata, diuiderà la linea in parti commensurabili in lunghezza.

A Siano due linee rette disuguali A B C, la maggiore delle quale sia B C, & alla B C adattisi vn parallelogrāmo vguale alla quarta parte del quadraro, che si fa dalla minore A, cioè à quello che si fa dalla meta di A, che manchi della figura quadrata, & sia quello che si contiene dalle B D D C, & sia la B D in lunghezza commensurabile alla D C. Dico che la B C può tanto piu che la A, quanto è il quadrato di vna linea retta in lunghezza commensurabile ad essa. seghisi la B C per mezo nel punto E, & pongasi la E F vguale alla D E. la rimanente dunque D C è vguale alla rimanente B F. & perche la linea retta B C è segata in parti vguali nel punto E, & in parti disuguali nel D, sarà il rettangolo B D C insieme col quadrato di E D vguale al quadrato di E C. & li quadrupli loro. quello dunque che è contenuto quattro volte dalle B D D C insieme col quadrato che si fa quattro volte dalla E D è vguale al quadrato che si fa quattro volte dalla E C. ma à quello che è quattro volte contenuto dalle B D D C è vguale il quadrato di A: & à quello che si fa quattro volte dalla D E è vguale il quadrato di D F, percioche la D F è doppia della D E: & à quello che si fa quattro volte dalla E C è vguale il quadrato di B C, essendo la B C doppia della E C. adunque i quadrati che si fanno dalle A D F sono vguali al quadrato di B C, & però il quadrato di B C è maggiore del quadrato della A, quanto è il quadrato di D F. onde la linea retta B C può tanto piu che la A, quanto è il quadrato di D F. si ha da dimostrare anchora la B C essere commensurabile alla D F. percio che essendo la B D in lunghezza commensurabile alla D C, sarà etiandio la B C commensurabile in lunghezza alla C D. ma la D C è cōmensurabile in lunghezza alle C D B F, concioſiacoſa che la C D sia vguale alla B F. onde etiandio la B C è commensurabile in lunghezza alle B F C D: & però alla rimanente anchora F D sarà commensurabile in lunghezza. adunque la B C può tanto piu che la A, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza commensurabile ad essa. Ma possa la B C piu che la A, quanto il quadrato della linea retta commensurabile ad essa in lunghezza: & à B C adattisi un parallelogrammo vguale alla quarta parte del quadrato di A, che manchi della figura quadrata; & sia quello che si contiene dalle B D D C. si ha da dimostrare la B D essere in lunghezza cōmensurabile alla D C. percioche hauendo fatte le medesime cose dimostreremo similmēte la B C poter piu che la A, quāto è il quadrato della linea retta F D. ma la B C può più che la A, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza commensurabile ad essa. adunque la B C è commensurabile alla F D in lunghezza, & però alla rimanente, cioè all'vna & l'altra delle B F C D è in lunghezza commensurabile. ma l'vna & l'altra delle B F C D è commensurabile alla D C in lunghezza, percioche la B F è vguale alla D C. adunque etiandio la B C è commensurabile in lunghezza alla D. dalle qual cose appare la B D essere commensurabile in lunghezza alla D C. se dunque siano due linee rette disuguali, & quello che seguita. il che bisognaua dimostrare.

5. del secondo.

11. del quinto.

B

C

D

E

F

G

H

IL COMMANDINO.

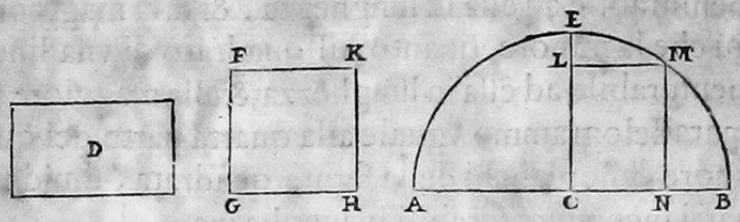
A Et alla B C adattisi vn parallelogrammo vguale alla quarta parte del quadrato che si fa dalla minore A, cioè à quello che si fa dalla metà di A, che manchi

della

della figura quadrata] *per l'antecedente lemma. & questo non è altro se non segare vna linea retta maggiore di modo, che il rettangolo contenuto dalle portioni di essa sia vguale alla quarta parte del quadrato della minore. ma possiamo quel medesimo piu vniuersalmente spiegare in questo modo.*

Segare vna retta linea data talmente che il rettangolo contenuto dalle parti di essa sia uguale al dato rettilineo. ma bisogna che il dato rettilineo sia minore del drato, che si descriue dalla metà.

Sia la data linea A B, segata per mezo nel punto C, & sia il rettilineo dato D. & bisogni fare cio che si è proposto. descriuasi nella A B il mezo cerchio A E B, & dal punto C ad angoli retti sopra la A B tirisi la C E. poi facciasi il quadrato F G H K vguale al rettilineo D. sarà



il suo lato F G minore della A C, cioè della C E. onde dalla retta linea CE taglisi la C L vguale alla F G; & per L tirisi la LM parallela alla AB, & per la M tirisi la MN parallela alla CE. Dico la linea retta A B essere segata nel punto N, come bisognaua, cioè il rettangolo A N B essere vguale al rettilineo D. percioche è vguale al quadrato di M N. ma perche la M N è vguale allu C L, cioè alla F G, sarà il rettangolo A N B vguale al quadrato F G H K, cioè al rettilineo D il che bisognaua fare.

Similmente diuideremo vn numero dato in due parti talmente che quel numero che si produce da esse sia vguale ad vn'altro numero dato. ma bisogna che'l numero dato à cui deue essere vguale, sia minore del quadrato della metà.

Sia il dato numero 20 qual bisogni diuidere in due parti, di modo che quello che si produce dalle due parti sia vguale al dato numero 75. pigliſi la metà di 20. che è 10. & moltiplichisi in se stessa. farà 100. dal quale trarremo il dato numero cioè 75. & rimarrà 25. il lato del quale che è 5; aggiunto à 10. fa 15, & tratto dal medesimo 10. fa 5. Dico 20 essere cosi diuiso in queste parti, come bisognaua, cioè quello che da esse si fa essere vguale al dato numero 75. percioche diuidendosi 20 in due parti vguali, & due parti disuguali, il numero piano che si fa dalle parti disuguali insieme col quadrato del numero interposto è vguale al quadrato che si fa dalla meta, il che è stato dimostrato da Barlaam monacho nel quinto theorema di quelli che noi habbaimo aggiunti alla 15. del nono. adunque quello che si fà da 15 & 5 insieme col quadrato di 5 è vguale al quadrato della metà, cioè à 100. & trattone il quadrato commune 25 sarà quello che si produce da 15 & 5 vguale al dato numero 75. il che bisognaua fare.

Ma à quello che è quattro volte contenuto dalle D B BC è vguale il quadrato di A] *percioche si pone il parallelogrammo rettangolo D B C vguale alla quarta parte del quadrato di A.* B

Sarà etiandio la B C commensurabile in lunghezza alla C D] *per la prima parte della sesta decima di questo.* C

Onde etiandio la BC è commensurabile in lunghezza alle B F C D] *per la 12. di questo.* D

Et però alla rimanente anchora F D sarà commensurabile in lunghezza] *per quello che noi habbiamo dimostrato alla 17 di questo, percioche piglinsi B F D C insieme, come se fosse vna linea sola.* E

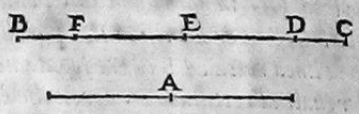
Et però alla rimanente cioè all'vna & all'altra delle B F D C è in lunghezza cõmensurabile] *per il medesimo theorema che habbiamo posto alla 17 di questo.* F

Adunque etiãdio la BC e cõmensurabile in lũghezza alla DC] *per la 12 di questo.* G

Dalle qual cose appare la B D essere commensurabile in lunghezza alla D C] *per la seconda parte della 16. di questo.* H

THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XIX.

Se siano due linee rette disuguali, & alla maggiore sia adattato vn parallelogrammo vguale alla quarta parte del quadrato della minore, che manchi della figura quadrata, & diuida la linea in parti incommensurabili in lunghezza, la maggiore potrà tanto più che la minore, quanto è il quadrato di vna linea retta incommensurabile ad essa in lunghezza. & se la maggiore possa tanto piu che la minore, quanto è il quadrato di vna linea retta incommensurabile ad essa in lunghezza, & alla maggiore sia adattato un parallelogrammo vguale alla quarta parte del quadrato della minore, che manchi della figura quadrata, diuiderà la linea in parti incommensurabili in lunghezza.



Siano due linee rette disuguali A B C, la maggiore delle quali sia B C, & alla B C adattisi vn parallelogrammo vguale alla quarta parte del quadrato fatto dalla minore A, che manchi della figura quadrata, & sia quello che si contiene dalle B D D C. & sia la B D incommensurabile in lunghezza alla B C. Dico la B C poter piu che la A, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza incommensurabile ad essa: percioche hauendo fatte le medesime cose che disopra, dimostreremo similmente la B C poter più che la A, quanto è il quadrato della linea retta DF. si ha dunque da dimostrare la BC essere in lunghezza incommensurabile alla D F. perche essendo la B D incommen
17. di questo. surabile alla D C, sarà anchor la B C alla C D in lunghezza incōmensurabile. ma la
14. di questo. D C è incommensurabile all'vna & l'altra B F D C. adunque etiādio la B C è in lun
Per le cose di- ghezza incommensurabile alle B F D C, & però è incommensurabile in lunghez
mostrate alla za alla rimanente F D: & la B C può tanto piu che la A, quanto è il quadrato della
17. di questo. linea retta in lunghezza incommensurabile ad essa. Ma la B C possa tanto piu che la A, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza incommensurabile ad essa: & alla B C adattisi vn parallelogrammo vguale alla quarta parte del quadrato di A, che manchi della figura quadrata, & sia quello che si contiene dalle B D D C. si ha da dimostrare la B D essere incommensurabile in lunghezza alla D C: percioche hauendo fatte le medesime cose dimostreremo similmente la B C poter piu che la A, quanto è il quadrato della linea retta D F. resta dunque da dimostrare la BC poter piu che la A, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza incommensurabile ad essa. è dunque la B C incommensurabile in lunghezza al
per le cose di- la D F. onde etiandio alla rimanente, cioe all'un' & l'altra B F D C e incommen-
mostrate alla surabile. ma l'vna & l'altra B F D C e in lunghezza commensurabile alla D C, a-
17. di questo. dunque anchor la B C e incommensurabile in lunghezza alla D C, & però diui-
14. di questo. dendosi la B D alla DC sarà incommensurabile in lunghezza. se dunque siano due linee rette disuguali & quello che seguita. il che bisognaua dimostrare.

SCHOLIO.

Sin qui ha trattato delle grandezze commensurabili & incommensurabili. hora viene alle rationali & medie.

LEMMA I.

Perche si è dimostrato le grandezze commensurabili in lunghezza in tutto essere in potenza commensurabili, & le commensurabili in potenza non in tutto essere commensurabili in lunghezza, ma poter essere & commensurabili in lunghezza & incommensurabili, egli è manifesto, che se ad una linea rationale proposta vn'altra sia commensulabile in lunghezza, quella chiamarsi rationale, & commensurabile alla proposta, non solo in lunghezza, ma anchora in potenza, percioche le commensurabili in lunghezza sono in tutto altresì in potenza commensurabili. ma se alla rationale proposta vn'altra sia commensurabile in potenza, se anche in lunghezza, si dirà rationale & commensurabile à quella in lunghezza & potenza. & se alla rationale proposta alcun'altra essendo in potenza commensurabile sia incommensurabile in lunghezza, si dirà anchora rationale in potenza solamente commensurabile.

LEMMA II. DI PROCLO.

Rationali chiama quelle, che alla rationale proposta ò vero in lunghezza & potenza sono commensurabili, ò vero in potenza solamente. sono anchora altre linee rette iucommensurabili in lunghezza alla proposta rationale, ma commensurabili in potenza solamente: & per ciò si diranno rationali & commensurabili fra loro in quanto rationali, ma commensurabili ò vero in lunghezza & potenza, ò vero in potenza solamente. & se commensurabili in lunghezza, si diranno anchora rationali & commensurabili in lunghezza, si che s'intendano altresì essere in potenza commensurabili. ma se in potenza solamente sono fra loro commensurabili, si chiameranno anchora rationali in potenza solamente commensurabili.

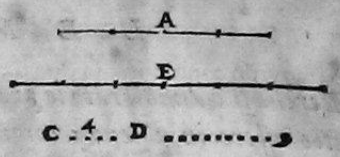
Ma le rationali essere commensurabili è chiaro da questo.

Perche le rationali sono quelle, che alla proposta rationale sono commensurabili, & quelle che sono commensurabili alla medesima, sono anchor fra loro commensurabili; seguita le rationali essere commensurabili. il che bisognaua dimostrare. 12. di questo.

LEMMA III.

Trouare due rationali in lunghezza commensurabili.

Propongaſi la rationale A, & due numeri C D, ò quadrati, ò uero che habbiano la proportione c'ha il numero quadrato al numero quadrato: & facciaſi come C à D, coſi il quadrato della A al quadrato della E. ſaranno per le coſe già dimoſtrate le A E in lunghezza commenſurabili.



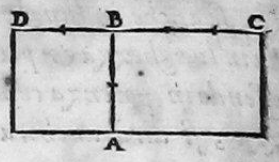
Cor. della 6. di queſto. 9. di queſto.

THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XX.

Il rettangolo contenuto da linee rette rationali in lunghezza commenſurabili ſecondo qualche modo delli ſopradetti, ſarà rationale.

A

Contengaſi il rettangolo A C da linee rette rationali in lunghezza commenſurabili A B B C. Dico il rettangolo A C eſſere rationale.



B

deſcriuaſi dalla A B il quadrato A D. adunque A D è rationale. & perche la A B, è in lunghezza commenſurabile alla B C & è la A B vguale alla B D; ſarà anchor la D B in lunghezza commenſurabile alla B C. & è come la D B alla B C, coſi D A ad A D. ma la D B alla B C è commenſurabile. adunque etiandio D A ſarà commenſurabile ad A C. & è D A rationale. onde anchor A C ſarà rationale. Il rettangolo dunque contenuto da linee rette rationali in lunghezza commenſurabili ſecondo qualche modo delli ſopradetti, ſarà rationale. il che biſognaua dimoſtrare.

1. del ſeſto.

C

D

IL COMMANDINO.

A Secondo qualche modo delli ſopradetti] *delle linee rette A B B C ò amendue ſono in lunghezza commenſurabili alla propoſta rationale, ò amendue alla medeſima ſolamente in potenza commenſurabili. ma fra loro commenſurabili in lunghezza. & in qualunque modo ſi ſiano, il rettangolo che ſi fa da eſſe è rationale, & la medeſima dimoſtratione conuiene in tutti.*

B Adunque A D è rationale] *per la nona diffinitione. percioche o ſiano in lunghezza commenſurabili alla propoſta rationale, ò in potenza ſolamente, i quadrati di eſſe ſono rationali, eſſendo commenſurabili al quadrato della rationale propoſta.*

C Adunque etiandio D A ſarà commenſurabile ad A B] *per la decima di queſto.*

D Et è D A rationale. onde anchor A C ſarà rationale] *percioche quello che è commenſurabile al rationale è anch'eſſo rationale. il che ſi dimoſtrerà coſi.*

Sia il quadrato della propoſta rationale A, & ſia commenſurabile ad eſſo il ſpatio B. ſarà B rationale per la nona diffinitione. ſia poi vn'altro ſpatio C commenſurabile à B. Dico anchor C eſſere rationale. perche li ſpatij A C ſono commenſurabili al medeſimo ſpatio B, ſono etiandio commenſurabili fra loro per la 12. di queſto: & eſſendo C commenſurabile ad A, ſarà anche rationale per la nona diffinitione. il che biſognaua dimoſtrare.

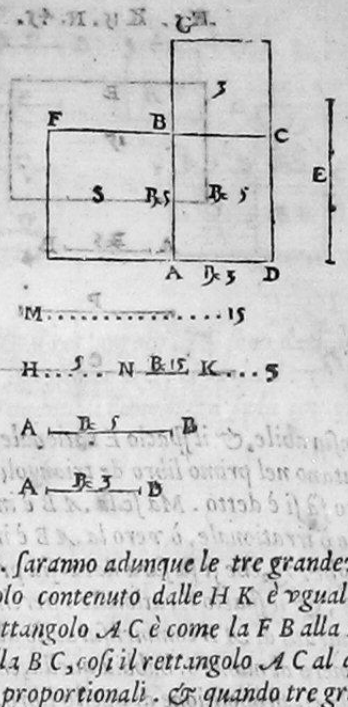


Et accio che quelle coſe che in queſto luogo ſi dicono delle rationali, ſiano piu manifeſte, & quaſi ſi pongano innanzi a gli occhi, ci è piacciato aggiungere alcuni theoremi che ſaranno vtili etiandio alle coſe che ſeguitano.

THEOREMA I.

Il rettangolo contenuto da due date rette linee rationali, sarà dato.

Da due date linee rette rationali A B A D contengasi il rettangolo A C. Dico A C esser dato; percioche posta la rationale E ò l'vna & l'altra di esse A B A D è cõmensurabile alla E in lunghezza, & l'vn'& l'altra è in potenza solamente commensurabile, ò vna in lunghezza & l'altra in potenza solamente è commensurabile. & se l'vna & l'altra è in lunghezza commensurabile, il rettangolo contenuto da esse sarà dato, per quello chè è stato dimostrato da Giouanni Regiomontano nel primo libro de triangoli alla 16. propositione, & da noi ne commentarij della 3. propositione del libro di Archimede della misura del cerchio. & se l'vna & l'altra è in potenza solamente commensurabile nondimeno il rettangolo sarà dato. facciansi dalle A B A D i quadrati A F C G. & perche le A B A D sono in potenza commensurabili, & i quadrati di esse saranno commensurabili. & però fra loro haueranno la proportione che ha il numero al numero. & sia il quadrato A F al quadrato C G come il numero H al numero K & H moltiplicando K faccia M. la cui radice sia N. saranno adunque le tre grandezze H N K continuamente proportionali, percioche il rettangolo contenuto dalle H K è vguale al quadrato di N, cioe ad M, & perche il quadrato F A al rettangolo A C è come la F B alla B C cioè come la A B alla B C, & come la A B alla B G, cioè alla B C, così il rettangolo A C al quadrato C G, saranno queste tre grandezze continuatamente proportionali. & quando tre grandezze siano proportionali la prima alla terza ha doppia proportione di quella che ha alla seconda. adunque il quadrato A F al quadrato C G ha doppia proportione di quella che ha al rettangolo A C. ma il quadrato A F al quadrato C G è come il numero H à K. & hauendo H à K similmente doppia proportione di quella che ha ad N, sarà il quadrato F A al rettangolo A C, come H ad N. & sono le grandezze H N date, & però sarà data la loro proportione. & è dato il quadrato F A. onde il rettangolo A C sarà dato. per la medesima ragione dimostreremo il rettangolo esser dato, se vna delle date linee sia in lunghezza commensurabile & l'altra in potenza solamente. il che bisognaua dimostrare.



5 di questo.

17. del sesto.

1 del sesto.
11 del quinto.
10 diff. del 5.

1 delli dati di Euclid.
2. delli dati di Enclid.

ORATIONE.

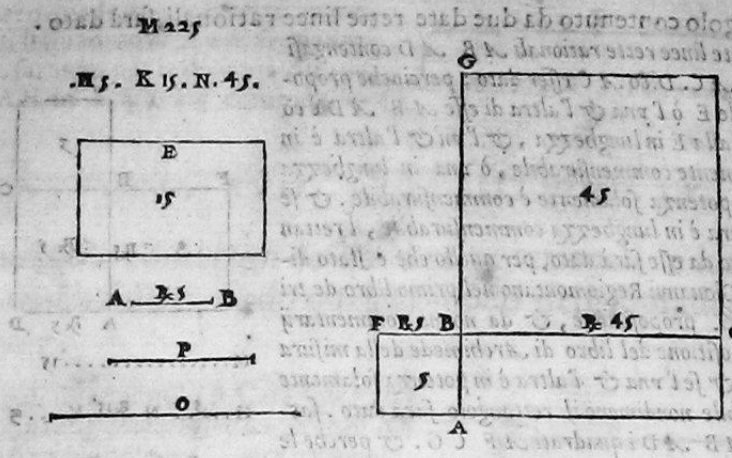
Se le date grandezze siano radici de numeri, moltiplicheremo essi numeri fra loro, & se vna di esse sia numero & l'altra radice di numero, moltiplicheremo il quadrato del numero per lo numero del quale l'vna è radice, & la radice di quello che si produrrà, diremo essere il rettangolo contenuto dalle due linee rette date. & questo non è altro che la moltiplicatione che chiamano delle radici quadrate fra loro, come se la A B sia R. 5 A D R 3, moltiplicheremo 5 per 3 si farà 15, la cui radice sarà quello che si produce da R 5, et R 3 moltiplicate fra loro. ma se la A B sia 2 & la A D R 5, moltiplicheremo il quadrato del 2 cioè 4 per 5. & si farà 20, la cui radice sarà il prodotto che si cercha.

THEOREMA II.

Se ad vna data linea retta rationale sia adattato vn spatio dato, sarà la larghezza che si fa etiandio data.

Sia la data retta linea rationale A B, & il dato spacio E. Dico se alla linea retta A B si adatti il spatio E, la larghezza che si fa esser data. adunque la linea retta A B, ò vero è lunghezza

commenſurabile alla propoſta rationale, ò vero in potenza ſolamente: & il ſpacio ò vero è rationale, ò vero irrationale, che è chiamato medio. & ſe la linea retta A B è in lunghezza com



menſurabile, & il ſpacio E rationale, quello ſarà manifeſto, da quello, che ha dimoſtrato il Regiomontano nel primo libro de triangoli alla propoſitione 17. & noi nel medeſimo luogo, del quale poco ſà ſi è detto. Ma ſe la A B è in potenza ſolamente commenſurabile & il ſpacio E ò rationale ò irrationale, ò vero la A B è in lunghezza commenſurabile, & il ſpacio E irrationale, la larghezza, che ſi fa ſarà data. ſia prima la linea retta A B ſolamente in potenza commenſurabile, & il ſpacio E rationale. perche dunque la A B è rationale, & il ſpacio rationale, ſarà il quadrato di A B commenſurabile al ſpacio E, & però ad eſſo hauerà la proportione, che ha il numero al numero. habbia quella, che ha il numero H al numero K, & facciaſi per lo corollario della 6. propoſitione di queſto libro, come H à K, coſi la linea retta A B ad vn'altra linea retta O; & fra la A B, & la O preſa la proportionale di mezo P. ſarà come la A B alla O, cioè come il numero H al numero K, coſi il quadrato della linea retta A B al quadrato della linea retta P. ma il quadrato della linea retta AB al ſpacio E era come il numero H al numero K. hauendo dunque il quadrato della A B al ſpacio E la medeſima proportione, che ha al quadrato della P, ſarà il quadrato della P vguale al ſpacio E. onde alla linea retta A B adattiſi vn parallelogrammo rettangolo A C, vguale al quadrato della P, cioè vguale al ſpacio E, che faccia la larghezza B C; & dalle A B B C deſcriuanſi i quadrati A F C G, & il numero K moltiplicando ſe ſteſſo faccia M, & diuiſo M per K ne venga N. ſaranno le tre grandezze H K N continuamente proportionali, concioſiacoſa, che il rettangolo contenuto dalle H N ſia vguale al quadrato di K. perche dunque il quadrato F A al rettangolo A C è come il rettangolo A C al quadrato C G, il che ſi è dimoſtrato diſopra, & il quadrato F A al rettangolo A C è come il numero H al numero K, ſarà anchor il rettangolo A C al quadrato C G, come K ad N. ma il quadrato F A, & il rettangolo A C ſono dati, eſſendo dati i numeri K N. ſarà dunque etiandio il quadrato C G dato, & la ſua radice data B C, cioè la larghezza che fa il ſpacio E, adattato al la linea retta A B.

Corol. della 20. del ſeſto.

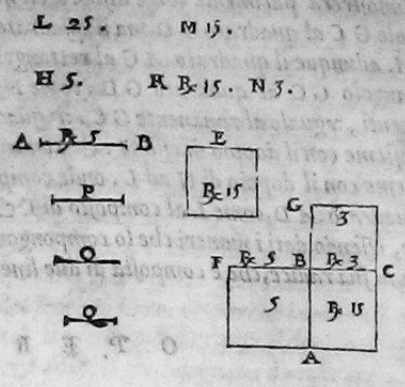
9. del quinto.

17. del ſeſto.

2. de i dati di Euclid.

Sia oltre à ciò la linea retta AB in potenza ſolamente commenſurabile, & il ſpacio E irrationale. adunque il quadrato della linea retta A B è incommenſurabile al ſpacio E. & ſia il quadrato della linea retta A B al ſpacio E, come H à K, cioè alla radice del numero M, & H moltiplicando ſe ſteſſo faccia L. eſſendo dunque L M quadrati, & i lati loro H K, hauerà L ad M doppia proportione di quella, che ha H à K. & facciaſi come L ad M, coſi la linea retta A B alla linea retta Q, & fra la A B & la Q pigliſi la proportionale di mezo O. hauerà dunque la A B alla Q doppia proportione di quella, che ha alla O. & è come L ad M coſi la A B alla Q: adunque come H à K, coſi la A B alla O. ſimilmente fra la AB & la O trouiſi la proportionale di mezo P. ſarà come la AB alla O, coſi il quadrato della A B al quadrato della P. come dunque H à K, coſi il quadrato della A B al quadrato della P. ma era come H à K, coſi il quadrato della A B al ſpacio E. adunque il quadrato della A B al quadrato della P ha la medeſima

proportione che al ſpatio E; & però il quadrato della P ſarà vguale al ſpatio E. adattiſi alla lineo retta A B il parallelogrammo rettangolo A C, vguale al quadrato della P, cioè vguale al ſpatio E, che faccia la larghezza B C. poi dalle AB BC facciansi i quadrati A F C G: & delle grandezze H K trouiſi la terza proportionale, cioè moltiplicata K in ſe ſteſſa, & quello che ſi produce diuiſo per H, come ſi è detto poco fa, et ſia la terza proportionale N. per la medeſima ragione ſi dimoſtrerà, come il quadrato della A B al rettangolo A C, coſi eſſere il rettangolo A C al quadrato C G. perche dunque le H K N ſono continuatamente proportionali, & il quadrato di F A al rettangolo A C è come H à K, ſarà anche il rettangolo A C al quadrato C G, come K ad N. ma il quadrato A F & il rettangolo A C ſono dati, dandoſi H K. adunque ſi darà etiandio il quadrato C G, & la ſua radice B C, cio è la larghezza che ſi ſa dal ſpatio E adattato alla linea retta A B. non altrimente ſi dimoſtrerà ſe la linea retta A B ſia in lunghezza commenſurabile, & il ſpatio E irrationale.



9. del quinto.

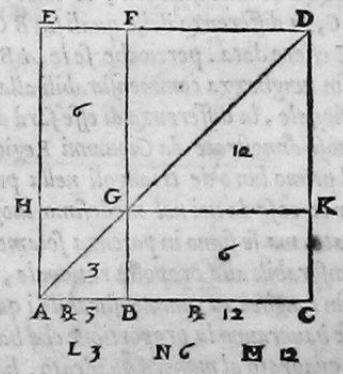
OPERATIONE.

Se le grandezze date ſiano radici de numeri, il numero che rende il ſpatio noto ſi diuida per l'altro numero, et ſe vna ſia radice del numero, il numero, di cui eſſa è radice ſi diuida per lo quadrato dell'altro numero, ò al contrario, il quadrato del numero ſi diuida per lo numero di cui eſſa è radice, & la ℞ di quello che viene, ſarà la larghezza che fa il ſpatio adattato alla linea retta, & queſta è la diuiſione delle ℞ fra loro che dicono, come ſe ℞ 15 ſi debba diuidere per ℞ 5, diuideremo 15 per 5, & ne verrà 3, di cui è ℞ quello, che ſi fa, diuidendo ℞ 15 per ℞ 5, & ſe vogliamo diuidere ℞ 20 per 2, diuideremo 20 per il quadrato di 2, cioè per 4, & verrà 5, di cui è ℞ quello, che ſi cerca.

THEOREMA III.

La retta linea che ſi compone di due date rationali commenſurabili in lunghezza, ſarà anchor data.

Da due date rationali in lunghezza commenſurabili A B B C compongaſi la linea retta A C. Dico la A C eſſer data. le linee date dunque ò ſono commenſurabili in lunghezza alla propoſta rationale, ò in potenza ſolamente, ma fra loro commenſurabili in lunghezza. & ſe ſiano commenſurabili in lunghezza alla propoſta rationale, la linea retta che di eſſe ſi compone, ſarà data per quello, che è ſtato dimoſtrato da Giouanni Regiomontano nel primo libro de triangoli alla terza propoſitione: & da noi nel medeſimo luogo. ma ſe alla propoſta rationale ſiano in potenza ſolamente commenſurabili, & fra loro commenſurabili in lunghezza, i quadrati loro haueranno la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato. Habbia il quadrato della linea retta A B al quadrato della linea retta B C la proportione, che ha il numero L al numero M. ſaranno i numeri L M ſimili piani, percioche ſe foſſero quadrati, le linee rette A B A C ſarebbono alla propoſta rationale in lunghezza commenſurabili, il che non ſi pone. adunque fra L & M caderà vn proportionale di mezo. caggia & ſia N: & deſcriuaſi dalla linea retta A C il quadrato A C D E, & giunta A D tiriſi per B la B G F pa



9. di queſto.

rallela ad vna di esse A E C D, & per G tirisi la H G K parallela ad vna delle A C E D. si dimostrerà parimente come disopra, il quadrato A G al rettangolo G C essere, come il rettangolo G C al quadrato G D. ma il quadrato A G al quadrato G D è, come il numero L al numero M. adunque il quadrato A G al rettangolo G C è, come il numero L al numero N, & il rettangolo G C al quadrato G D, come N ad M. & è il rettangolo E G che è vno de supplementi, vguale al rimanente G C. il quadrato dunque A G al gnomone E K B è, come L ad M insieme con il doppio di esso N: & conuertendosi il gnomone E K B al quadrato AG, come M insieme con il doppio di N ad L. onde componendosi & conuertendosi il quadrato A G à tutto il quadrato A D, come L al composto di L & M insieme con il doppio di N. ma questo cõposto è dato, essendo dati i numeri che lo compongono. adunque tutto il quadrato A D sarà dato, & data la sua radice, che è composta di due linee rette date. il che bisognaua dimostrare.

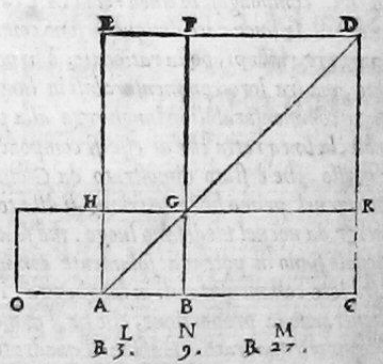
OPERATIONE.

Comporremo insieme i numeri rispondenti alli quadrati delle date linee con il doppio del lato di quel quadrato, che si produce dalla moltiplicatione di essi fra loro, cioè con il doppio del numero proportionale, che è in mezo di essi: & la radice di questo composto sarà la linea retta che si fa di due rette linee date. & questo è l'aggiungimento delle radici fra loro, che dicono, come se Rx 3 si debba aggiungere à Rx 12, giungeremo prima 3 con 12, poi moltiplicando 12 per 3 il lato di quello che si produce cioè 36, che è 6, doppiaremo, & congionti tutti insieme si faranno 27, la cui radice è la linea retta che cerchiamo. & come di due rationali in lunghezza commensurabili, se si compogano insieme, si fa vna linea retta, così di due spatij medij commensurabili, se parimente si compongano fra loro, si farà vn medio. & se si debbano aggiungere insieme due rationali in lunghezza incommensurabili come Rx 3 Rx 5, diremo Rx 3 insieme con R 5, ò vero Rx 3 aggiuntaui R 5, ò vero ci seruiremo di questa voce piu, che si vsa communemente in questo modo R 3 piu R 5, ò 3 piu R 8: & così si farà se siano anche piu di due, come 2 piu R 3 piu R 5, & se siano due si diranno di due nomi, ò vero binomij, come appo il Campano, & li piu moderni, & se di tre si diranno di tre nomi, ò vero trinomij, & medesimamente ne gli altri.

THEOREMA IIII.

Di due rationali date, le quali siano disuguali & commensurabili in lunghezza, la differenza sarà data.

Siano due rationali disuguali, & in lunghezza commensurabili, le linee rette A B A C, la differenza delle quali sia B C. Dico la B C essere data. percioche se le A B A C siano in lunghezza commensurabili alla proposta rationale, la differenza di esse sarà data, per le cose dimostrate da Giouanni Regiomontano nel primo libro de triangoli nella prop. 4 & per le cose da noi nel medesimo luogo dimostrate. ma se siano in potenza solamente commensurabili alla proposta rationale, & fra loro in lunghezza commensurabili, i quadrati di esse haueranno la proportione che ha il numero quadrato al numero quadrato. habbia dunque il quadrato della linea retta A B al quadrato della retta A C quella proportione, che ha il numero L al numero M. saranno i numeri L M simili piani, & però fra loro caderà vn proportionale di mezo. caggia & sia N, & dalla linea retta A C descriuasi il quadrato A C D E, & compiscasi la figura, come disopra; & prolungata la C A sino al punto O, dimodo



9. di questo.

18. dell'ottauo

che

che A O sia vguale ad A B, descriuasi il quadrato O H, che sarà vguale al quadrato della linea retta A B, cioè ad A G. & è il quadrato O H al rettangolo H C, come la O A alla A C, & il rettangolo H C al quadrato C E, come la C K alla C D, cioè come la O A alla A C. adunque come il quadrato O H al rettangolo H C, così è il rettangolo H C al quadrato C E. ma anchor i numeri L M N sono continuatamente proportionali, & il quadrato O H al quadrato C E è come il numero L al numero M. il quadrato dunque O H al rettangolo H C sarà come L ad N, & il rettangolo H C al quadrato C E, come N ad M. & essendo il rettangolo E G vguale al rettangolo G C, percioche sono supplementi, aggiunto il quadrato vguale all'vno & l'altro, sarà il rettangolo H C vguale al rettangolo E H insieme col quadrato H O. se dunque dalli due quadrati O H A D si tragga il doppio del rettangolo H C, che è contenuto dalle linee rette C A A B, il rimanente sarà il quadrato F K, il cui lato G K è vguale alla linea retta B C. il che si è dimostrato ancho nella settima propositione del secondo libro. & perche i numeri L M N sono dati, etiandio i quadrati O H C E saranno dati, & il rettangolo H C, & il doppio di esso. adunque anchor il quadrato F K & il suo lato B C sarà dato. il che bisognaua dimostrare.

OPERATIONE.

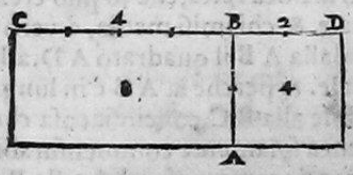
Congiungeremo insieme i numeri respondenti à quadrati delle date linee, & da quello che si fa ne trarremo il doppio del numero, che è fra essi proportionale di mezo. percioche si lascerà il quadrato, la cui radice sarà la linea retta, che cerchiamo. & questa è la sottrattione che dicono della radici quadrate, come se dalla R 27 si debba trarre la R 3 giungeremo 27 con 3 si farà 30, dal quale trarremo il doppio del numero proportionale di mezo fra 3 & 27 che è 9, cioè 18. & rimarranno 12, la cui radice è quella, che noi cerchiamo. nel medesimo modo etiandio de spatij medij disuguali, che sono commensurabili si troverà la differenza. & se da qualche rationale si debba trarre vn'altra minore, che sia in lunghezza incommensurabile à quella, come se dalla R 5 vogliamo trarre la R 3, diremo la R 5 trattane la R 3, ò vero ci seruiremo di questa voce meno, come al presente vsano di fare, in questo modo R 5 meno R 3, & R 6 meno R 4 che Euclide chiama apotomi, & il Campano, & i piu moderni residui, ò vero recisi.

Se dunque la linea retta A B sia R 3 & la retta B C R 12, sarà dalle cose inanzi dimostrate nel primo de theoremi precedenti il rettangolo A C R 36, cioè 6. & similmente se A B sia R 8 & B C R 18, sarà il retttangolo A C R 144, cioè 12.

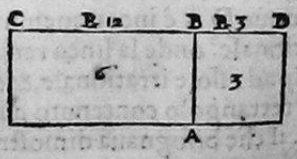
THEOREMA XVIII. PROPOSITIONE XXI.

Se vn spatio rationale sia adattato advna rationale, fa la larghezza rationale, & commensurabile in lunghezza à quella, alla quale è stato adattato.

Il spatio rationale A C adattisi alla rationale secondo alcuno de detti modi, che faccia la larghezza B C. Dico B C essere rationale & alla A B in lunghezza commensurabile. descriuasi dalla A B il quadrato A D. adunque A D e rationale. ma A C anchora e rationale, & però H D e commensurabile ad A C, & e come D A ad A C, così la D B alla B C. la D B dunque e commensurabile alla B C. & e la D B vguale alla B A. onde la A B e commensurabile alla B C. ma la A B e rationale. adunque anchora la B C e rationale, & alla B A commensurabile in lunghezza. se dunque vn spatio rationale sia adattato ad vna rationale, & quello che seguita. il che bisognaua dimostrare.



45. del primo.



Lem. 2. alla 20. di questo. 1. del sesto. 10. di questo.

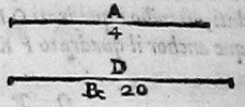
6. diff.

IL COMMANDINO.

Sia il ſpatio A C 6 & la linea retta A B ℞ 3, ſarà per lo ſecondo theorema delli precedenti la C B ℞ 12, che è commenſurabile à ℞ 3; percioche è doppia di eſſa. ſia oltre à ciò A C 12, & la linea retta A B ℞ 8. ſarà la C B ℞ 18: & è ℞ 18 à ℞ 8 come 3 à 2. percioche ſe ſi diuida ℞ 18 per ℞ 8, ne verrà ℞ 2 $\frac{1}{4}$, cioè ℞ $\frac{9}{4}$, che è $\frac{1}{2}$.

LEMMA I.

Trouare due rationali in potenza ſolamente commenſurabili.



Propōgaſi la rationale A, & due numeri BC, che non habbiano la proportione che ha il nuro quadrato al numero quadrato, & facciaſi come B à C, coſi il quadrato della A al quadrato della D. ſaranno dunque per le coſe dimoſtrate le A D in potenza ſolamente commenſurabili.

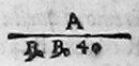
Cor. della 6. di queſto.

B....4 C.....5

LEMMA II.

La linea retta, che può vn ſpatio irrationale, è irrationale.

Poſſa la linea retta A vn ſpatio irrationale, cioè il quadrato che ſi fa da A ſia vguale ad un ſpatio irrationale. Dico la A eſſere irrationale, percioche s'ella ſia rationale, ſarà il quadrato che da eſſa ſi fa rationale, ponendoſi coſi nelle diffinitioni. ma non è rationale. adunque è neceſſario che la A ſia irrationale. il che biſognaua dimoſtrare.

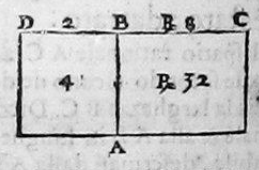


diff. 8.

THEOREMA XIX. PROPOSITIONE XXII.

Il rettangolo contenuto da linee rette rationali in potenza ſolamente commenſurabili, è irrationale, & la linea retta che lo può creare, è irrationale. & chiamiſi media.

Contengaſi dalle rationali in potenza ſolamente commenſurabili A B B C il rettangolo A C. Dico la linea retta, che lo può creare, eſſere irrationale. & chiamiſi media, ò vero mediale. deſcriuaſi dalla A B il quadrato A D. adunque AD è rationale. & perche la A B è in lunghezza incōmenſurabile alla B C, concioſiacoſa che ſi pongano in potenza ſolamente commenſurabili, & è la A B vguale alla BD: ſarà la DB in lunghezza incommenſurabile alla B C. & è come la D B alla BC, coſi D A ad A C. adunque D A è incommenſurabile ad A C. ma D A è rationale. & percio A C è irrationale. onde la linea retta che può il ſpatio A C, cioè che può il quadrato vguale ad eſſo, è irrationale, & chiamiſi media, percioche il quadrato di eſſa è vguale al rettangolo contenuto dalle A B B C. & è proportionale di mezo fra le A B B C. il che biſognaua dimoſtrare.

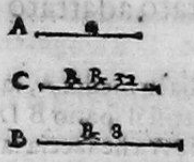


diff. 10.
diff. 11.

SCHOLIO I.

La linea media è irrationale, che può vn ſpatio contenuto da linee rette rationali in potenza ſolamente commenſurabili.

Contengaſi vn ſpatio dalle linee rette rationali in poten za ſolamente commenſurabili A B. ſi ha da dimoſtrare vn tal ſpatio eſſere irrationale. pigliſi delle A B la proportionale di mezo C. adunque quello che ſi fa dalle A B è vguale al quadrato della C, & però la C può il rettangolo contenuto dalle A B. e dunque come la A alla B, coſi il quadrato della A al quadrato della C. perche come la prima alla terza, coſi il quadrato della prima al quadrato della ſeconda, il che ſi è dimoſtrato nel corollario della 20. nel ſeſto de gli elemẽti. & è la A in lunghezza incommenſurabile alla B. adunque etiandio il quadrato della A è incõmenſurabile al quadrato della C. ma il quadrato della A è rationale. il quadrato dunque della C è irrationale, cioè il rettangolo contenuto dalle linee rette A B. onde la C è irrationale, & però ſi chiama media, che eſſendo irrationale, è proportionale in mezo delle A B.



diff. 11.

SCHOLIO II.

Da queſto theorema ſi coglie la linea media, che è vna delle irrationali, conſiderarſi nell'analogia geometrica; percioche è proportionale di mezo ſecondo l'analogia geometrica fra le rationali in potenza ſolamente commenſurabili. Et la linea retta che lo può creare, è media. perche ſe il rettangolo contenuto dalle eſtreme è vguale al quadrato della media, tre linee rette ſaranno proportionali.

17. del ſeſto.

IL COMMANDINO.

E da ſapere quel ſpatio irrationale che può la linea retta media, chiamarſi medio.

Sia la linea retta A B 2 & la retta B C R 8. ſarà il rettangolo A C R 32, che è irrationale, & ſi chiamerà medio: & la linea retta che non può creare R R 32, che ſi chiama media.

LEMMA

Se ſiano due linee rette, ſarà come la prima alla ſeconda, coſi il quadrato che ſi fà dalla prima al rettangolo contenuto dalle due dette linee.

Siano due linee rette F E E G. Dico come la F E alla E G, coſi eſſere il quadrato di F E al rettangolo F E G. deſcriuaſi dalla F E il quadrato D F, & compiſcaſi C F. perche dunque è come la F E alla E G, coſi D F à F G, & è D F il quadrato di F E, & F G quello che ſi contiene dalle D E E G, cioè il rettangolo F E G; ſara come la F E alla E G, coſi il quadrato della F E al rettangolo



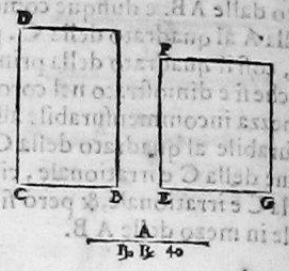
1. del ſeſto.

tangolo F E G. & ſimilmente come il rettangolo G E F al quadrato di E F, cioe come G F a F D, coſi e la G E alla E F.

THEOREMA XX. PROPOSITIONE XXIII.

Il quadrato della media adattato alla rationale fa la larghezza rationale & commenſurabile in lunghezza à quella, alla quale è ſtato adattato.

45 del primo. Sia la media A, la rationale C B: & alla C B adattiſi il ſpatio B D, vguale à quello che ſi fa dalla A, che faccia la larghezza C D. Dico C D eſſere rationale, & in lunghezza incommenſurabile alla B C. percioche eſſendo la A media, può vn ſpatio contenuto dalle rationali in potenza ſolamente commenſurabili. poſſa G F. ma può anchora B D. adunque B D è vguale à G F: & è equiangolo, & i lati de parallelogrammi equiangoli, che ſono d'intorno a gli vguali angoli ſi riſpondono fra loro contrariamente. come dunque la B C alla E G, coſi è la E F alla C D, & però come il quadrato della B C al quadrato della E G, coſi il quadrato di E F al quadrato di C D. ma il quadrato di B C è commenſurabile al quadrato di E G, percioche l'vna, e l'altra di eſſe è rationale. onde il quadrato di E F è commenſurabile al quadrato di C D, & il quadrato di E F è rationale. adunque anchor il quadrato di C D è rationale, & però la retta C D è rationale. & per che la linea retta F E è in lunghezza incommenſurabile alla E G, eſſendo in potenza ſolamente commenſurabile, & come la F E alla E G coſi il quadrato di E F al rettangolo F E G; ſarà il quadrato di E F incommenſurabile al rettangolo F E G. ma al quadrato di E F è incommenſurabile il quadrato di C D percioche ſono in potenza rationali, come ſi è dimoſtrato, adunque il quadrato di C D è incommenſurabile al rettangolo F E G. ma al rettangolo F E G è commenſurabile quello che ſi contiene dalle D C C B, concioſiacoſa che ſiano vguali al quadrato della A. il quadrato dunque di C D è incommenſurabile al rettangolo D C B. ma come il quadrato di C D al rettangolo D C B, coſi è la D C alla C B. adunque la D C è in lunghezza incommenſurabile alla C B, & però la D C è rationale, & è in lunghezza incommenſurabile alla C B. il che biſognaua dimoſtrare.



per l'antecedente.

14. del ſeſto.

22. di queſto.

10. di queſto.

per l'antecedente lemma.

13. di queſto.

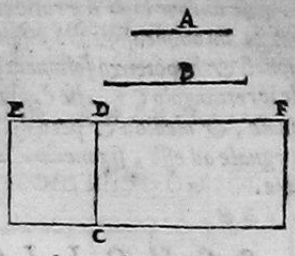
IL COMMANDINO.

Percioche ſono in potenza rationali] *cioè commenſurabili in potenza, eſſendo le rationali commenſurabili, come ſi dimoſtra nel ſcholio imanzi la vigeſima di queſto. & auenga che queſte voci in lunghezza & in potenza, ſi riferiſcano in gran parte alla commenſurabilità, & incommenſurabilità, nondimeno per queſto luogo è manifeſto referirſi talhora alla rationalità. il che alcuni hanno negato.*

Sia il quadrato della A R 40, & C B ſia 2. ſe dunque alla C B ſi adatti R 40, ſarà la larghezza R. 10. oltre à queſto ſe la C B ſia R 5, & ſi adatti ad eſſa R 40, ſarà la larghezza R 8. per lo ſecondo de gli antecedenti theoremi.

THEOREMA XXI. PROPOSITIONE XXIIII.

La linea commenſurabile alla media è media.



Sia la media A, & alla A ſia commenſurabile la B Dico anchor la B eſſere media. propongaſi la rationale C D, & alla C D adattiſi vn ſpatio rettangolo C E, vguale al quadrato della A, che faccia la larghezza E D. adunque la E D è rationale, & in lunghezza incommenſurabile alla C D: & alla medeſima C D adattiſi vn ſpatio rettangolo C F, vguale al quadrato della B, che faccia la larghezza DF. per che dunque la A è commenſurabile alla B, ſarà il quadrato della A commenſurabile al quadrato della B. ma al quadrato della A è vguale il rettangolo E C, & al quadrato della B è vguale C F. adunque il rettangolo E C è commenſurabile al rettangolo C F: & è come E C à C F, coſi la E D alla DF, onde la E D in lunghezza è commenſurabile alla D F. & è la E D rationale, & in lunghezza incommenſurabile alla D C. adunque la D F è rationale, & alla D C in lunghezza incommenſurabile. ſono dunque C D D F in potenza ſolamente commenſurabili, & il rettangolo, che ſi contiene dalle linee rette rationali in potenza ſolamente commenſurabili, è irrationale; & la linea retta che lo può creare, è irrationale, & chiamiſi media. il perche la linea retta che può il rettangolo C D F è media. ma la B può creare il rettangolo C D F. onde la B ſarà media.

45 del primo.

per l'antecedente.

Cor. 9. di queſto.

22. di queſto.

COROLLARIO.

Da queſto è chiaro, che il ſpatio commenſurabile ad vn ſpatio medio, è medio. percioche poſſono crearſi da linee rette, che ſono in potenza commenſurabili, l'vna delle quali è media. l'altra dunque ſarà media: & come nelle rationali ſi è detto, coſi ſi dirà nelle medie, la linea retta commenſurabile in lunghezza alla media chiamarſi media, & commenſurabile à quella non ſolo in lunghezza, ma ancho in potenza; concioſiacoſa che vniuerſalmente le commenſurabili in lunghezza ſiano altresì in potenza commenſurabili. Ma ſe vna linea retta ſia commenſurabile in potenza alla media, & ancho in lunghezza, ſi chiameranno medie in lunghezza & potenza commenſurabili, ma ſe in potenza ſolamente, ſi diranno medie in potenza ſolamente commenſurabili.

*

IL COMMANDINO.

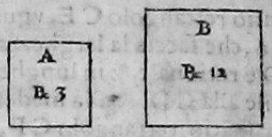
Da queſto è chiaro che il ſpatio commenſurabile ad un ſpatio medio, è medio. *

Sia il ſpatio medio A, & ad eſſo commenſurabile vn'altro ſpatio B. Dico il B eſſere medio. propongaſi la rationale C D, & adattiſi ad eſſa il ſpatio rettangolo C E, vguale al ſpatio A, che faccia la larghezza E D. ſarà la E D rationale, & in lunghezza incõmenſurabile alla C D. oltre à cio alla medeſima C D adattiſi vn'altro ſpatio rettangolo C F, vguale al ſpatio B, che faccia la larghezza D F. perche dunque il ſpatio A è commenſurabile al ſpatio B, & è al ſpatio A vguale il rettangolo C E, & al ſpatio B vguale il rettangolo C F, ſarà il rettangolo C E commenſurabile al rettangolo C F. ma come E C à C F, coſi è la E D alla D F. adunque etiandio la E D è in lunghezza commenſurabile alla D F. ma la E D è rationale, & alla C D in lunghezza incommenſurabile.

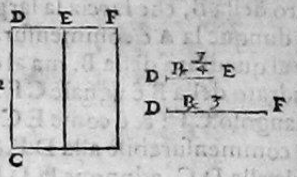
23 di queſto.

surabile. onde anchor la D F è rationale & alla C D in lunghezza incommensurabile. sono dunque C D D F rationali & in potenza solamente commensurabili. onde il rettangolo C F, che è contenuto da esse, è irrationale, & medio: & però è il necessario che spatio B vguale ad esso, sia medio. il che bisognaua dimostrare.

22. di questo.



SCHOLIO.

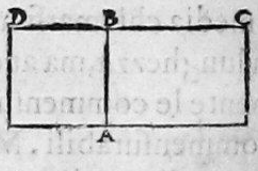


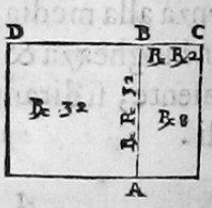
La media è di due sorti, cioè quella che può creare vn spatio contenuto da due rationali, in potenza solamente commensurabili, & quella che è commensurabile alla media. ma poi che ha dimostrato la media essere quella, che può creare vn spatio contenuto da due rationali in potenza solamente commensurabili, haueua bisogno di questo theorema per le cose che seguono, essendo che prima bisogni dimostrare alcune medie essere commensurabili, & poi ricercare qual spatio sia quello, che da esse si comprende.

THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXV.

Il rettangolo contenuto da linee rette medie in lunghezza commensurabili, è medio.

Contengasi il rettangolo A C dalle linee rette medie, in lunghezza commensurabili A B BC. Dico AC essere medio. descriuasi dalla A B il quadrato A D. adunque A D è medio. & perche la A B è in lunghezza commensurabile alla BC, & la AB vguale alla BD; sarà la D B commensurabile in lunghezza alla B C. onde etiandio D A è commensurabile ad A C. ma A D è medio. adunque sara medio anchora A C. il che bisognaua dimostrare.





IL COMMANDINO.

Quelle cose che si sono dimostrate disopra delle rationali, le medesime si dimostreranno delle medie.

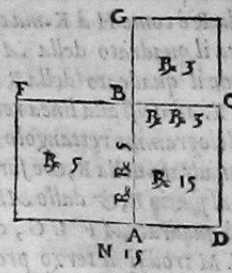
THEOREMA I.

Il rettangolo contenuto da due medie date, ò vero da vna media & vna rationale, sarà anchor dato.

Da due medie date, ò da vna data media, & dalla rationale contengasi il rettangolo A C. Dico A C esser dato. Siano prima le A B A D medie, & facciansi da esse i quadrati A F C G. saranno detti quadrati irrationali, che si chiamano mediy. & habbiano fra loro la proportione che ha H à K, & H moltiplicando se stessa faccia L, & K moltiplicando se stessa faccia M

&

& L moltiplicando M faccia N, la radice del quale N sia O; & la radice di O sia P. perche dunque tre grandezze L O M sono continuatamente proportionali, & la radici di esse sono H P K, saranno etiandio le H P K continuatamente proportionali. ma il quadrato F A al rettangolo A C è come il rettangolo A C al quadrato C G, che si è dimostrato disopra. & il quadrato F A al quadrato C G è come H à K, adunque anchor il quadrato F A al rettangolo A C sarà come H à P. & sono le H P date, & è dato il quadrato F A. adunque è necessario, che il rettangolo A C sia dato. Ma sia la A B media & la A D rationale, ò al contrario la A B rationale, & la A D media, & facciansi medesimamente da esse i quadrati A F C G, l'vno de quali è medio, & l'altro rationale, & hauendo fatte le medesime cose si dimostrerà altresì il rettangolo A C essere dato. il che bisognaua dimostrare.

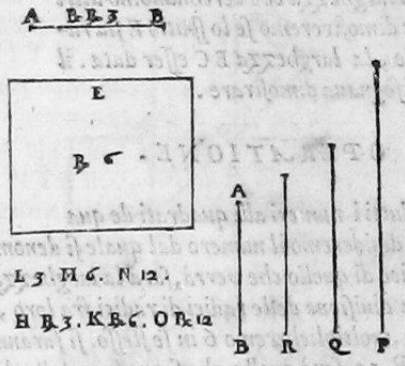


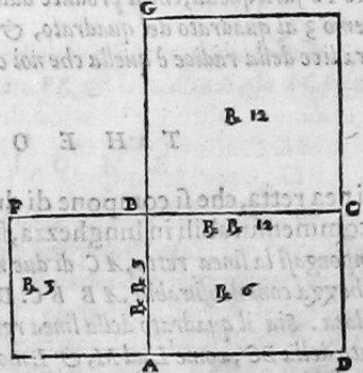
L 5. O R 15. M 3.
H R 5. P R R 15. K R 3.

delli dati.

OPERATIONE.

Moltiplicheremo fra loro i numeri ridutti alli quadrati de quadrati, & di quello che si produce la radice della radice sarà il rettangolo che si contiene dalle date linee rette. & questa è la moltiplicatione delle radici di radici fra loro, che di cono. come se A B sia R R 5, & A D R R 3, moltiplicheremo 5 per 3, faranno 15: & R R 15 sarà quello, che è contenuto dalle date linee rette. & se A B sia R R 5 & A D 2, il quadrato del quadrato di 2, cioè 16 moltiplichero per 5, saranno 80, & R R 80 sarà quello che si contiene dalle A B A D: finalmente se A B sia R 2 & A D R R 5, moltiplicheremo il quadrato di 2 cioè 4 per 5 & piglieremo la R della R del prodotto. sarà R R 20 quella che noi cerchiamo.





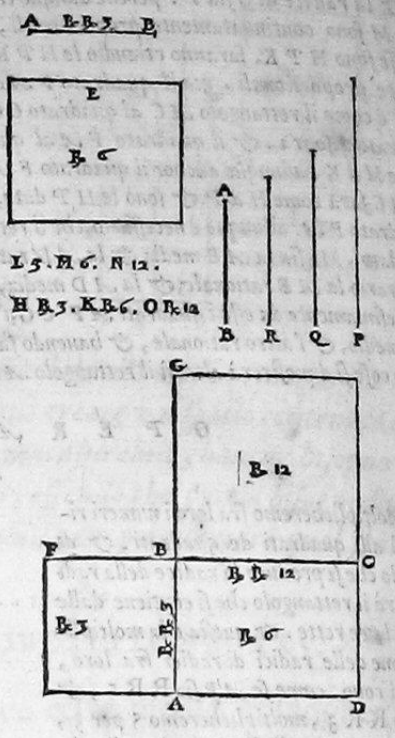
THEOREMA II.

Se ad vna media data sia adattato un dato spatio, la larghezza che si fà sarà data.

Sia la media data A B, & il dato spatio E, che adattato ad essa A B faccia la larghezza B C. Dico la B C esser data. per cioche ò vero lo spatio E è rationale, ò vero irrationale, che si chiama medio. sia prima irrationale, & medio, & habbia il quadrato di A B al spatio E la proportione, che ha H à K, & H moltiplicando se stessa faccia L, & K moltiplicãdo se stessa faccia M, hauerà L ad M doppia proportione di quella, che ha il lato al lato, cioè H à K. onde facciasi come L ad M, cosi la linea retta A B ad vn'altra retta P, & fra la A B & la P presa la proportionale di mezo Q, hauerà la A B al la P doppia proportione di quella, che ha alla Q. adunque la A B alla Q, sarà come H à K. poi fra la A B & la Q pigliasi la proportionale di mezo R. onde come la A B alla Q, cosi sarà il qua-

9. del quinto.

drato della A B al quadrato della R. adunque il quadrato della A B al quadrato della R è come H à K. ma come Hà K, così era il quadrato della A B al ſpatio E. onde il quadrato della R è vguale al ſpatio E. adattiſi alla linea retta A B vn parallelogrammo rettangolo A C, vguale al quadrato della R, che ſarà anche vguale al ſpatio E, & dalle AB AD facciansi i quadrati A F C G, & delli numeri L M trouiſi il terzo proportionale N, la cui radice ſia O. perche dunque i numeri L M N ſono proportionali, & le H K O ſaranno proportionali. & è il quadrato F A al rettangolo A C, come il rettangolo A C al quadrato C G. onde ſi dimoſtrerà ſimilmente come diſopra il rettangolo A C al quadrato C G eſſere, come K ad O. adunque etiandio il quadrato C G, & la ſua radice B C ſarà data, cioè la larghezza che cerchiamo. nõ altrimente dimoſtreremo ſe lo ſpatio E ſia rationale, la larghezza B C eſſer data. il che biſognaua dimoſtrare.



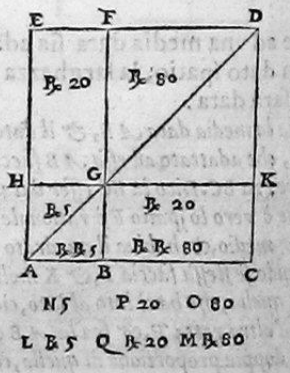
OPERATIONE.

Ridutti i numeri alli quadrati de quadrati, diuideremo il numero dal quale ſi denomina lo ſpatio per l'altro numero, & la radice della radice di quello che verrà, ſarà la larghezza, che ſa lo ſpatio adattato alla linea retta. & queſta è la diuiſione delle radici di radici fra loro, che dicono, come ſe ſi debba diuidere R 6 per R R 3, moltiplicheremo 6 in ſe ſteſſo. ſi faranno 36, & diuideremo 36 per 3, ne verranno 12. & R R 12 ſarà quella, che ſi produce dalla diuiſione loro. & ſe biſogni diuidere 3 per R R 3, ridurremo 3 al quadrato del quadrato, & ſi faranno 81, & diuiſi 81 per 3, ne verranno 27, la cui radice della radice è quella che noi cerchiamo.

THEOREMA III.

La linea retta, che ſi compone di due medie date commenſurabili in lunghezza, ſarà data.

Compongaſi la linea retta A C di due medie date in lunghezza commenſurabili A B B C. Dico la AC eſſere data. Sia il quadrato della linea retta A B al quadrato della BC, come L ad M, & L moltiplicãdo ſe ſteſſa faccia N, & M moltiplicando ſe ſteſſa faccia O, & perche le AB BC ſono in lunghezza commenſurabili, i quadrati di eſſe L M, & i quadrati delli quadrati N O, haueranno fra loro la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato. adunque fra NO caderà vn numero proportionale di mezo, caggia & ſia P, la cui radice ſia Q. & dalla AC deſcritto il quadrato A C D E, & compita la rimanente figura, come diſopra, ſi dimoſtrerà ſimilmente il quadrato



A G al rettangolo G C essere come L à Q, & il rettangolo G E al quadrato G D, come Q ad M: & finalmente il quadrato A G à tutto il quadrato A D, come L al composto di L & M insieme con il doppio di Q. & essendo date L Q M & il composto di esse sarà dato. adunque il quadrato A D & la sua radice A C sarà data. il che bisognaua dimostrare.

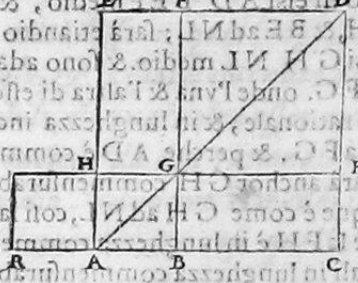
OPERATIONE.

Comporremo insieme le grandezze rispondenti alli quadrati delle linee rette con il doppio del la proportionale di mezo. et la radice di questo cõposto sarà la linea retta, che si fa di due date. et questo è lo aggiungimento delle R dello R che chiamano. come se R R 5 si debba aggiungere à R R 80; giungeremo dalle cose dimostrate innanzi R 5 con 80, & con il doppio della R 20 che fanno R 405, la cui R cioè R R 405 è la linea retta, che si produce dallo aggiungimento di esse. & se due, à più medie in lunghezza incommensurabili si debbano giungere insieme, ò anchor rationali & medie, ci seruiremo della medesima uoce più, come si è detto nelle rationali in questo modo R R 5 piu R R 3, ò vero R R 2 piu R R 3 piu R R 5, ò vero R 2 piu R R 6, ò vero 3 piu R 5 piu R R 6, & cosi nell'altre.

THEOREMA IIII.

Di due medie date, le quali siano disuguali & commensurabili in lunghezza, la differenza sarà data.

Siano due medie date disuguali & in lunghezza commensurabili A B A C, la differenza delle quali sia B C. Dico la B C essere data. sia il quadrato della linea retta A B al quadrato della A C, come L ad M: & sia N il quadrato di L, & O il quadrato di M. haueranno N O fra loro la proportione, che hà il numero quadrato al numero quadrato. onde caderà fra loro vn proportionale di mezo. caggia & sia P, la cui radice Q. & dalle A B A C descritti i quadrati R H A D, & compita la figura, come disopra, dimostreremo finalmente il quadrato R H al rettangolo H C essere, come L à Q, & il rettangolo H C al quadrato C E, come Q ad M; & oltre à ciò li due quadrati R H A D essere vguali al doppio del rettangolo H C, & al quadrato F K. se dunque da essi L M si tragga il doppio di Q, il rimanente sarà quello che risponde al quadrato F K. ma le grandezze L Q M sono date. adunque anchor il quadrato F K, & la radice di esso B C sarà data. il che bisognaua dimostrare.



N 5. P 45. O 405.

L B 5. Q B 45. M B 405.

A B B 5 B. A B B 405 C.

OPERATIONE.

Congiungeremo insieme le grandezze rispondenti à quadrati delle linee rette, & da quella che sarà fatta, trarremo la doppia della proportionale interposta fra esse, perche restera il quadrato, la cui radice sarà la differenza che cerchiamo. & questa è la sottrattione che chiamano delle R R, come se da R R 405 bisogni trarre R R 5, giungeremo secondo le cose dimostrate prima R 5 con R 405. si farà R 500, dalla quale trarremo il doppio di R 45, cioè R 180. rimarrà R 80. adunque la B C sarà R R 80. ma se da qualche media si debba trarre vna minore, che sia in lunghezza incommensurabile ad essa, ò vero da vna media vna rationale, ò al contrario da vna rationale vna media, ci seruiremo di quella uoce meno, si come nelle rationali si è detto, cosi, R R 5 meno R R 3, ò vero R R 12 meno R 3, ò vero R R 20 meno 2, ò vero R 6 meno R R 30, ò vero 3 meno R R 40, & cosi nell'altre.

Onde se A B B C siano medie in lunghezza commensurabili, cioè R R 32 & R R 2 sarà per lo primo de gli antecedenti theoremi, il rettangolo contenuto da esse R R 64, cioè R 8, per cioche R R 32 & R R 2 sono in lunghezza commensurabili, cioè come 2 ad 1. conciosiacosa che se R R 32 si diuida per R R 2 ne venga R R 16, cioè 2.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIONE XXVI.

Il rettangolo contenuto da linee rette medie, in potenza ſolamente commenſurabili, ò ſarà rationale, ò medio.

Contengaſi il rettangolo A C dalle linee rette medie in potenza ſolamente commenſurabili A B B C. Dico A C ò eſſere rationale, ò medio. deſcriuanſi dalle A B B C i quadrati A D B E. adunque l'vno & l'altro di eſsi A D B E è medio. 22. di queſto. 45. del primo. propongaſi la rationale F G, & alla F G adattiſi il parallelogrammo rettangolo G H, vguale al quadrato A D, che faccia la larghezza F H; & alla A C adattiſi il rettangolo M K vguale ad H M, che faccia la larghezza H K. & oltre à ciò ſimilmẽte alla K N adattiſi il rettangolo N L vguale à B E, 14 del primo. che faccia la larghezza K L. onde in vna linea retta ſono F H H K K L. perche dunque l'uno & l'altro di eſsi A D B E è medio, & è A D vguale à G H, & B E ad N L; ſarà etiandio l'uno & l'altro di eſsi G H N L medio. & ſono adattati alla rationale F G. onde l'vna & l'altra di eſſe F H K L è anchor rationale, & in lunghezza incommenſurabile alla F G. 23. di queſto. & perche A D è commenſurabile à B E, ſarà anchor G H commenſurabile ad N L. adunque è come G H ad N L, coſi la F H alla K L. 1. del ſeſto. onde la F H è in lunghezza commenſurabile alla K L. & però le F H K L ſono rationali in lunghezza commenſurabili. adunque il rettangolo contenuto dalle F H K L è rationale. & perche la B D è vguale alla B A, & la X B alla B C, ſarà come la D B alla B C, coſi la A B alla B X. ma come la D B alla B C, coſi il quadrato D A al rettangolo A C: & come la A B alla B X, coſi il rettangolo A C al quadrato C X. adunque come X C à C A, coſi C A ad A D: & è A D vguale à G H, & A C ad M K, & C X ad N L. onde come G H ad M K, coſi M K ad N L. come dunque la F H alla H K, coſi la H K alla K L. & però quello che ſi contiene dalla F H K L è vguale al quadrato, che ſi fa dalla H K. & quello che ſi contiene dalle F H K L è rationale. adunque è rationale etiandio il quadrato della H K. & però la linea retta H K è rationale. & ſe la H K è commenſurabile in lunghezza alla H M, cioè alla F G, ſarà il rettangolo N H rationale. & ſe H K è incommenſurabile in lunghezza alla F G, le K H H M ſaranno rationali in potenza ſolamente commenſurabili. & per tal cagione il rettangolo H N ſarà medio. adunque H N ò è rationale ò medio. ma H N è vguale ad A C. onde A C ò è rationale ò medio. il rettangolo dunque contenuto da linee rette medie in potenza ſolamente commenſurabili ò ſarà rationale, ò medio. il che biſognaua dimoſtrare.



SCHOLIO.

Marauigliosa cosa è, la forza del numero ternario essere tale, che dif finisca anchora la potenza delle quantità irrationali, & penetri sino all'estremità loro. oltre à ciò è marauiglia, ciascuna spetie de irrationali tà essere determinata da qualche medietà ò geometrica, ò arithmetica,

ò mu sica

ò muſica. veramente l'anima noſtra auuicinandoſi alla contemplatione delle grandezze per la forza della ragione che tiene in ſe ſteſſa, pare che determini tutte le coſe che nelle grandezze determinate non ſono, & l'infinità dell'analogia ritenghi & fermi con queſti tre legami. ma è da ſapere anchora il nome commune della media eſſere poſto nella natura di eſſa piu particolare, perciò che quella, che può creare vn ſpatio contenuto da due rationali in lunghezza commenſurabili, è certamente media fra le dette rationali: et coſi quella che può creare un ſpatio cõtenuto da una rationale, et una irrationale: et niuna di queſte due ſi chiama media. ma ſolamente quella, che può creare il detto ſpatio. biſogna etiandio auuertire, che Euclide per tutto nomina le potenze dalle coſe potenti, & lo ſpatio rationale dalla rationale, & lo ſpatio medio dalla media; & la contemplatione che è d'intorno alle linee medie fa ſimile a quella delle rationali, perciò che dice queſte eſſere commenſurabili ò in lunghezza ò in potenza, come diſſe di quelle, & lo ſpatio contenuto da due medie commenſurabili in lunghezza eſſere medio, come diſſe in quel luogo, lo ſpatio contenuto dalle rationali eſſere rationale, & lo ſpatio cõtenuto da due medie in potenza ſolamente commenſurabili, alcuna volta eſſer rationale, alcuna volta medio. & quello che ſi contiene da due rationali in potenza ſolamente commenſurabili eſſer medio. adunque il medio in tre modi auuiene, & il rationale in due ſolamente. & coſi quella che è proportionale fra due medie commenſurabili in lunghezza, come quella che è fra due rationali in potenza ſolamente commenſurabili, appare eſſere ſempre media. ma quella che è proportionale fra due medie in potenza ſolamente commenſurabili, alcuna volta è rationale, alcuna volta media: & perciò la incommenſurabile in potenza alcuna volta è rationale, & alcuna volta media, concioſiacoſa che due medie poſſano eßere in potenza commenſurabili, ſi come due rationali commenſurabili in potenza. è dunque da ſtimare l'analogia eſſere cagione de ſpatij contenuti da eſſe, come quella che fra gli eſtremi, cioè ò fra due rationali conſtituiſce vna media, ò fra due medie vna rationale. & tutto queſto ligamento alcuna volta fa ſimile a gl'eſtremi, & alcuna volta diſſimile.

Il nome della media.

Media è ſolamente quella, che può creare un ſpatio medio.

Euclide nomina le potenze dalle coſe potenti.

La contemplatione che è d'intorno alle medie è ſimile à quella delle rationali.

Il medio in tre modi auuiene, & il rationale in due ſolamente.

IL COMMANDINO.

Siano le AB BC medie in potenza ſolamente commenſurabili, & ſia la AB R R 54, & la BC R R 24. ſarà il rettangolo contenuto da eſſe R R 1296, cioè 6, che è rationale. ſiano anchora medie in potenza ſolamente commenſurabili R R 128 & R R 72. il rettangolo contenuto da eſſe ſarà R R 9216, cioè R 96, che è medio. ma R R 54 & R R 24 & ſimilmente R R 128 & R R 72 eſſere in potenza ſolamente commenſurabili; è manifeſto ſi

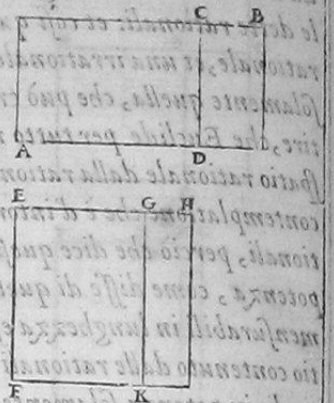
per

per la 28 & 29 di questo, si anche perciochè se R R 54 si diuida per R R 24 verrà R R $\frac{54}{24}$ cioè R $\frac{9}{4}$, sarà dunque R R 54 à R R 24, come R 3 à R 2. & se R R 128 si diuida per R R 72, verrà R R $\frac{128}{72}$ cioè R $\frac{16}{9}$. onde R R 128 à R R 72 sarà come R 4 à R 3.

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIONE XXVII.

Il spatio medio non auanza il medio d'vn spatio rationale.

S'egli è possibile il spatio medio A B auanzi il medio A C d'vn spatio rationale D B: & propongasi la rationale E F: & alla E F adattisi il parallelogrammo rettangolo F H, vguale ad A B, che faccia la larghezza E H: & traggasi F G vguale ad A C. adunque il rimanente B D è vguale al rimanente K H, & B D è rationale. onde etiandio K H sarà rationale. perche dunque l'vno & l'altro di essi A B, A C è medio, & è A B vguale à F H, & A C vguale à F G; sarà anchora l'vno & l'altro di essi F H, F G medio. & sono adattati alla rationale E F. adunque è rationale l'vna & l'altra di esse H E, E G, & alla E F in lunghezza incommensurabile. & perche D B è rationale & vguale à K H, sarà etiandio K H rationale, & è adattato alla E F. adunque la G H è rationale, & in lunghezza commensurabile alla E F. ma anchor la E G è rationale, & in lunghezza incommensurabile alla E F, & però la E G è in lunghezza incommensurabile alla G H. & è come la E G alla G H, così il quadrato della E G al rettangolo che si contiene dalle E G, G H. e dunque incommensurabile il quadrato di E G al rettangolo E G H. ma al quadrato della E G sono commensurabili i quadrati delle E G, G H, percioche amendue sono rationali: & al rettangolo E G H è commensurabile quello che si contiene due volte dalle E G, G H, essendo il doppio di esso. adunque i quadrati delle E G, G H sono incommensurabili à quello che si contiene due volte dalle E G, G H, & per tal cagione amendue cioè i quadrati delle E G, G H, & quello che due volte si contiene dalle E G, G H, cioè il quadrato della E H, sono incommensurabili alli quadrati delle E G, G H: & sono i quadrati delle E G, G H rationali. adunque il quadrato della E H è irrationale, & però la E H è irrationale. ma è anchor rationale, che non è possibile. onde vn spatio medio non auanza il medio d'un spatio rationale, il che bisognaua dimostrare.

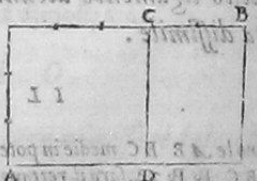


23. di questo.
21 di questo.
13. di questo.
Lem. della 23. di questo.
10. di questo.
6. di questo.
14. di questo.
4. del secondo
17. di questo.

IL COMMANDINO.

Ma il spatio rationale non auanzare il rationale, se non di vn rationale, dimostreremo in questo modo.

Siano li parallelogrammi rettangoli A B, A C rationali. Dico D B, nel quale il parallelogrammo A B auanza A C, essere rationale. percioche A B, A C essendo rationali, sono anche fra loro commensurabili: & è tutta la grandezza A B, composta delle grãdezze A C, D B, commensurabile ad vna di esse A C. adunque sarà anchor commensurabile alla rimanente D B. ma A B è rationale. onde è necessario che etiandio D B sia rationale. il che noi habbiamo dimostrato nella 20 di questo.

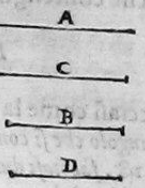


16. di questo.

PROBLEMA IIII. PROPOSITIONE XXVIII.

Trouare due medie in potenza ſolamente commenſurabili, che contengano vn ſpatio rationale.

Proponganſi due rationali, in potenza ſolamente commenſurabili A B: & pigliſi delle A B la proportionale di mezo C, & facciaſi come la A alla B, coſi la C alla D. perche dunque le A B ſono rationali, in potenza ſolamente commenſurabili, ſarà il rettangolo contenuto dalle A B, cioè il quadrato della C medio. adunque la linea retta C è media. & perche come la A alla B, coſi la C alla D, & ſono le A B in potenza ſolamente commenſurabili, etiandio le C D ſaranno commenſurabili ſolamente in potenza. & è la linea retta C media. adunque anchor la D è media; & però le C D ſono medie in potenza ſolamente commenſurabili. Dico oltre à ciò che contengono vn ſpatio rationale, perche eſſendo come la A alla B, coſi la C alla D, ſarà permutandoſi come la A alla C, coſi la B alla D. ma come la A alla C, coſi la C alla B. adunque come la C alla B, coſi la B alla D. quello dunque che ſi contiene dalle C D è vguale al quadrato della B. & il quadrato della B è rationale. onde etiandio quello, che ſi contiene dalle C D ſarà rationale. ſi ſono dunque trouate due medie in potenza ſolamente commenſurabili, che contengono vn ſpatio rationale. il che biſognaua fare.



12. del ſeſto. ✲ 22. di queſto. 10. di queſto: 24. di queſto. 17. del ſeſto.

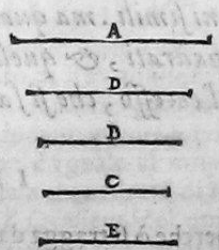
IL COMMANDINO.

Et facciaſi come la A alla B coſi la C alla D] ſia la A 3, & la B R 6. ſarà il rettangolo, che ſi contiene da eſſe R 54. & la linea retta C ſia le A E proportionale, che lo può creare, R R 54. facciaſi dunque come la A alla B, cioè come R R 81 à R R 36, coſi la C, cioè R R 54 ad'vn'altra, che ſia D. in queſto modo. moltiplichiſi 54 per 36, ſarà 1944. adunque R R 1944 è il rettangolo, che ſi contiene da R R 36; & R R 54 per lo primo theorema degli antecedenti, quale adattato à R R 81, ſarà la largezza R R 24. per lo ſecondo delli medeſimi. onde il rettangolo contenuto da R R 81, & R R 24 è vguale à quello che ſi contiene da R R 36, & R R 54. adunque come R R 81 à R R 36, coſi è R R 54 à R R 24. ✲ 16. del ſeſto.

PROBLEMA V. PROPOSITIONE XXIX.

Trouare due medie in potenza ſolamente commenſurabili, che contengano vn ſpatio medio.

Proponganſi tre rationali in potenza ſolamente commenſurabili A B C: & pigliſi delle A B la proportionale di mezo D: & facciaſi come la B alla C, coſi la D alla E. perche dunque le A B ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabili, ſarà il rettangolo che ſi contiene dalle A B, cioè il quadrato della D, medio. onde la D è media. & perche le B C ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabili, & è come la B alla C, coſi la D alla E, le linee rette D E ſaranno in potenza ſolamente commenſurabili, & la D è media. adunque anchor la E ſarà media, & per tal cagione le D E ſono medie in potenza ſolamente commenſurabili. Dico eſſe etiandio



✲ 12. del ſeſto. 22. di queſto. 10. di queſto. 24. di queſto.

conte-

contenere vn ſpatio medio. percioche eſſendo come la B alla C, coſi la D alla E, ſarà permutandoſi come la B alla D, coſi la C alla E: & come la B alla D, coſi è la D alla A. come dunque la D alla A, coſi è anchor la C alla E. onde il rettangolo contenuto dalle A C è vguale à quello, che ſi contiene dalle D E. ma quello che è contenuto dalle A C è medio. adunque quello che ſi contiene dalle D E ſara medio. il perche ſi ſono trouate due medie in potenza ſolamente commenſurabili, che contengono vn ſpatio medio, come biſognaua fare.

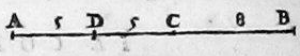
16. del ſeſto. 22. di queſto.

IL COMMANDINO.

✻ Et facciaſi come la B alla C, coſi la D alla E] *Sia la A 4 & la B R 8 & la C R 6. ſarà il rettangolo che ſi contiene dalle A B R 128, & la linea retta D fra le A B proportionale R R 128. facciaſi dunque come la B alla C, cioè come R R 64 à R R 36, coſi la D cioè R R 128 ad vn'altra, che ſia E. nel medeſimo modo, che diſopra, moltiplichiſi 128 per 36. ſi fa 4608, & 4608 ſi diuida per 64, ne vengono 72. adunque R R 72 ſarà la quarta proportionale A, che cercauamo.*

LEMMA I.

Trouare due numeri quadrati di modo, che quello che ſi compone da eſſi ſia anchor quadrato.



A Proponganſi due numeri A B B C, che ſiano ò pari ò diſpari. & perche ò ſi tragga dal pari il pari, ò dal diſpari il diſpari, il rimanente è pari, ſarà il numeto A C pari. ſeghiſi A C per mezo nel punto D, & ſiano

B AB BC ò ſimili piani, ò quadrati, quali anche eſsi ſono piani ſimili. adũque quello, che ſi fa da A B B C inſieme col quadrato di C D è vguale al quadrato di B D.

C & è quadrato quello, che ſi fa da A B B C, percioche ſi è dimoſtrato ſe due piani ſimili moltiplicando ſe ſteſsi facciano qualche numero, quello che ſi fa, eſſere quadrato. ſi ſono dunque trouati due numeri quadrati, cioè quello, che ſi fa da A B B C, & quello, che ſi fa da C D, quali inſieme compoſti fanno vn numero quadrato, cioè quello, che ſi fa da B D. il che biſognaua fare.

COROLLARIO.

Et è manifeſto anchora eſſerſi trouati due numeri quadrati, cioè quello, che ſi fa da B D, & quello, che ſi fa da C D, dimodo che l'eccesſo loro, che ſi fa da A B B C ſia quadrato, quando però A B B C ſia no piani ſimili. ma quando non ſiano piani ſimili, ſi ſaranno trouati due quadrati, & quello, che ſi fa da B D, & quello, che da C D, de quali l'eccesſo, che ſi fa da A B B C, non è quadrato.

D

IL COMMANDINO.

A Et perche ò ſi tragga dal pari il pari, ò dal diſpari il diſpari, il rimanente è pari] *per la 24 & 26 del nono libro.*

B Adunque quello, che ſi fa da A B B C, inſieme col quadrato di C D è vguale al quadrato di B D] *queſto ſi dimoſtra da Barlaam Monacho, nel theorema 6 di quelli, che*

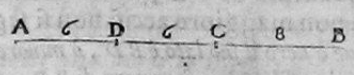
noi

noi habbiamo posti alla 15 del nono libro.

Percioche si è dimostrato se due piani simili moltiplicando se stessi facciano qualche numero, quel che si fa esser quadrato] *nella prima propositione del nono libro.* C

Ma quando non siano piani simili si saranno trouati due quadrati. D

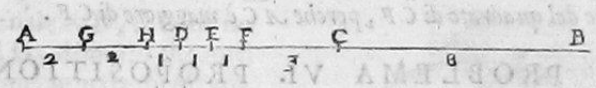
Siano due numeri A B. B C, che non siano piani simili: & seghisi A C per mezo nel D. similmente quello che si fa da A B B C, insieme col quadrato di C D, è vguale al quadrato di B D. per lo sesto theorema gia detto di barlaam Monacho. ma quello che si fa da A B B C non è quadrato, percioche se fosse quadrato, sarebbono i numeri A B B C piani simili, che non si pone. i numeri dunque quadrati sono quelli che si fanno da B D & D C, l'eccesso de quali che si fa da A B B C non è quadrato.



LEMMA II.

Trouare due numeri quadrati talmente, che quello che si compone da essi non sia quadrato.

Sia il numero che si fa da A B B C quadrato, come si è detto, & C A sia pari: & seghisi C A per mezo nel D. è manifesto il quadrato che si fa da A B B C insieme col quadrato di C D, essere vguale al quadrato di B D. traggasi l'vnità D E. adunque il quadrato che si fa da A B B C insieme col quadrato di C E è minore del quadrato di B D. Dico dunque il quadrato fatto da A B B C insieme col quadrato di C E non essere quadrato. percioche se egli è quadrato, ò vero è vguale al quadrato di B E, ò minore. ma non maggiore, accio che non se seghi l'vnità, ne quello che si fa da A B B C insieme col quadrato di C D, che è vguale al quadrato di B D, sia vguale al quadrato di A B B C insieme col quadrato di C E. sia prima s'egli è possibile quello che si fa da A B B C insieme col quadrato di CE, vguale al quadrato di BE: & sia G A doppio dell'vnita D E. perche dunque tutto A C è doppio di tutto C D, de quali A G è doppio di D E, sarà anchor il rimanente C G doppio di G E. adũque G C si sega per mezo nel punto E, & però quello che si fa da G B B C insieme col quadrato di C E è vguale al quadrato di B E. ma etiandio quello che si fa da A B B C insieme col quadrato di C E si pone vguale à quello di B E. adunque quello che si fa da G B B C insieme col quadrato di C E è vguale à quello che si fa da A B B C insieme col quadrato di C E: & tratto ne il quadrato commune di C E, si concluderà A B vguale à G B, che è inconueniente. la onde quello che si fa da A B B C insieme col quadrato di C E non è vguale al quadrato di B E. Dico ne ancho essere minore del quadrato di B E. percioche sia s'egli è possibile, vguale al quadrato di B F: & pongasi H A doppio di D F. si concluderà altresi H C doppio di C F, talmente che anchor H C si diuida per mezo nel punto F, & però quello che si fa da H B B C insieme col quadrato di C F sia vguale al quadrato di B F. & si pone quello che si fa da A B B C insieme col quadrato di C E vguale al quadrato di B F. adunque seguita quello che si fa da A B B C insieme col quadrato di C E essere vguale à quello che si fa da H B B C insieme col quadrato di CF che è inconueniente. onde quello che si fa da A B B C insieme col quadrato di C E non è vguale al minore del quadrato di B E. & si è dimostrato ne ancho essere vguale al quadrato di B E, ne al maggiore di esso. adunque quello che si fa da A B B C insieme col quadrato di C E non è quadrato. & essendo possibile che il medesimo in piu modi si dimostri, bastici sol quello che si è detto, accio non prolunghiamo il trattato che è lungo di sua natura.



A B C D E F

IL COMMANDINO.

A E manifesto il quadrato di A B B C insieme col quadrato di C D essere vguale al quadrato di B D] *per lo 6 theorema di Barlaam Monacho.*

B Ma non maggiore acciò non si seghi l'vnità] *percioche s'egli è possibile sia maggiore. adunque ò uero il suo lato è B D, ò minore di B D: & se B D il tutto sarà vguale alla parte, che non è possibile. ma se minore di B D, essendo maggiore di B E l'vnità si segherà. il che similmente è impossibile.*

C Sarà anchor il rimanente C G doppio di G E] *per la settima ò uero 11 del 7 libro.*

D Et trattone il quadrato commune di C E si concluderà la A B vguale alla G B] *perche rimarrà quello, che si fa da A B B C vguale à quello, che si fa da G B B C. ma quello, che si fa da A B B C à quello, che si fa da G B B C è come A B à B G per la 17 del settimo. adunque A B è vguale à B G, che è inconueniente.*

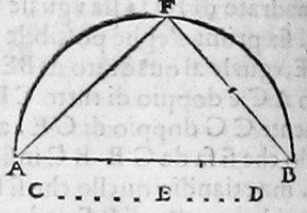
E Si concluderà altresi H C doppio di C F] *percioche essendo A C doppio di C D de quali A H si pone doppio di D F; sarà anchor il rimanente H C doppio del rimanente C F.*

F Che è inconueniente] *concioſiacosa che quello, che si fa da A B B C sia maggiore di quello, che si fa da H B B C, essendo A B maggiore di B H, & similmente il quadrato di C E sia maggiore del quadrato di C F, perche A C è maggiore di C F.*

PROBLEMA VI. PROPOSITIONE XXX.

Trouare due rationali in potenza solamente commensurabili di modo, che la maggiore possa tanto più, che la minore, quanto è il quadrato d'vna linea retta commensurabile ad essa in lunghezza.

Propongasi la rationale A B, & due numeri quadrati C D D E, dimodo che l'eccesso loro C E non sia quadrato. & descriuasi nella linea retta A B il mezo cerchio A F B, & faccisi come D C à C E, cosi il quadrato di A B al quadrato di A F: & giungasi F B. perche dunque come il quadrato di B A al quadrato A F, cosi è D C à C E, hauerà il quadrato di B A al quadrato di A F quella proportione, che ha il numero D C al numero C E. adunque il quadrato di B A è commensurabile al quadrato di A F. ma il quadrato di A B è rationale. onde il quadrato di A F sarà rationale, & però la linea retta A F è rationale. & perche D C à C E non ha la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato, ne anche il quadrato di B A al quadrato di A F hauerà la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato. è dunque la linea retta B A in lunghezza incommensurabile alla retta A F, & però le A B A F sono rationali in potenza solamente commensurabili. & essendo come D C à C E, cosi il quadrato di B A al quadrato di A F, sarà per la conuersione della proportione, come C D à D E, cosi il quadrato di A B al quadrato di B F. ma C D à D E ha la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato. adunque etiandio il quadrato di A B al quadrato di B F hauerà la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato, & però la linea retta A B è in lunghezza commensurabile alla B F. & è il quadrato della A B vguale alli quadrati delle A F F B. onde la A B può più, che la A F, quanto è il quadrato della linea retta B F in lunghezza commensurabile ad essa. si sono dunque trouate due rationali in potenza solamente commensurabili B A A F, dimodo che la maggiore B A può tanto



Corol. del primo lemma de gli antecedenti. Corol della 6 di questo.

6. di questo.

9. di questo.

47. del primo ò uero lem. nanti la 15. di questo.

9. di questo. 47. del primo

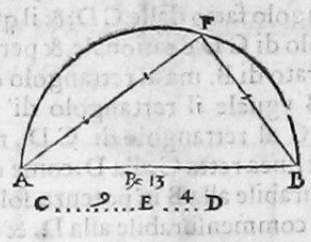
più che la minore A F, quanto è il quadrato della F B commensurabile ad essa in lunghezza. il che bisognaua fare.

SCHOLIO.

Da questo luogo propone di trouare le altre irrationali, & primieramente quelle che si fanno per cõpositione. ma pone innanzi alcuni theoremi, per li quali la natura delle dette irrationali chiaramente appare.

PROBLEMA VII. PROPOSITIONE XXXI.

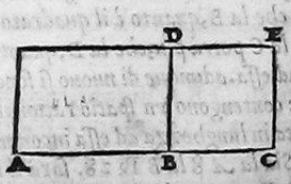
Trouare due rationali in potenza solamente commensurabili, dimodo che la maggiore possa tanto più, che la minore, quanto è il quadrato d'vna linea retta incommensurabile ad essa in lunghezza.



Propongasi la rationale A B, & i due numeri quadrati C E E D, dimodo che quello che di essi si compone, non sia quadrato. & nella linea retta A B descriuasi il mezo cerchio A F B, & facciasi come D C à C E, cosi il quadrato di A B al quadrato di A F: & giunta la F B dimostreremo similmente, come nella precedente le B A A F essere rationali in potenza solamente commensurabili. & perche come D C à C E, cosi è il quadrato di B A al quadrato di A F, sarà per la conuersione della proportione come C D à D E, cosi il quadrato di A B al quadrato di B F. ma C D à D E non ha la droportione che il numero quadrato al numero quadrato. non hauera dunque il quadrato di A B al quadrato di B F la proportione, c'ha il numero quadrato al numero quadrato. onde la A B in lunghezza è incommensurabile alla B F. & la B A può più che la A F, quanto è il quadrato della linea retta B F, in lunghezza ad essa incommensurabile. adunque le A B B F sono rationali in potenza solamente commensurabili, & la A B può più che la A F, quanto è il quadrato della linea retta F B in lunghezza incommensurabile ad essa.

LEMMA.

Se siano due rette linee in qualche proportione, sara come la linea retta alla retta, cosi il rettangolo contenuto dalle dette due linee al quadrato della minore.



Siano due linee rette A B B C in qualche proportione. Dico come la A B alla B C, cosi essere il rettangolo A B C al quadrato di B C. descriuasi dalla B C il quadrato B D E C, & compiscasi il parallelogrammo A D. è manifesto come la A B alla B C, cosi essere il parallelogrammo A D al parallelogrammo B E: & è A D quello che si contiene dalle A B B C, percioche la B C è vguale alla B D. & B E è il quadrato della B C. come dunque la A B alla B C, cosi il rettangolo A B C al quadrato di B C. il che bisognaua dimostrare.

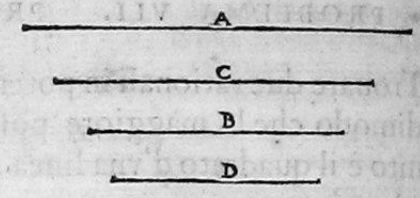
1. del sesto.

PROBLEMA VIII. PROPOSITIONE XXXII.

Trouare due medie in potenza ſolamente commenſurabili, che contengano vn ſpatio rationale, di modo che la maggiore poſſa tanto piu che la minore, quanto è il quadrato d'vna linea retta commenſurabile ad eſſa in lunghezza.

30. di queſto.

Propongãſi due rationali in potenza ſolamente commenſurabili A B, di modo che la A maggiore poſſa tanto piu, che la minore B, quanto è il quadrato della linea retta commenſurabile ad eſſa in lunghezza. & ſia al rettãgolo cõtenuto dalle A B vguale il quadrato della linea retta C. & quello, che ſi fa dalle A B è medio. adunque anchor il quadrato della C ſarà medio, & eſſa C media. ma al quadrato di B ſia vguale il rettangolo fatto dalle C D; & il quadrato di B è rationale. adunque etiandio il rettangolo di C D è rationale, & perche come la A alla B, coſi è il rettangolo di A B al quadrato di B. ma al rettangolo di A B è vguale il quadrato di C; & al quadrato di B vguale il rettangolo di C D; ſarà come la A alla B, coſi il quadrato della C al rettangolo di C D. ma come il quadrato di C al rettangolo di C D, coſi la linea retta C alla D. come dunque la A alla B, coſi la C alla D. & la A è commenſurabile alla B in potenza ſolamente. adunque anchor la C è ſolamente in potenza commenſurabile alla D. & è la C media. onde etiandio la D ſarà media. & perche come la A alla B, coſi è la C alla D, & la A può piu, che la B, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza commenſurabile ad eſſa; anchor la C potrà piu, che la D, quanto è il quadrato della linea retta commenſurabile ad eſſa in lunghezza. ſi ſono dunque trouate due medie in potenza ſolamente commenſurabili C D, che contengono vn ſpatio rationale, & C può piu, che D, quanto è il quadrato d'vna linea retta commenſurabile ad eſſa in lunghezza. ſi dimoſtrerà ſimilmente poterſi trouare due medie in potenza ſolamente commenſurabili, che contengano vn ſpatio rationale, di modo, che la maggiore poſſa tanto più, che la minore, quanto è il quadrato d'vna linea retta incommenſurabile ad eſſa in lunghezza, quando la A poſſa piu, che la B, quanto è il quadrato d'vna linea retta in lunghezza incommenſurabile ad eſſa.



22. di queſto.

Lem. antecedente.

1. del ſeſto.
10. di queſto.
24. di queſto.

IL COMMANDINO.

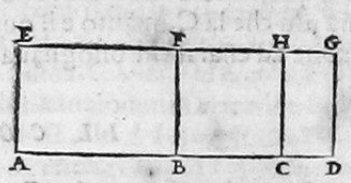
* Si dimoſtrerà ſimilmente poterſi trouare due medie in potenza ſolamente cõmenſurabile] *Siano le medeſime coſe, che diſopra, & la A poſſa piu, che la B quanto è il quadrato d'vna linea retta in lunghezza incommenſurabile ad eſſa. ſi dimoſtrerà ſimilmente come diſopra, la linea retta D eſſer media. & perche come la A alla B, coſi la C alla D, & la A può piu che la B, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza ad eſſa incommenſurabile; etiãdio la C potrà piu, che la D, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza incommenſurabile ad eſſa. adunque di nuouo ſi ſono trouate due medie in potenza ſolamẽte commenſurabili C D, che contengono vn ſpatio rationale, & la C può piu che la D, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza ad eſſa incommenſurabile.*

Sia la A 8 la B R 28. ſarà il rettangolo, che da eſſe ſi contiene R 1792, & la linea retta C R R 1792, che è media. facciaſi come 8 à R 28, coſi R R 1792 ad vn'altra, che ſia D. ſarà quella R R 343. adunque R R 1792 & R R 343 ſono due medie in potenza ſolamente commenſurabili, che contengono vn ſpatio rationale, cioè 28, & la maggiore può piu, che la

minore, quanto è il quadrato d'una linea retta commensurabile ad essa in lunghezza; percioche se dal quadrato della maggiore si tragga il quadrato della minore, cioè se da R 1792 *si tragga* R 343 *rimarrà,* R 567. *& sono due medie* R R 1792 R R 567 *fra loro in lunghezza commensurabili, cioè come 4 à 3, percioche se* R R 1792 *si divida per* R R 567, *ne viene* R R 3 $\frac{13}{81}$, *che è* 1 $\frac{1}{3}$, *cioè* $\frac{4}{3}$. *oltre à ciò sia la A* 8 *& la B* R 20, *sarà il rettangolo contenuto da esse* R 1280, *& la linea retta C* R R 1280. *facciasi come* 8 *à* R 20, *così* R R 1280 *ad vn'altra, che sia D. sarà quella* R R 125. *sono adunque* R R 1280 *&* R R 125 *due medie, che contengono vn spatio rationale, cioè* 20, *& la maggiore può piu, che la minore, quanto è il quadrato d'vna linea retta in lunghezza incommensurabile ad essa. ma sia la A* 3 *& la B* R 6, *il rettangolo contenuto da esse sarà* R 54, *& la linea retta C* R R 54. *facciasi di nuouo come* 3 *à* R 6, *così* R R 54 *ad vn'altra. sarà quella* R R 24. *onde* R R 54 *&* R R 24 *sono due medie in potenza solamente commensurabili, che contengono vn spatio rationale, cioè* 6, *& la maggiore può piu che la minore, quanto è il quadrato d'vna linea retta in lunghezza incommensurabile ad essa.*

LEMMA.

Se siano tre linee rette in qualche proportione, sara come la prima alla terza, così il rettangolo contenuto dalla prima & dalla seconda a quello che si contiene dalla seconda & dalla terza.



Siano tre linee rette in qualche proportione A B B C C D. Dico come la A B alla C D, così il rettangolo contenuto dalle A B B C à quello che si contiene dalle B C C D. tirisi dal punto A la A E ad angoli retti sopra la A B, & pongasi la A E vguale alla B C, & per E tirisi la E G parallela alla A B, & per li punti B C D tirinsi B F C H D G parallele alla A E. perche dunque come la A B alla B C, così è il parallelogrammo A F al parallelogrammo B H, & come la B C alla C D, così il parallelogrammo B H à C G: sarà per l'vgual proportione come la A B alla C D, così il parallelogrammo A F al parallelogrammo C G. & è il parallelogrammo A F quello che si contiene dalle A B B C, perche la A E è uguale alla B C; & il parallegrammo C G è quello, che si contiene dalle B C C D, concioſiacosa che la B C sia vguale alla C H. se dunque siano tre linee rette in qualche proportione, sarà come la prima alla terza, così il rettangolo contenuto dalla prima & dalla seconda al rettangolo contenuto dalla seconda & dalla terza. il che bisognaua dimostrare.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE XXXIII.

Trouare due medie in potenza solamente commansurabili, che contengauo vn spatio medio, di modo che la maggiore possa tanto piu, che la minore, quanto è il quadrato d'vna linea retta commensurabile ad essa in lunghezza.

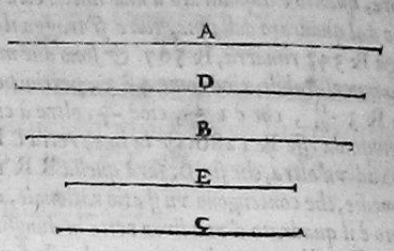
Proponganſi tre rationali in potenza solamente commensurabili A B C, di modo che la A possa tanto piu, che la C, quanto è il quadrato d'vna linea retta in lunghezza commensurabile ad essa. & sia il quadrato della D vguale al rettangolo delle A B, & il rettangolo delle A B è medio. adunque anche il quadrato della D sarà medio, & la linea retta D media. & al rettangolo delle B C sia vguale il rettangolo delle D E. perche dunque come il rettangolo delle A B al rettangolo delle B C, così la linea retta A alla C. ma al rettangolo delle A B è vguale il quadrato

22. di questo.

Lem. antecedente.

della

della D; & al rettangolo delle B C è vguale il rettangolo delle D E; sarà come la A alla C, cosi il quadrato della D al rettangolo delle D E. ma come il quadrato della D al rettangolo delle D E, cosi la D alla E. & come dunque la A alla C, cosi la D alla E, & la A è commensurabile alla C in potenza solamente. onde anchor la D alla E in potenza solamente è commensurabile. & è la D media. adunque etiandio la E è media. & perche come la A alla C, cosi la D alla E, & la A può piu che la C, quanto è il quadrato d'vna linea retta in lunghezza commensurabile ad essa; potrà anchor la D più che la E quanto è il quadrato d'vna linea retta in lunghezza ad essa commensurabile. Dico oltre à questo il rettangolo delle DE esser medio. percioche al rettangolo delle B C è vguale il rettangolo delle D E, & quello delle B C è medio. adunque anchor quello delle D E sarà medio. onde si sono trouate due medie in potenza solamente commensurabili D E, che contengono vn spatio medio, di modo che la maggiore può piu che la minore, quanto è il quadrato d'vna linea retta commensurabile ad essa in lunghezza. si troueranno etiandio similmente due medie in potenza solamente commensurabili, & che contengano vn spatio medio, tal che la maggiore possa piu, che la minore, quanto è il quadrato d'vna linea retta in incommensurabile ad essa; cioe quando la A possa piu che la C, quanto e il quadrato d'vna linea retta in lunghezza incommensurabile ad essa. il che bisognaua fare.



Lem. della 23. di questo.

24. di questo.

15. di questo.

22. di questo.

IL COMMANDINO.

Sia la A 8, la B R 48, & la C R 28. il rettangolo che si contiene da esse A B sarà R 3072, & la linea retta D R R 3072, che è media. facciasi come la A alla C, cosi la D ad vn'altra che sia E. sarà la E R R 588. adunque R R 3072 & R R 588 sono due medie in potenza solamente commensurabili, che contengono vn spatio medio; & la maggiore può piu, che la minore, quanto è il quadrato d'vna linea retta in lunghezza ad essa commensurabile; percioche se dal quadrato della maggiore si tragga il quadrato della minore, cioè se da R 3072 si tragga R 588, la rimanente sarà R 972: & sono R R 3072: & R R 972 due medie in lunghezza cõmensurabili fra loro, come 4 à 3, perche se R R 3072 si diuida per R R 972, ne verrà R R 3 $\frac{13}{81}$, che è 1 $\frac{1}{3}$, cioè $\frac{4}{3}$. sia poi la A 8, la B R 48, & la C R 20. sarà la D la medesima che disopra, cioè R R 3072. facciasi come la A alla C, cosi la D ad vn'altra, che sia E. sarà la E R R 300. sono dunque R R 3072 & R R 300 due medie in potenza solamente commensurabili, che contengono vn spatio medio, & la maggiore può piu, che la minore, quanto è il quadrato della linea retta ad essa in lunghezza incommensurabile. ma sia la A R 6, la B R 3 & la C R 2. sarà la D R R 18, & facciasi, come la A alla C, cosi R R 18 ad vn'altra, che sia E. sarà la E R R 2. adunque R R 18 & R R 2 sono due medie in potenza solamente commensurabili, & che contengono vn spatio medio. delle quali piu può la maggiore, che la minore, quanto è il quadrato d'vna linea retta ad essa in lunghezza incommensurabile.

LEMMA I.

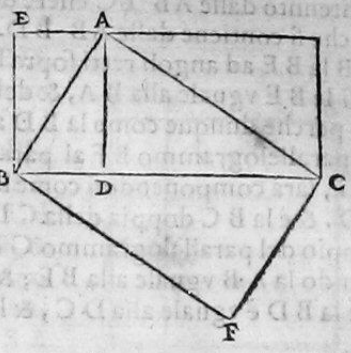
Sia il triangolo Orthogonio ABC, c'habbia l'angolo retto BAC, & tirisi la perpendicolare A D. Dico il rettangolo contenuto dalle C B B D essere vguale al quadrato della B A, & il rettangolo contenuto

dalle B C C D vguale al quadrato della C A, & il contenuto dalle B D D C vguale al quadrato della D A, & finalmente il contenuto dalle BC AD essere vguale al rettangolo, che si cõtiene dalle BA AC.

Percioche nel triangolo orthogonio dall'angolo retto alla base essendosi tirata la perpendicolare A D, i triangoli A B D A D C sono simili; & à tutto il triangolo A B C, & fra loro. & perche il triangolo A B C è simile al triangolo A B D, sarà come la C B alla B A, così la A B alla B D. adunque il rettangolo contenuto dalle C B B D è vguale al quadrato della A B. & per la medesima regione il rettangolo contenuto dalle B C C D è vguale al quadrato della A C. similmente perche nel triangolo orthogonio dall'angolo retto alla base si tira la perpendicolare, sarà detta perpendicolare proportionale di mezo fra le parti della base. onde come la B D alla D A, così la A D alla D C; & però il rettangolo, che si contiene dalle B D D C è vguale al quadrato della A D. Dico anchora il rettangolo contenuto dalle B C AD essere vguale à quello, che si contiene dalle B A A C. percioche, come habbiamo detto, essendo il triangolo A B C simile al triangolo A C D, come la B C alla C A, così sarà la B A alla A D. & se quattro linee rette siano proportionali il rettangolo contenuto dall'estreme è vguale al contenuto da quelle, che sono in mezo. adunque il rettangolo contenuto dalle BC AD sarà vguale al contenuto dalle B A AC. Dico oltre acciò se descriuiamo il parallelogrammo rettangolo E C, & compiamo esso A F, il rettangolo E C essere vguale allo A F, percioche l'vno & l'altro d'essi è doppio del triangolo A B C; & è il rettangolo E C quello, che si contiene dalle B C A D; & il rettangolo A F quello, che si contiene dalle B A A C. ma il rettangolo che si contiene dalle B C A D è vguale al rettangolo contenuto dalle B A A C.

8 del sesto.

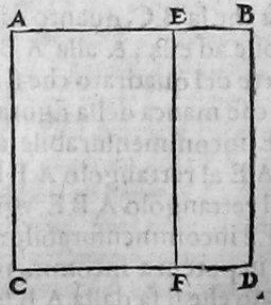
4. del sesto. 17. del sesto.



LEMMA II.

Se vna linea retta sia segata in parti disuguali, sara come la maggior parte alla minore, così il rettangolo contenuto da tutta la linea & dalla parte maggiore, a quello, che si contiene da tutta la linea & dalla parte minore.

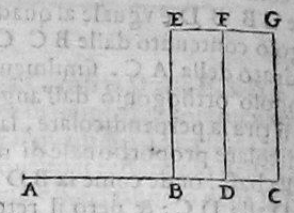
Seghisi vna linea retta A B in parti disuguali nel punto E. Dico come la A E alla E B, così essere il rettangolo contenuto dalle B A A C à quello, che si contiene dalle A B B E. descriuasi dalla A B il quadrato A C D B: & per E tirisi la E F, parallela ad una di esse A C D B. è manifesto come la A E alla E B, così essere il parallelogrammo A F, al parallelogrammo F B. & è A F il parallelogrammo, che si contiene dalle B A A E, percioche la C A è vguale alla A B: & il parallelogrammo F B è quello, che si contiene dalle A B B E: concioſiacosa, che la D B sia vguale alla B A. come dunque la A E alla E B, così è il rettangolo contenuto dalle B A A E à quello, che si contiene dalle A B B E. il che bisognaua dimostrare.



LEMMA III.

Se siano due linee rette disuguali, & la maggiore di esse sia segata per mezo, il rettangolo contenuto dalle due linee rette è doppio di quello, che si contiene dalla maggiore & dalla meta della minore.

Siano due linee rette disuguali AB BC, delle quali la maggiore sia la A B, & la B C seghi si per mezo nel punto D. Dico il rettangolo contennto dalle A B B C essere doppio di quello, che si contiene dalle A B B D. tirisi dal punto B la B E ad angoli retti sopra la B C, & pongasi la B E vguale alla B A, & descriuasi la figura. perche dunque come la B D alla D C, così

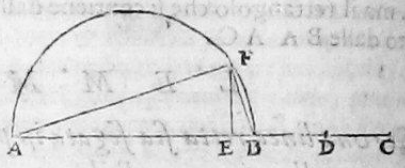


1. del sesto. è il parallelogrammo B F al parallelogrammo D G, sarà componendosi come la B C alla C D, così il parallelogrammo B G à G D. & è la B C doppia della C D. adunque anchor il parallelogrammo B G è doppio del parallelogrammo G D. & è B G quello che si contiene dalle A B B C, essendo la A B vguale alla B E; & D G quello che si contiene dalle A B B D, per che la B D è vguale alla D C, & la A B alla D F. il che bisognaua dimostrare.

PROBLEMA X. PROPOSITIONE XXXIIII.

Trouare due linee rette in potenza incommensurabili, che facciano il composto delli quadrati loro rationale, & il rettangolo che si contiene da esse, medio.

31. di questo. Proponganſi due rationali in potenza solamente commensurabili A B B C, dimodo che la maggiore A B possa tanto più che la minore B C, quanto è il quadrato d'vna linea retta in lunghezza incommensurabile ad essa, & se-



Lem. inanzi la 19. di questo ò uero per la 20. del sesto. gata B C per mezo nel punto D, adattisi alla linea retta A B vn parallelogrammo vguale al quadrato che si fa da vna di esse B D D C, che manchi della figura quadrata, & sia quello che si contiene dalle A E E B. descriuasi nella linea retta A B il mezo cerchio A F B, & tirisi la E F ad angoli retti sopra la A B, & giunganſi A F F B. perche dunque due linee rette A B B C sono disuguali, & la A B può più che la B C, quanto è il quadrato d'vna linea retta in lunghezza incommensurabile ad essa, & alla A B si è adattato vn parallelogrammo vguale alla quarta parte del quadrato che si fa dalla minore B C, cioè al quadrato della metà di essa, che manca della figura quadrata, il quale è contenuto dalle A E E B: sarà la A E incommensurabile alla E B. & è come la A E alla E B, così il rettangolo B A E al rettangolo A B E. & il rettangolo B A E è vguale al quadrato della A F, & il rettangolo A B E vguale al quadrato della B F. adunque il quadrato della A F è incommensurabile al quadrato della F B, & però le linee rette A F F B sono in potenza incommensurabili. & perche la A B è rationale, etiandio il quadrato che si fa dalla A B sarà rationale. onde è rationale anchora il composto de quadrati delle A F F B. oltre à ciò perche il rettangolo A E B è vguale al quadrato della E F, & si pone il rettangolo A E B vguale al quadrato della B D, sarà la F E vguale alla B D, & però la B C è doppia della E F. onde il rettangolo A B C è

19. di questo. Lem. 2. de gli antecedenti. Lem. primo.

9. diff.

Lem. 3.

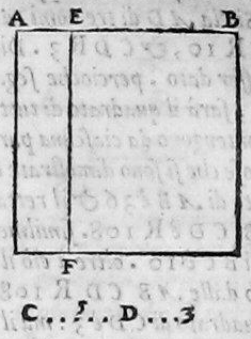
doppio del rettangolo contenuto dalle A B E F. ma il rettangolo A B C è medio. adunque etiandio quello, che si contiene dalle A B E F sarà medio, & quello che si contiene dalle A B E F è vguale à quello che si contiene dalle A F F B. & però quello che si contiene dalle A F F B è medio. & si è dimostrato rationale quel lo, che si compone da quadrati delle A F F B. si sono dunque trouate due linee rette in potenza incommensurabili A F F B, che fanno il composto delli quadrati loro rationale, & il rettangolo che si contiene da esse, medio. il che bisogna ua dimostrare.

22. di questo. Corol. 24. di questo. Lemr primo.

SCHOLIO.

Ma il tutto che si fa da due spatij irrationali composti fra loro essere rationale conosceremo per questo.

Propongasi la rationale A B, & due numeri C D, che non habbiano la proportione c'ha il numero quadrato al numero quadrato; & facciasi come C à D, così il quadrato della A B al quadrato della B E: & descritto il quadrato della A B per E tirisi la E F parallela ad vno de lati. perche dunque è come C à D, così il quadrato della A B al quadrato della B E. & C à D non ha la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato; sarà la A B alla B E in lunghezza incommensurabile. adunque anchor la B A alla rimanente A E è in lunghezza incommensurabile. ma come è la A B all'una & l'altra di esse A E E B, così il quadrato della A B all'vno & l'altro de parallelogrammi. onde il quadrato ad essi parallelogrammi sarà incommensurabile. ma il quadrato è rationale. i parallelogrammi dunque saranno irrationali che sono parti del rationale, & compiscono esso rationale.



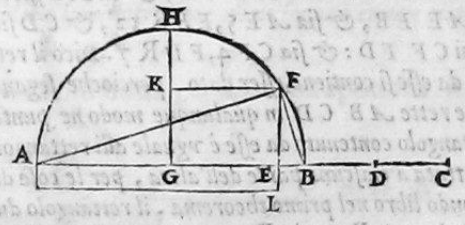
Corol. della 6. di questo.

9. di questo. per le cose dimostrate alla 17. di questo.

1. del sesto.

IL COMMANDINO.

Sia la linea retta A B, 8 la B C R 20. sarà B D ò D C R 5. & alla A B adattisi vn parallelogrammo vguale al quadrato della B D, qual è 5, che manchi della figura quadrata, & ciò faremo agevolmente se si repetano le cose dette nel lemma innanzi la 18 di questo. adunque nella linea retta A B descritto il mezo cerchio A F B, & segata la A B per mezo nel punto G, tirisi la G H ad angoli retti sopra essa, & pongasi la G K vguale alla B D, concioſiacosa che la G H sia maggiore della B D, percioche essendo la A B maggiore che la B C, sarà anchor la metà della A B maggiore che la metà della B C. poi per K tirisi la K F parallela alla A B, & dal punto F tirisi la F E perpendicolare alla A B, quale si prolunghi nel punto L, dimodo che la E L sia vguale alla E B: & compiscasi il parallelogrammo A L. sarà dunque il parallelogrammo A L quello, che è contenuto dalle A E E B, & vguale al quadrato della F E, cioè al quadrato della B D. onde la linea retta A B si è adattato il parallellogrammo A L, vguale al quadrato della B D, che mancha della figura quadrata. & perche la linea retta A E è segata in parti vguali nel punto G, & in parti disuguali in E, sarà il rettangolo contenuto dalle A E E B insieme col quadrato della G E, vguale al quadrato della metà di A B, cioè della A G. & il quadrato della A G è 16, & il rettangolo A E B 5, percioche la F E è R 5, & il quadrato di essa 5, che è vguale al rettangolo A E B. adunque il rimanẽte quadrato della G E è 11, & la linea retta G E R 11. onde la A E composta dalle A G G E è 4 insieme con



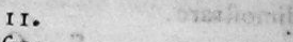
5. del secondo.

R 11 ò vero 4 piu R 11, & la E B è 4 trattane la R 11, ò ucro 4 meno R 11. & acciò che ſappiamo quali ſiano le A F F B, ſarà neceſſario trouare prima i quadrati delle A E E B. on de habbiamo giudicato eſſer vtil coſa porre alcuni theoremi pertinenti à quelle, che ſono di due ò piu nomi, & alle apotomi.

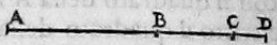
THEOREMA I.

Data vna linea retta, che ſia di due, ò di più nomi, il ſuo quadrato anchora ſarà dato.

Sia la A B di due nomi A C C B, & ſia A C 4, C B R 11. Dico il ſuo quadrato eſſere dato. percioche eſſendo la A B ſegata in qualunque modo nel punto C, ſarà per la quarta propoſitione del ſecondo libro, il quadrato di tutta vguale alli quadrati delle parti, & al retangolo contenuto due volte da dette parti. onde il quadrato di A C è 16, il quadrato di C B 11, & il rettangolo contenuto dalle A C C B è R 176, il cui doppio è R 704. adunque il quadrato di A B è 27 piu R 704.



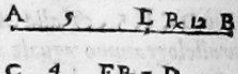
Sia la A D di tre nomi A B B C C D, & ſia A B 6 B C R 10, & C D R 3. Dico anchor il quadrato di eſſa eſſer dato. percioche ſegandoſi la A D in due punti B C, ſarà il quadrato di tutta vguale alli rettangoli, che ſi contengono da ciaſcuna parte adattata à ciaſcuna, per le coſe che ſi ſono dimoſtrate da noi alla ſeconda propoſitione del ſecondo libro. adunque il quadrato di A B è 36 & il rettangolo contenuto delle A B B C è R 360, & il contenuto dalle A B C D è R 108. ſimilmente il rettangolo contenuto dalle A B B C è R 360; & il quadrato di B C è 10. oltre à ciò il rettangolo contenuto dalle B C C D è R 30; & altresì il contenuto dalle A B C D R 108; & quello che ſi contiene dalle B C C D R 30; & finalmente il quadrato di C D è 3. ma il doppio di R 360 è R 1440, & il doppio di R 108 è R 432, & il doppio di R 30 è R 120. onde la ſomma di tutte ſarà 49 più R 1440 più R 432 più R 120, che è il quadrato della A D. & medeſimamente faremo nell'altre, habbiano quanti nomi ſi vogliano.



THEOREMA II.

Date due linee rette che ſiano di due, ò di più nomi; il rettangolo anchora contenuto da eſſe ſarà dato.

Siano le linee rette A B C D, & la A B ſia di due nomi A E E B, & ſia A E 5, E B R 12, & C D ſia di due nomi C F F D: & ſia C F 4, F D R 7. Dico il rettangolo che da eſſe ſi contiene, eſſer dato. percioche ſegandoſi due linee rette A B C D in qualunque modo ne punti E F, il rettangolo contenuto da eſſe è vguale alli rettangoli che ſi contengono da ciaſcuna parte di vna adattata à ciaſcuna parte dell'altra, per le coſe dimoſtrate da noi alla prima propoſitione del ſecondo libro nel primo theorema. il rettangolo dunque contenuto da 4 & 5 è 20, & il contenuto da 4 & R 12 è, R 192, & quello che ſi contiene da R 7 & 5 è R 175, & quello che ſi contiene da R 7 & R 12, è R 84. onde la ſomma di tutto è 20 più R 192, piu R 175 piu R 84. che è il rettangolo contenuto dalle A B C D. non altramente ſe troverà il rettangolo contenuto da due linee rette, che ſiano di piu nomi.



THEOREMA III.

Il quadrato della data apotoma, cioe dello dato reſiduo, ò reciſo, che coſi lo chiamano, ſarà dato.

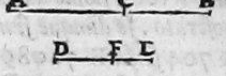
Sia l'apotome, ò vero reſiduo, ò reciſo A C, & la linea retta che ſi aggiunge ad eſſa C B, & ſia tutta la A B 4, la B C R 11, ſarà la A C 4 meno R 11. Dico anchor il quadrato ſuo eſſer dato. & per trouare queſto non ci ſeruiremo della quarta propoſitione del ſecondo libro, come prima, ma della ſettima del medeſimo; concioſiacoſa, che 4 & R 11 non ſiano parti della det-



ta linea, ma 4 è tutta la linea, & R 11 è parte, che si tragge da essa. perche dunque la A B si sega in qualunque modo nel punto C, sarà il quadrato di tutta la A B insieme col quadrato d'una parte B C vguale à quello, che si contiene due volte da tutta la A B, & B C insieme col quadrato dell'altra parte A C. è dunque il quadrato della A B 16, il quadrato della B C 11, & il rettangolo, che si contiene da tutta la A B, & B C è R 176, il cui doppio R 704. onde R 704 insieme col quadrato della A C è vguale à 27, & però il quadrato della A C è 27 meno R 704. ma quelli, che per la quarta propositione del secondo libro propongono di trouare questo quadrato, sono sforzati à dire se meno si moltiplichi per meno, prodursi piu. il che non esser uero prima ha notato il signor Girolamo Cardano nõ solo Mathematico, ma anche Philosopho & medico eccelentissimo come appare nel libro della regola aliza, che poco tempo fa ha mandato in luce. ma perche dalla loro operatione non ne seguita errore alcuno, questo se gli può perdonare.

THEOREMA IIII.

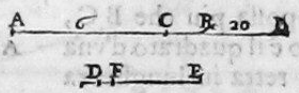
Date due linee rette di quelle, che si chiamano apotomi, etiandio il rettangolo, che da esse si contiene, sarà dato.



Siano due apotomi date A C D F, & alla A C si aggiunga la C B, & alla D F la F E, & sia tutta la A B 8 B C R 12, & tutta la D E 4, E F R 3. sarà la A C 8 meno R 12, & D F 4 meno R 3. Dico anchora il rettãgolo che da esse si contiene, esser dato. percioche segandosi due linee rette A B D E in qual si voglia modo ne punti C F, sarà il rettangolo contenuto da tutte le A B D E insieme col rettangolo contenuto dalle parti C B F E, vguale al rettangolo contenuto da tutta la A B, & vna parte F E, insieme col rettangolo contenuto da tutta la D E, & dalla parte C B, & quello, che si contiene dall'altre parti A C D F, per le cose da noi dimostrate alla prima propositione del secondo libro nel secondo theorema. onde il rettangolo contenuto dalle A B D E è 32. & il contenuto dalle C B F E è R 36, cioè 6, & il rettangolo contenuto dalle A B F E è R 192; & il contenuto dalle D E C B è R 192, quali due radici giunti insieme fanno R 768, & però 38 è vguale à R 768, insieme con quello, che si contiene dalle A C D F. per le qual cose seguita il rettangolo contenuto dalle A C D F, essere 38 meno R 768. ma li moderni per trouare questo si seruono del primo theorema, & però affermano se meno si moltiplichi per il meno, prodursi piu. ma non bene, perche bisogna seruirsi del secondo theorema, conciosiacosa, che 8 & R 12 non siano parti d'una linea retta, anzi 8 è tutta la linea & parte di essa è, R 12, & similmẽte si deue dire d. 4 meno R 3. ma pero dalla loro operatione nõ ne seguita errore alcuno.

THEOREMA V.

Data vna linea retta, che sia di due, ò di piu nomi, & data vna apotome, il rettangolo contenuto da esse sarà dato.



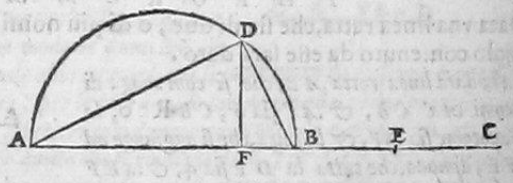
Sia la data linea retta A B, che si componga di due nomi A C C B, & A C sia 6, C B R 20, la data apotome sia D F, & la linea, che si aggiunge ad essa F E, dimodo, che tutta la D E sia 4, & la E F R 12. sarà la D F 4 meno R 12. Dico il rettangolo, che si contiene dalle A B D F esser dato. percioche segandosi due linee rette A B D E in qualunque modo ne punti C F, sarà per il secondo theorema gia detto, il rettangolo contenuto dalle A B D E vguale alli rettangoli, che si fanno da ciascuna parte di una adattata à ciascuna parte dell'altra, cioè al rettangolo contenuto dalle D F A C, & al contenuto dalle D F C B, & oltre à ciò al rettangolo, che si contiene dalle F E A C, & à quello, che si contiene dalle F E C B: ma il rettangolo contenuto dalle D E A C insieme con quello, che si contiene dalle D E C B è vguale al rettangolo contenuto da tutte le A B D E, per la prima del secondo libro. la onde il rettangolo contenuto dalle D E A C è 24, il contenuto dalle D E C B è R 320, il contenuto dalle F E A C è R 432, & quello, che si contiene dalle F E C B è R 240. adunque i rettangoli contenuti dalle D F A C. & D F C B, cioè il rettangolo contenuto dalle D F A B, è 24 piu R 320, meno R 432, & meno R 240. nel medesimo modo procederemo se le linee rette A B D E siano composte di piu nomi.

Onde appare ſe piu per meno, ò meno per piu ſi moltiplichi, prodursi meno.

Da queſte coſe coſi dimoſtrate è manifeſto, il quadrato della A E eſſer 27 piu R 704, *& il quadrato della E B 27 meno* R 704. *adunque aggiungendo all'vno & l'altro il commune quadrato della E F, che è 5, ſarà il quadrato della A F 32 piu* R 704, *il quadrato della F B 32 meno* R 704, *& la linea retta A F radice di queſta ſomma, 32 piu* R 704 *che chiamano radice vniuerſale, & la notano in queſto modo cioè* R *V.* 32 *piu* R 704, *& ſimilmente B F* R *V.* 32 *meno* R 704. *i quadrati delle quali giunti inſieme cioè 32 piu* R 704, *& 32 meno* R 704 *fanno 64, che è il quadrato della A B. oltre à cio perche il rettangolo che è contenuto dalle linee rette A F F B è vguale al contenuto dalle A B E F, come ſi è gia dimoſtrato nel primo lemma, & il contenuto dalle A B E F è* R 320, *etiandio il rettangolo che ſi contiene da quelle linee* R *V.* 32 *piu* R 704 *&* R *V* 32 *meno* R 704, *ſarà* R 320. *& che queſto ſia coſi, piu manifeſtamente appare dalla moltiplicatione fra loro. percioche diſpoſte queſte* R *cioè* R *V* 32 *piu* R 704 *&* R *V.* 32 *meno* R 704, *acciochè conoſciamo quel che venghi dalla loro moltiplicatione, ſi deue operare come nelle ſemplici* R, *cioè moltiplicando i quadrati di eſſe fra loro & la* R *del prodotto ſarà quella che ſi cerca. & eſſendo i quadrati dell' & l'altra di due parti, ſarà il rettangolo che ſi contiene da tutte à guiſa di linee vguale alli rettangoli che ſi fanno da ciaſcuna parte d'vna adattata à ciaſcuna parte dell'altra, come ſi è dimoſtrato. ſe dunque ſi moltiplichino 32 in ſe fanno 1024, & ſe 32 cioè* R 1024 *moltiplichi* R 704 *ſi fa* R 720896, *& coſi ſe 32 moltiplichi meno* R 704 *ſi fa meno* R 720896. *ſe ſi moltiplichi finalmente* R 704 *per meno* R 704 *ſi fanno meno 704. adunque tutto il cõpoſto da queſte è 1024 piu* R 720896, *meno* R 720896, *meno 704, cioè 1024 meno 704. onde tratto 704 de 1024, rimarranno 320. & la radice di eſſo ſarà quello, che ſi cerca. adunque ſe moltiplichiamo* R *V.* 32 *piu* R 704. *per* R *V* 32 *meno* R 704 *ſi produrrà* R 320. *ma imquanto appartiene al ſcholio, ſia la A B 10, & i numeri C D 5, 3. facciaſi come 5 à 3 coſi il quadrato della A B, cioè 100 al quadrato della B E, ſarà à 60. adunque eſſa B E è* R 60, *& A E 10 meno* R 60. *il rettangolo B F è* R 6000. *& il rettangolo A F 100 meno* R 6000.

PROBLEMA XI. PROPOSITIONE XXXV.

Trouare due linee rette in potenza incommenſurabili, che facciano il compoſto delli quadrati loro medio, & il rettangolo che ſi contiene da eſſe, rationale.



Propongansi due medie in potenza ſolamente commenſurabili A B B C, che contenganovn ſpatio rationale, talmente che la A B poſſa piu che B C, quãto è il quadrato d'vna linea retta in lunghezza incommenſurabile ad eſſa, & nella A B deſcriuaſi il mezo cerchio A D B: & ſegata per mezo la B C nel punto E, adattiſi alla A B vn parallelogrammo vguale al quadrato della B E, che manchi della figura quadrato, & ſia quello che ſi contiene dalle A F F B. adunque A F è in lunghezza incommenſurabile alla F B: & dal punto F tiriſi la F D ad angoli retti ſopra la A B, & congiunganſi A D D B. onde perche A F è incommenſurabile alla F B, ſarà anche il rettangolo B A F incommenſurabile al rettangolo A B F: & è il rettangolo B A F vguale al quadrato della A D, & il rettangolo A B F vguale al quadrato della D B. adunque il quadrato della A D è incommenſurabile al quadrato D B. & però le linee rette A D D B ſono in potenza incommenſurabili. & perche il quadrato di eſſa A B è medio, ſarà anche il compoſto delli quadrati delle A D D B medio. & eſſendo la B C doppia della D F, etiandio il rettangolo A B C ſarà doppio del rettangolo fatto

32. di queſto.

Lem. innanzi la 18. di queſto.

19. di queſto.

Lem. 2.

Lem primo.

Lem. 3.

dalle A B D F. & però commensurabile. ma il rettangolo A B C è rationale, per che cosi si pone. adunque anchor il rettangolo delle A B F D è rationale. & al rettangolo delle A B F D è vguale il rettangolo A D B. onde etiandio il rettangolo A D B sarà rationale. si sono dunque trouate due lince rette in potenza incommensurabili A D D B, che fanno il composto delli quadrati loro medio, & il rettangolo, che si contiene da esse, rationale.

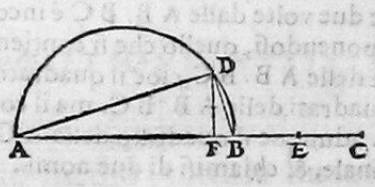
Lem. 1. innanzi la 34. di questo.

IL COMMANDINO.

Sia la linea retta A B R R 54, *la B C* R R 24: *& diuisa per mezo* R R 24 *sarà la metà di essa B E* R R 1 $\frac{1}{2}$. *adattisi alla A B vn parallelogrammo vguale al quadrato della B E, cioè vguale à* R 1 $\frac{1}{2}$, *che manchi della figura quadrata, ilche si farà similmente come disopra. perche diuisa la A B, cioè* R R 54 *per mezo, sarà la metà* R R 3 $\frac{3}{8}$: *& se dal quadrato di essa, cioè da* R 3 $\frac{3}{8}$ *si tragga* R 1 $\frac{1}{2}$, *la rimanente sarà* R $\frac{3}{8}$. *adunque la linea retta A F è* R R 3 $\frac{3}{8}$ *piu* R R $\frac{3}{8}$, *& la F B* R R 3 $\frac{3}{8}$ *meno* R R $\frac{3}{8}$, *& il quadrato della A F nel medesimo modo si troverà essere la* R 6 *piu* R 4 $\frac{1}{2}$. *& il quadrato della F B* R 6 *meno* R 4 $\frac{1}{2}$, *alle quali aggiunto il commune quadrato della F D, cioè la* R 1 $\frac{1}{2}$, *sarà il quadrato della A D* R 13 $\frac{1}{2}$ *piu* R 4 $\frac{1}{2}$, *& il quadrato della D B* R 13 $\frac{1}{2}$ *meno* R 4 $\frac{1}{2}$. *et però la linea retta A D* R *V* R 13 $\frac{1}{2}$ *piu* R 4 $\frac{1}{2}$ *& la D B* R *V* R 13 $\frac{1}{2}$ *meno* R 4 $\frac{1}{2}$. *i quadrati delle quali giunti insieme fa mo* R 54, *cioè il quadrato della linea retta A B, che è medio. ma il rettangolo che si contiene dalle A B D B è vguale al contenuto dalle A B D F, & il contenuto dalle A B D F cioè* R R 54 *&* R R 1 $\frac{1}{2}$ *è* R R 81 *cioè* 3. *adunque quello che si contiene dalle A D D B è* 3. *ma il medesimo appare altrimente moltiplicando* R *V* R 13 $\frac{1}{2}$ *piu* R 4 $\frac{1}{2}$ *per* R *V* R 13 $\frac{1}{2}$ *meno* R 4 $\frac{1}{2}$, *percioche si fa* R 9 *che è* 3. *sono dunque queste linee rette in potenza incommensurabili, & fanno il composto della quadrati loro medio & il rettangolo che si contiene da esse rationale, come bisognaua.*

PROBLEMA XII. PROPOSITIONE XXXVI.

Trouare due linee rette in potenza incommensurabili, che facciano il composto delli quadrati loro medio, & il rettangolo che si contiene da esse medio, & incommensurabile al composto delli lor quadrati.



Proponganſi due medie in potenza ſolamente commenſurabili A B B C, che contengano vn ſpatio medio, talmente che la A B poſſa piu che la B C, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza incommenſurabile ad eſſa, & nella A B deſcriuaſi il mezo cerchio A D B, & il rimanente facciaſi, come ſi è detto diſopra. perche dunque la A F è in lunghezza incommenſurabile alla F B, ſarà anchor la A D in potenza in commenſurabile alla D B. & perche il medio e quello che ſi fa dalla A B, etiandio il cõpoſto delli quadrati di A D D B è medio. & eſſendo il rettangolo A F B vguale al quadrato di vna d'eſſe B E D F, ſarà la D F vguale alla B E; & però la B C doppia della F D. adunque il rettangolo A B C è doppio di quello, che ſi contiene dalle A B F D. & il rettangolo A B C è medio. onde etiandio quello, che è contenuto dalle A B F D è medio: & è vguale à quello, che ſi contiene dalle A D D B. & però anch'eſſo ſarà medio. & perche la A B è in lunghezza incommenſurabile alla B C, & la C B alla B E commenſurabile, ſarà anchor la A B in lunghezza incommenſurabile. alla B E. adunque etiandio il quadrato della A B è incommenſurabile al rettangolo A B E. ma al quadrato. della A B ſono vguali i quadra

Cor. della 24 di queſto. Lem. 1. alla 34. di queſto. 13 di queſto

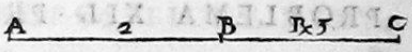
ti delle A D D B: & al rettangolo A B E è vguale il rettangolo contenuto dalle A B F D, cioè il rettangolo A D B. il composto dunque delli quadrati di A D D B è incommensurabile al rettangolo A D B. la onde si sono trouate due linee rette in potenza incommensurabili, che fanno il composto dalli quadrati loro medio, & il rettangolo, che si contiene da esse medio, & incommensurabile al composto delli lor quadrati.

IL COMMANDINO.

Sia la linea retta A B R R 18, *& la B C* R R 2, *& diuidasi la B C per mezo nel punto E. sarà la B E* R R $\frac{1}{2}$. *& se alla A B si adatti vn parallelogrammo vguale al quadrato della B E, cioè à* R R $\frac{1}{8}$, *che manchi della figura quadrata; sarà la linea retta A F* R R $1\frac{1}{2}$ *piu* R R $\frac{1}{2}$, *& la F B* R R $1\frac{1}{8}$ *meno* R R $\frac{1}{2}$; *& il quadrato della A F* R $3\frac{1}{8}$ *piu* R 3; *& il quadrato della F B* R $3\frac{1}{8}$ *meno* R 3, *& aggiunto all'vno & l'altro il quadrato della B E, sarà il quadrato della A D* R $4\frac{1}{2}$ *piu* R 3, *& il quadrato della D B* R $4\frac{1}{2}$ *meno* R 3. *adunque la linea retta A D è* R *V* R $4\frac{1}{2}$ *piu* R 3, *& la D E* R *V* R $4\frac{1}{2}$ *meno* R 3. *i quadrati delle quali giunti insieme fanno la* R 18, *quanto è il quadrato della A B: & il rettangolo contenuto da esse è* R $1\frac{1}{2}$ *che è medio, & incommensurabile al cõposto delli lor quadrati.*

THEOREMA XXV. PROPOSITIONE XXXVII.

Se due rationali in potenza solamente commensurabili si compongano, tutta la linea sarà irrationale, & chiamili di due nomi, ò vero (come dicono) binomio.



Componganſi due rationali in potenza ſolamente commenſurabili A B B C. Dico la A C eſſere irrationale. percioche eſſendo la A B in lunghezza incommenſurabile alla B C, concioſiacoſa che ſiano in potenza ſolamente commenſurabili, & come la A B alla B C, coſi il rettangolo A B C al quadrato che ſi fa dalla B C. ſarà il rettangolo A B C incommenſurabile al quadrato della B C. ma al rettangolo A B C è commenſurabile quello, che ſi contiene due volte dalle A B B C, & al quadrato della B C ſono commenſurabili i quadrati delle A B B C. adunque quello che ſi contiene due volte dalle A B B C è incommenſurabile à quadrati delle A B B C & componendoſi, quello che ſi contiene due volte dalle A B B C inſieme con li quadrati delle A B B C, cioè il quadrato della A C è incommenſurabile al compoſto da quadrati delle A B B C. ma il compoſto da quadrati delle A B B C è rationale. adunque il quadrato della A C è irrationale, & però la linea retta A C è irrationale, & chiamiſi di due nomi.

1. del ſeſto.
10. di queſto:
6. di queſto.
13. di queſto.
4. del ſecondo
10. diff.
11. diff.

SCHOLIO.

Quella che è proportionale in mezo fra queſte rationali è media. & niuna di queſte, ne l'vna & l'altra inſieme ſara media. ma quella che da eſſe ſi compone, ſi chiama di due nomi. adunque dell'vna & l'altra irrationale ſono creatrici ſecondo differente modo di creatione.

IL COMMANDINO.

Sia la linea retta A B 2, & la B C R 3, sarà la A C 2 piu R 3, & il quadrato di essa 7 piu R 48, percioche il quadrato della A B è 4 & il quadrato della B C 3, & il rettangolo che si contiene dalle A B B C R 12, il cui doppio è R 48.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIONE XXXVIII.

Se due medie in potenza solamente commensurabili siano composte, che contengano vn spatio rationale, tutta la linea sarà irrationale, & dicasi la prima delle due medie, ò uero bimedial primo.

Componganſi due medie in potenza solamente commensurabili A B B C, che contengano vn spatio rationale. Dico tutta la A C essere irrationale. percioche essendo la A B in lunghezza incommensurabile alla B C, anchora i quadrati delle A B B C saranno incommensurabili al rettangolo, che si contiene due uolte dalle A B B C. adunque componendosi i quadrati delle A B B C insieme con quello che si contiene due volte dalle A B B C, che è il quadrato della A C, è incommensurabile al rettangolo A B C. ma il rettangolo A B C si pone rationale. onde il quadrato della A C è irrationale, & la linea retta A C irrationale. & chiamisi la prima delle due medie, ò uero bimedial primo.

A R R 54 B R R 24 C

IL COMMANDINO.

Componganſi due medie in potenza solamente commensurabili A B B C, che contengano un spatio rationale] *in che modo si trouino queste l'ha insegnato nella 28 del presente libro. sia la A B* R R 54 *la B C* R R 24 *sarà tutta la A C* R R 54 *piu* R R 24.

Anchora i quadrati delle A B B C saranno incommensurabili al rettangolo, che si contiene due volte dalle A B B C] *questo seguita nel medesimo modo. che disopra, per la 13 di questo replicata due uolte.*

Che è il quadrato della A C] *per la 4 del secondo.*

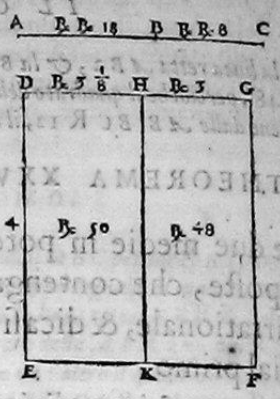
Onde il quadrato della A C è irrationale, & la linea retta A C irrationale] *per la 10 & 11 diffinitione di questo.*

THEOREMA XXVII. PROPOSITIONE XXXIX.

Se due medie in potenza solamente commensurabili siano composte, che contengano un spatio medio, tutta la linea sarà irrationale, & dicasi la seconda delle due medie, ò vero bimedial secondo.

Componganſi due medie in potenza solamente commensurabili A B B C, che contengano vn spatio medio. Dico la A C essere irrationale. propongasi la rationale D E, & alla D E adattisi vn parallelogrammo rettangolo D F, vguale al quadrato della A C, che faccia la larghezza D G. perche dunque il quadrato della A C è vguale à quadrati della A B B C, & al rettangolo due volte contenuto dalle A B B C; adattisi alla D E il parallelogrammo rettangolo E H, vguale à quadrati delle A B B C. adunque il rimanente F H è vguale à quello, che due volte è contenuto dalle A B B C. & perche l'vna & l'altra di esse A B B C è media, saranno

ranno anchor i quadrati delle A B B C medij. & si pone medio quello che due volte è
F contenuto dalle A B B C. & à quadrati delle A B B C è vguale il parallelogrammo E H, & al retangolo due volte cõtenuto dalle A B B C è vguale esso H F. adunque amẽdue E H H F sono medij, & si adattano alla rationale.
G onde l'vna & l'altra linea retta D H H G è rationale, & alla D E in lunghezza incommensurabile. & perche la A B è in lunghezza in-
H commensurabile alla B C, & è come la A B alla B C, così il quadrato della A B al rettan-
K golo A B C, sarà al quadrato della A B in-
L commensurabile il rettangolo A B C. ma al quadrato della A B è commensurabile il com
A posto da quadrati dello A B B C, & al rettangolo A B C è commensurabile quello che
M due volte è contenuto dalle A B B C. adunque il composto da quadrati delle A B B C sarà incommensurabile à quello che è contenuto due volte dalle A B B C. ma à quadrati delle A B B C è vguale il parallelogrammo E H, & al rettangolo contenuto due volte dalle A B B C è vguale il parallelogrammo H F.
N onde E H è incommensurabile ad H F: & però la linea retta D H è incommensurabile in lunghezza alla H G. & si sono dimostrate rationali. adunque le D H H G
O sono rationali in potenza solamente commensurabili. & per tal cagione la D G è
P irrationale, & rationale la D E, & il rettangolo contenuto dalla rationale & dal-
Q la irrationale è irrationale. onde il spatio D F è irrationale, & irrationale quella che lo può creare. ma la linea retta A C può creare D F. adunque la A C sarà irrationale, & chiamisi la seconda delle due medie, ò uero bimedial secondo.



SCHOLIO.

Chiamò quella seconda delle due medie, percioche è spatio medio & non rationale quello che si contiene dalle A B B C, concioſiacoſa che il medio è doppo il rationale. ma quello che è contenuto dalla rationale & dalla irrationale eſſere ſpatio irrationale appare manifeſtamente.

2 1. di queſto. Perche se sia rationale, & se adatti alla rationale; sarà la larghezza che fa rationale. ma è anchora irrationale, che è inconueniente. quello dunque che è contenuto dalla rationale & dalla irrationale è irrationale. il che bisognaua dimostrare.

IL COMMANDINO.

A Componganſi due medie in potenza ſolamente commenſurabili A B B C che contengano vn ſpatio medio] *in che modo ſi trouino queſte linee l'inſegna nella 29 del preſente libro. ſia la A B* R R 18, *la B C* R R 8. *ſarà la A C* R R 18 *piu* R R 8, *il cui quadrato è* R 50 *piu* R 48.

B Propongaſi la rationale D E & alla D E adattiſi vn parallelogrammo rettangolo D F vguale al quadrato della A C, che faccia la larghezza D G] *ſia la rationale D E 4, alla quale ſe ſi adatti quel medio* R 50. *farà la larghezza* R 3 1/8 *che ſia D H. & ſe alla medeſima ſi adatti* R 48, *farà la larghezza* R 3, *che ſia H G. adunque tutta la larghezza ſarà* R 3 1/8 *piu* R 3.

C Perche dunque il quadrato della A C è vguale à quadrati delle A B B C] *per la 4 del ſecondo, ò uero per la 4 di Barlaam Monacho.*

Adattisi alla D E il parallelogrammo rettangolo E H vguale à quadrati delle A B B C] *il quadrato della A B è* R 18, *& il quadrato della B C* R 8 *che giunti insieme fanno* R 50. *adunque il parallelogrammo E H è* R 50, *& la linea retta D H* R $3\frac{1}{8}$ D

Adunque il rimanente F H è vguale à quello, che due volte è contenuto dalle A B B C] *cioè* R 48, *& la linea retta H G* R 3, *come si è detto*. E

Et si pone medio quello, che due volte è contenuto dalle A B B C] *si pone medio quello, che è contenuto dalle A B B C, & perche quello, che è contenuto due volte dalle A B B C glie commensurabile, cioè il doppio per la 6 di questo, anche egli sarà medio per lo corollario della 24 di questo*. F

Onde l'vna & l'altra linea retta D H H G è rationale, & alla D E in lunghezza in commensurabile] *per la 23 di questo*. G

Et è come la A B alla B C, così il quadrato della A B al rettangolo A B C] *per lo lemma posto alla 23 di questo, & per la prima del sesto*. H

Sarà al quadrato della A B incommensurabile il rettangolo A B C] *per la 10 di questo*. K

Ma al quadrato della A B è commensurabile il composto da quadrati delle A B B C] *percioche si pongano le A B B C in potenza commensurabili. adunque etiandio i quadrati loro saranno commensurabili, & il composto da essi commensurabile all'uno & l'altro quadrato, per la 16 di questo*. L

Adunque il composto da quadrati della A B B C sarà incommensurabile à quello, che è contenuto due volte dalle A B B C] *per la 14 di questo*. M

Et però la linea retta D H è incommensurabile in lunghezza alla H G] *per la 1 del sesto & per la 10 di questo*. N

Et per tal cagione la D G è irrationale] *per la 37 di questo*. O

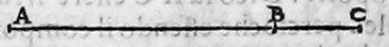
Et il rettangolo contenuto dalla rationale & dalla irrationale è irrationale] *in che modo questo seguiti è stato detto nel scholio precedente*. P

Et irrationale quella, che lo può creare] *per la 11 diffinitione*. Q

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIONE XL.

Se due linee rette in potenza incommensurabili siano composte, che facciano il composto delli quadrati loro rationale, & quello, che si contiene da esse medio, tutta la linea sarà irrationale, & chiamisi maggiore.

Componganſi due linee rette in potenza incommensurabili A B B C, che facciano quelle cose, che si sono proposte. Dico la A C essere irrationale. percioche essendo medio quello, che si contiene dalle A B B C, & quello, che due volte si contiene dalle A B B C sarà medio. ma il composto da quadrati delle A B B C è rationale. adunque quello, che si contiene due volte dalle A B B C è incommensurabile al composto da quadrati della A B B C. & però i quadrati delle A B B C insieme con quello, che si contiene due volte dalle A B B C, che è il quadrato di A C, è incommensurabile à quadrati delle A B B C. ma il composto da quadrati delle A B B C è rationale. adunque il quadrato di A C sarà irrationale. & però la linea retta A C è irrationale, & chiamisi maggiore.



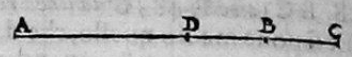
A B C

SCHOLIO.

Chiamò la detta linea maggiore, percioche li spatij rationali, che si fanno dalle A B B C sono maggiori del medio, che due volte si contiene dalle A B B C; & bisogna dalla proprietà delle rationali imporre il nome. ma li spatij, che si fanno dalle A B B C essere maggiori di

quello, che due volte è contenuto dalle A B B C dimostreremo in questo modo.

E manifesto dunque le A B B C essere fra loro disuguali, percioche se siano vguali, etiādio i quadrati, che si fanno dalle A B B C saranno vguali à quello, che due volte si contiene dalle A B B C, & il rettangolo A B C sarà rationale, il che non si pone. sono dunque le A B B C disuguali. pongasi la A B maggiore, & alla B C vguale la B D. adunque i quadrati delle A B B D sono vguali à quello, che due volte si contiene dalle A B B D insieme col quadrato della D A. ma la D B è vguale alla B C. adunque i quadrati delle A B B C sono vguali à quello, che si contiene due volte dalle A B B C insieme col quadrato della A D; & però i quadrati delle A B B C sono tanto maggiori di quello, che si contiene due volte dalle A B B C, quanto è il quadrato della D A.



IL COMMANDINO.

A Componganſi due linee rette in potenza incommensurabili A B B C, che facciano quelle cose, che si sono proposte] *si trouano dette linee per la 34 di questo. sia la A B R V 32 piu R 704, & la B C R V 32 meno R 704. sarà tutta la A C R V 32 piu R 704 piu R V 32 meno R 704.*

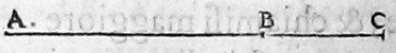
B Et quello, che due volte si contiene dalle A B B C sarà medio] *per lo corollario della 24 di questo.*

C Et però i quadrati delle A B B C insieme con quello, che si contiene due volte dalle A B B C, che è il quadrato di A C, è incommensurabile à quadrati delle A B B C] *per la 17 di questo.*

THEOREMA XXIX. PROPOSITIONE XLI.

Se due linee rette in potenza incommensurabili siano compo ste, che facciano il composto delli loro quadrati, medio, & & quello, che si contiene da esse, rationale; tutta la linea sarà irrationale, & chiamisi linea potente il spatio rationale & medio.

A Componganſi due linee rette in potenza incommensurabili A B B C, che facciano quelle cose, che si sono proposte. Dico la A C essere irrationale. percioche essendo il composto da quadrati delle A B B C medio, & quello, che due volte si contiene dalle A B B C, rationale, sarà il composto da quadrati della A B B C incommensurabile à quello, che si contiene due volte dalle A B B C. onde componendosi il quadrato della A C è incommensurabile à quello, che si contiene due volte dalle A B B C. ma quello, che due volte si contiene dalle A B B C è rationale. adūque il quadrato della A C è irrationale, & però la linea retta A C è irrationale, & chiamisi linea potente il spatio rationale & medio.



B

C

SCHOLIO.

Chiamò la linea potente il spatio rationale & medio, percioche detta linea puo creare due spatij, l'vn rationale & l'altro medio, & essendo il rationale innanzi allo irrationale, prima fece mētione del rationale.

IL COMMANDINO.

A Componganſi due linee rette in potenza incommensurabili A B B C, che facciano quelle cose, che si sono proposte] *le dette linee si trouano per la 35 di questo. sia la A B R V R 13 $\frac{1}{2}$ piu R 4 $\frac{1}{2}$, la B C R V R 13 $\frac{1}{2}$ meno R 4 $\frac{1}{2}$. sarà tutta la A C R V R 13 $\frac{1}{2}$ piu R 4 $\frac{1}{2}$ più R V R 13 $\frac{1}{2}$ meno R 4 $\frac{1}{2}$.*

Et quello, che due volte ſi contiene dalle A B B C rationale] *ſeguita cio dal corollario della 24 di queſto, perche ſi pone la metà di eſſo rationale, cioè quello, che ſi contiene dalle A B B C.* B

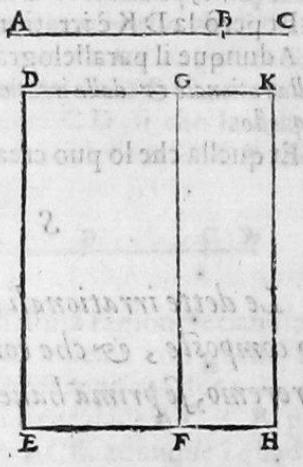
Onde componẽdoſi il quadrato della A C è incommenſurabile à quello, che ſi contiene due volte dalle A B B C] *perche il compoſto da quadrati delle A B B C è incommenſurabile à quello, che ſi contiene due volte dalle A B B C, ſarà per la 17 di queſto il compoſto da quadrati delle A B B C inſieme con quello, che ſi contiene due volte dalle A B B C, cioè il quadrato della A C, incommenſurabile à quello, che ſi contiene due volte dalle A B B C.* C

4. del ſecondo

THEOREMA XXX. PROPOSITIONE XLII.

Se due linee rette in potenza incommenſurabili ſiano compoſte, che facciano il compoſto delli lor quadrati medio, & quello, che ſi contiene da eſſe, medio, & incommenſurabile al compoſto de quadrati loro; tutta la linea ſarà irrationale, & chiamiſi linea potente due ſpatij medij.

Componganſi due linee rette in potenza incõmẽſurabili A B B C, che facciano il cõpoſto da quadrati delle A B B C medio, & quello, che ſi cõtiene da eſſe medio, & incommẽſurabile al compoſto da quadrati loro. Dico la A C eſſere irrationale. propongaſi la rationale D E, & ad eſſa adattiſi il parallelogrammo rettangolo D F, vguale à quadrati delle A B B C, & il parallelogrammo G H vguale à quello, che due volte è contenuto dalle A B B C. adunque tutto D H è vguale al quadrato della A C. & perche il cõpoſto da quadrati delle A B B C è medio, & vguale al parallelogrammo D F, ſarà anche eſſo D F medio. & è adattato alla rationale D E. adunque la D G è rationale, & in lunghezza incommenſurabile alla D E. & per la medeſima cagione la G K è rationale, & in lunghezza incommenſurabile alla F G, cioè alla D E. & perche il compoſto da quadrati delle A B B C, è incommenſurabile à quello, che ſi contiene due volte dalle A B B C, ſarà etiandio il parallelogrammo D F incommenſurabile à G H. adunque anchor la linea retta D G è incommenſurabile alla G K: & ſono rationali. onde le D G G K ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabili. & però la D K è irrationale, che ſi chiama di due nomi, & la D E è rationale. adunque il parallelogrammo D H è irrationale, & quella, che lo può creare irrationale. ma la linea retta A C può eſſo D H. onde la A C è irrationale, & chiamiſi potente due ſpatii medij.



A B C D E F G

SCHOLIO.

Chiamò la linea potente due ſpatij medij, concioſiacoſa, che poſſa creare due ſpatij medij, cioè il compoſto da quadrati delle A B B C, & quello, che due volte dalle A B B C ſi contiene.

IL COMMANDINO.

A Componganſi due linee rette in potenza incommenſurabili A B B C, che facciano il compoſto da quadrati delle A B B C medio, & quello che ſi contiene da eſſe medio] *in che modo queſte linee ſi poſſano trouare, lo dimoſtra nella 36 di queſto. Sia la A B R V R 4 $\frac{1}{2}$ piu R 3, & la B C R V R 4 $\frac{1}{2}$ meno R 3. ſaranno i quadrati di eſſe giunti inſieme R 18, & il rettangolo contenuto da eſſe R 1 $\frac{1}{2}$, il cui doppio è R 6.*

B Propongaſi la rationale D E, & ad eſſa adattiſi il parallelogrammo rettangolo D F uguale à quadrati delle A B B C, & il parallelogrammo G H vguale à quello che due volte è contenuto dalle A B B C] *ſia la rationale D E 3, alla quale adattandoſi il parallelogrammo D F vguale al compoſto da quadrati delle A B B C, cioè R 18, ſarà la larghezza R 2, che ſia D G. & ſe alla medeſima ſi adatti il parallelogrammo G H vguale à quello che due volte è contenuto dalle A B B C cioè R 6, farà la larghezza R $\frac{2}{3}$, che ſia G K. adunque tutta la larghezza D K ſarà R 2 piu R $\frac{2}{3}$, che è irrationale, chiamata di due nomi. & tutto il parallelogrammo D H ſarà vguale al quadrato di A C, per la 4 del ſecondo.*

C Adunque la D G è rationale, in lunghezza incommenſurabile alla D E] *per la 23 di queſto.*

D Adunque anchor la linea retta D G è incommenſurabile alla G K] *per la decima di queſto, percioche come la D F alla G H, coſi è la D G alla G K per la prima del ſeſto.*

E Et però la D K è irrationale che ſi chiama di due nomi] *per la 37 di queſto.*

F Adunque il parallelogrammo D H e irrationale] *percioche quello che è contenuto dalla rationale & dalla irrationale è irrationale, come ſi è dimoſtrato nel ſcholio della 39 di queſto.*

G Et quella che lo puo creare è irrationale] *per la 11 diffinitione.*

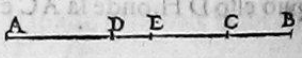
SCHOLIO.

Le dette irrationali in vn ſol modo diuiderſi in linee, delle quali ſono compoſte, & che conſtituiſcono le propoſte ſpetie, fra poco dimoſtreremo, ſe prima haueremo poſto innanzi vn lemma, che è tale.

LEMMA.

Propongaſi la linea retta A B, & ſeghiſi tutta in due parti diſuguali ne punti C D, & ſia la A C maggiore, che la D B. Dico i quadrati delle A C C B eſſere maggiori che i quadrati delle A D D B.

Seghiſi per mezo la A B nel punto E. & per che la A C è maggiore, che la D B, traggaſi la commune D C. Ila rimanente dunque A D ſarà maggiore; che la rimanente C B, & è la A E vguale alla E B. adunque la D E è minore che la E C, & i punti C D non ſono vgualmente diſtanti dal ſegamento che ſi fa per mezo. & perche il rettangolo A C B inſieme col quadrato della linea retta C E è vguale al quadrato della E B, ma anche il rettangolo A D B inſieme col quadrato della linea retta D E è vguale al quadrato della E B; ſarà il rettangolo A C B inſieme col quadrato della E C vguale al rettangolo A D B inſieme col quadrato della D E. de quali il quadrato della D E è minore del quadrato della E C. il rimanente dunque rettangolo A C B è minore del rettangolo A D B. onde etiandio quello che due volte ſi contiene dalle A B B C è minore di quello che ſi contiene due volte dalle A D D B. ma

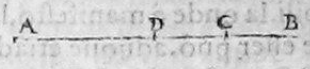


5. del ſecondo.

il compoſto da quadrati delle linee rette A C C B inſieme con quello, che ſi contiene due volte dalle A C C B, è vguale al compoſto da quadrati delle AD DB inſieme con quello che due uolte ſi contiene dalle AD DB. percioche l'vno & l'altro è vguale al quadrato della A B. il rimanente dunque compoſto da quadrati delle A C C B ſarà maggiore del compoſto da quadrati delle A D D B. il che biſogn aua dimoſtrare.

ALTRAMENTE.

Propongaſi vna linea retta A B, diuiſa in parti vguali nel punto D, & in parti diſuguali nel punto C. Dico i quadrati delle A C C B eſſere maggiori, the li quadrati delle A D D B.



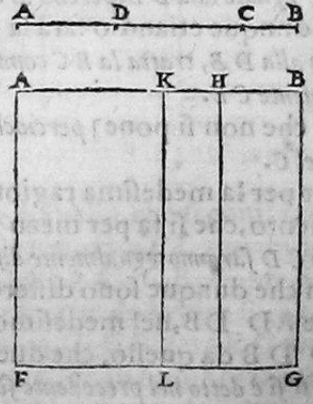
Percioche eſſendo i quadrati delle A C C B doppij de quadrati delle A D D C, il che ſi è dimoſtrato nel nono theorema del ſecondo libro, & ſono i quadrati delle AD DB doppij del quadrato di A D, concioſiacoſa che la A B ſia ſegata per mezo nel punto D, & quello che ſi fa due volte dalla D C è doppio del quadrato di D C: ſaranno i quadrati delle A C C B vguali à quadrati delle A D D B, inſieme con quello che ſi fa due volte dalla D C. adunque i quadrati delle A C C B ſono tanto maggiori che i quadrati delle A D D B, quanto e quello che ſi fa due volte dalla D C. ma non ſi ſeghi là A B per mezo, ma in qualunque modo ne punti C D, ſi che la A D ſia maggiore che la C B. ſi dimoſtrerà ſimilmente i quadrati delle A C C B eſſere maggiori che i quadrati delle A D D B. percio che ſegandoſi la linea retta A B in qualunque modo nel punto C, il quadrato della A B e vgua le à quadrati delle A C C B inſieme con quello che due volte dalle A C C B ſi contiene. per la medeſima ragione etiandio il quadrato della A B e vguale à quadrati delle A D D B inſieme con quello che due volte ſi contiene dalle A D D B: de quali quello che ſi contiene due volte dal le A D D B e maggiore di quello che due volte ſi contiene dalle A C C B; percioche il rettangolo A D B e maggiore del rettangolo A C B. adunque i quadrati che rimangono delle A D D B ſono minori de quadrati delle A C B C. il che biſognaua dimoſtrare.



Per le coſe poco fa dimoſtrate.

IL COMMANDINO.

Dalle coſe già dimoſtrate appare chiaramente l'eccesſo, nel quale il compoſto de quadrati delle A C C B auanza il compoſto de quadrati delle A D D B, eſſere vguale, ò piu toſto il medeſimo all'eccesſo, nel quale il rettangolo due volte contenuto dalle A D D B auanza il rettangolo che e contenuto due volte dalle A C C B.



Faccia dalla A B il quadrato A F G B, & alla A F adattiſi il parallelogrammo F H, vguale al compoſto da quadrati delle A C C B. ſarà il rimanente parallelogrammo H G vguale al rettangolo due volte contenuto dalle A C C B. poi alla medeſima A F adattiſi il parallelogrammo F K vguale al compoſto de quadrati delle A D D B. adunque il rimanente parallelogrammo K G è ugua le à quello che due volte è contenuto dalle A D D B. on

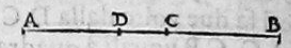
de

F *de perche il parallelogrammo F H è vguale al composto da quadrati delle A C B C, & il parallelogrammo F K è vguale al composto da quadrati delle A D D B, sarà il parallelogrammo L H l'eccesso, nel quale l'uno auanza l'altro. ma il medesimo L H è l'eccesso, nel quale il rettangolo due volte contenuto dalle A D D B auanza quello, che due volte è contenuto dalle A C C B. appare dunque esser vero, quello, che noi habbiamo proposto di dimostrare.*

THEOREMA XXXI. PROPOSITIONE XLIII.

La linea di due nomi, ò vero binomio in vn sol punto si diuide ne sui nomi.

Sia la A B di due nomi, diuisa ne nomi al punto C. adunque le A C C B sono
A rationali in potenza solamente commensurabili. Dico la A B ad altro punto non diuidersi in due rationali in potẽza solamente cõmensurabili, diuidasi s'egli è pos
sibile nel D, talmente che le A D D B siano rationali in potenza solamente cõmen
B surabili. la onde è manifesto, la A C nõ essere la medesima, che la D B. Sia la medesi
C ma se esser può. adũque etiãdio la A D sarà la medesima, che la C B, & come la A C alla C B, cosi sarà la B D alla D A, & la A B sarà
D similmente diuisa nel punto D, come nel C. il che non si pone. adunque la A C non è la medesima,



E che la D B, & per la medesima ragione i punti C D non sono vgualmente distanti dal segamen
F mento, che si fa per mezo. in che dũque sono differenti i quadrati delle linee rette A C C B, da quadrati delle A D D B, nel medesimo è differente quello, che è conte nuto due volte dalle A D D B, da quello, che è due volte cõtenuto dalle A C C B, percioche anchor i quadrati delle linee rette A C C B insieme con quello, che si contiene due volte dalle A C C B, & i quadrati delle A D D B insieme con quel
G lo, che si contiene due volte dalle A D D B sono vguali al quadrato della A B. ma i quadrati delle A C C B sono differenti da quadrati delle A D D B in vn spatio rationale, percioche amendue sono rationali. adunque etiandio quello, che si contiene due volte dalle A D D B è differente in vn rationale da quello, che
H due volte si contiene dalle A C C B, essendo essi medij. ma lo spatio medio non auanza il medio di vn rationale. la linea dũque di due nomi non si diuide in altri punti, & però si diuide in un solo ne suoi nomi. il che bisognaua dimostrare.

IL COMMANDINO.

A Adunque le A C C B sono rationali in potenza solamente commensurabili] *per la 37 di questo.*

B La onde è manifesto la A C non essere la medesima, che la D B] *cioè la A C non essere vguale alla D B, perche in questo luogo si piglia il medesimo per l'vguale.*

C Adunque etiandio sarà la A D la medesima che la C B] *percioche se la A C sia uguale alla D B, tratta la B C commune all'una & l'altra, sarà la rimanente A D vguale alla rimanente C B.*

D Il che non si pone] *percioche si pone la linea retta A B diuisa nel punto D altrimente, che nel C.*

E Et per la medesima ragione i punti C D non sono vgualmente distanti dal segamento, che si fa per mezo] *perche se le A D C B fra loro non siano vguali ne anche i punti C D saranno vgualmente distanti da quel punto, che diuide la linea retta A D per mezo.*

F In che dunque sono differenti i quadrati delle linee rette A C C B da quadrati delle A D D B, nel medesimo è differente quello, che è contenuto due volte dalle A D D B da quello, che due volte è contenuto dalle A C C B] *in che modo questo seguiti si è detto nel precedente scholio.*

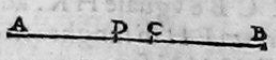
G Ma i quadrati delle A C C B sono differenti da quadrati delle A D D B in vn

ſpatio rationale, percioche amendue ſono rationali] *concioſiacoſa, che il rationale non auanzi il rationale ſe non di un rationale. il che noi habbiamo dimoſtrato alla 27 di queſto.*
Ma lo ſpatio medio non auanza il medio di vn rationale] *per la 27 di queſto.*

THEOREMA XXXII. PROPOSITIONE XLIIII.

La prima delle due medie, ò vero bimedial primo in un ſol punto ſi diuide ne ſuoi nomi.

Sia la prima delle due medie A B, diuiſa nel punto C, dimodo, che le A C C B ſiano medie in potenza ſolamente commenſurabili, che contengano vn ſpatio rationale. Dico la A B non diuidersi in altro punto. diuidaſi anchora nel D, ſe eſſer può, dimodo, che le A D D B ſiano medie in potenza ſolamente cõmenſurabili, che contengano vn ſpatio rationale. perche dunque in che è differente il rettangolo contenuto due volte dalle A D D B da quello, che due volte è contenuto dalle A C C B, nel medeſimo ſono anchora differenti i quadrati delle linee rette A C C B da quadrati delle A D D B, & il contenuto dalle A D D B è differente in vn rationale da quello, che due volte è contenuto dalle A C C B, eſſendo, amendue rationali; ſeguita, che etiandio i quadrati di eſſe A C C B ſiano differenti in vn rationale da quadrati delle A D D B, che ſono amendue medij, & ciò non può eſſere. la prima dunque delle due medie non ſi diuide in altro punto ne ſuoi nomi. onde è neceſſario, che ſi diuida ſolamente in vno.



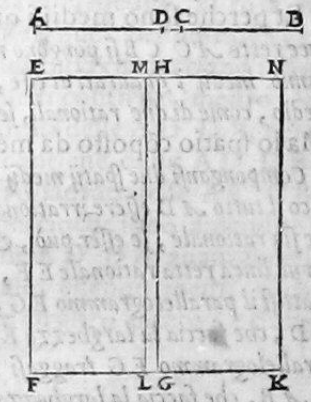
per le coſe dimoſtrate alla 27. di queſto.

27. di queſto.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIONE XLV.

La ſeconda delle due medie ò vero bimedial ſecondo in vn ſol punto ſi diuide ne ſuoi nomi.

Sia la ſeconda delle due medie A B, diuiſa nel punto C, talmente, che le A C C B ſiano medie in potenza ſolamente commenſurabili, che contengano vn ſpatio medio. è manifeſto il punto C non eſſere nel ſegamento della linea per mezo, perche non ſono in lunghezza commenſurabili. Dico la A B non diuidersi in altro punto. diuidaſi ſe eſſer può, nel D, talmente che la A C non ſia la medeſima, che la D B, ma la A C ſia maggiore per poſitione. onde appare manifeſtamente i quadrati delle A C C B eſſere maggiori de quadrati delle A D D B, come habbiamo dimoſtrato diſopra, & le A D D B eſſere medie in potenza ſolamente commenſurabili, che contengano vn ſpatio medio. propongaſi la rationale E F, & alla E F adattiſi vn parallelogrammo E K vguale al quadrato della A B, & traggaſi il parallelogrammo E G vguale à quadrati delle A C C B. il rimanente dunque H K è vguale à quello, che ſi contiene due volte dalle A C C B. ſimilmente traggaſi il parallelogrammo E L vguale à quadrati delle A D D B, che ſono minori de quadrati delle A C C B, come ſi è dimoſtrato. adunque il rimanente M K è vguale à quello, che due volte ſi contiene dalle A D D B. & perche ſono medij i quadrati delle A C C B, ſarà E G medio: & è adattato alla rationale E F. onde la E H è rationale, & in lunghezza incommenſurabile alla E F. & per la medeſima ragione H N è rationale, & all E F in



A
B
C
D
E

lun-

lunghezza incommensurabile. & essendo le A C C B medie in potenza solamente commensurabili, sarà la A C alla C B incommensurabile in lunghezza, & come la A C alla C B, così il quadrato della A C à quello, che si contiene dalle A C C B. adunque il quadrato della A C è incommensurabile à quello, che si contiene dalle A C C B. ma al quadrato della A C sono commensurabili i quadrati delle A C C B, percioche le A C C B sono in potenza commensurabili: & à quello, che si contiene dalle A C C B è commensurabile quello, che due uolte si contiene dalle A C C B. adunque anchora i quadrati delle A C C B sono incommensurabili à quello, che due volte dalle A C C B si contiene. ma à quadrati delle A C C B è vguale il parallelogrammo E G: & à quello, che si contiene due volte dalle A C C B è vguale H K. adunque E G è incommensurabile ad H K: & però la linea retta E H in lunghezea è incommensurabile alla H N. & sono rationali. adunque E H H N sono rationali in potenza solamente commensurabili. ma se due rationali in potenza solamente commensurabili si compongano, tutta la linea è irrationale, che si chiama di due nomi. onde la E N è di due nomi, che si diuide nel punto H. & per la medesima ragione si dimostreranno le E M M N rationali in potenza solamente commensurabili, & sarà la E N di due nomi, diuisa in altri punti cioè in H & M: & E H non è la medesima, che la M N, perche i quadrati delle A C C B sono maggiori de quadrati delle A D D B: & i quadrati delle A D D B sono maggiori di quello, che si contiene due volte dalle A D D B. adunque i quadrati delle A C C B cioè il parallelogrammo E G è molto maggiore di quello, che due volte si contiene dalle A D D B, cioè del parallelogrammo M K. onde la E H è maggiore della M N, & per tal cagione la E H non è la medesima, che la M N. il che bisognaua dimostrare.

Lem alla 23 di questo.

F G H K

IL COMMANDINO.

A Ma la A C sia maggiore per positione] *cioè pongasi la A C maggiore della D B.*

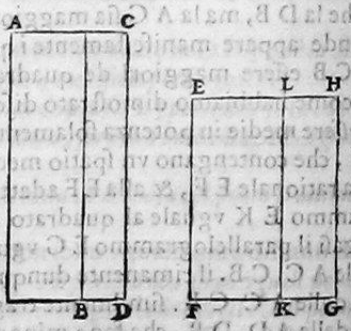
B Come habbiamo dimostrato di sopra] *nel lemma posto innanzi la 43 di questo.*

C Il rimanente H K dunque è vguale à quello, che si contiene due volte dalle A C C B] *per la 4 de secondo libro.*

D Et perche sono medij i quadrati delle A C C B, sarà E G medio] *percioche le linee rette A C C B si pongono medie in potenza solamente commensurabili. onde etiandio saranno medij i quadrati di esse, & commensurabili fra loro. & se si compongano si farà vn medio, come di due rationali, se siano in lunghezza commensurabili, si fa vna rationale.*

Ma lo spatio copposto da medij essere irrationale, dimostreremo in questo modo.

Componganſi due ſpatij medij A B B C. Dico il tutto A D eſſere irrationale. percioche ſia rationale, ſe eſſer può, & proponga ſi vna linea retta rationale E F, & ad eſſa adattiſi il parallelogrammo E G, vguale ad A D, che faccia la larghezza E H: & dal parallelogrammo E G traggaſi E K vguale ad A B, che faccia la larghezza E L. adunque il rimanente L G è vguale al rimanente B C. & perche l'uno & l'altro di eſſi A B B C è medio, & è E K vguale ad A B, & L G à B C, ſarà anchor l'uno & l'altro d'eſſi E K L G medio. & ſono adattati alla rationale E F. è dunque l'vna & l'altra di eſſe E L L H rationale, & in lunghezza alla E F incommenſurabile. oltre à ciò perche A D ſi pone rationale, & è vguale ad E G, & ſi adatta alla rationale E F, la linea retta E H ſarà rationale, & in lunghezza commenſurabile alla E F: & è la E L alla medeſima E F in lunghezza incommenſurabile. adunque la E H ſarà incommenſu-



23. di queſto.
21. di queſto.
23. di queſto.

rabile in lunghezza alla F L. ma come la E H alla E L, cosi il quadrato della E H al rettangolo che si contiene dalle H E E L, & il quadrato della E H è commensurabile à quadrati delle H E E L, percioche l'uno & l'altro di essi è rationale, & il rettangolo contenuto dalle H E E L è commensurabile à quello, che è contenuto due volte dalle H E E L. adunque per le cose, che habbiamo dimostrato nella 14 di questo, i quadrati delle H E E L sono incommensurabili à quello, che è contenuto due volte dalle H E E L. ma à quadrati delle H E E L è vguale quello, che è contenuto due volte dalle H E E L insieme col quadrato della L H, per la 7 del secondo libro. & se vna grandezza composta di due grandezze sia incommensurabile ad vna delle componenti, sarà anchor alla rimanente incommensurabile. il che si è dimostrato da noi nella 17 di questo. adunque i quadrati delle H E E L sono incommensurabili al quadrato della L H, & i quadrati delle H E E L sono rationali. onde il quadrato della L H è irrationale, & però la linea retta L H è irrationale. ma è rationale, come si è dimostrato, il che non può essere. non è dũque lo spatio A D rationale. onde è necessario che sia irrationale. il che bisognaua dimostrare.

Onde la E H è rationale & in lunghezza incommensurabile alla E F] *per la 23 di questo.* E

Adunque E C è incommensurabile ad H K] *per le cose che si sono dimostrate nella 14 di questo.* F

Tutta la linea e irrationale che si chiama di due nomi] *per la 37 di questo.* G

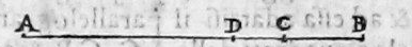
Et sarà la E N di due nomi diuisa in altri punti, cioe in H & M] *il che si è dimostrato nella 43 di questo essere impossibile. adunque la seconda delle due medie non si diuide in altro punto ne suoi nomi. onde è necessario che si diuida in vn solo.* H

Et E H non è la medesima che la M N] *dimostra la E H non essere vguale alla M N.* K

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIONE XLVI.

La linea maggiore in vn sol punto si diuide ne suoi nomi.

Sia la maggiore A B diuisa nel punto C talmente, che le A C C B siano in potenza incommensurabili, che facciano il composto da quadrati delle A C C B rationale, & il rettangolo che si contiene da esse, medio. Dico la A B non diuidersi in altro punto. percioche diuidasi se esser può, nel punto D, talmente che le A D D B siano in potenza incommensurabili, che facciano il composto delli lor quadrati rationale, & quello che da esse si contiene, medio; & in che sono differenti i quadrati delle A C C B da quadrati delle A D D B, nel medesimo è differente anchor quello, che due volte si contiene dalle A D D B da quello, che si contiene due volte dalle A C C B. ma i quadrati delle A C C B auanzano i quadrati delle A D D B di vn rationale, percioche sono amendue rationali. adunque quello, che si contiene due volte dalle A D D B auanza quello, che due volte si contiene dalle A C C B di vn rationale, essendo medij. il che è inconueniente. onde la linea maggiore non si diuide in altro punto. è dunque necessario che si diuida solamente nel medesimo.

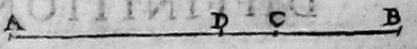


Per le cose dimostrate nella 27. di questo. per la 27. di questo.

THEOREMA XXXV. PROPOSITIONE XLVII.

La linea potente lo spatio rationale & medio in un sol punto si diuide ne suoi nomi.

Sia la linea potente lo spatio rationale & medio A B, diuisa nel punto C, talmente che le A C C B siano in potenza incommensurabili, che facciano il composto da quadrati delle A C C B medio, & quello che si contiene

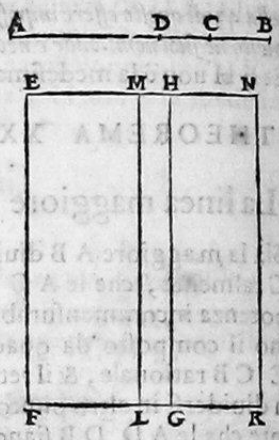


da eſſe rationale. Dico la A B non diuiderſi in altro punto. percioche diuidaſi (e eſſer può, nel D, dimodo che anchor le A D D B ſiano in potenza incommenſurabili, & facciano il compoſto delli lor quadrati medio,& quello, che da eſſe ſi contiene,rationale. perche dunque in che è differente il rettangolo contenuto due volte dalle AD DB da quello,che due volte è cõtenuto dalle AC CB,nel medeſimo ſono differenti i quadrati delle A C C B da quadrati delle A D D B.ma il rettangolo contenuto due volte dalle A D D B auanza quello,che è due volte contenuto dalle A C C B di vn rationale.adunque etiandio i quadrati delle AC CB auanzano i quadrati delle A D D B di vn rationale,eſſendo medij. che è inconueniente. il perche la linea potente lo ſpatio rationale & medio non ſi diuide in altro punto,& però ſi diuiderà in vn punto ſolamente.

THEOREMA XXXVI. PROPOSITIONE XLVIII.

La linea potente due ſpatij medij in vn ſol punto ſi diuide ne ſuoi nomi.

Sia A B la linea potente due ſpatij medij, diuiſa nel punto C, dimodo, che le A C C B ſiano in potenza incommenſurabili, & facciano il compoſto da quadrati delle A C C B medio,& quello, che da eſſe ſi contiene medio, & incommenſurabile al compoſto da quadrati delle A C C B. Dico la A B non diuiderſi in altro punto, dimodo, che faccia quelle coſe,che ſi ſono propoſte.diuidaſi ſe eſſer può,nel pũto D,talmente che là A C non ſia la medeſima che la D B, ma ſia la A C maggiore. & propongaſi la rationale E F & ad eſſa adattiſi il parallelogrammo E G, vguale à quadrati delle A C C B,& adattiſi HK vguale al rettangolo due volte contenuto dalle A C C B.tutto dunque E K, è vguale al quadrato che ſi fa dalla A B. oltre à ciò alla E F adattiſi il parallelogrammo E L,vguale à quadrati delle A D D B. la onde il rimanente che due volte ſi contiene dalle A D D B è vguale al rimanente MK.& perche il compoſto da quadrati delle A C C B ſi pone medio, ſarà anche il parallelogrammo E G medio, & è adattato alla rationale E F. la H E dunque è rationale & in lunghezza alla EF incommenſurabile. & per la medeſima ragione la H N è rationale & in lunghezza incommenſurabile alla E F. & perche il compoſto da quadrati delle A C C B, è incommenſurabile à quello, che due volte ſi contiene dalle A C C B, ſarà il parallelogrammo E G incommenſurabile ad H K. adunque etiandio la linea retta E H è incommenſurabile alla retta H N,& ſono rationali.onde le E H H N ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabili: & però la E N di due nomi è diuiſa nel punto H. dimoſtreremo ſimilmente eſſa E N diuiderſi anchora nel punto M & non è E H la medeſima che la M N. adunque quella di due nomi è diuiſa in altri & altri punti,che è inconueniente. onde la linea potente due ſpatij medij non ſi diuide in altro punto, & però ſi diuiderà in vn ſolo.



4. del ſecondo.

23. di queſto.

DIFFINITIONI SECONDE.

I.

Propoſta vna linea rationale & quella di due nomi diuiſa ne

ſuoi nomi, della quale il maggior nome poſſa tanto piu, che'l minore, quanto è il quadrato d'vna linea retta commenſurabile ad eſſo in lunghezza, ſe il maggiore nome ſarà commenſurabile in lunghezza alla propoſta rationale, tutta la linea ſi chiamerà la prima di due nomi, ò vero binomio primo.

II.

Ma ſe il ſecondo nome ſarà commenſurabile in lunghezza alla rationale propoſta, ſi chiamerà la ſeconda di due nomi, ò vero binomio ſecondo.

III.

Et ſe niun nome ſarà commenſurabile in lunghezza alla propoſta rationale, ſi dirà la terza di due nomi, ò vero binomio terzo.

IIII.

Oltre à ciò ſe il maggiore nome poſſa tanto piu, che'l minore quanto è il quadrato d'vna retta linea incommenſurabile ad eſſo in lunghezza, & detto maggior nome ſia commenſurabile in lunghezza alla propoſta rationale, ſi chiamerà la quarta di due nomi, ò vero binomio quarto.

V.

Ma ſe il ſecondo nome ſia commenſurabile in lunghezza alla propoſta, ſi dirà la quinta di due nomi, ò vero binomio quinto.

VI.

Et ſe niun nome ſia commenſurabile in lunghezza alla medeſima, ſi dirà la ſeſta di due nomi, ò vero binomio ſeſto.

SCHOLIO.

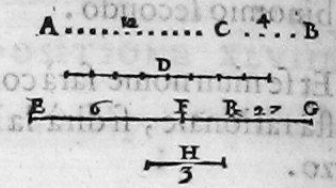
Pigliandoſi dunque ſei linee rette nel modo, che ſi è detto, ſa le prime tre in ordine, nelle quali la maggiore può tanto piu, che la minore, quanto è il quadrato d'vna linea retta commenſurabile ad eſſa in lunghezza, & le ſeconde tre le rimanenti, nelle quali la maggiore può tanto piu, che la minore, quanto è il quadrato d'vna linea retta incommenſurabile ad eſſa in lunghezza, percioche il commenſurabile va innanzi all'incommenſurabile, & oltre a queſto fa la prima, nella quale il maggior nome è commenſurabile alla propoſta rationale; la ſeconda, nella quale il minor nome è commenſurabile alla medeſima rationale, concioſiacoſa, che il maggiore vada innanzi al minore, contenendolo; & la

terza, nella quale niun nome è commensurabile alla rationale proposta, & nell' altre tre al medesimo modo, chiamando la prima del detto secondo ordine quarta, la seconda quinta, & la terza sesta.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIONE XLIX.

Trouare la prima di due nomi, ò vero il binomio primo.

A Proponganſi due numeri A C C B, talmẽte, che il compoſto di eſsi, cioè A B à B C habbia la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato, & à C A nõ habbia la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato: & proponga ſi vna rationale D: & la E F ſia in lunghezza incommenſurabile alla D. adunque la



B
C E F è rationale. & facciaſi come il numero B A al numero A C, coſi il quadrato della E F al quadrato della F G. ma B A ad A C ha la proportione, che ha il numero al numero. adunque etiandio il quadrato della E F al quadrato della F G hauerà la proportione, che ha il numero al numero: & percio il quadrato della E F è commenſurabile al quadrato
D E della F G, & è la E F rationale, onde anchor la F G è rationale. & perche B A ad A C non ha la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato, ne il quadrato della E F al quadrato della F G hauerà la proportione, che ha il nume
F ro quadrato al numero quadrato. adunque la E F è in lunghezza incommenſura
bile alla F G. & però le E F F G ſono rationali, in potenza ſolamente commenſu
G rabile. la E G dunque è di due nomi. Dico eſsere anchor la prima. percioche eſsendo come il numero B A al numero A C, coſi il quadrato della E F al quadrato della F G, & eſsendo B A maggiore di A C; ſarà il quadrato anchor della E F
H maggior del quadrato della F G. ſiano al quadrato della E F vguali i quadrati delle F G H. perche dunque come B A ad A C, coſi è il quadrato della E F al quadrato della F G, ſarà per la conuerſione della proportione come A B a B C, coſi il quadrato della E F al quadrato della H. ma A B à B C ha la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato. il quadrato dũque della E F al quadrato della H hauerà la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato.
K onde la E F è in lunghezza cõmenſurabile alla H: & però la E F può piu, che la F G, quanto è il quadrato della linea retta commenſurabile ad eſsa in lunghezza. & ſo
L no le E F F G rationali & la E F alla D è in lunghezza commenſurabile. adunque E G è la prima di due nomi, ò vero binomio primo.

IL COMMANDINO.

A Proponganſi due numeri A C C B, talmente che il compoſto di eſsi cioè A B à B C habbia la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato, & à C A non habbia la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato] *ſi troueranno queſti numeri per lo corollario del primo lemma innanzi la 30. di queſto.*

B Adunque la E F è rationale] *per la 6 diffinitione.*

C Et facciaſi come il numero B A al numero A C, coſi il quadrato della E F al quadrato della E G] *per lo corollario della 6 di queſto.*

D Et percio il quadrato della E F è commenſurabile al quadrato della F G] *per la 6 di queſto.*

E Onde anchor la F G è rationale] *per la 6 diffinitione.*

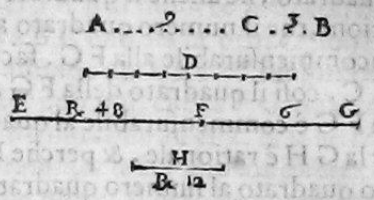
Adunque la E F è in lunghezza incommensurabile alla F G] *per la 9 di questo.* F
La E G dunque e di due nomi] *per la 37 di questo.* G
Siano al quadrato della E F vguali i quadrati delle F G H] *si troverà il quadrato della H dal lemma innanzi la 15. di questo.* H
Onde la E F è in lunghezza commensurabile alla H] *per la 9 di questo.* K
Adunque la E G è la prima di due nomi, ò vero il binomio primo] *per la prima delle seconde diffinitioni.* L

Sia il numero A C 12, C B 4, & E F 6. & facciasi come 16 à 12, così 36 ad vn'altro, sarà à 27. adunque 6 più R 27 è la prima di due nomi, ò uero binomio primo.

PROBLEMA XIIII. PROPOSITIONE L.

Trouare la seconda di due nomi, ò vero il binomio secondo.

Proponganſi due numeri A C C B tal mente, che il compoſto da eſsi A B à B C habbia la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato. & ad A C non habbia la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato, & propongaſi la rationale D, & ſia la F G in lunghezza commenſurabile alla D. adunque la F G è rationale, & facciaſi come il numero C A al numero A B, coſi il quadrato della G F al quadrato della F E. il quadrato dunque della G F è cõmen ſurabile al quadrato della F E: & però la F E è rationale. & perche il numero C A al numero A B non ha la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato, ne il quadrato della G F al quadrato della F E hauerà la proportione, che il nume ro quadrato al numero quadrato. è dunque la G F incommẽſurabile in lunghez za alla F E. onde le E F F G ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabi li. & la E G è di due nomi. ſi ha da dimoſtrare anchora, che è la ſeconda. perciò che conuertendoſi è come il numero B A al numero A C, coſi il quadrato della E F al quadrato della F G, & è B A maggiore di A C. adunque anchor il quadra to della E F è maggiore del quadrato della F G. ſiano al quadrato della E F vgua li i quadrati delle F G H. onde per la conuerſione della proportione come A B à B C, coſi il quadrato della E F al quadrato della H. ma A B à B C ha la propor tione, che ha il numero quadrato al numero quadrato. onde etiandio il quadrato della E F al quadrato della H hauerà la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato, & però la E F è in lunghezza commenſurabile alla H. onde la E F può più, che la F G, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza com menſurabile ad eſſa, & ſono le E F F G rationali in potenza ſolamente commen ſurabili, & la F G minor nome è in lunghezza commenſurabile alla propoſta ra tionale D. adunque E G è la ſeconda di due nomi, ò uero binomio ſecondo.



6 diff.
Corol. della 6. di queſto.
6. di queſto. 6. diff.
9. di queſto.
9 di queſto.
2. diff. delle 2.

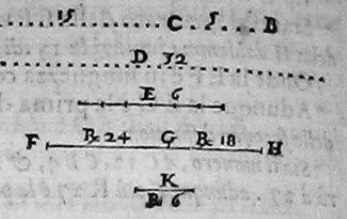
IL COMMANDNIO.

Sia A C 9, C B 3, & F G 6, & facciaſi come 9 à 12, coſi 36 ad vn'altro. ſarà à 48. onde R 48 più 6 è la ſeconda di due nomi, ò uero binomio ſecondo.

PROBLEMA XV. PROPOSITIONE LI.

Trouare la terza di due nomi, ò uero il binomio terzo.

Proponganſi due numeri A C, C B, talmente, che il compoſto da eſſi A B à B C habbia la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato, & ad A C non habbia la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato. proponga ſi anchor vn'altro numero D non quadrato, che all'vno, & l'altro di eſsi B A A C non habbia la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato. propongaſi finalmente vna linea retta rationale E, & facciaſi come D ad A B, coſi il



Corol. 5. della 6. di queſto.

6. di queſto.

6. diff.

quadrato della E al quadrato della F G. il quadrato dunque della E al quadrato della F G è commenſurabile: & la E è rationale. onde etiandio la F G è rationale. & perche D ad A B non ha la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato, ne anche il quadrato della E al quadrato della F G hauerà la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato. è dunque la E in lunghezza incommenſurabile alla F G. facciaſi ſimilmente come il numero A B al numero A C, coſi il quadrato della F G al quadrato della G H. adunque il quadrato della F G è commenſurabile al quadrato della G H: & è la F G rationale. onde anchor la G H è rationale, & perche B A ad A C non ha la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato, ne il quadrato della F G al quadrato della G H, hauerà la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato. adunque la F G è in lunghezza incommenſurabile alla G H. & le F G G H ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabili, & però la F H è di due nomi. Dico eſſer la terza. percioche eſſendo come il numero D al numero A B, coſi il quadrato della E al quadrato della F G, & come B A ad A C, coſi il quadrato, che ſi fa dalla F G al quadrato della G H; ſarà per l'ugual proportione come D ad A C, coſi il quadrato della E al quadrato della G H. ma D ad A C non ha la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato. adunque la E è in lunghezza incommenſurabile alla G H. & perche come B A ad A C, coſi il quadrato della F G al quadrato della G H, ſarà il quadrato della F G maggiore del quadrato della G H. ſiano al quadrato della F G vguali, i quadrati delle G H R. onde per la conuerſione della proportione, è come A B à B C, coſi il quadrato della F G al quadrato della R. ma A B à B C ha la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato. adunque anchor il quadrato della F G al quadrato della R hauerà la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato. onde la F G è in lunghezza commenſurabile alla R: & però la F G può più, che la G H, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza commenſurabile ad eſſa: & ſono le F G G H rationali in potenza ſolamente commenſurabili: & niuna di eſſe è in lunghezza commenſurabile alla E. adunque F H è la terza di due nomi, ò uero binomio terzo.

9. di queſto.

9. di queſto.

9. di queſto.

3. diff. delle 2.

IL COMMANDINO.

Sia il numero A C 15, C B 5, D 30, & la rationale E ſia 6, & facciaſi come 30 à 20, coſi 36 ad vn'altro, ſarà à 24. ſimilmente facciaſi come 20 à 15, coſi 24 ad vn'altro, cioè à 18. adunque Bx 24 più Bx 18 è la terza di due nomi, ò vero binomio terzo.

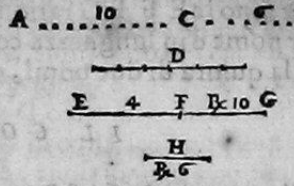
PROBLEMA XVI. PROPOSITIONE LII.

Trouare la quarta di due nomi, ò vero il binomio quarto.

Proponganſi due numeri A C C B, dimodo che A B all'uno & l'altro di eſſi

non

non habbia la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato, & propongasi la rationale D, & alla D sia la E F in lunghezza commensurabile. la E F dunque è rationale. & facciasi come il numero B A al numero A C, cosi il quadrato della E F al quadrato della F G. onde il quadrato della F E è cõmensurabile al quadrato della F G, & però la linea retta F G è rationale. & perche B A ad A C nõ ha la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato, sarà la E F alla F G incommensura in lunghezza. adunque le E F F G sono rationali in potenza solamente commensurabili, & però la E G è di due nomi. Dico essere anchor la quarta. percioche essendo come B A ad A C, cosi il quadrato della E F al quadrato della F G, & la B A è maggiore che la A C, sarà il quadrato della E F maggiore del quadrato della F G. siano al quadrato della E F vguali i quadrati delle F G H. adunque per la cõuersione della proportione è come il numero A B al numero B C, cosi il quadrato della E F, al quadrato della H. ma A B à B C non ha la proportione che ha il numero quadrato al numero quadrato. adunque la E F è in lunghezza incommensurabile alla H. & per tal cagione la E F può più, che la F G, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza incommensurabile ad essa. & sono le E F F G rationali in potenza solamente commensurabili, & la E F è in lunghezza commẽsurabile alla D. adũque E G è la quarta di due nomi, ò uero bimonio quarto.



6 diff.
6. di questo.
9. di questo.
37. di questo.
9. di questo.
4. diff. delle 3.

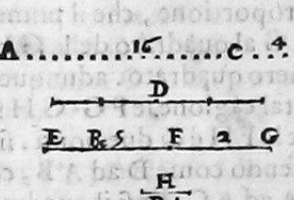
IL COMMANDINO.

Sia il numero A C 10, C B 6, & la rationale D sia 6, & la E F 4, & facciasi come 16 à 10, cosi 16 ad vn'altro, cioè à 10 sarà 4 piu B 10 la quarta di due nomi, ò vero binomio quarto.

PROBLEMA XVII. PROPOSITIONE LIII.

Trouare la quinta di due nomi, ò uero il binomio quinto.

Proponganſi due numeri A C C B talmente, che A B all'vno & l'altro di essi non habbia la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato. & propongasi vna linea retta D rationale, & la F G sia in lunghezza commensurabile alla D. adunque la F G è rationale. & facciasi come C A ad A B, cosi il quadrato della G F al quadrato della F E. onde la F E è rationale. & perche il numero A C al numero A B non ha la proportione che ha il numero quadrato al numero quadrato; anchor il quadrato della G F al quadrato della F E hauerà la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato. adunque le E F F G sono rationali in potenza solamente commensurabili, & però la E G è di due nomi. Dico etiandio essere la quinta. percioche essendo come A C ad A B, cosi il quadrato della G F al quadrato della F E, sarà conuertendosi come B A ad A C cosi il quadrato della E F al quadrato della F G. il quadrato dunque della E F è maggiore che'l quadrato della F G. siano al quadrato della E F vguali i quadrati delle F G H. onde per la conuersione della proportione, come il numero A B al numero B C, cosi è il quadrato della E F al quadrato della H. ma A B à B C non ha la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato. adunque ne il quadrato della E F hauerà al quadrato della H la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato: &



6. diff.
37. di questo.

però la E F è in lunghezza incommensurabile alla H, il perche la E F può piu, che la E G, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza incommensurabile ad essa; & sono le E F F G rationali in potenza solamente commensurabili, & la F C minor nome è in lunghezza commensurabile alla rationale proposta D. adunque E G è la quinta di due nomi, ò vero binomio quinto.

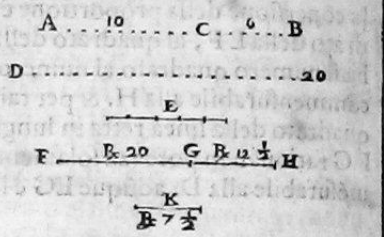
IL COMMANDINO.

Sia il numero A C 16, C B 4, F G 2, & facciasi come 16 à 20, così 4 ad vn'altro, cioè à 5 sarà B 5 piu 2 la quinta di due nomi, ò vero binomio quinto.

PROBLEMA XVIII. PROPOSITIONE LIIII.

Trouare la sesta di due nomi, ò vero il binomio sesto.

Propongāsi due numeri A C C B, talmente che A B non habbia ad alcuno di essi la proportione che ha il numero quadrato al numero quadrato. sia anchora vn'altro numero nō quadrato D, che all'vno & l'altro di essi B A A C non habbia la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato. & propongasi vna linea retta rationale E, & facciasi come D ad A B, così il quadrato della E al quadrato della F G. è dunque la E in potenza commensurabile alla F G. & è la E rationale. onde etiandio la F G sarà rationale. & perche D ad A B non ha la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato, ne anche il quadrato della E al quadrato della F G hauerà la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato. adunque la E in lunghezza è incommensurabile alla F G. facciasi parimente come B A ad A C, così il quadrato della F G al quadrato della G H. onde il quadrato della F G è commensurabile al quadrato della G H; & il quadrato della F G è rationale. adunque anchor il quadrato della G H è rationale: & però è rationale la linea retta G H. & perche B A ad A C non ha la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato, ne il quadrato della F G al quadrato della G H hauerà la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato. adunque la F G è incommensurabile in lunghezza alla G H, & per tal cagione le F G G H sono rationali in potenza solamente commensurabili, & la F H è di due nomi. si ha da dimostrare anchora che è la sesta. percioche essendo come D ad A B, così il quadrato della E al quadrato della F G, & come B A ad A C, così il quadrato della F G al quadrato della G H; sarà per l'vgual proportione come D ad A C, così il quadrato della E al quadrato della G H. ma D ad A C non ha la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato. onde ne il quadrato della E al quadrato della G H hauerà la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato. la E dunque è in lunghezza incommensurabile alla G H, & si è dimostrata incommensurabile alla F G. onde amendue le F G G H sono in lunghezza incommensurabili alla E. & perche come B A ad A C, così è il quadrato della F G al quadrato della G H, sarà il quadrato della F G maggiore del quadrato della G H. siano al quadrato della F G vguali i quadrati delle G H K. adunque per la conuersione della proportione come A B à B C, così è il quadrato della F G al quadrato della K. ma A B a B C non ha la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato. adunque ne anche il quadrato della F G al quadrato della K hauerà la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato. & però la F G è in lunghezza incommensurabile alla K. onde la F G può più, che la G H, quanto è il quadrato della linea retta in lun-



9. di questo.
9. diff.
9. di questo:
37. di questo:
9. di questo.

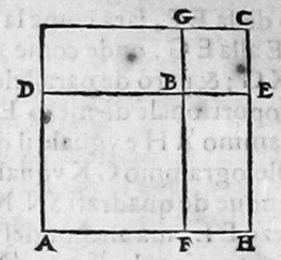
ghezza incommensurabile ad essa, & sono le F G G H rationali in potenza solamente commensurabili, & niuna di esse è in lunghezza commensurabile alla proposta rationale E. adunque F H è la sesta di due nomi, ò uero binomio sesto. 6. diff. della 2.

IL COMMANDINO.

Sia A C 10, C B 6, & D 20. & la rationale E sia 5, & facciasi come 20 à 16, così 25 ad vn'altro, cioè à 20. oltre à ciò facciasi come 16 à 10, così 20 ad vn'altro. sarà à 12 $\frac{1}{2}$. adunque R 20 più R 12 $\frac{1}{2}$ è la sesta di due nomi, ò vero binomio sesto.

LEMMA.

Siano due quadrati A B B C; & accommodinsi talmente, che la D B sia posta al diritto della B E. adunque la F B sarà al diritto della B G, & finiscasi il parallelogrammo A C. Dico A C essere quadrato, & delli quadrati A B B C il rettangolo D G essere proportionale di mezo. oltre a ciò delli quadrati A C C B essere proportionale di mezo il rettangolo D C.



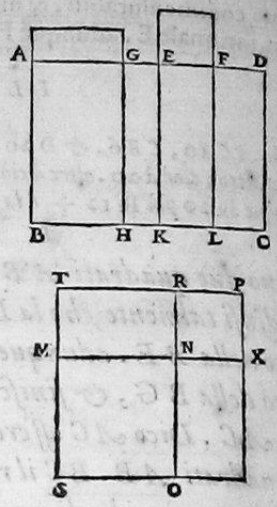
Percioche essendo la D B vguale alla B F, & la E B alla B G, sarà tutta la D E vguale à tutta la F G. ma la D E è vguale all'vna & l'altra di esse A K H C. adunque & l'una & l'altra A H K C è vguale all'una & l'altra A K H C. onde il parallelogrammo A C è equilatero, & è rettangolo. adunque A C è quadrato, & perche come la F B alla B G, così è la D B alla B E; & come la F B alla B G, così A B à D G, & come la D B alla B E, così D G à B C. come dunque A B à D G, così è D G à B C: & però D G è proportionele in mezo di esi A B B C. Dico oltre à ciò delli A C C B essere proportionale di mezo D C. perche essendo come la A D alla D K, così la K G alla G C, concioſia cosa che amendue ad amendue siano vguali, & componendosi sarà come la A K alla K D, così la K C alla C G. ma come la A K alla K D, così A C à C D, & come la K C alla C G, così D C à C B. & come dunque A C à C D, così D C à C B: & però delli A C C B è proportionale di mezo C D. il che si proponeua da dimostrare. 1. del sesto.

THEOREMA XXXVII. PROPOSITIONE LV.

So vn spatio sia contenuto dalla rationale, & dalla prima di due nomi; la linea retta, che può detto spatio, sarà irrationale, che di due nomi è chiamata.

Lo spatio A B C D, contengasi dalla rationale A B, & dalla A D prima di due nomi. Dico la linea retta che può lo spatio A C essere irrationale, che si chiama di due nomi. percioche essendo A D la prima di due nomi, diuidasi nè suoi nomi nel punto E, & sia A E il maggior nome. è manifesto le A E E D essere rationali in potenza solamente commensurabili, & la A E potere piu, che la E D, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza commensurabile ad essa; & oltre à ciò la A E essere in lunghezza commensurabile alla proposta rationale A B. seghi si per mezo la E D nel punto F. perche dunque la A E può più, che la E D, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza cõmensurabile ad essa, se alla maggiore A E si adatti vn parallelogrammo vguale alla quarta parte del quadrato, 1. della 2. diff.

che si fa dalla minore, cioè al quadrato della E F, che manchi della figura quadrata, la diuiderà in parti commensurabili. onde adattisi, & sia A G E. adunque la A G è in lūghezza commensurabile alla G E. poi per li punti G E F, tirinsi ad vna di esse A B D C le parallele G H E K F L, & al parallelogrammo A H, constituiscasi vguale il quadrato S N. & al parallelogrammo G K vguale il quadrato N P, & pongasi talmente che la M N sia per diritto alla N X. adunque la R N sarà per diritto alla N O. & compiscasi il parallelogrammo S P. onde S P è quadrato. & perche il rettangolo A G E e vguale al quadrato della E F, sarà come la A G alla E F, cosi la F E alla E G. onde come A H ad E L, cosi e E L à K G; & però de parallelogrammi A H K G e proportionale di mezo E L. ma al parallelogrammo A H e vguale il quadrato S N, & al parallelogrammo G K vguale il quadrato N P. adunque de quadrati S N N P e proportionale di mezo E L. ma anchor delli medesimi S N N P e proportionale di mezo M R. adunque M R e vguale ad E L. ma M R e vguale ad O X, & E L ad F C. onde tutto E C e vguale alli M R O X, & sono li A H G K vguali alli S N N P. tutto dunque A C e vguale à tutto S P, cioe al quadrato della M X, & per tal cagione la M X può il parallelogrammo A C. Dico la M X essere di due nomi. percioche essendo la A G commensurabile alla G E, sarà la A E commensurabile all'vna & l'altra di esse A G G E. & si pone la A E in lunghezza commensurabile alla A B. adunque le A G G E sono commensurabili alla A B: & è la A B rationale. onde etiandio ciascuna di esse A G G E è rationale, & però è rationale l'vno & l'altro A H G K. & A H è commensurabile à G K. ma A H è vguale à S N, & G H à N P. adunque etiandio i quadrati S N N P, cioè quelli, che si fanno dalle M N N X sono rationali & commensurabili. & perche la A E è in lunghezza incommensurabile alla E D, & la A E è in lunghezza commensurabile alla A G, & la D E alla E F; sarà la A G in lunghezza incommensurabile alla E F. adunque anchor A H è incommensurabile ad E L. ma A H è vguale ad S N, & E L ad M R. onde S N è incommensurabile ad M R. ma come S N ad M R, cosi la O N alla N R. adunque la O N è incommensurabile alla N R: & è la O N vguale alla M N, & la N R alla N X. adunque la M N è incommensurabile alla N X. & è il quadrato della M N commensurabile al quadrato della N X, & l'vno & l'altro e rationale. onde le M N N X sono rationali in potenza solamente commensurabili. il perche la M X e di due nomi, & può il parallelogrammo A C. il che bisognaua dimostrare.



A ultima del secondo. B 14. del primo. per l'antecedēte lemma. C 1. del sesto. 43. del primo. D E F G H K L M N 37. di questo.

IL COMMANDINO.

A La diuiderà] *in parti commensurabili per la 2 parte della 18 di questo.*
B Onde adattisi & sia A G E] *per lo 3 lemma innanzi la 18 di questo.*
C Sarà come la A G alla E F, cosi la F E alla E G] *per la 14 del sesto.*
D Sara la A E commensurabile all'vna & l'altra d'esse A G G E] *per la 16 di questo.*
E Adunque le A G G E sono commensurabili alla A B] *per la 12 di questo.*
F Et però è rationale l'uno & l'altro di esi A H G K] *per la 20 di questo.*
G Et A H è commensurabile à G K] *percioche per la prima del sesto è come la A G alla*

G E, cosi il parallelogrammo A H al parallelogrammo G K. adunque per la 10 di questo il parallelogrammo A H è commensurabile à G K.

Et perche la A E è in lunghezza incommensurabile alla E D] *ponendosi A D la prima due nomi, laquale è composta di due rationali in potenza solamente commensurabili.* H

Sarà la A G in lunghezza incommensurabile alla E F] *per le cose, che habbiamo dimostrate alla 14 di questo.* K

Adunque anchor A H è incommensurabile ad E L] *perche come la A G alla E F, cosi il parallelogrammo A H al parallelogrammo E L. onde si concluderà cioche si è proposto per la 10 di questo.* L

Adunque la O N e incommensurabile alla N R] *per la 10. di questo come si è detto.* N

Et è il quadrato della M N commensurabile al quadrato della N X, & l'vn' & l'altro è rationale] *questo si è dimostrato di sopra.* M

Sia A B 5, & A D 4 piu R 12, sarà la E F ò vero la F D R 3. & se alla linea retta A E si adatti vn parallelogrammo vguale al quadrato della E F, che manchi della figura quadrata, sarà per le cose dimostrate alla 18 di questo, la A G 3, & la G E 1. onde il parallelogrammo A H è 15, G H 5, & E L ò vero F C R 75. & però tutto il parallelogrammo A C sarà 20 piu 300. & cosi fatti spatij li moderni anthora chiamano binomiali, ò di due nomi, de quali i lati quadrati, ò le R dalle cose dimostrate facilmente si potranno trouare in questo modo.

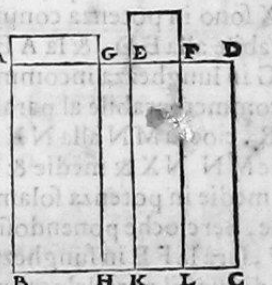
Trouare il lato quadrato, ò uero la radice dello spatio binomiale.

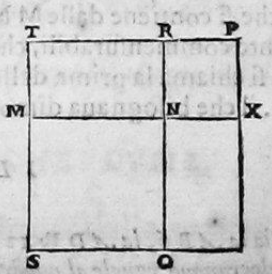
Sia lo spatio binomiale 20 piu R 300, del quale bisogni trouare il lato quadrato. diuidasi il maggior nome, cioè 20 in due parti, talmente che quello, che si produce da essi sia vguale alla quarta parte del quadrato del minor nome, cioè vguale à 75. sarà per le cose dimostrate da noi alla 18 di questo, la maggiore parte 15 & la minore 5. Dico R 15 piu R 5 essere il lato quadrato di quel spatio 20, piu R 300. percioche diuidendosi la linea retta, che è di due nomi cioè R 15 piu R 5 in due parti, sarà il quadrati di tutta vguale à quadrati delle parti insieme con il rettãgolo che duevolte si cõtiene da dette parti. onde il quadrato di R 15 è 15, & il quadrato di R 5 è 5, & il rettangolo, che si contiene da R 15 & da R 5, è R 75, & il doppio di essa è R 300. le quali tutte se si compongano saranno 20 piu R 30. & il medesimo sarà il quadrato che si fa dalla linea retta R 15 piu R 5. adunque R 15 piu R 5, è il lato quadrato, ò uero la R di questo spatio binomiale 20 piu R 300. nel medesimo modo trouaremo le radici de gli altri spatij binomiali. il che bisognaua fare. 4. del secondo

THEOREMA XXXVIII.

PROPOSITIONE LVI.

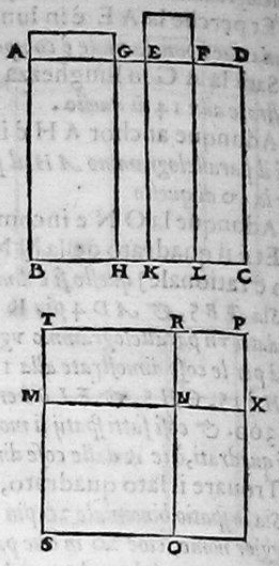
Se vn spatio sia contenuto dalla rationale, & dalla seconda di due nomi, la retta linea che può detto spatio sarà irrationale, che si chiama la prima delle due medie.





Lo spatio A B C D contengasi dalla rationale A B & dalla seconda di due nomi A D. Dico la linea retta che può lo spatio A C, essere la prima delle due medie. percioche essendo A D la seconda di due nomi, diuidasi ne suoi nomi nel punto E dimodo, che la A E sia il maggior nome. adunque le A E E D sono rationali in potenza solamente commensurabili, & la A E può più, che la E D, quanto è il quadrato, della linea retta in 2. diff. delle 2.

lunghezza commenſurabile ad eſſa, & la ED minor nome è in lunghezza commenſurabile alla AB. ſeghiſi per mezo la ED nel punto F, & alla linea retta AE adattiſi vn parallelogrammo vguale al quadrato della EF, che manchi della figura quadrata, qual ſia AGE. è dunque la AG in lunghezza commenſurabile alla GE. & per li punti GEF tirinſi le GH EK FL parallele alle AB DC, & al parallelogrammo AH conſtituiſcaſi vguale il quadrato SN, & al parallelogrammo GK vguale il quadrato NP; & ponga ſi talmente che la MN ſia per diritto alla NX. adunque la RN è per diritto alla NO, & compiſcaſi il quadrato SP. è manifeſto dalle coſe che ſi ſono dimoſtrate, il parallelogrammo MR eſſere proportionale in mezo delli quadrati SN NP, & vguale al parallelogramma EL, & oltre à cio la linea retta MX potere lo ſpatio AC. ſi ha dunque da dimoſtrare eſſa MX eſſere la prima delle due medie. percioche eſſendo la AE incommenſurabile in lunghezza alla ED, & la ED commenſurabile alla AB, ſarà la AE in lunghezza incommenſurabile alla AB. & perche la AG è in lunghezza commenſurabile alla GE, ſarà la AE all'vna & l'altra di eſſe AG GE in lunghezza commenſurabile. & la AE è rationale. onde & l'una & l'altra AG GE è rationale. & eſſendo che la AE ſia in lunghezza incommenſurabile alla AB, & commenſurabile all'una & l'altra di eſſe AG GE, ſaranno le AG GE in lunghezza incommenſurabili alla AB. onde le BA AG GE ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabili. è dunque medio l'vn'& l'altro de parallelogrammi AH GK: & però amendue li quadrati SN NP ſono medij. il perche le linee rette MN NX ſono medie. oltre à ciò perche la AG è in lunghezza commenſurabile alla GE, ſarà il parallelogrammo AH commenſurabile al parallelogrammo GK, cioe il quadrato SN ad NP, cioe il quadrato della MN al quadrato della NX. adunque le MN NX ſono in potenza commenſurabili. & perche la AE in lunghezza è commenſurabile alla ED, & la AE è commenſurabile alla AG, & la ED alla EF, ſarà la AG in lunghezza incommenſurabile alla EF. onde & il parallelogrammo AH è incommenſurabile al parallelogrammo EL, cioe SN ad MR, cioe la ON alla NR, cioe la MN alla NX in lunghezza è incommenſurabile, & ſi ſono dimoſtrate le MN NX & medie & in potenza commenſurabili. adunque le MN NX ſono medie in potenza ſolamente commenſurabili. Dico contenere vn ſpatio rationale. percioche ponendoſi la DE commenſurabile all'vna & l'altra di eſſe AB EF, ſarà la FE in lunghezza commenſurabile alla EK. & è rationale l'vna & l'altra di eſſe. il parallelogrammo dunque EL è rationale, cioè MR, & è MR quello che ſi contiene dalle MN NX, & componendoſi due medie in potenza ſolamente commenſurabili, che contengano vn ſpatio rationale; tutta è irrationale, che ſi chiama la prima delle due medie. adunque MX è la prima delle due medie. il che biſognaua dimoſtrare.



18. di queſto.

per l'antecedente lemma.

37. di queſto.

14. di queſto.

16. di queſto.

14. di queſto.

22. di queſto.

per le coſe dimoſtrate alla 14 di queſto.

20 di queſto.

38 di queſto.

IL COMMANDINO.

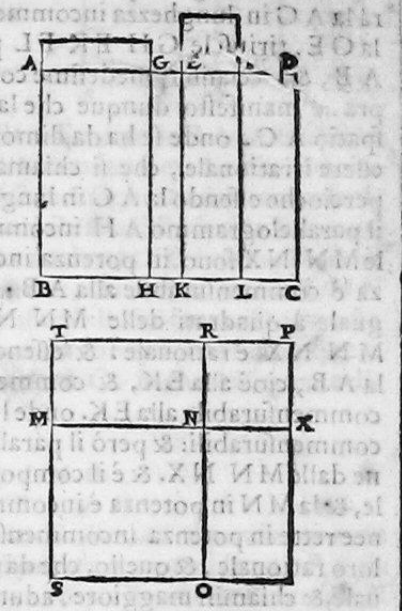
Sia la AB 6, la AD R 12 piu 3; ſarà la EF ò la FD 1 - 1/2: & ſe alla AE ſi adatti vn parallelogrammo vguale al quadrato della EF, che manchi della figura quadrata, ſarà la AG R 6 1/4, la GE R 3/4. il parallelogrammo dunque AH è R 243, GK R 27, & EL 9. & tutto

il parallelogrammo A C R 432 *piu* 18, *& acciò ſi troui la* R *di eſſo diuideremo* R 432 *in due parti talmente che quello che ſi produce da eſſe, ſia vguale alla quarta parte del quadrato di* 18, *cioè vguale à* 81; *ſarà per le coſe gia dette, la maggior parte* R 108 *più* R 27. *le quali due radici ſe ſi compongano inſieme faranno* R 243, *& la minor parte ſarà* R 108 *meno* R 27 *& tratta* R 27 *dalla* R 108 *rimane* R 27. *adunque la maggiore parte è* R 243, *& la minore* R 27. *onde la* R *dello ſpatio binomiale* R 432 *più* 18, *ſarà* R R 243 *più* R R 27.

THEOREMA XXXIX. PROPOSITIONE LVII.

Se vn ſpatio ſia contenuto dalla rationale & dalla terza di due nomi, la linea retta, che può detto ſpatio ſarà irrationale, che è detta la ſeconda delle due medie.

Lo ſpatio A B C D ſia contenuto dalla rationale A B, & dalla terza di due nomi A D, diuidaſi ne ſuoi nomi nel punto E, de quali il maggiore ſia A E. Dico la linea retta, che può detto ſpatio A C eſſere rationale, che ſi chiama la ſeconda delle due medie. faccianſi le medeſime coſe, che di ſopra. & perche A D è la terza di due nomi, ſaranno le A E E D rationali in potenza ſolamente commenſurabili, & la A E potrà piu, che la E D, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza commenſurabile ad eſſa, & niuna delle A E E D ſarà in lunghezza commenſurabile alla A B. ſimilmente dimoſtreremo la M X eſſer quella, che può lo ſpatio A C, & la M N N X eſſere delle due medie. onde ſi ha da dimoſtrare che è la ſeconda. percioche eſſendo la D E in lunghezza incommenſurabile alla A B, cioè alla E K, & è la D E commenſurabile alla E F, ſarà la E F in lunghezza incommenſurabile alla E K. & ſono rationali. adunque le F E E K ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabili: & però E L, cioè M R è medio, che è contenuto dalle M N N X. onde M X è la ſeconda delle due medie.



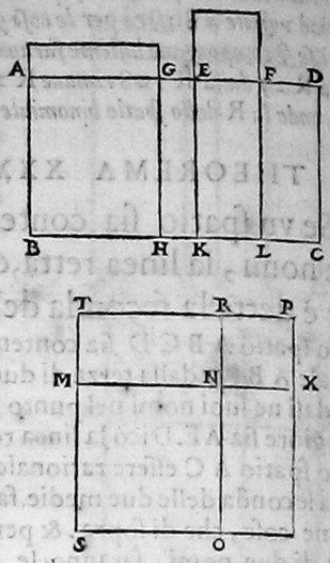
IL COMMANDINO.

Sia la A B 6, *la A D* ℞ 18 *piu* ℞ 10. *ſarà la E F* ℞ $2\frac{1}{2}$. *& ſe alla A E ſi adatti vn parallelogrammo A G E, vguale al quadrato della E F, che manchi della figura quadrata, ſarà la A G* ℞ $12\frac{1}{2}$ *& la G E* $\frac{1}{2}$. *onde il parallelogrammo A H è* ℞ 450, *G K* ℞ 18, *& E L* ℞ 90. *& tutto il parallelogrammo A C è* ℞ 648 *piu* ℞ 360. *diuidaſi* ℞ 648 *in due parti talmente, che quello, che è contenuto da eſſe, ſia vguale alla quarta parte del quadrato* ℞ 360, *cioè à* 90. *ſarà la maggior parte* ℞ 450, *& la minore* ℞ 18. *adunque la radice dello ſpatio binomiale* ℞ 648 *piu* ℞ 360 *è* ℞ ℞ 450 *piu* ℞ ℞ 18.

THEOREMA XL. PROPOSITIONE LVIII.

Se vn ſpatio ſia contenuto dalla rationale, & dalla quarta di due nomi, la linea retta, che può detto ſpatio ſarà irrationale, che ſi chiama maggiore.

Sia lo ſpatio A C contenuto dalla rationale A B, & dalla quarta di due nomi A D, diuiſa ne ſuoi nomi nel punto E, de quali la A E ſia maggiore. Dico la linea retta, che può detto ſpatio A C eſſere irrationale, che ſi chiama maggiore. percioche eſſendo A D la quarta di due nomi, ſaranno le A E E D rationali, in potenza ſolamente commenſurabili, & la A E potrà più, che la E D, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza incommenſurabile ad eſſa, & la A E ſarà in lunghezza cõmenſurabile alla A B. diuidaſi la D E per mezo nel punto F, & alla A E adattiſi vn parallelogrammo vguale al quadrato della E F, che manchi della figura quadrata, & ſia A G E. ſarà la A G in lunghezza incommenſurabile alla G E. tirinſi. G H E K F L parallele alla A B, & faccianſi le medeſime coſe, che di ſopra. è manifeſto dunque che la M X può lo ſpatio A C. onde ſe ha da dimoſtrare la M X eſſere irrationale, che ſi chiama maggiore;



diff. 4. delle 2.

19. di queſto.

percioche eſſendo la A G in lunghezza incommenſurabile alla G E, ſarà etiandio il parallelogrammo A H incommenſurabile à G K, cioè S N ad N P. adunque le M N N X ſono in potenza incommenſurabili. & perche la A E in lunghezza è commenſurabile alla A B, ſarà il parallelogrammo A K rationale, & è vguale à quadrati delle M N N X. adunque il compoſto da quadrati delle M N N X è rationale. & eſſendo la D E in lunghezza incommenſurabile alla A B, cioè alla E K, & commenſurabile alla E F, ſarà la E F in lunghezza incommenſurabile alla E K. onde le K E E F, ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabili: & però il parallelogrammo E L è medio, cioè M R, & ſi contiene dalle M N N X. & è il compoſto, che ſi fa da quadrati delle M N N X rationale, & la M N in potenza è incommenſurabile alla N X. ma componendoſi due linee rette in potenza incommenſurabili, che facciano il compoſto delli quadrati loro rationale, & quello, che da eſſe ſi contiene medio, tutta la linea ſarà irrationale, & chiamiſi maggiore. adunque la M X è irrationale, che ſi chiama maggiore: & può lo ſpatio A C. il che biſognaua dimoſtrare.

20. di queſto.

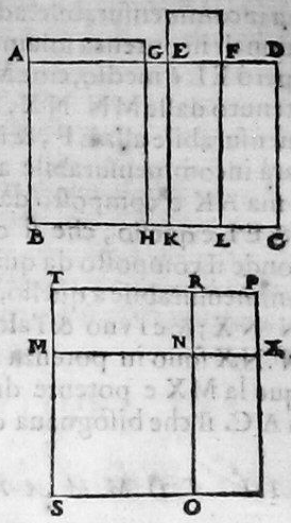
IL COMMANDINO.

Sia la A B 6, la A D 6 più R 24. ſarà la E F R 6. & ſe alla A E ſi adatti il parallelogrammo A G E vguale al quadrato della E F, che manchi della figura quadrata, ſarà la A G 3 più R 3, & la G E 3 meno R 3. adunque il parallelogrammo A H è 18 più R 108, G K 18 meno R 108, & E L ò uero F C R 216, & tutto il parallelogrammo A C 36 più R 864. onde ſe diuidiamo 36 in due parti talmente, che quello, che è prodotto da eſſe ſia vguale à 216, ſarà la maggior parte 18 più R 108, & la minore 18 men R 108. onde la radice dello ſpatio binomiale 36 più R 864 è R V 18 più R 108 più R V 18 men R 108.

THEOREMA XLI. PROPOSITIONE LIX.

Se vn ſpatio ſia contenuto dalla rationale & dalla quinta di due nomi, la linea retta, che può detto ſpatio ſarà irrationale, che ſi chiama potente il rationale & medio.

Sia lo ſpatio A C cõtenuto dalla rationale A B & dalla quinta di due nomi A D, che ſi diuida ne ſuoi nomi al punto E, talmente, che il maggior nome ſia A E. Dico la linea retta, che può lo ſpatio A C eſſer irrationale, che ſi chiama potente il rationale & medio. faccianſi le medeſime coſe, che diſopra. è manifeſto, che la M X può lo ſpatio A C. biſogna dimoſtrare la M X eſſer irrationale, che può il rationale & medio. percioche eſſendo la A G in lunghezza incommenſurabile alla G E, etiandio il parallelogrammo A H è incommenſurabile al parallelogrammo H E, cioè il quadrato della M N al quadrato della N X. adunque le M N N X ſono in potenza incommenſurabili. & perche A D è la quinta di due nomi, & la minor portione di eſſa E D, ſarà la E D in lunghezza commenſurabile alla A B. ma la A E è incommenſurabile alla E D. adunque anchor la A B è in lunghezza incommenſurabile alla A E: però le B A A E ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabili. A K dunque è medio cioè il compoſto da quadrati delle M N N X. & perche la D E in lunghezza è commenſurabile alla A B, cioè alla E K, & la D E è commenſurabile alla E F, ſarà la F E commenſurabile alla E K. & la E K è rationale. adunque anchor la F E è rationale, & rationale il parallelogrammo E L, cioè M R, cioè quello, che ſi contiene dalle M N N X. onde le M N N X ſono in potenza incommenſurabili, che fanno il compoſto delli quadrati loro medio, & quello, che ſi contiene da eſſe rationale. adunque la M X è potente il rationale & medio, & può lo ſpatio A C. il che biſognaua dimoſtrare.



19. di queſto;

5ª diff. delle 2.

22. di queſto.

12. di queſto.

IL COMMANDINO.

Sia la A B 6, la A D R 24 piu 4. ſarà la E F 2. adattiſi alla A E il parallelogrammo A G E, vguale al quadrato della E F, che manchi della figura quadrata. ſarà la A G R 6 piu R 2, la G E R 6 men R 2, & il parallelogrammo A H R 216 piu R 72. G K R 216 men R 72, E L 12, & tutto il parallelogrammo A C R 864 piu 24. ſe dunque diuidiamo R 864 in due parti, talmente, che quello, che da eſſe ſi produce ſia vguale à 144, ſarà la maggiore parte R 216 piu R 72, & la minore R 216 men R 72. onde la radice dello ſpatio binomide R 864 piu 24 è R V R 216 più R 72, piu R V R 216 men R 72.

THEOREMA XLII. PROPOSITIONE LX.

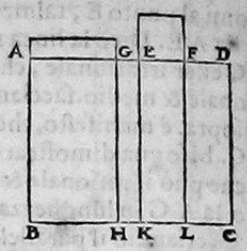
Se vn ſpatio ſia contenuto dalla rationale & dalla ſeſta di due nomi la linea retta, che può detto ſpatio è irrationale, & ſi chiama potente due medij.

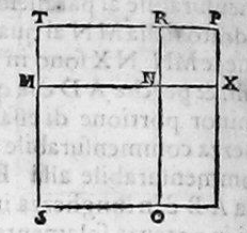
Sia lo ſpatio A B C D contenuto dalla rationale A B & dalla ſeſta di due nomi A D, che ſi diuida ne ſuoi nomi in punto E, talmente che A E ſia il maggiore. Dico la linea retta, che può lo ſpatio A C eſſere irrationale, che ſi chiama potente due medij. faccianſi le medeſime coſe, che diſopra, è manifeſto la M X potere lo ſpatio A C, & la M N eſſere in potenza incommenſurabile alla N X, & perche la E A è in lunghezza incommenſurabile alla A B, ſaranno le E A A B rationali in potenza ſolamente commenſurabili. adunque A K è medio, cioè il compoſto da quadrati delle M N N X. ſimilmente perche la E D è in lunghezza incommenſu-

22. di queſto.

rabile

rabile alla A B, ſarà anchor la F E alla E K in lunghezza incommenſurabile. adunque le E E E K ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabile: & però E L e medio, cioe M R, cioe quello, che
B e contenuto dalle M N N X. & eſſendo la A E incommenſurabile alla E F, & il parallelogrammo A K ſarà incommenſurabile al parallelogrammo E L. ma A K e compoſto da quadrati delle M N N X, & E L e quello, che ſi conuiene dalle M N N X. onde il compoſto da quadrati delle M N N X e incommenſurabile à quello, che ſi contiene dalle M N N X; & e l'vno & l'altro di eſsi medio, &
C le M N N X ſono in potenza incommenſurabili.
D adunque la M X e potente due medij. & può lo ſpatio A C. il che biſognaua dimoſtrare.





IL COMMANDINO.

A Similmente perche la E D e in lunghezza incõmenſurabile alla A B, ſarà anchor la F E alla E K in lunghezza incommenſurabile] *percioche eſſendo la E D in lunghezza incommenſurabile alla A B, & la F E commenſurabile alla E D. ſarà per la 13 di queſto anchora la F E alla A B, cioè alla E K in lunghezza incommenſurabile.*

B Et eſſendo la A E incommenſurabile alla E F] *per la 13 di queſto; percioche la A E è incommenſurabile alla E D, & la E F alla E D commenſurabile.*

C Et le M N N X ſono in potenza incommenſurabili] *perche la A G in lunghezza è incommenſurabile alla G E, ſarà il parallelogrammo A H al parallelogrammo H E, cioè il quadrato della M N incommenſurabile al quadrato della N X. adunque le M N N X ſono in potenza incommenſurabili.*

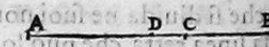
D Adunque la M X e potente due medij] *per la 42 di queſto.*

Sia la A B 5, la A D R 10 più R 8, ſarà la E F R 2. ſe dunque alla A E ſi adatti il parallelogrammo A G E, vguale al quadrato della E F, che manchi della figura quadrata: ſarà A G R 2 $\frac{5}{2}$ più R $\frac{1}{2}$ G E R 2 $\frac{1}{2}$ men R $\frac{1}{2}$ & il parallelogrammo A H R 62 $\frac{1}{2}$ più R 12 $\frac{1}{2}$, G K R 62 $\frac{1}{2}$ men R 12 —, E L R 50. & tutto il parallelogrammo A C R 250 più R 200, diuidaſi R 250 in due parti, talmente, che quello, che ſi produce da eſſe ſia vguale à 50. ſarà la maggior parte R 62 $\frac{1}{2}$ più R 12 $\frac{1}{2}$, & la minore R 62 $\frac{1}{2}$ men R 12 $\frac{1}{2}$. adunque la R di quello ſpatio binomiale R 250 più R 200 è R V R 62 $\frac{1}{2}$ più R 12 $\frac{1}{2}$ più R 62 $\frac{1}{2}$ men R 12 $\frac{1}{2}$.

LEMMA.

Se vna linea retta ſia ſegata in parti diſuguali, i quadrati dolle parti ſono maggiori del rettangolo, che da dette parti ſi contiene.

Sia la linea retta A B, & ſeghiſi nel punto C, di modo che la A C ſia maggiore della C B. Dico i quadrati delle A C C B eſſer maggiori del rettangolo, che due volte e contenuto dalle A C C B. ſeghiſi la A B per mezo nel punto D. & perche la linea retta A B e ſegata in parti vguali nel punto D, & in parti diſuguali nel C, il rettangolo, che e contenuto dalle A C C B inſieme col quadrato della C D e vguale al quadrato, che ſi fa dalla A D. adunque il rettangolo A C B e minore che'l quadrato della A D. quello dunque che e contenuto due volte dalla A C C B



5. del ſecondo.

e mi-

è minore che il doppio del quadrato della A D. ma i quadrati delle A C C B ſono doppij de quadrati delle A D D C. adunque i quadrati delle A C C B ſono maggiori di quello, che è contenuto due volte dalle A C C B. il che biſognaua dimoſtrare.

*

IL COMMANDINO.

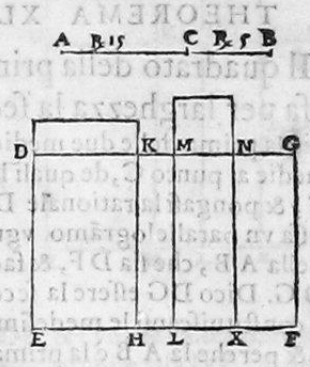
Adunque i quadrati delle A C C B ſono maggiori di quello, che è contenuto due uolte dalle A C C B] *percioche eſſendo i quadrati delle A C C B doppij de quadrati delle A D D C, ſaranno i quadrati delle A C C B maggiori, che doppij del quadrato della A D. ma quello, che due volte è contenuto dalle A C C B è minore che il doppio del quadrato della A D, adunque i quadrati delle A C C B ſono molto maggiori di quello, che due volte dalle A C C B è contenuto.*

*

THEOREMA XLIII. PROPOSITIONE LXI.

Il quadrato della linea di due nomi adattato alla rationale fa per larghezza la prima di due nomi.

Sia la A B di due nomi diuiſa ne ſuoi nomi al punto C, talmente che la A C ſia il maggior nome; & propongaſi la rationale D E; & alla D E adattiſi il parallelogrammo D E F C, vguale al quadrato della linea retta A B, che faccia la larghezza D G. Dico D G eſſere la prima di due nomi. adattiſi alla rationale D E il parallelogrammo D H vguale al quadrato della A C: & il parallelogrammo K L vguale al quadrato della B C. il rimanente dunque, che ſi contiene due volte dalle A C C B è vguale al parallelogrammo M F. ſeghiſi la M G per mezo nel punto N, & tiriſi la N X parallela ad vna di eſſe M L G F. l'uno & l'altro dunque de parallelogrammi M X N F è vguale à quello, che è contenuto vna volta dalle A C C B. & perche la A B è di due nomi, diuiſa ne ſuoi nomi al punto C, ſaranno le A C C B rationali in potenza ſolamente commenſurabili. adunque i quadrati delle A C C B ſono rationali & commenſurabili fra loro: & però il compoſto da quadrati delle A C C B è commenſurabile à quadrati delle medeſime A C C B. onde il compoſto da quadrati delle A C C B è rationale & è vguale al parallelogrammo D L. adunque etiandio D L è rationale, & è adattato alla rationale D E. il perche la D M è rationale & in lunghezza commenſurabile alla D E. oltre à ciò perche le A C C B ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabili, quello, che ſi contiene due volte dalle A C C B cioè M F è medio, & è adattato alla rationale M L. la M G dunque è rationale, & alla M L cioè alla E D in lunghezza incommenſurabile. & la M D è rationale, & alla D E in lunghezza commenſurabile. adunque la D M è in lunghezza incommenſurabile alla M G. & ſono rationali. onde le D M M G ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabili: & però la D G è di due nomi. ſi ha da dimoſtrare che anchor è la prima. percioche eſſendo de quadrati delle A C C B il proportionale di mezo quello che è contenuto dalle A C C B, ſarà anchor de parallelogrammi D H K L proportionale di mezo M X. e adunque come D H ad M X, coſi M X à K L, cioè come la linea retta D K alla M N, coſi la M N alla M K. onde il rettangolo D K M è vguale al quadrato della M N. & perche il quadrato della A C è commenſurabile al quadrato della C B, ſarà etiandio il parallelogrammo D H commenſura-



4. del ſecondo

31. del primo.

37. di queſto.

16. di queſto.

6. diff.

23. di queſto.

13. di queſto.

Lem. alla 55. di queſto.

1. del ſeſto.

17. del ſeſto.

1. del ſeſto. bile al parallelogrammo K L. adunque anchor la DK in lunghezza è commenſu-
Lem. anteced. rabile alla KM. & eſſendo i quadrati delle A C C B maggiori di quello, che due
1. del ſeſto. volte è contenuto dalle A C C B, ſarà anche il parallelogrammo D L maggiore di M F; & però la linea retta D M è maggiore della M G. & è il rettangolo DKM vguale al quadrato della M N, cioè alla quarta parte del quadrato della M G: & la D K in lunghezza è commenſurabile alla K M. ma ſe ſiano due linee rette diſuguali, & alla maggiore ſi adatti vn parallelogrammo vguale alla quarta parte del
19. di queſto. quadrato della minore, che manchi della figura quadrata, & la diuida in parti commenſurabili; la maggiore potrà tanto più, che la minore, quanto è il quadrato di vna linea retta in lunghezza commenſurabile ad eſſa. & ſono rationali D M M G, & la D M che è il maggior nome è in lunghezza commenſurabile alla pro-
1. diff. delle 2. poſta rationale D E. adunque la D G è la prima di due nomi. il che biſognaua dimoſtrare.

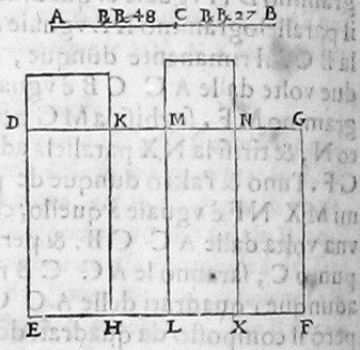
IL COMMANDINO.

Sia la A B R 15 *più* R 5, *& la D E* 5. *ſarà D H* 15, *K L* 5, *& M X* R 75, *& N F* R 75. *onde ſe alla D E ſi adatti D H farà la larghezza D K* 3, *& ſe ſi adatti K L farà K M* 1, *& ſe alla medeſima ſi adatti M X, cioè* R 75. *farà la larghezza M N* R 3 *per lo ſecondo theorema di quelli, che noi habbiamo poſti alla* 20 *di queſto. & ſimilmente la N G ſarà* R 3. *tutta dunque la D G è* 4 *più* R 12, *che è la prima di due nomi.*

THEOREMA XLIIII. PROPOSITIONE LXII.

Il quadrato della prima delle due medie adattato alla rationale fa per larghezza la ſeconda di due nomi.

Sia la prima delle due medie A B, diuiſa nelle medie al punto C, de quali la maggiore ſia A C; & pongaſi la rationale D E, & adattiſi ad eſſa vn parallelogrāmo vguale al quadrato della A B, che ſia D F, & faccia la larghezza D G. Dico D G eſſere la ſeconda di due nomi. conſtituiſcanſi le medeſime coſe, che diſopra. & perche la A B è la prima delle due me-
38. di queſto. die, diuiſa nel punto C, ſaranno le A C C B medie in potenza ſolamente commenſurabili, che contengono vn ſpatio rationale. onde anchora i quadrati che ſi fanno dalle A C C B ſono medij; & però D L è medio, che è adat-
23. di queſto. tato alla rationale. adunque la M D è rationale; & in lunghezza incommenſurabile alla D E. oltre à cio perche quello, che è due volte contenuto delle A C C B è rationale, farà anchor M F rationale: & è adatta
21. di queſto. to alla rationale M L. adunque etiandio la M G è rationale, & alla M L cioè alla D E
33. di queſto. in lunghezza commenſurabile. la D M dunque è incommenſurabile alla M G. & ſono rationali. onde le D M M G ſono rationali in potenza ſolamente commen-
37. di queſto. ſurabili: & però la D G è di due nomi. ſi ha da dimoſtrare anchor eſſere la ſeconda. percioche eſſendo i quadrati delle A C C B maggiori di quello, che due vol-
Lemma alla 61. di queſto. te è contenuto dalle A C C B, ſarà anchor il parallelogrammo D L maggiore del parallelogrammo M F. adunque anchor la linea retta D M è maggiore della M G.
1. del ſeſto. & eſſendo il quadrato della A C commenſurabile al quadrato della C B, etiandio il parallelogrammo D H ſarà commenſurabile al parallelogrammo K L. onde la
19. di queſto. D K è commenſurabile alla K M. & quello, che ſi contiene dalle D K K M è vguale al quadrato della M N. adunque la D M può tanto più, che la M G, quanto è il quadrato di vna linea retta in lunghezza cōmenſurabile ad eſſa. & la M G è in lunghezza commenſurabile alla D E. onde la D G è la ſeconda di due nomi.



IL

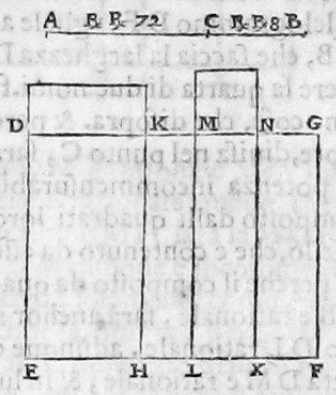
IL COMMANDINO.

Sia la AB R R 48 più R R 27, & la DE 4. sarà DH R 48, KL R 27, MX & NF 6. adunque se alla DE si adatti DH sarà DK R 3, per lo secondo theorema gia detto. & per la medesima ragione se KL si adatti alla medesima, sarà KM R 1 $\frac{11}{16}$. & se si adatti MX ò NF, sarà la MN ouero la NG 1 $\frac{1}{2}$. & perche DK KM cioè R 3 & R 1 $\frac{11}{16}$ sono in lunghezza commensurabili, se si compongano fra loro, sarà per lo terzo theorema di quelli che noi habbiam posti alla 20 di questo DM R 9 $\frac{3}{16}$. adunque tutta la DG è R 9 $\frac{3}{16}$ più 3, cioè la seconda di due nomi.

THEOREMA XLV. PROPOSITIONE LXIII.

Il quadrato della seconda delle due medie adattato alla ratio nale fa per larghezza la terza di due nomi.

Sia la seconda delle due medie A B, diuisa nelle medie al punto C talmente, che A C sia la mag gior portione, & DE sia rationale: & alla DE adat tisi il parallelogrammo D F vguale al quadrato della A B, che faccia la larghezza D G. Dico DG essere la terza di due nomi. constituiscansi le medesime cose, che di sopra. & perche A B è la seconda delle due medie, diuisa nel punto C, saranno le A C C B medie in potenza solamente commensurabili. che contengono vn spatio medio. adunque etiandio il composto da quadrati delle A C C B è medio, & vguale à D L. D L dunque è medio, & è adattato alla rationale D E. onde la M D è rationale & in lunghezza incommensurabile alla D E. & per la medesima ragione la M G è rationale & incommensurabile alla M L, cioè alla DE. & l'vna & l'altra dunque di esse D M M G è rationale, & in lunghezza incommensurabile alla D E. & perche la A C è in lunghezza incommensurabile alla C B, & come la A C alla C B, così il quadrato della A C al rettangolo A C B, sarà anchor il quadrato della A C incommensurabile al rettangolo A C B. adunque etiandio il composto da quadrati delle A C C B è incommensurabile à quello, che si contiene due volte dalle A C C B, cioè D L incommensurabile à M F. & però la linea retta D M è incommensurabile alla M G. & sono rationali. adunque la D G è di due nomi. si ha da dimostrare che è la terza. similmente concluderemo la D M essere maggiore della M G & la D K commensurabile alla K M & il rettangolo D K M vguale al quadrato della M N. adunque la D M può più, che la M G quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza incommensurabile ad essa, & niuna delle D M M G è in lunghezza commensurabile alla D E. onde D G è la terza di due nomi.



39. di questo. A

23. di questo.

1. del sesto ò uero lem. alla 23. di questo. B

1. del sesto. &

10. di questo.

37. di questo.

19. di questo.

IL COMMANDINO.

Adunque etiandio il composto da quadrati delle A C C B e medio] *percioche da due medij commensurabili se si compongano insieme, si fa vn medio, come habbiamo detto nella 45 di questo.*

Adunque etiandio il composto da quadrati delle A C C B e incommensurabile à quello, che si contiene due volte dalle A C C B] *perche essendo i quadrati delle A C C B commensurabili se si compongano insieme, sarà il composto commensurabile al qua-*

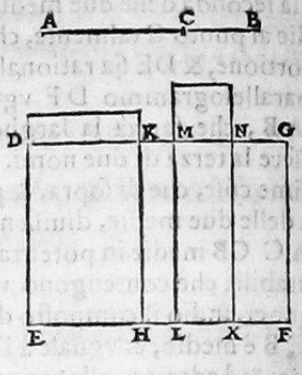
drato della AC per la 16 di queſto. & quello che due volte è contenuto dalle AC CB è commenſurabile al rettangolo AC CB, come doppio di eſſo. adunque dalle coſe, che noi habbiamo dimoſtrate alla 14 di queſto il compoſto da quadrati delle AC CB è commenſurabile à quello, che due volte è contenuto dalle AC CB.

Sia la AB R R 72 più R R 8, & DE 4. ſarà DH R 72, KL R 8, MX ò uero NF R 24. onde ſe alla DE ſi adatti DH, ſarà la larghezza DK R 4 $\frac{1}{2}$: & ſe ſi adatti KL, ſarà KM R $\frac{1}{2}$: & ſe MX, ò uero NF, ſarà MN ò uero NG R 1 $\frac{1}{2}$. ma ſe ſi compongano DK KM, cioè R 4 $\frac{1}{2}$ & R $\frac{1}{2}$, ſi farà la DM R 8. tutta dunque la DG è R 8 più R 6, che è la terza di due nomi.

PROBLEMA XLVI. PROPOSITIONE LXIIII.

Il quadrato della maggiore adattato alla rationale fa per larghezza la quarta di due nomi.

Sia la maggior A B, diuiſa nel punto C, talmente che la A C ſia maggiore che la C B: & ſia la D E rationale: & alla D E adattaſi il parallelogrammo D F, vguale al quadrato della A B, che faccia la larghezza DG. Dico la DG eſſere la quarta di due nomi. faccianſi le medeſime coſe, che diſopra. & perche AB è la maggiore, diuiſa nel punto C, ſaranno le AC CB in potenza incommenſurabili, che fanno il compoſto dalli quadrati loro rationale, & quello, che è contenuto da eſſe medio. la onde perche il compoſto da quadrati delle AC CB è rationale, ſarà anchor il parallelogrammo D L rationale. adunque etiandio la linea retta D M è rationale, & in lunghezza commenſurabile alla D C. oltre à ciò per che quello, che è contenuto due uolte dalle AC CB è medio, cioè M F, & è adattato alla rationale M L; ſarà anchor la M G rationale, & in lunghezza incommenſurabile alla D E. adunque la D M è in lunghezza incommenſurabile alla M G; & però le D M M G ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabili. onde la D G è di due nomi. ſi ha da dimoſtrare eſſere la quarta. ſimilmente come di ſopra, concluderemo la D M eſſere maggiore che la M G, & il rettangolo D K M vguale al quadrato della M N. perche dunque il quadrato della A C è incommenſurabile al quadrato della C B, ſarà anchor il parallelogrammo D H incommenſurabile al parallelogrammo K L. & però la linea retta D K è incommenſurabile alla K M. ma ſe ſiano due linee rette diſuguali, & alla maggiore ſi adatti vn parallelogrammo vguale alla quarta parte del quadrato della minore, che manchi della figura quadrata, & diuida eſſa in parti incommenſurabili in lunghezza: la maggiore potrà tanto più della minore, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza incommenſurabile ad eſſa. adunque la D M può più della M G, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza ad eſſa incommenſurabile: & ſono le D M M G rationali in potenza ſolamente commenſurabili, & è la DM commenſurabile alla propoſta rationale D E. onde D G è la quarta di due nomi.



40. di queſto.
21. di queſto.
23. di queſto.
37. di queſto;
Lem. alla 23. di queſto.
19. di queſto.
4 diff.

IL COMMANDINO.

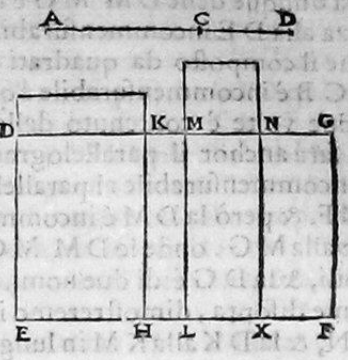
Sia la AB R V 10 più R 37 $\frac{1}{2}$ più R V 10 meno R 37 $\frac{1}{2}$, & la DE ſia 5. ſarà la DH 10 più R 37 $\frac{1}{2}$, KL 10 meno R 37 $\frac{1}{2}$, MX ò uero NF R 62 $\frac{1}{2}$. onde ſe alla DE ſi adatti DH, che faccia la larghezza DK, ſarà DK 2 più R 1 $\frac{1}{2}$. ma ſe ſi adatti KL che faccia KM, ſarà KM 2 meno R 1 $\frac{1}{2}$ & ſe ſi adatti MX ò uero NF, ſarà la MN ò uero la NG R 2 $\frac{1}{2}$.

& ſe ſi compongano le D K K M, cioè 2 più R 1 $\frac{1}{2}$ & 2 men R 1 $\frac{1}{2}$, ſi farà D M 4. adunque tutta la D G è 4 più R 10, cioè la quarta di due nomi.

THEOREMA XLVII. PROPOSITIONE LXV.

Il quadrato della potente il rationale & medio adattato alla rationale fa per larghezza la quinta di due nomi.

Sia la linea potente il rationale & medio AB, diuiſa in linee rette nel punto C, talmente che la A C ſia maggiore. propongaſi la rationale D E, & alla D E adattiſi il parallelogrammo D F, vguale al quadrato della A B, che faccia la larghezza D G. Dico la D G eſſer la quinta di due nomi: conſtituiſcanſi le medeſime coſe che diſopra. & perche la A B è potente il rationale & medio, diuiſa nel punto C, ſaranno le A C C B in potenza incommenſurabili, che fanno il compoſto da quadrati loro medio, & quello, che ſi contiene da eſſe rationale. perche dunque il compoſto da quadrati delle A C C B è medio, ſarà anchor il parallelogrammo D L medio: & però la linea retta D M è rationale & in lunghezza incommenſurabile alla D E. oltre à ciò perche è rationale quello, che ſi contiene due volte dalle A C C B, cioè il parallelogrammo M F; ſarà la M G rationale, & in lunghezza commenſurabile alla D E. la D M dunque è incommenſurabile alla M G, & le D M M G ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabili: & però la D G è di due nomi. Dico eſſere anchor la quinta. percioche ſi dimoſtrerà ſimilmente il rettangolo D K M eſſer vguale al quadrato della M N, & la D K eſſere incommenſurabile in lunghezza alla K M. onde la D M può più, che la M G, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza ad eſſa incommenſurabile. & ſono le D M M G rationali in potenza ſolamente commenſurabili, & la minore M G in lunghezza è commenſurabile alla D E. adunque la D G è la quinta di due nomi.



41. di queſto.
23 di queſto.
21. di queſto.
13. di queſto.
5. diff. delle 2.

IL COMMANDINO.

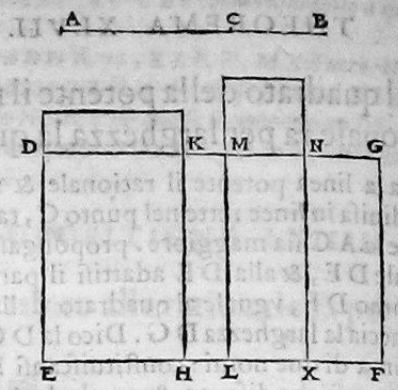
Sia la AE R V R 125 più 5 piu R V la R 125 men 5, & la D E ſia 5. ſarà il parallelogrãmo D H R 125 più 5, K L R 125 men 5, M X, ò uero N F, 10. & ſe ſi adatti alla D E il parallelogrammo D H, che faccia la larghezza D K, ſara la D K R 5 più 1. & ſe ſi adatti K L che faccia la larghezza K M, ſarà la K M R 5, men 1. & ſe ſi adatti M X ò uero H F, ſarà la M N ò uero la N G 2. & ſe ſi compongano le D K K M, cioè R 5 più 1, & R 5 men 1, ſi farà la D M R 10. tutta dunque la D G è R 20 più 4, cioè la quinta di due nomi.

THEOREMA XLVIII. PROPOSITIONE LXVI.

Il quadrato della linea potente due medij adattato alle rationale, fa per larghezza la ſeſta di due nomi.

Sia la linea potente due medij A B, diuiſa nel punto C. & la D E ſia rationale: & ad eſſa D E adattiſi il parallelogrammo D F, vguale al quadrato della A B, che faccia la larghezza D G. Dico D G eſſere la ſeſta di due nomi. conſtituiſcanſi le medeſime coſe, che diſopra. & perche la linea A B potente due medij è di-

42. di questo. uisa nel punto C, saranno le A C C B in potenza incommensurabili, che fanno il composto delli lor quadrati medio, & quello che da esse si contiene medio, & incommensurabile al composto delli quadrati loro. adunque per le cose già dimostrate l'vno & l'altro de parallelogrammi D L M F è medio. & sono adattati alla rationale D E. l'vna & l'altra dunque delle D M M G è in lunghezza alla D E incommensurabile. & perche il composto da quadrati delle A C C B è incommensurabile à quello che due volte è contenuto dalle A C C B; sarà anchor il parallelogrammo D L incommensurabile al parallelogrāmo M F. & però la D M è incommensurabile alla M G. onde le D M M G sono rationali in potenza solamente commensurabili, & la D G è di due nomi. Dico etiandio esser la sesta. percioche similmente come disopra, dimostreremo il rettangolo D K M esser vguale al quadrato della M N, & la D K alla K M in lunghezza incommensurabile. adunque la D M può più, che la M G quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza incommensurabile ad essa, & niuna delle D M M G è in lunghezza commensurabiie alla proposta rationale D E. onde D G è la sesta di due nomi.



23. di questo.

19. di questo.

6. diff. della 2.

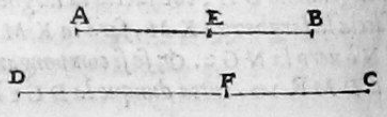
IL COMMANDINO.

Sia la A B R V R 252 più R 72 più R V R 252 men R 72, & la D E sia 6. sarà D H R 252 più R 72, & K L R 252 men 72, & M X, ò vero N F R 180. adattisi alla D E il parallelogrammo D H, che faccia la larghezza D K. sarà la D K R 7 più R 2. poi adattisi K L, che faccia la larghezza K M. sarà la K M R 7 men R 2. finalmente adattisi M X ò N F. sarà la M N, ò vero N G R 5. adunque tutta la D G è R 28 più R 20, che è la sesta di due nomi.

THEOREMA XLIX. PROPOSITIONE LXVII.

La linea commensurabile in lunghezza à quella, che è di due nomi, anchor essa è di due nomi, & del medesimo ordine.

Sia la A B di due nomi, & alla A B sia in lunghezza commensurabile la C D. Dico la C D essere di due nomi, & del medesimo ordine, che la A B. percioche essendo la A B di due nomi, diuidasi ne suoi nomi al punto E, & sia la A E il maggior nome. adunque le A E E B sono rationali in potenza solamente commensurabili. & facciasi come la A B alla C D, così la A E alla C F. la rimanente dunque E B alla rimanente F B, è come la A B alla C D. & la A B in lunghezza è incommensurabile alla C D. onde anchora la A E alla C F, & la E B alla F D in lunghezza è commensurabile. & sono rationali le A E E B. sono dunque etiandio le C F F D rationali. & perche come la A E alla C F, così è la E B alla F D, sarà permutandosi come la A E alla E B, così la C F alla F D. & sono le A E E B in potenza solamente commensurabili. adunque le C F F D saranno in potenza solamente commensurabili; & sono rationali. onde la C D è di due nomi.



12. del sesto.
19 del quinto.
10. di questo.
8. diff.
10. di questo.

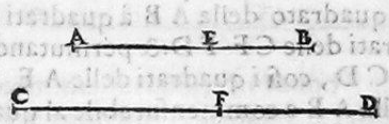
Dico

Dico esser del medesimo ordine, che la A B. percioche ò vero la A E può più, che la E B, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza commensurabile ad essa, ò vero incommensurabile. & se commensurabile, anchor la C F potrà più, che la F D, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza ad essa commensurabile. & se la A E sia commensurabile alla proposta rationale, etiandio la C F sarà commensurabile alla medesima. & però ciascuna di esse A B C D è la prima di due nomi, cioè del medesimo ordine. & se la E B sia commensurabile alla proposta rationale, anchor la F D sarà commensurabile alla medesima. & per questa ragione la C D è del medesimo ordine, che la A B, perche l'vna & l'altra è la seconda di due nomi. & se niuna di esse A E E B sia commensurabile alla proposta rationale, & niuna delle C F F D sarà alla medesima commensurabile & è l'vna & l'altra terza. ma se la A E possa più, che la E B, quanto è il quadrato della linea retta in lūghezza ad essa incōmensurabile, anchor la C F potrà più, che la F D quāto è il quadrato della linea retta in lūghezza incōmensurabile ad essa. & se la A E sia commensurabile alla proposta rationale, & la C F sarà cōmensurabile alla medesima, & l'vna & l'altra è quarta. & se la E B ancor la F D, & è quinta l'vna & l'altra. & se niuna di esse A E E B; niuna anchor delle C F F D sarà cōmensurabile alla proposta rationale, & l'vna & l'altra è sesta. adunque la linea commensurabile in lunghezza à quella, che è di due nomi, anchor essa è di due nomi, & del medesimo ordine. 15. di questo. 15. di questo.

THEOREMA L. PROPOSITIONE LXVIII.

La linea commensurabile in lunghezza à quella, che è delle due medie, anchor essa è delle due medie, & del medesimo ordine.

Sia la A B delle due medie, & alla A B sia in lunghezza commensurabile la C D. Dico la C D essere delle due medie, & del medesimo ordine, che la A B. percioche la A B è delle due medie, diuisa nel punto E. saranno le A E E B medie in potenza solamente commensurabili. onde facciasi come la A B alla C D, cosi la A E alla C F. adunque anchor la rimanente E B alla rimanente F D è come la A B alla C D. & la A B è in lunghezza commensurabile alla C D. onde etiandio la A E alla C F sarà in lunghezza commensurabile, & la E B alla F D. & sono medie le A E E B. adunque anchor le C F F D sono medie. & perche come la A E alla E B, cosi è la C F alla F D, & le A E E B sono in potenza solamente commensurabili: saranno anchor le C F F D commensurabili in potenza solamente, & si sono dimostrate medie. adunque la C D è delle due medie. Dico etiandio essere del medesimo ordine, che la A B. percioche essendo come la A E alla E B, cosi la C F alla F D, sarà come il quadrato della A E al rettangolo A E B, cosi il quadrato della C F al rettangolo C F D. permutandosi come il quadrato della A E al quadrato della C F, cosi il rettangolo A E B al rettangolo C F D. ma il quadrato della A E e commensurabile al quadrato della C F. adunque anchor il rettangolo A E B sarà commensurabile al rettangolo C F D. onde se il rettangolo A E B e rationale & il rettangolo C F D sarà rationale, & e la prima delle due medie. & se il rettangolo A E B e medio, sarà medio anchora C F D, & l'una & l'altra e la seconda delle due medie. adunque la C D è del medesimo ordine che la A B. il che bisognaua dimostrare.



28. di quest°. 12. del sest°. 19. del quinto. 17. di questo. 24. di questo

IL COMMANDINO.

Percioche essendo come la A E alle E B, cosi la C F alla F D, sarà come il quadrato

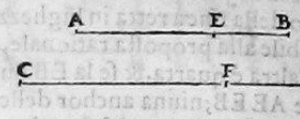
drato della A E al rettãgolo A E B, cosi il quadrato della C F al rettagolo C F D] *perche come la A E alla E B, cosi è la C F alla F D, ma come la A E alla E B, cosi il quadrato della A E al rettangolo A E B, per la prima del sesto, ò uero per lo lemma innanzi alla 23 di questo: sarà come il quadrato della A E al rettangolo A E B, cosi la C F alla F D. ma come la C F alla F D, cosi il quadrato della C F al rettangolo C F D. come dunque il quadrato della A E al rettangolo A E B, cosi il quadrato della C F al rettangolo C F D.*

11 del quinto.

THEOREMA LI. PROPOSITIONE LXIX.

La linea commensurabile alla maggiore, anchor essa è maggiore.

Sia la linea maggiore A B, & ad essa commensurabile la C D. Dico la C D esser maggiore. diuidasi la A B nel punto E. adunque le A E E B sono in potenza incommensurabili, che fanno il composto dalli lor quadrati rationale, & quello, che e contenuto da esse, medio. & facciansi le medesime cose, che disopra. perche dunque e come la A B alla C D, cosi la A E alla C F, & la E B alla F D; sarà come la A E alla C F, cosi la E B alla F D. & la A B e commensurabile alla C D. adunque l'una & l'atra A E E B e commensurabile all'una & l'altra C F F D. & perche come la A E alla C F, cosi e la E B alla F D, sarà permutandosi come la A E alla E B, cosi la C F alla F D, & componendosi come la A B alla B E, cosi la C D alla D F. come dunque il quadrato della A B al quadrato della B E, cosi il quadrato della C D al quadrato della D F. similmente dimostreremo & come il quadrato della A B al quadrato della A E, cosi essere il quadrato della C D al quadrato della C F. adunque & come il quadrato della A B à quadrati delle A E E B, cosi il quadrato della C D à quadrati delle C F F D: & permutandosi come il quadrato della A B al quadrato della C D, cosi i quadrati delle A E E B à quadrati delle C F F D. ma il quadrato della A B e commensurabile al quadrato della C D. adunque anchor i quadrati delle A E E B sono commensurabili à quadrati delle C F F D. & il composto da quadrati delle A E E B e rationale. onde il composto da quadrati delle C F F D sarà rationale. similmente anchor quello, che due volte e contenuto dalle A E E B e commensurabile à quello, che due volte e contenuto dalle C F F D: & e medio quello, che due volte e contenuto dalle A E E B. adunque etiandio quello, che e contenuto due volte dalle C F F D e medio: & perciò le C F F D sono in potenza incommensurabili, che fanno il composto delli loro quadrati rationale, & quello, che e contenuto da esse, medio. tutta dunque la C D e irrationale, che si chiama maggiore, onde la linea commensurabile alla maggiore anchor essa e maggiore. il che bisognaua dimostrare.



40. di questo.

A
B
C
D
E
F

IL COMMANDINO.

A Come dunque il quadrato della A B al quadrato della B E, cosi il quadrato della C D al quadrato della D F] *per la 22 del sesto libro.*

B Similmente dimostreremo come il quadrato della A B al quadrato della A E, cosi essere il quadrato della C D al quadrato della C F.

22. del sesto. *Percioche essendo come la A B alla B E, cosi la C D alla D F, sarà per la conuersione della proportione come la E A alla A E, cosi la D C alla C F. adunque come il quadrato della A B al quadrato della A E, cosi il quadrato della C D al quadrato della C F.*

C Adunque & come il quadrato della A B à quadrati delle A E E B, cosi il quadrato della C D à quadrati delle C F F D] *percioche come la A E alla E B, cosi è la C F alla F D. onde come il quadrato della A E al quadrato della E B, cosi il quadrato della C F al quadrato della F D. & componendosi come i quadrati delle A E E B al quadrato della E B,*

cosi i quadrati delle CF FD al quadrato della FD. & conuertendosi come il quadrato della EB à quadrati delle AE EB, cosi il quadrato della FD à quadrati delle C F F D. ma come il quadrato della A B al quadrato della B E, cosi era il quadrato della C D al quadrato della D F. adunque per l'vgual proportione come il quadrato della A B à quadrati delle A E E B, cosi il quadrato della C D à quadrati delle C F F D.

Similmente anchor quello, che due volte e contenuto dalle AE EB e commen surabile à quello, che due volte e contenuto dalle CF FD] *percioche per la quarta del secondo, il quadrato della A B è vguale à quadrati delle AE EB insieme con quello, che è cõtenuto due dalle AE EB. & per la medesima ragione il quadrato della CD è vguale à quadrati delle CF FD insieme con quello, che è contenuto due uolte dalle CF FD. essendo dunque come il tutto al tutto, cosi la parte tratta alla parte tratta, cioè come il quadrato della AB al quadrato della CD, cosi i quadrati delle AE EB à quadrati delle CF FD, sarà il rimanente al rimanente, come il tutto al tutto, cioè quello, che è contenuto due volte dalle AE EE à quello, che due volte è cõtenuto dalle CF FD, come il quadrato della AE al quadrato della CD. ma il quadrato della AB è cõmensurabile al quadrato della CD. adunque per la 10 di questo quello, che è contenuto due volte dalle AE EB è commensurabile à quello, che due volte è contenuto dalle CF FD.* D

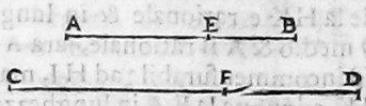
Adũque etiãdio quello, che e contenuto due volte dalle CF FD e medio] *per lo corollario della 24. di questo. onde è medio quello, che vna volta è contenuto dalle C F FD.* E

Et perciò le C F F D sono in potenza incõmensurabili] *percioche come la A E al la EB, cosi è la C F alla FD. ma la AE è in potenza incõmensurabile alla E B. onde etiandio la CF sarà in potenza incõmensurabile alla FD. sono dũque le CF FD in potenza incõmẽsurabili.* F 10. di questo.

THEOREMA LII. PROPOSITIONE LXX.

La linea commensurabile alla potente, il rationale & medio è altresì potente il rationale & medio.

Sia la linea potente il rationale & medio A B, & alla A B sia commensurabile la C D. si ha da dimostrare etiandio la C D esser potente il rationale & medio. diuidasi la A B in linee rette, nel punto E. adunque le AE EB sono in potenza incommensurabili, che fanno il cõposto da quadrati loro medio, & quello, che da esse e contenuto rationale. & faccianſi le medesime cose, che prima. dimostreremo similmente le C F FD esser in potenza incommensurabili, & il composto da quadrati delle AE EB esser commensurabi le al composto da quadrati delle CF FD. ma quello, che e contenuto dalle AE EB e commensurabile à quello. che e contenuto dalle CF FD. adunque anchor il cõ posto da quadrati delle CF FD e medio, & quello, che e cõtenuto dalle CF FD e rationale. la CD dunque e potente lo spatio rationale & medio. il che bisog. dim.

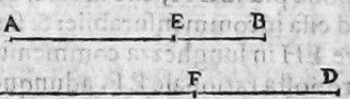


40. di questo.

THEOREMA LIII. PROPOSITIONE LXXI.

La linea commensurabile alla potente due medij è altresì potente due medij.

Sia la linea potente due medij AB & alla AB sia la CD commensurabile. si ha da dimostrare la C D esser potente due medij. perche la A B e potẽte due medij, diuidasi in linee rette nel punto E. onde le AE EB sono in potenza incom mensurabili, che fanno il cõposto da lor quadrati medio, & quello, che da esse e cõ tenuto medio, & incommensurabile al cõposto da quadrati loro. & facciasi le me desime cose, che disopra. dimostreremo similmente le CF FD essere in potenza in cõmensurabili, & il cõposto da quadrati delle AE EB cõmensurabile al composto da quadrati delle CF FD. ma quello, che e contenuto dalle AE EB e cõmensura bile à quello, che e contenuto dalle CF FD. onde etiandio il composto da quadra ti delle C F FD e medio. & parimente medio quello, che e contenuto dalle C F

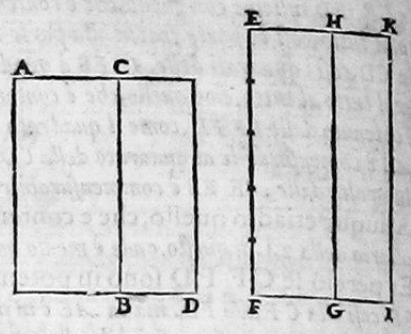


42. di questo.

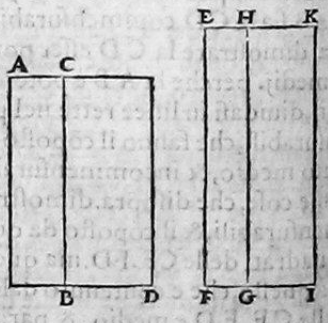
F D, & anchor incommenſurabile al compoſto da quadrati delle C F F D. adunque la linea C D e potente due medij. il che biſognaua dimoſtrare.

THEOREMA LIIII. PROPOSITIONE LXXII.

Se lo ſpatio irrationale & medio ſiano compoſti, ſi fanno quattro linee irrationali, ò quella di due nomi, ò la prima delle due medie, ò la maggiore, ò la potente il rationale & medio.



Sia lo ſpatio irrationale A B, & il medio C D. Dico quella, che può lo ſpatio A D ò eſſer di due nomi, ò la prima delle due medie ò la magiore, ò la potente il rationale & medio. per cioche A B ò vero è maggiore di C D, ò minore. ſia prima maggiore, & propongaſi la rationale E F. & ad eſſa adattiſi il parallelogrammo E G, vguale ad A B, che faccia la larghezza E H & alla E F, cioe alla H G adattiſi H I vguale a C D, che faccia la larghezza H K. & perche A B e rationale, & ad eſſo e vguale E G, ſarà E G anchora rationale, & e adattato alla rationale E F, che fa la larghezza E H. adunque la E H e rationala & in lunghezza incommenſurabile alla E F. oltre à ciò perche C D e medio, & ad eſſo e vguale H I, ſarà etiandio H I medio, & e adattato alla rationale E F, cioe H G, che fa la larghezza H K. onde la H K e rationale & in lunghezza incommenſurabile alla E F. & eſſendo C D medio & A B rationale, ſara A B incommenſurabile à C D. adunque anchor E G è incommenſurabile ad H I, ma come E G ad H I coſi è la linea retta E H. alla H K. adunque la E A in lunghezza incommenſurabile alla H K. & ſono amendue rationali. onde E H H K ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabili: & però la E K è di due nomi, diuiſa nel punto H. & perche A B è maggiore di C D, & A B è vguale ad E G, & C D ad H I, ſarà anchor E G maggiore di H I. & però la E H è maggiore della H K. la E H dunque ò vero può più, che la H K quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza ad eſſa commenſurabile, ò vero incommenſurabile. poſſa primieramente quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza commenſurabile ad eſſa: & ſia la maggiore H E commenſurabile alla propoſta rationale E F. adunque la E K e la prima di due nomi, & la E F è rationale. ma ſe vn ſpatio ſia cõtenuto dalla rationale & dalla prima di due nomi, la linea retta, che può detto ſpatio, è di due nomi. adunque quella, che può lo ſpatio E I e di due nomi. & coſi quella, che può lo ſpatio A D. ma poſſa più la E H, che la H K, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza ad eſſa incommenſurabile: & ſia la maggiore E H in lunghezza commenſurabile alla propoſta rationale E F. adunque la E K è la quarta di due nomi, & la E F è rõnale. & ſe vn ſpatio ſia contenuto dalla rationale & dalla quarta di due nomi, la linea retta, che può detto ſpatio è irrationale, che ſi chiama maggiore. quella dunque, che può lo ſpatio E I è maggiore: & però anchor quella è maggiore, che può lo ſpatio A D. ſia lo ſpatio A B minore di C D. ſarà etiandio E G minore di H I. & però la linea retta



21. di queſto.
23 di queſto.
1 del ſeſto.
10. di queſto.
1. diff. della 2.
51. di queſto.
4 diff.
58. di queſto.

E H è minore della retta H K. adunque ò vero la K H può più, che la HE, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza ad essa commensurabile òvero incommensurabile. possa primieramente quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza commensurabile, & sia la minore E H commensurabile in lunghezza alla proposta rationale E F. adunque E K è la seconda di due nomi: & la E F è rationale. & se vn spatio sia contenuto dalla rationale & dalla seconda di due nomi, la linea retta, che può detto spatio è la prima delle due medie. quella dunque, che può lo spatio E I è la prima delle due medie. & però anchor quella, che può lo spatio A D. ma la K H possa più, che la H E quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza ad essa incommensurabile. & sia la minore E H in lunghezza commensurabile alla proposta irrationale. onde la E K è la quinta di due nomi. & è la E F rationale. & se vn spatio sia contenuto dalla rationale & dalla quinta di due nomi, la linea retta, che può detto spatio è potente il rationale, & medio. quella dunque, che può lo spatio E I è potente lo spatio rationale, & medio: & però è potente il rationale, & medio, quella, che può lo spatio A D. onde se lo spatio rationale & medio siano composti, si fanno quattro linee irrationali, ò quella di due nomi, ò la prima delle due medie, ò la maggiore ò la potente il rationale & medio. il che bisognaua dimostrare.

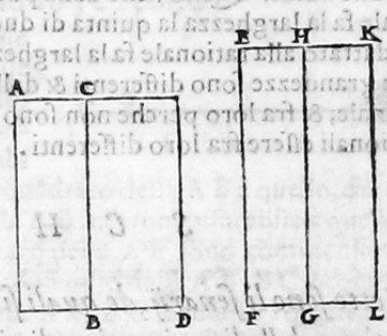
56. di questo.

59. di questo.

THEOREMA LV. PROPOSITIONE LXXIII.

Se due spatij medij incommensurabili fra loro siano composti si fanno le altre irrationali; o la seconda delle due medie, o la potente due medij.

Componganſi due medij incommensurabili fra loro A B. C D. Dico la linea retta, che può lo spatio A D ò uero essere la seconda delle due medie, ò vero quella, che può due medij. lo spatio A B o è maggiore, che C D, ò minore. sia prima maggiore, & propongasi la rationale E F. & alla E F adattisi il parallelogrammo E Ç, vguale al spatio A B, che faccia la larghezza E H, & alla medesima E F adattisi il parallelogrammo H I vguale à C D, che faccia la larghezza H K. & perche l'vno & l'altro di essi A B C D è medio, sarà anchor medio l'vno & l'altro E G H I. & sono adattati alla rationale E F, chè fanno la larghezza E H H K. adundue l'vna & l'altra E H H K è rationale, & in lunghezza incommensurabile alla E F. & perche lo spatio A B è incommensurabile à C D, & A B è vguale ad E G, & C D ad H I, sarà anchor E G incōmensurabile ad H I. ma come E G ad H I, cosi è la E H al la H K. la E H dunque è in lunghezza incommensurabile alla H K. & però le E H H K sono rationali in potenza solamente commensurabili, & la E K è di due nomi. onde la E H òvero può più, che la H K, quanto è il quadrato della linea retta, ò vero in lunghezza ad essa commensurabile, ò vero incommensurabile. possa prima quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza commensurabile ad essa, & niuna delle E H H K è commensurabile in lunghezza alla proposta rationale E F. adunque la E K è la terza di due nomi. & la F E e rationale. ma se vn spatio sia contenuto dalla rationale & dalla terza di due nomi, la linea retta, che può lo detto spatio e la seconda di due medie. adunque quello, che può lo spatio E I cioe A D e la seconda delle due medie. ma la E H possa più, che la H K, quanto e il quadrato della linea retta in lunghezza incommensurabile ad essa. & l'vna & l'al



23. di questo.

1. del sesto.

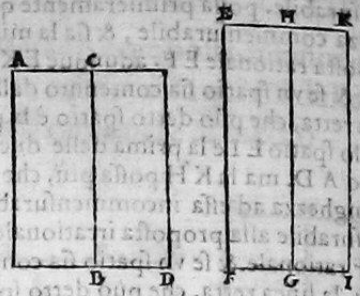
10. di questo.

57. di questo.

57. di questo

60. di questo.

tra delle EH HF è in lunghezza incommensurabile alla proposta rationale EF. onde EK è la sesta di due nomi. ma se vn spatio sia contenuto dalla rationale, & dalla sesta di due nomi, la linea retta, che può detto spatio è la potente due medij. adunque quello, che può lo spatio AD è potente due medij. similmẽte dimostreremo se lo spatio AB sia minore di CD, la linea retta, che può lo spatio AD ò essere la seconda delle due medie, ò la potente il rationale & medio. se dunque due spatij medij incommensurabili fra loro siano cõposti, si fanno le altre irrationali ò la seconda delle due medie, ò la potente due medij. il che bisognaua dimostrare.



La linea di due nomi & le irrationali, che seguono doppo quella nõ sono ne medie ne le medesime fra loro, percioche il quadrato, che si fa dalla media, adattato alla rationale fa la larghezza rationale, & in lunghezza incõmensurabile à quella, alla quale è adattato, & quello, che si fa dalla linea di due nomi adattato alla rationale fa la larghezza la prima di due nomi. & quello, che dalla prima delle due medie adattato alla rationale fa la larghezza la seconda di due nomi. Quello, che dalla seconda delle due medie adattato alla rationale fa la larghezza la terza di due nomi. Quello, che della maggiore adattato alla rationale fa la larghezza la quarta di due nomi. Quello, che dalla potente il rationale & medio adattato alla rationale fa la larghezza la quinta di due nomi. Quello, che dalla potente due medij adattato alla rationale fa la larghezza la sesta di due nomi. Perche dunque le dette grandezze sono differenti & dalla prima & fra loro. dalla prima perche è rationale, & fra loro perche non sono del medesimo ordine, appare anchora esse irrationali essere fra loro differenti.

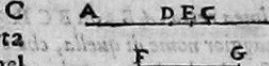
23. di questo.
61. di questo.
62. di questo.
63. di questo.
64. di questo.
65. di questo.
66. di questo.

SCHOLIO.

Sette sono li senarij, de quali sin qui s'è detto. il primo dimostra la generatione delle linee irrationali. il secondo la diuisione, percioche ad vn'sol punto si diuidono. il terzo la inuentione delle linee di due nomi, cioè della prima, seconda terza quarta quinta & sesta. poi segue il quarto senario, che dichiara in che modo queste linee sono differenti fra loro, concioſiacosa, che vsando quelle di due nomi mostri la differenza delle sei linee irrationali. nel quinto dimostra l'applicatione, ò uero adattatione de quadrati, che si fanno dalle irrationali cioè quali irrationali facciano le larghezze de spatij adattati. nel sesto in che modo le linee commensurabili alle irrationali siano d'una medesima spetie. nel settimo manifestamente insegna la differeza di esse. appare oltre à cio in queste irrationali l'analogia arithmetica & quella, che si piglia proportionale in mezo fra le portioni di ciascuna linea irrationale secondo l'analogia arithmetica anchor essa essere di vna medesima spetie con quel

le fra le portioni delle quali è proportionale in mezo. primieramente dunque la medicta arithmetica essere in queste cose si dimostra.

Pongasi per essempio la A B di due nomi, & diuidasi ne suoi nomi nel punto C. è manifesto la A C essere maggiore della C B. tragasi dalla linea retta A C la A D vguale alla B C. & seghisi per mezo nel punto E. appare dunque la A E essere vguale alla E B. pongasi la F G vguale ad vna di esse. è manifesto in che è differente la A C dalla F G, in quello essere differente la E B dalla B C. percioche la A C è differente dalla F G nella grandezza E C, & nella medesima grandezza è differente la F G dalla B C. il che è proprio della analogia arithmetica; & la F G è commensurabile alla A B, percioche è vguale alla metà di essa. adunque la F G è di due nomi. 67. di questo. similmente si dimostrerà nelle altre.



PRINCIPIO DE SENARII

PER DETRATTIONE.

THEOREMA LVI. PROPOSITIONE LXXIIII.

Se da vna linea rationale si tragga vna rationale in potenza solamente commensurabile à tutta, la rimanente sarà irrationale & chiamisi apotome ò uero residuo, ò reciso.

Dalla rationale A B traggasi la rationale B C, in potenza solamente commensurabile à tutta. Dico la rimanente A C essere irrationale, che si chiama apotome. percioche essendo la A B in lunghezza incommensurabile alla B C, & come la A B alla B C, così il quadrato della A B à quello, che è contenuto dalle A B BC, sarà il quadrato della A B incommensurabile à quello, che è contenuto dalle A B B C. ma al quadrato della A B sono commensurabili i quadrati delle A B B C, & à quello, che è contenuto dalle A B B C è commensurabile quello, che due volte è contenuto dalle A B B C. adunque i quadrati delle A B B C sono incommensurabili à quello, che è contenuto due uolte dalle A B B C. & però al rimanente, cioè al quadrato della A C sono incommensurabili i quadrati delle A B B C, concioſiacosa, che i quadrati delle A B BC siano vguali à quello, che è due volte contenuto dalle A B B C insieme col quadrato della A C: & i quadrati delle A B B C sono rationali. adunque la linea retta A C è irrationale & chiamisi apotome.



A

B

C

D

E

IL COMMANDINO.

Et come la A B alla B C, così il quadrato della A B à quello, che è contenuto dalle A B B C] *per la prima del sesto, ò per lo lemma, che segue alla 23 di questo.* A

Adunque i quadrati delle A B B C sono incommensurabili à quello, che è contenuto due uolte dalle A B B C] *per le cose dimostrate da noi alla 14 di questo.* B

Et però al rimanente cioè al quadrato della A C sono incommensurabili i quadrati delle A B B C] *per le cose dimostrate alla 17 di questo.* C

Concioſiacosa, che i quadrati delle A B B C siano vguali à quello, che è due volte contenuto dalle A B B C insieme col quadrato della A C] *per la settima del secondo libro.* D

Adunque

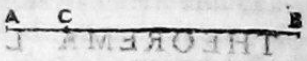
E Adunque la linea retta A C è irrationale] *percioche essendo i quadrati delle A B B C incommensurabili al quadrato della A C, & i quadrati delle A B B C rationali, seguita il quadrato della A C essere irrationale. & per la 11 diffinitione la linea retta A C essere altresì irrationale.*

Sia la linea retta A B 2, la B C R 3. sarà la A C 2 meno R 3. & risponde tutta la linea A B al maggior nome di quella, che è di due nomi, della quale si tratta nella 37 di questo. & la B C risponde al minore, & la A C è la portione rimanente del maggior nome, cioe trattone da esso il nome minore.

THEOREMA LVII. PROPOSITIONE LXXV.

Se da vna linea media si tragga vna media in potenza solamente commensurabile à tutta, che con tutta contenga vn spatio rationale; la rimanente sarà irrationale, & nominisi apotome prima della media, ò vero residuo medial primo.

Dalla media A B traggasi la media B C in potenza solamente cõmensurabile alla A B, & che cõ essa faccia vn spatio rationale, cioè quello, che è contenuto dalle A B B C. Dico la rimanente A C essere irrationale, & chiamisi apotome prima della media. percioche essendo le A B B C medie, saranno i quadrati delle A B B C medij. ma è rationale quello, che due volte è contenuto dalle A B B C. adunque i quadrati delle A B B C sono incommensurabili à quello,



A che due volte è contenuto dalle A B B C. & però al rimanente, cioè al quadrato della A C è incommensurabile quello, che è contenuto due volte dalle A B B C.

C percioche se tutta la grandezza sia incommensurabile ad vna delle componenti,

D & le grandezze poste da principio saranno incommensurabili. la A C dunque è irrationale & chiamasi apotome prima della media.

IL COMMANDINO.

A Ma è rationale quello che due volte è contenuto dalle A B B C] *percioche si pone rationale quello, che vna volta dalle A B B C è contenuto.*

B Et però al rimanente cioè al quadrato della A C è incommensurabile. quello, che è contenuto due volte dalle A B B C] *concioſiacosa che per la 7 del 2. ò i quadrati delle A B B C siano vguali à quello che, due volte è contenuto dalle A B B C insieme col quadrato, che si fa dalla A C.*

C Percioche se tutta la grandezza sia incommensurabile ad vna delle componenti] *per la 17 di questo.*

D La A C dunque è irrationale] *perche essendo rationale quello, che due volte è contenuto dalle A B B C, & incommensurabile al quadrato della A C, sarà il quadrato della A C irrationale: & però la linea retta A C è irrationale per la 11 diffinitione.*

Sia la linea retta A B R R 54, la B C R R 24. sarà la A C R R 54, men R R 24. & tutta la linea A B risponde al maggior nome di quella che è la prima delle due medie, della quale si ragiona nella 38 di questo, & la B C risponde al minor nome. è dunque A C la rimanente portione del maggior nome, trattone da essa il minore.

THEOREMA LVIII. PROPOSITIONE LXXVI.

Se da vna linea media si tragga vna media in potenza solamente commensurabile à tutta, che con tutta contenga vn spa-

tio medio, la rimanente sarà irrationale & chiamisi apotome seconda della media, ò vero residuo medial secondo.

Dalla media A B traggasi la media B C in potenza solamente commensurabile à tutta la A B, & che con essa contẽga vn spatio medio, cioè quello, che è contenuto dalle A B B C. Dico la rimanente A C essere irrationale & chiamisi apotome secõda della media. propongasi la rationale D L, & alla D L adattisi il parallelogrammo D E vguale à quadrati delle A B B C, che faccia la larghezza D G: & alla medesima A L adattisi il parallelogrammo D H, vguale à quello, che due volte è cõtenuto dalle A B B C, che faccia la larghezza D F. il rimanente dunque F E è vguale al quadrato della A C. & perche sono medij i quadrati delle A B B C, sarà anchor il parallelogrammo D E medio. & è adattato alla rationale D L, che fa la larghezza D G. onde la D G è rationale, & in lunghezza incommensurabile alla D L. oltre à cio perche quello, che è contenuto dalle A B B C è medio, sarà etiandio medio quello, che due volte e contenuto dalle A B B C. & e vguale al parallelogrammo D H. adunque anchor D H e medio, & e adattato alla rationale D L, che fa la larghezza D F. onde la D F e rationale, & in lunghezza incommensurabile alla D L. & perche le A B B C sono in potenza solamente commensurabili; sarà la A B in lunghezza incõmensurabile alla B C. il quadrato dunque della A B e incommensurabile à quello che e contenuto dalle A B B C. ma al quadrato della A B sono commensurabili i quadrati delle A B B C, & à quello, che e contenuto dalle A B B C e commensurabile quello, che e contenuto due uolte dalle A B B C. adunque i quadrati delle A B B C sono incommensurabili à quello, che e contenuto due uolte dalle A B B C. & il parallelogrammo D E e vguale à quadrati delle A B B C, & il parallelogrammo D H e vguale à quello, che e contenuto due volte dalle A B B C. il perche D E e incommensurabile à D H. ma come D E à D H, cosi la linea retta G D alla D F. la G D dunque e in lunghezza incommensurabile alla D F. & sono amendue rationali. onde le G D D F sono rationali in potenza commensurabili. & però la F G e apotome, & la D L e rationale. ma il rettangolo, che e cõtenuto dalla rationale & dalla irrationale e irrationale. & quella che lo puo e irrationale. ma la linea retta A C può il parallelogrammo F E. adunque la A C e irrationale, & chiamisi apotome seconda della media.



A
B
C
D
E
cor. 24. di questo.
F
1. del sesto.
10. di questo.
G
H
K

IL COMMANDINO.

A Il rimanẽte dunque FE e vguale al quadrato della A C] *per la 7 del secondo libro.*

B Onde la D G e irrarionale & in lunghezza incommensurabile alla D L] *per la 23 di questo.*

C Sarà etiandio medio quello, che due volte e contenuto dalle A B B C] *per lo corollario della 24 di questo.*

D Il quadrato dunque della A B e incommensurabile à quello, che dalle A B B C e contenuto] *percioche come la A B alla B C, cosi e il quadrato della A B al rettangolo A B C. & essendo la A B in lunghezza incommensurabile alla B C, sarà anchor il quadrato della A B incommensurabile à quello che è contenuto dalle A B B C, per la 10 di questo.*

E Ma al quadrato della A B son incommensurabile i quadrati delle A B B C] *perche le linee rette A B B C si pongono in potenza commensurabili.*

F Adunque i quadrati delle A B B C sono incommensurabili à quello che e contenuto due volte dalle A B B C] *per le cose giai dimostrate alla 17 di questo.*

G Et però la F G e apotome] *per la 74 di questo;*

H Ma il rettangolo, che è contenuto dalla rationale & dalla irrationale è irrationale] *per lo ſcholio poſto alla 39 di queſto. onde ſeguita il parallelogrammo F E eſſere irrationale.*

K Adunque la A C è irrationale] *per la 11 diffinitione.*

Sia la A B R R 18, la B C R R 8. ſarà la A C R R 18 men R R 8: & riſponde la A B al maggior nome di quella, che è la ſeconda di due medie, & la B C riſponde al minore, della quale nella 39 di queſto ſi ragiona.

THEOREMA LIX. PROPOSITIONE LXXVII.

Se da vna linea retta ſi tragga vna retta in potenza incommenſurabile à tutta, che con tutta faccia il compoſto delli loro quadrati rationale; & quello, che ſi contiene da eſſe medio, la rimanente ſarà irrationale, & dicaſi linea minore.

Dalla linea retta A B traggaſi la retta B C in potenza incommenſurabile à tutta, & che faccia con tutta la A B il compoſto da quadrati delle A B B C rationale, & quello, che due uolte è contenuto dalle A B B C, medio. Dico la rimanente A C eſſere irrationale, che ſi chiama minore: percioche eſſendo il compoſto da quadrati delle A B B C rationale, & quello, che due volte è contenuto dalle A B B C medio, ſaranno i quadrati delle A B B C incommenſurabili à quello, che due volte è contenuto dalle A B B C. adunque per la conuerſione della proportione i quadrati delle A B B C ſono incommenſurabili al quadrato della A C. ma i quadrati delle A B B C ſono rationali. onde il quadrato della A C è irrationale; & però la linea retta A C è irrationale, & chiamiſi minore.



A
B
C

IL COMMANDINO.

A Adunque per la conuerſione della proportione i quadrati delle A B B C ſono incommenſurabili al quadrato della A C] *per le coſe dimoſtrate alla 17 di queſto.*

B Onde il quadrato della A C è irrationale] *per la 10 diffinitione.*

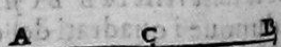
C Et però la linea retta A C è irrationale] *per la 11 diffinitione.*

Sia la A B R V 32 più R 704, la B C R V 32 men R 704. ſarà la A C R V 32 più R 704 men R V 32 men R 704. & la A B riſponde al maggior nome di quella, che è detta maggiore, & la B C riſponde al minor nome della medeſima, della quale ſi tratta nella 40 di queſto.

THEOREMA LX. PROPOSITIONE LXXVIII.

Se da vna linea retta ſi tragga vna retta in potenza incommenſurabile à tutta, che con tutta faccia il compoſto dalli loro quadrati medio, & quello, che ſi contiene due volte da eſſe rationale, la rimanente ſarà irrationale, & chiamiſi quella, che col rationale fa il tutto medio, ò uero che giunta col rationale fa il tutto mediale.

Dalla linea retta A B traggaſi la retta B C incommenſurabile in potenza à tutta la A B, & che faccia il compoſto da quadrati delle A B B C medio. & quello, che è contenuto due volte dal-



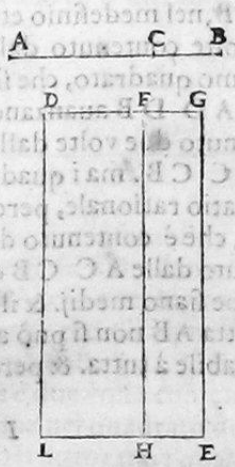
le A B B C rationale. Dico la rimanente A C essere irrationale, & chiamisi quella, che col rationale fa il tutto medio. percioche essendo il composto da quadrati delle A B B C medio, & quello, che è due volte contenuto dalle A B B C rationale, saranno i quadrati delle A B B C incommensurabili à quello, che è contenuto due volte dalle A B B C. adunque il rimanente quadrato della A C è incommensurabile à quello, che due volte è contenuto dalle A B B C. ma quello, che è due volte contenuto dalle A B B C è rationale. il quadrato dunque della A C è irrationale, & però la linea retta A C irrationale. & chiamisi quella, che col rationale fa il tutto medio. 17. di questo.

IL COMMANDINO.

Sia la A B R V R 13 $\frac{1}{2}$ più R 4 $\frac{1}{2}$, & la B C R V 13 $\frac{1}{2}$ men R 4 $\frac{1}{2}$. sarà la A C R V R 13 $\frac{1}{2}$ più R 4 $\frac{1}{2}$ men R V R 13 $\frac{1}{2}$ men R 4 $\frac{1}{2}$, & la A B risponde al maggiore nome di quella, che si chiama potente lo spatio rationale & medio, & la B C risponde al minore, della quale nella 41 di questo si ragiona.

THEOREMA LXI. PROPOSITIONE LXXIX.

Se da vna linea retta si tragga vna retta in potenza incommensurabile à tutta, & che con tutta faccia il composto dalli loro quadrati medio, & quello, che si contiene due volte da esse, medie, & incommensurabile al cõposto delli loro quadrati; la rimanente sarà irrationale, & chiamisi quella che col medio fa il tutto medio, ò vero, che giunta col mediale fa il tutto mediale.



Dalla linea retta A B traggasi la linea retta B C in potenza incommensurabile à tutta la A B, che faccia il composto da quadrati delle A B B C medio, & quello, che è contenuto due volte dalle A B B C medio, & incommensurabile al composto dalli loro quadrati. Dico la rimanente A C essere irrationale & chiamisi quella, che col medio fa il tutto medio. propongasi la rationale D L, & alla D L adattisi il parallelogrammo D E vguale à quadrati delle A B B C, che faccia la larghezza D G. & traggasi D H vguale à quello, che due volte è contenuto dalle A B B C, che faccia la larghezza D F. adunque il rimanente F E è vguale al quadrato della A C. & però la linea retta A C può esso F E. perche dunque il composto da quadrati delle A B B C è medio, & vguale al parallelogrammo D E, sarà D E medio, & è adattato alla rationale D L che fa la larghezza D G. onde la D G è rationale, & in lunghezza incommensurabile alla D L. oltre à ciò perche quello, che due volte è contenuto dalle A B B C è medio, & vguale al parallelogrammo D H, sarà D H medio. & è adattato alla rationale D L, che fa la larghezza D F. adunque la D F è rationale, & in lunghezza incõmensurabile alla D L. & perche i quadrati delle A B B C sono incommensurabili à quello, che è due volte contenuto dalle A B B C, anchor il parallelogrammo D E è incommensurabile a D H. ma come D E à D H, così è la linea retta D G alla D F. è dunque incommensurabile la D G alla D F. & amendue sono rationali. onde le G D 23. di questo. 23. di questo. 1. del sesto.

A D F ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabili. la F G dunque è apo-
B tome. & la F H è rationale. ma il rettangolo, che è contenuto dalla rationale &
C dalla apotoma è irrationale. & quella, che lo può è irrationale. & la A C può il parallelogrammo F E. adunque la A C è irrationale. & chiamiſi quella, che col medio fa il tutto medio.

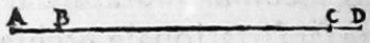
IL COMMANDINO.

A La F G dunque è apotome] *per la 74 di queſto.*
B Ma il rettangolo, che è contenuto dalla rationale & dalla apotome è irrationale] *percioche ſi dimoſtra nel ſcholio poſto alla 39 di queſto il rettangolo, che è contenuto dalla rationale & dalla irrationale eſſere rationale.*
C Et quella, che lo può è irrationale] *per la 11. diffinitione.*
Sia la AB R V R 13 $\frac{1}{2}$ piu 3, la BC R V R 13 $\frac{1}{2}$ men 3. ſarà la AC R V R 13 $\frac{1}{2}$ piu 3 meno R V R 13 $\frac{1}{2}$ men 3, & la AB riſponde al maggiore nome di quella, che ſi chiama potente due medij, & la B C riſponde al minore. della quale ſi tratta nella 42 di queſto.

THEOREMA LXII. PROPOSITIONE LXXX.

All'apotome vna ſola linea rationale ſi aggiunge, in potenza ſolamente commenſurabile à tutta.

Sia l'apotome A B, & ad eſſa ſi aggiun
A ga la B C. adunque le A C C B ſono ra-
tionali in potenza ſolamente commenſu-
rabili. Dico alla A B non aggiungerſi al-
tra rationale, che in potenza ſolamente



ſia commenſurabile à tutta. aggiungaſi (ſe eſſer può) la B D. adunque le AD DB ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabili: & perche in qual eccesſo i quadrati delle A D D B auanzano quello, che due volte è contenuto dalle AD D B, nel medeſimo etiandio i quadrati delle A C C B auanzano quello, che
B è due uolte contenuto dalle A C C B, concioſiacoſa che amendue auanzino nel
C medeſimo quadrato, che ſi fa dalla A B. & permutandoſi in qual eccesſo i quadrati delle A D D B auanzano i quadrati delle A C C B, nel medeſimo quello, che è contenuto due volte dalle AD D B auanzerà quello, che due volte è contenuto
D dalle A C C B. ma i quadrati delle A D D B, auanzano i quadrati delle AC CB di un ſpatio rationale, percioche amendue le linee rette ſono rationali. adunque quello, che è contenuto due volte dalle A D D B auanza quello, che due volte e
E contenuto dalle A C C B di un rationale. il che e impoſsibile, concioſiacoſa, che
F amendue ſiano medij. & il medio non auanza il medio di vn rationale. onde alla linea retta A B non ſi può aggiungere altra rationale in potenza ſolamente commenſurabile à tutta. & però vna ſola ſi aggiunge.

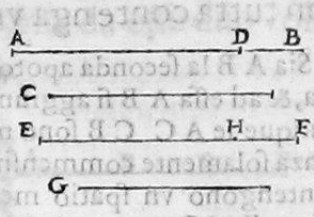
IL COMMANDINO.

A Adunque le A C C B ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabili] *per la 74 di queſto.*
B Concioſiacoſa che amendue auanzino nel medeſimo quadrato, che ſi fa dalla A B] *percioche i quadrati delle A D D B ſono vguali à quello che è due volte contenuto dalle A D D B inſieme col quadrato della A B, per la 7 del ſecondo, & per la medeſima ragione i quadrati delle A C C B ſono vguali à quello, che è due volte contenuto dalle A C C B inſieme col quadrato della A B.*
C Et permutandoſi in qual eccesſo i quadrati delle A D D B auanzano i quadrati delle A C C B] *queſto dimoſtreremo nel ſeguente lemma.*

LEMMA.

Siano quattro grandezze A B C EF G. & la A B auanzi la C nel medesimo eccesso, nel quale la E F auanza la G. Dico anchor permutandosi la A B nel medesimo eccesso auanzare la E F, ò uero essere auanzata da lei, nel quale la C auanza la G ò vero da lei è auanzata.

Sia D B l'eccesso, nel quale A B auanza la C, & H F l'eccesso nel quale E F auanza la G. saranno D B H F vguali, & parimente vguali fra loro le A D C; & le E H G. adunque la A D auanza la E H, ò da essa è auanzata nel medesimo eccesso, nel quale la C auanza la G. & aggiunte le vguali D B H F, la A B auanzera la E F, ò da essa sarà auanzata nel medesimo eccesso, nel quale la A D auanza la E H, cioè nel quale la C auanza la G. & quello è, che bisognaua dimostrare.



Ma i quadrati delle A D D B auanzano i quadrati delle A C C B di vn spatio rationale] *percioche il rationale non auanza il rationale se non di vn rationale, il che noi habbiamo dimostrato nella 27 di questo.* D

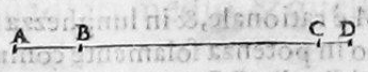
Conciosiacosa che amendue siano medij] *perche il rettangolo contenuto dalle rationali in potenza solamente commensurabili è irrationale, che è chiamato medio per la 22 di questo. è dunque medio quello che è contenuto dalle A D D B, & però è medio quello che è contenuto due volte dalle A D D B, come doppio di esso, per lo corollario della 24 di questo. & per la medesima ragione è medio quello che è due volte contenuto dalle A C C B.* E

Et il medio non auanza il medio di vn rationale] *per la 27 di questo.* F

THEOREMA LXIII. PROPOSITIONE LXXXI.

Alla apotome prima della media vna sola linea media si aggiunge, in potenza solamente commensurabile à tutta, & che con tutta contenga vn spatio rationale.

Sia la A B la prima apotome della media, & la B C si aggiunga alla A B. adunque le A C C B sono medie in potenza solamente commensurabili, che contengono vn spatio rationale. Dico alla A B non aggiungersi altra media, che sia in potenza solamente commensurabile à tutta, & che con tutta contenga il medio, aggiungasi (se esser può) la B D. adunque le A D D B sono medie in potenza solamente commensurabili, che contengono vn spatio rationale contenuto dalle A D D B. & perche in qual eccesso i quadrati delle A D D B auanzano quello, che è due volte contenuto dalle A D D B, nel medesimo i quadrati delle A C C B auanzano quello che è due volte contenuto dalle A C C B. cõciosiacosa che auanzino nel medesimo, cioè nel quadrato della A B. & permutandosi in qual eccesso i quadrati delle A D D B auanzano i quadrati delle A C C B, nel medesimo il rettangolo, che è due volte contenuto dalle A D D B auanza quello, che è due volte contenuto dalle A C C B. ma quello che è due volte contenuto dalle A D D B auanza quello, che è contenuto due volte dalle A C C B di vn rationale, percioche sono amendue rationali. adunque anchor i quadrati delle A D D B auanzano i quadrati delle A C C B di vn rationale. il che non può essere, percioche sono amendue medij, & il medio non auanza il medio di vn rationale. onde alla prima apotome della media si aggiunge una sola linea media in potenza solamente commensurabile à tutta, & che con tutta contenga vn spatio rationale.



75. di questo.

7. del secondo

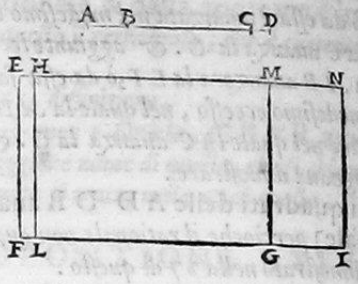
per l'antecedente lemma. per le cose dimostrate alla 17. di questo.

27. di questo.

THEOREMA LXIIII. PROPOSITIONE LXXXII.

Alla ſeconda apotome della media vna ſola linea media ſi aggiunge in potenza ſolamente commenſurabile à tutta & che con tutta contenga vn ſpatio medio.

Sia A B la ſeconda apotome della media, & ad eſſa A B ſi aggiunga la B C. adunque le A C C B ſono medie in potenza ſolamente commenſurabili, & che contengono vn ſpatio medio A C B. Dico alla A B non aggiungerſi altra media, che ſia in potenza ſolamente commenſurabile à tutta, & che con tutta cõtenga vn ſpatio medio. aggiungaſi la B D ſe eſſer può. onde le A D D B ſono medie in potenza ſolamente commenſurabili, che contengono lo ſpatio medio A D B. & propongaſi la rationale E F. & alla E F adattiſi il parallelogrammo E G vguale à quadrati delle A C C B, che faccia la larghezza E M: & tragga ſi il parallelogrammo H G, vguale à quello, che è due volte contenuto dalle A C C B, che faccia la larghezza H M. il rimanente dunque E L è vguale al quadrato che ſi fa dalla A B. onde A B può eſſo E L. poi alla E F adattiſi il parallelogrammo E L, vguale à quadrati delle A D D B, che faccia la larghezza E N. & è E L etiandio vguale al quadrato della A B. il rimanente dunque H L è vguale à quello, che è contenuto due uolte dalle A D D B. & perche le A C C B ſono medie, ſaranno i quadrati loro medij. & ſono vguali al parallelogrammo E G. onde E G è medio, & è adattato alla rationale E F, che fa la larghezza E M. adunque la E M è rationale, & in lunghezza incommenſurabile alla E F. oltre à cio perche il rettangolo contenuto dalle A C C B è medio; & quello che due volte è contenuto dalle A C C B ſarà medio, & è vguale al parallelogrammo H G. adunque anchor H G è medio. & è adattato alla rationale E F, che fa la larghezza H M. onde la H M è rationale, & in lunghezza incommenſurabile alla E F. & perche le A C C B ſono in potenza ſolamente commenſurabili, ſarà la A C in lunghezza incommenſurabile alla C B. & come la A C alla C B, coſi è il quadrato della A C à quello, che è contenuto dalle A C C B. & però il quadrato della A C è incommenſurabile à quello, che è contenuto dalle A C C B. ma al quadrato della A C ſono commenſurabili i quadrati delle A C C B, & al rettangolo contenuto dalle A C C B è commenſurabile quello, che è due volte connetuto dalle A C C B. adunque i quadrati delle A C C B ſono incommenſurabili à quello, che due volte è contenuto dalle A C C B. & il parallelogrammo E G è vguale à quadrati delle A C C B, & à quello, che è due volte contenuto dalle A C C B è vguale il parallelogrammo H G. adunque E G è incommenſurabile à G H. ma come E G à G H, coſi la linea retta E M alla retta M H. onde la E M è in lunghezza incommenſurabile alla M H, & amendue ſono rationali. adunque le E M M H ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabili. & però la E H è apotome, & ad eſſa ſi aggiunge la H M. ſimilmente dimoſtreremo aggiungerſi ad eſſa la H N. adunque alla apotome ſi aggiungono più linee rette in potenza ſolamente commenſurabili à tutta. il che non può eſſere. onde alla ſeconda apotome della media vna ſola linea media ſi aggiunge in potenza ſolamente commenſurabile à tutta, & che con tutta contenga vn ſpatio medio.



76. di queſto.

23. di queſto.

23. di queſto.

Iem della 23 di queſto.

per le coſe dimoſtrate alla 14. di queſto.

1. del ſeſto. 10 di queſto.

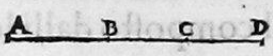
74 di queſto.

80 di queſto.

THEOREMA LXV. PROPOSITIONE LXXXIII.

Alla linea minore vna ſola linea retta ſi aggiunge in potenza incommenſurabile à tutta, & che con tutta faccia il compoſto dalli loro quadrati rationale, & quello, che da eſſe due volte ſi contiene medio.

Sia la linea minore A B, & ad eſſa ſi aggiunga la B C. adunque le A C C B ſono in potenza incommenſurabili, che fanno il compoſto dalli loro quadrati rationale & quello, che due volte è contenuto da eſſe, medio. Dico alla A B non aggiungerſi altra linea retta, che faccia le medeſime coſe. aggiungaſi ſe eſſer può, la B D. adunque le A D D B ſono in potenza incommenſurabili, che fanno il compoſto dalli quadrati loro rationale, & quello, che due volte è da eſſe contenuto medio. & perche in qual eccesſo i quadrati delle A D D B auanzano i quadrati delle A C C B, nel medeſimo, il rettangolo, che due volte è contenuto dalle A D D B auanza quello, che è contenuto due uolte dalle A C C B. & i quadrati delle A D D B auanzano i quadrati delle A C C B di vn rationale, percioche amendue ſono rationali; etiandio il rettangolo, che è due volte contenuto dalle A D D B auanzera di vn rationale, quello che due volte è contenuto dalle A C C B. il che non puo eſſere, concioſiacoſa che amendue ſiano medij. adunque alla linea minore vna ſola linea ſi aggiunge in potenza incommenſurabile à tutta, & che con tutta fa il compoſto delli loro quadrati rationali & quello, che da eſſe due volte ſi contiene medio.



77. di queſto.

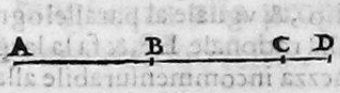
lemma della 80. di queſto.

89. di queſto.

THEOEMA LXVI. PROPOSITIONE LXXXIIII.

A quella linea che col rationale fa il tutto medio vna ſola linea ſi aggiunge in potenza incommenſurabile à tutta, & che con tutta faccia il compoſto delli lor quadrati medio, & quello, che due volte da eſſe è contenuto, rationale.

Sia la A B quella, che col rationale fa il tutto medio, & ſi aggiunga ad eſſa la B C. adunque le A C C B ſono in potenza incommenſurabili, che fanno il compoſto dalli lor quadrati, medio, & quello che due volte da eſſe è contenuto, rationale. Dico ad eſſa A B non aggiungerſi altra linea, che faccia le medeſime coſe. percioche, ſe eſſer può, aggiungaſi la B D. adunque le A D D B ſono in potenza incommenſurabili, che fanno il compoſto delli lor quadrati medio, & quello, che due volte da eſſe è contenuto rationale. perche dunque in qual eccesſo i quadrati delle A D D B auanzano i quadrati delle A C C B, nel medeſimo il rettangolo, che è due volte contenuto dalle A D D B auanza quello, che due volte è contenuto dalle A C C B. & quello che due volte è contenuto dalle A D D B auanza quello, che è contenuto due volte dalle A C C B di vn rationale, concioſiacoſa, che amendue ſiano rationali, etiandio i quadrati delle A D D B auanzeranno i quadrati delle A C C B di vn rationale. il che non può eſſere, percioche amendue ſono medij. adunque alla A B non ſi aggiunge altra linea in potenza incommenſurabile à tutta, & che con tutta faccia il compoſto dalli lor quadrati



78. di queſto.

medio,

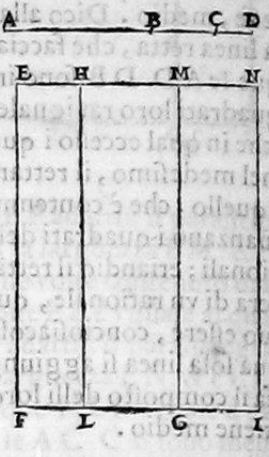
medio, & quello che due volte da esse è contenuto rationale. onde à quella, che col rationale fa il tutto medio vna sol linea retta si aggiungerà.

THEOREMA LXVII. PROPOSITIONE LXXXV.

A quella linea, che col medio fa il tutto medio, vna sola linea si aggiunge in potenza incommensurabile à tutta, & che con tutta faccia il composto dalli lor quadrati medio, & quello, che due volte da esse è contenuto, medio, & incommensurabile al composto dalli lor quadrati.

79. di questo.

Sia la A B quella, che col medio fa il tutto medio: & alla A B si aggiunga la B C. adunque le A C C B sono in potenza incommensurabili, che fanno il composto dalli lor quadrati medio, & quello che due volte è contenuto da esse medio. & anchor incommensurabile al composto dalli loro quadrati. Dico alla A B non aggiungersi altra linea in potenza incommensurabile à tutta, & che con tutta faccia quelle cose che si sono proposte. percioche, se esser può, aggiungasi la B D talmente, che le A D D B in potenza siano incommensurabili, & facciano il composto dalli lor quadrati medio, & quello che da esse è contenuto, medio, & incommensurabile al composto dalli quadrati loro. & propongasi la rationale F E: & ad essa E F adattisi il parallelogrammo E G, vguale à quadrati delle A C C B, che faccia la larghezza E M: & traggasi il parallelogrammo H G vguale à quello, che due volte è contenuto dalle A C C B, che faccia la larghezza HM. il rimanente dunque quadrato della A B è vguale al parallelogrammo E L. onde A B può esso E L. poi alla E F adattisi il parallelogrammo E I vguale à quadrati delle A D D B, che faccia la larghezza E N. & è anchor il quadrato della A B vguale al parallelogrammo E L. adunque il rimanente, che due volte si contiene dalle A D D B è vguale ad H I. & perche il composto da quadrati delle A C C B è medio, & vguale al parallelogrammo E G, sarà anchor E G medio, che è adattato alla rationale E F, & fa la larghezza E M. adunque la E M è rationale, & in lunghezza incommensurabile alla E F. oltre à cio perche quello, che è due volte contenuto dalle A C C B è medio, & vguale ad H G, sarà anchor H G medio. & è adattato alla rationale E F, che fa la larghezza H M. la H M dunque è rationale & alla E F in lunghezza incommensurabile. & essendo i quadrati delle A C C B incommensurabili à quello che è due volte contenuto dalle A C C B, sarà etiandio E G incommensurabile à G H. & però la linea retta E M è in lunghezza incommensurabile alla H M. & sono amendue rationali. perche dunque le E M M H sono rationali in potenza solamente commensurabili, la linea retta E H è apotome: & ad essa si aggiunge la H M. dimostreremo similmẽte la E H essere apotome; & ad essa essere aggiunta la H N. adunque alla apotome si aggiungono piu linee rationali in potenza solamente commensurabili à tutta. il che fu dimostrato impossibile. & però alla A B non si aggiunge altra linea retta ma vna sola si aggiunge incommensurabile à tutta, & che con tutta fa il composto dalli lor quadrati medio, & quello che da esse si contiene medio, & incommensurabile al composto dalli lor quadrati.



23. di questo.

74 di questo.

80 di questo.

DIFFINITIONI TERZE

I.

Propoſta la rationale & l'apotome ſe tutta poſſa tanto più, che la linea aggiunta, quanto è il quadrato d'vna linea retta commenſurabile ad eſſa in lunghezza, & ſia tutta commenſurabile in lunghezza alla propoſta rationale, chiamiſi apotome prima, ò uero reſiduo primo.

II.

Ma ſe l'aggiunta ſia commenſuraaile in lunghezza alla propoſta rationale, & tutta poſſa tanto più, che l'aggiunta, quanto è il quadrato d'una linea retta commenſurabile ad eſſa in lunghezza; dicaſi apotome ſeconda, ò reſiduo ſecondo.

III.

Se niuna di eſſe ſia commenſurabile in lunghezza alla rationale propoſta, & tutta poſſa tanto più, che l'aggiunta, quanto è il quadrato di vna linea retta, commenſurabile ad eſſa in lunghezza; ſi chiamerà apotome terza, ò reſiduo terzo.

IIII.

Oltre à cio ſe tutta poſſa tanto più, che l'aggiunta, quanto è il quadrato di vna linea retta, incommenſurabile ad eſſa in lunghezza, & tutta ſia in lunghezza commenſurabile alla rationale propoſta, ſi chiamerà apotome quarta, ò reſiduo quarto.

V.

Et ſe l'aggiunta ſia commenſurabile in lunghezza alla propoſta rationale, ſi dirà apotome quinta, ò vero reſiduo quinto.

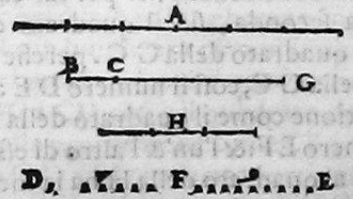
VI.

Ma ſe niuna ſia commenſurabile in lunghezza alla propoſta rationale, ſi chiamerà apotome ſeſta, ò vero reſiduo ſeſto.

PROBLEMA XVIII. PROPOSITIONE LXXXVI.

Trouare l'apotome prima.

Propongaſi la rationale A & alla A ſia in lunghezza commenſurabile la B G. adunque anchor la B G è rationale. & propongaſi due numeri quadrati D E EF, l'eccesſo de quali D F non ſia quadrato. adunque E D à DF non haurà la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato. & facciaſi come E D à D F, coſi il quadrato della B G al quadrato della G C. è dunque commenſurabile il quadrato della B G al quadrato della G C. & il quadrato della B G è rationale. adunque anchor il quadrato della G C è rationale: & però la



6 diff. Corol della 1. lemma alla 30 di queſto.

linea

linea retta G C è rationale. & perche E D à D F non ha la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato, ne anche il quadrato della B G al quadrato della G C hauera la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato. la B G dunque è in lunghezza incommensurabile alla G C. & amendue sono rationali. onde le B G G C sono rationali in potenza solamente commensurabili. & pero la B C è apotome. Dico essere anchor la prima. sia il quadrato della H l'eccesso, nel quale il quadrato della B G può più, che il quadrato della G C. & perche è come E D à D F così il quadrato della B G al quadrato della G C, sarà per la conuersione della proportione come D E à E F, così il quadrato della B G al quadrato della H. ma D E ad E F ha la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato, percioche sono amendue quadrati. adunque etiandio il quadrato della B G al quadrato della H hauera la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato. la B G dunque è in lunghezza commensurabile alla H. & la B G può più, che la G C quanto è il quadrato della H. & perciò la B G potra più che la G C quanto è il quadrato di vna linea retta in lunghezza ad essa commensurabile. & tutta la B G è in lunghezza commensurabile alla proposta rationale A. la B C dunque è la prima apotome. onde si è trouata la prima apotome. il che bisognaua fare.

9. di questo.

74 di questo.

9. di questo.

3. diff. delle 3.

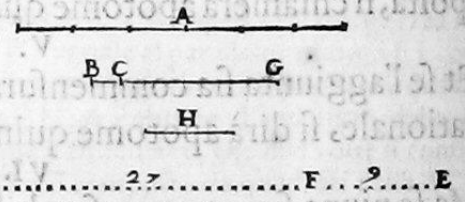
IL COMMANDINO.

Sia la A 6, la B G 4: & il numero D E sia 16 & E F 9, sarà D F 7. se dunque si faccia come 16 à 7, così il quadrato della B G cioè 16 al quadrato della G C. sarà il quadrato della G C 7, & la linea retta G C R 7. adunque la B C è 4 men R 7, che è la prima apotome.

PROBLEMA XIX. PROPOSITIONE LXXXVII.

Trouare l'apotome seconda.

Propongasi la rationale A, & alla A sia in lunghezza commensurabile C G. adunque la C G è rationale & proponganſi due numeri quadrati D E E F, l'eccesso de quali D F non sia quadrato. & facciasi come F D à D E, così il quadrato della C G al quadrato della G B. è dunque il quadrato della C G commensurabile al quadrato della G B. ma il quadrato della C G è rationale. adunque il quadrato anchor della G B è rationale: & però la G B è rationale. & perche il quadrato della C G al quadrato della G B non ha la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato, sarà la C G alla G B in lunghezza incommensurabile. & amendue sono rationali. adunque le C G G B sono rationali in potenza solamente commensurabili. & per tal cagione la B C è apotome. Dico essere anchora la seconda, sia il quadrato della H, nel quale il quadrato della B G auanza il quadrato della G C. perche dunque come il quadrato della B G al quadrato della G C, così il numero D E al numero D F, sarà per la conuersione della proportione come il quadrato della B G al quadrato della H, così il numero D E al numero E F: & l'un'& l'altro di essi D E E F è quadrato. onde il quadrato della B G al quadrato della H ha la medesima proportione, che il numero quadrato al numero quadrato. & però la B G è in lunghezza commensurabile alla H, & la B G può più, che la G C, quadro è il quadrato della H. adunque la B G può più, che la G C quanto è il quadrato di vna linea retta in lunghezza commensurabille ad essa. & la C G è aggiunta, che alla proposta rationale A in lunghez-



diff. 6. Corol. del 1. lemma alla 30. di questo.

9 di questo.

74. di questo.

9. di questo.

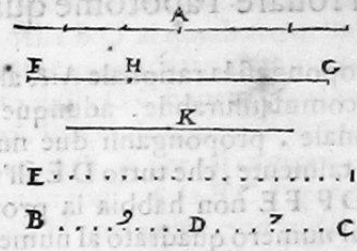
za è commensurabile. adunque B C è la seconda apotome. si è dunque trouata l'apotome seconda. il che bisognaua fare.

IL COMMANDINO.

Sia la A 6, la C G 3, & il numero D E sia 36, & E F 9. sarà D F 27. onde facciasi come 27 à 36, così 9 ad vn'altro. sarà à 12. adunque la GB è Rx 12, & la BC Rx 11 meno 3, che è la seconda apotome.

PROBLEMA XX. PROPOSITIONE LXXXVIII.

Trouare l'apotome terza.



Propongasi la rationale A, & propongansi tre numeri E B C C D, che non habbiano fra loro la proportione, c'ha il numero quadrato al numero quadrato, & B C à B D habbia la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato. & facciasi come E à B C, così il quadrato della A al quadrato della F G. ma come B C à C D, così il quadrato della F G al quadrato della G H. il quadrato dunque della A è commensurabile al quadrato della F G. & il quadrato della A è rationale. onde etiandio il quadrato della F G è rationale. & però la linea retta F G è rationale. & perche E à B C non ha la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato, ne anche il quadrato della A al quadrato della F G haverà la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato. adunque la A è in lunghezza incõmensurabile alla F G. oltre à ciò perche come B C à C D, così è il quadrato della F G al quadrato della G H, sarà il quadrato della F G commensurabile al quadrato della G H. & il quadrato della F G è rationale. adunque anchor il quadrato della G H è rationale. & però la linea retta G H e rationale, & nõ hauẽdo B C à C D la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato, ne il quadrato della F G al quadrato della G H haverà la proportione, c'ha il numero quadrato al numero quadrato. la F G dunque è in lunghezza incõmensurabile alla G H: & amendue sono rationali. adunque le F G G H sono rationali in potenza solamente commensurabili. & per tal cagione la F H è apotome. Dico anchora essere la terza. per cioche essendo come E a B C, così il quadrato della A al quadrato della F G, & come B C à C D, così il quadrato della F G al quadrato della G H, sarà per l'vgual proportione come E à C D, così il quadrato della A al quadrato della G H. ma E à C D non ha la proportione, c'ha il numero quadrato al numero quadrato. adunque ne il quadrato della A al quadrato della G H haverà la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato. & però la A in lunghezza è incõmensurabile alla G H. niuna dũque di esse F G G H è in lunghezza cõmensurabile alla proposta rationale A. sia il quadrato della K, nel quale può più il quadrato della F G, che il quadrato della G H. & perche come B C à C D, così è il quadrato della F G al quadrato della G H, sarà per la cõuersione della proportione come C B à B D, così il quadrato della F G al quadrato della K. ma C D à B D ha la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato. adũq, etiãdio il quadrato della F G al quadrato della K haverà la proportione, c'ha il numero quadrato al numero quadrato. onde la F G in lũghezza è cõmẽsurabile alla K. & la F G può più, che la G H, quãto è il quadrato della K. la F G dunque può tanto più, che la G H, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza commensurabile ad essa. & niuna delle F G

9. di questo.
6. di questo.
9. di questo.
74. di questo.
9. di questo.
9. di questo.

3. diff. delle 3.
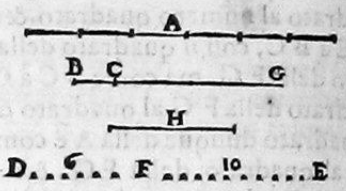
G H è in lunghezza commensurabile alla proposta rationale A. onde la F H è apotome terza. si è trouata dunque l'apotome terza F H. il che bisognaua fare.

IL COMMANDINO.

Sia la A 6, il numero E 18, B C 16, & C D 7. sarà B D 9. facciasi come 18 à 16, così 36 ad un'altro. sarà à 32. adunque la F G è ℞ 32. poi facciasi come 16 à 7, così 32 ad vn'altro. sarà à 14. onde la G H è ℞ 14 & la F H ℞ 32 men ℞ 14; che è l'apotome terza.

PROBLEMA XXI. PROPOSITIONE LXXXIX.

Trouare l'apotome quarta.



Propongasi la rationale A: & alla A sia la B G commensurabile. adunque la B G è rationale. proponganſi due numeri D F F E, talmente, che tutto D E all'vno & l'altro D F F E non habbia la proportione, c'ha il numero quadrato al numero quadrato: & facciasi come D E ad E F, così il quadrato della B G al quadrato della G C. il quadrato dunque della B G è commensurabile al quadrato della G C. & il quadrato della B G è rationale. onde è rationale etiandio il quadrato della G C. & però la linea retta G C è rationale. & perche D E ad E F non ha la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato, ne il quadrato della B G al quadrato della G C haverà la proportione, c'ha il numero quadrato al numero quadrato. la B G dunque è in lunghezza incommensurabile alla G C: & sono amendue rationali. onde le B G G C sono rationali in potenza solamente commensurabili. & 9. di questo. 74. di questo. però la B C è apotome. Dico anchora essere la quarta. sia il quadrato della H nel quale la B G può più, che la G C. & perche come D E ad E F, così è il quadrato della B G al quadrato della G C, sarà per la conuersione della proportione, come E D à D F, così il quadrato della B G al quadrato della H. ma E D à D F nō ha la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato. onde ne anche il quadrato della B G al quadrato della H haverà la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato. è dunque la B G in lunghezza incommensurabile alla H. & la B G può più, che la G C, quanto è il quadrato della H. & però la B G può più, che la G C, quanto è il quadrato di vna linea retta in lunghezza ad essa incommensurabile: & tutta la B G è commensurabile alla proposta rationale. adunque B C è l'apotome quarta. si è dunque trouata la quarta apotome B C. il che bisognaua fare. 6. diff. delle 3.

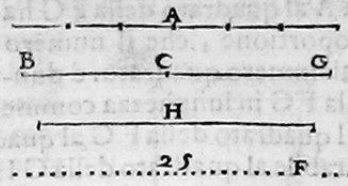
IL COMMANDINO.

Sia la A 6, la B G 4 & il numero D F 6 & F E 10. onde se si faccia come 16 à 10, così 16 ad vn'altro, sarà la G C ℞ 10, & la B C 4 men ℞ 10. che è l'apotome quarta.

PROBLEMA XXII. PROPOSITIONE XC.

Trouare l'apotome quinta.

Propongasi la rationale A. & alla A sia commensurabile la C G. adunque la C G è rationale. & proponganſi due numeri D F F E talmente, che D E all'vno & l'altro D F F E non habbia la proportione, c'ha il numero quadrato al numero quadrato. & facciasi come F E ad E D, cosi il quadrato della C G al quadrato della G B. adunque il quadrato della C G è commensurabile al quadrato della G B: & il quadrato della C G e rationale. onde etiandio è rationale il quadrato della G B: & però la linea retta G B è rationale. & perche come D E ad E F, cosi e il quadrato della B G al quadrato della G C; & D E ad E F non ha la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato; ne anche il quadrato della B G al quadrato della G C hauerà la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato. la B G dunque è in lunghezza incommensurabile alla G C. & amendue sono rationali. & per tal cagione le B G G C sono rationali in potenza solamente commensurabili; & la B C è apotome. Dico anchora essere la quinta. sia il quadrato della H, nel quale può più il quadrato della B G, che il quadrato della G C. perche dunque il quadrato della B G al quadrato della G C è come D E ad E F, sarà per la conuersione della proposítione come E D à D F, cosi il quadrato della B G al quadrato della H. ma E D à D F non ha la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato. onde ne il quadrato della B G al quadrato della H hauerà la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato. & però la linea retta B G e in lunghezza incommensurabile alla H. & può più la B G, che la G C quanto e il quadrato della H. adunque B G può più, che la G C quanto è il quadrato di vna linea retta ad essa incommẽsurabile in lunghezza. & è C G l'aggiunta che alla proposta rationale A in lunghezza e incommensurabile. onde la B C e l'apotome quinta. si e dunque trouata l'apotome quinta B C. il che bisognaua fare.



6. di questo.

9. di questo.

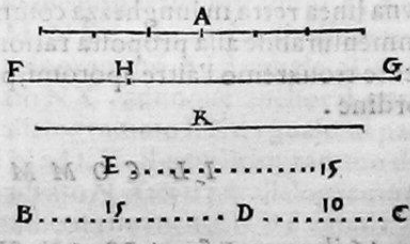
IL COMMANDINO.

Sia la A 6, C G 3, & il numero D F sia 25. F E 9: & facciasi come 9 à 34, cosi il quadrato della C G, che è 9 ad vn'altro. sarà B G B 34, & B C B 34 men 3, che è l'apotome 5.

PROBLEMA XXIII. PROPOSITIONE XCI.

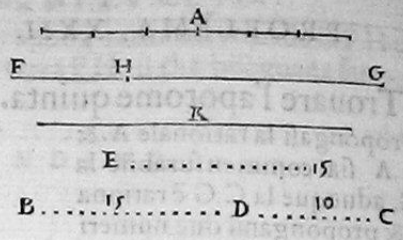
Trouare l'apotome sesta.

Propongasi la rationale A & tre numeri E B C C D, che nõ habbiano fra loro la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato: & facciasi come E à B C, cosi il quadrato della A al quadrato della F G: & come B C à C D, cosi il quadrato della F G al quadrato della G H. perche dunque e come E à B C, cosi il quadrato della A al quadrato della F G, sarà il quadrato della A al quadrato della F G commensura



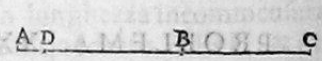
6. di questo.

bile. & il quadrato della A e rationale. adunque anchor il quadrato della F G sarà rationale. & però la linea retta F G e rationale. & perche E à B C non ha la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato, ne ache il quadrato della A al quadrato della F G hauera la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato. è dunque la A alla F G in lunghezza commensurabile. oltre à cio perche come B C à C D, cosi il quadrato della F G al quadrato della G H, sarà il quadrato della F G commensurabile al quadrato della G H. & il quadrato della F G e rationale. onde anchor e rationale il quadrato della G H, & la G H rationale. & non hauendo B C à C D la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato, ne il quadrato della F G al quadrato della G H hauerà la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato. adunque la F G e in lunghezza incommensurabile alla G H: & sono amendue rationali. onde le F G G H sono rationali in potenza solamente commensurabili, & la F H e apotome. Dico anchora esser la sesta. percioche essendo come E à B C, cosi il quadrato della A al quadrato della F G, & come B C à C D, cosi il quadrato della F G al quadrato della G H, sarà per l'ugual proportione come E à C D, cosi il quadrato della A al quadrato della G H. ma E à C D non ha la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato. ne dunque il quadrato della A al quadrato della G H hauerà la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato. onde la A alla G H è in lunghezza incommensurabile: & niuna di esse F G G H è commensurabile in lunghezza alla proposta rationale A. sia dunque il quadrato della K, nel quale può più il quadrato della F G, che il quadrato della G H. & perche è come B C à C D, cosi il quadrato della F G al quadrato della G H, sarà per la conuersione della proportione come C B à B D, cosi il quadrato della F G al quadrato della K. ma C B à B D nō ha la proportione, che il numero quadrato al numero quadrato. ne dunque il quadrato della F G al quadrato della K hauera la proportione, che ha il numero quadrato al numero quadrato. onde la F G è in lunghezza incommensurabile alla K. & la F G può più, che la G H, quanto è il quadrato della K. la F G dunque può più, che la G H, quanto è il quadrato di vna linea retta in lunghezza ad essa incommensurabile. & niuna delle F G G H è in lunghezza commensurabile alla proposta rationale A. onde F H è l'apotome sesta. si è dunque trouata l'apotome sesta F H. ma piu speditamente si può dimostrare l'inuentione delle sei linee dette.



9. di questo:
6. di questo.
9. di questo.
74. di questo.
9. di questo.
6. diff. delle 3.

Percioche se bisogni trouare l'apotome prima, propongasi la prima di due nomi A C, il cui maggior nome sia A B: & pongasi la B D vguale alla B C. adunque le A B B C, cioè le A B B D sono rationali in potenza solamente commensurabili. & la A B può più, che la B C cioè, che la B D, quanto è il quadrato di vna linea retta in lunghezza commensurabile ad essa: & la A B è in lunghezza commensurabile alla proposta rationale. adunque A D è l'apotome prima. similmente trouaremo l'altre apotomi, proponendo quelle di due nomi del medesimo ordine.



IL COMMANDINO.

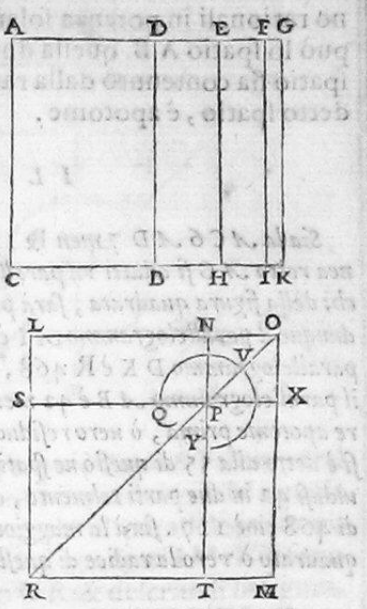
Sia la A 6, il numero E sia 15, B C 25, & C D 10. facciasi come 15 à 25, cosi 36 ad vn'altro, sarà à 60. poi facciasi come 25 à 10, cosi 60 ad vn'altro, sarà à 24. adunque la F G è 6, 60,

& la G H R̃ 24, & però la F H è R̃ 60 men R̃ 24, che è l'apotome ſeſta.

THEOREMA LXVIII. PROPOSITIONE XCII.

Se vn ſpatio ſia contenuto dalla rationale & dall'apotome prima, la linea rettache può detto ſpatio ſarà apotome.

Sia contenuto lo ſpatio A B dalla rationale A C & dalla apotome prima A D. Dico la linea retta, che può lo ſpatio A B, eſſere apotome. percioche eſſendo A D la prima apotome, ſia la D G aggiunta ad eſſa. adunque le A G G D ſono rationali in potenza ſolamente commenſuaabili, & tutta la A G in lunghezza è incommenſurabile alla propoſta rationale A C. & oltre à ciò la A G può più, che la G D, quanto è il quadrato di vna linea retta in lunghezza commenſurabile ad eſſa. ſe dunque alla A G ſi adatti vn parallelogrammo vguale alla quarta parte del quadrato, che ſi fa dalla D G, che manchi della figura quadrata, la diuiderà in parti in lunghezza commenſurabili. ſeghiſi la D G per mezo nel punto E. & Alla A G adattiſi vn parallelogrammo vguale al quadrato della E G, che manchi della figura quadrata, qual ſia A F G. la A F dunque è in lunghezza commenſurabile alla F G. & per li punti E F G tirinſi le E H F I G K parallele alla A C. & perche la A F è in lunghezza commenſuraaile alla F G, ſarà tutta la A G in lunghezza commenſurabile all'una & l'altra di eſſe A F F G. ma la A G è commenſurabile alla A C. l'vna & l'altra dunque A F F G è in lunghezza commenſuraſiile alla A C. & la A C è rationale: & percio amendue A F F G ſono rationali. & altresì rationali amendue li parallelogrammi A I F K. & perche la D E è in lunghezza commenſurabile alla E G, ſarà la D G commenſurabile in lunghezza all'vna & l'altra D E E G. & la D G è rationale, & in lunghezza incommenſurabile alla A C. adunque l'vna & l'altra D E E G è rationale, & incommenſurabile alla A C in lunghezza: & però l'vno & l'altro parallelogrammo D H E K è medio: pongaſi il quadrato L M vguale al parallelogrammo A I, & traggaſi il quadrato N X vguale al parallelogrammo F K, che habbia con eſſo commune l'angolo L O M. adunque i quadrati L M N X ſono intorno al medeſimo diametro. ſia il lor diametro O R: & deſcriuaſi la figura. perche dunque il rettangolo A F G è vguale al quadrato della E G, ſarà come la A F alla E G, coſi la E G alla G F. ma come la A F alla E G, coſi il parallelogrammo A I al parallelogrammo E K. & come la E G alla G F, coſi il parallelogrammo E K al parallelogrammo K F. adunque de parallelogrammi A I K F è proportionale di mezo E K. & de quadrati L M N X è proportionale di mezo M N. come di ſopra ſi è dimoſtrato: & il parallelogrammo A I è vguale al quadrato L M, & il parallelogrammo K F al quadrato N X. adunque anchor il parallelogrammo M N è vguale ad E K. ma il parallelogrammo E K è vguale al parallelogrammo D H, & il parallelogrammo M N ad L X. il parallelogrammo dunque D K è vguale al gnomone Y V Q, & al quadrato N X: & il parallelogrammo A K è vguale alli quadrati L M N X. onde etiandio il rimanente A B è vguale al quadrato S T. ma il quadrato S T è quello, che ſi fa dalla L N. il quadrato dunque della L N è vguale al parallelogrammo A B: & però la linea retta L N può eſſo



1. diff. delle 3.

18. di queſto.

16. di queſto.

20. di queſto.

15. di queſto.
14. di queſto.
22. di queſto.

26. di queſto.

14. del ſeſto

A B.

A B. Dico la L N eſſere apotome. percioche eſſendo l'uno & l'altro de parallelogrammi A I F K rationale, & ſono vguali alli quadrati L M N X, ſarà anchor l'vno & l'altro L M N X rationale, cioè l'vno & l'altro di quelli, che ſi fanno dalle L O O N. & però l'vna & l'altra L O O N è rationale. oltre à ciò perche il parallelogrammo D H è medio, & è vguale ad L X; ſarà etiandio L X medio. eſſendo dunque L X medio, & N X rationale, ſarà L X incommenſurabile ad X N. & come L X ad X N, coſi è la linea retta L O alla retta O N. onde la L O e in lunghezza incommenſurabile alla O N: & amendue ſono rationali. adunque le L O O N ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabili: & però la L N e apotome, & può lo ſpatio A B. quella dunque che può lo ſpatio A B e apotome. la onde ſe vn ſpatio ſia contenuto dalla rationale & dalla apotome prima, la linea retta che può detto ſpatio, è apotome.

10. di queſto.

74. di queſto.

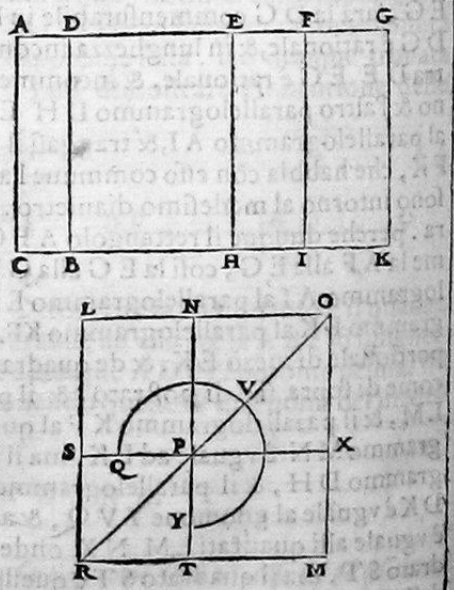
IL COMMANDINO.

Sia la A C 6 A D 7 men R 13. *ſarà D G* R 13, *& D E ò vero E G* R $3\frac{1}{4}$. *& ſe alla linea retta A G ſi adatti vn parallelogrammo A F G vguale al quadrato della E G, & che manchi della figura quadrata, ſarà per le coſe dimoſtrate alla 18 di queſto A F 6* $\frac{1}{2}$ *F G* $\frac{1}{2}$. *adunque il parallelogrammo A I è 39 & F K 3: & tutto il parallelogrammo A K 42. & il parallelogrammo D K è* R 468, *D H ò vero E K* R 177 *E I* R 117 *men 3, & F K 3. onde il parallelogrammo A B è 42 men* R 468. *coſi fatto ſpatio anchora i moderni ſogliano chiamare apotome prima, ò uero reſiduo primo. il cui lato quadrato, ò vero la* R *trouaremo, come ſi è detto alla 55 di queſto ne ſpatij binomiali, fuori che in luogo di più ci ſeruiremo di meno. diuidaſi 42 in due parti talmente, che quello, che da eſſe ſi produce ſia vguale alla quarta parte di 468 cioè 117. ſarà la maggior parte 39, la minore 3. & però* R 39 *meno* R 3 *ſarà il lato quadrato ò vero la radice di queſto ſpatio reſiduo, 42 men* R 468.

THEOREMA LXIX. PROPOSITIONE XCIII.

Se vn ſpatio ſia contenuto dalla rationale & dalla apotome ſeconda, la linea retta che può detto ſpatio, ſarà la prima apotome della media.

Lo ſpatio A B ſia contenuto dalla rationale A C & dalla ſeconda apotome A D. Dico la linea retta, che può lo ſpatio A B eſſer la prima apotome della media. ſia D G la linea aggiunta alla A D. adunque le A G G D ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabili. & le D G aggiunta è commenſurabile alla propoſta rationale A C & tutta la A G può più, che la G D, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza ad eſſa commenſurabile. perche dunque la A G può più, che la G D, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza commenſurabile ad eſſa, ſe alla A G ſi adatti vn parallelogrammo vguale alla quarta parte del quadrato della G D, che manchi della figura quadrata diuidera eſſa A G in parti commenſurabili. onde ſeghiſi la D G per mezo nel

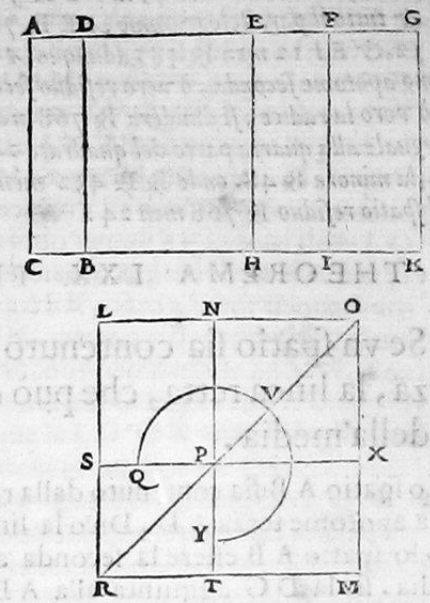


2. diff. delle 3.

18. di queſto.

punto

punto E: & alla A G adattisi vn paralle logrammo vguale al quadrato della E G, che manchi della figura quadrata, qual sia A F G. adunque la A F è in lunghezza commensurabile alla F G. & per li punti E F G tirinsi le E H F I G K parallele alla A C. perche dunque la A F è in lunghezza commensurabile alla F G, sarà la A G commensurabile in lunghezza all'una & l'altra A F F G, & la A G è rationale, & alla A C in lunghezza incommensurabile. adunque etiandio l'una & l'altra A F F G è rationale, & in lunghezza incommensurabile alla A C. & però l'uno & l'altro de parallelogrammi A I F K è medio. oltre à cio perche la D E è commensurabile alla E G, sarà anchor la D G commensurabile all'vna & l'altra D E E G. ma la D G è commensurabile alla A C in lunghezza. adunque & l'vna & l'altra D E E G è rationale, & in lunghezza commensurabile alla A C: & però l'uno & l'altro parallelogrammo D H E K è rationale. constituiscasi dunque il quadrato L M vguale al parallelogrammo A I: & traggasi il quadrato N X vguale al parallelogrammo F K, che habbia l'angolo L O M ad esso commune. onde i quadrati L M N X sono d'intorno al medesimo diametro. sia il lor diametro O R: & descriuasi la figura. essendo dunque i parallelogrammi A I F K medij, & commensurabili fra loro, & vguali à quadrati delle L O O N, saranno etiandio i quadrati delle L O O N medij. adunque le linee rette L O V N sono medie in potenza solamente commensurabili. & perche il rettangolo A F G è vguale al quadrato della E G, sarà come la A F alla E G, cosi la E G alla G F. ma come la A F alla E G, cosi è il parallelogrammo A I ad E K. & come la E G alla G F, cosi il parallelogrammo E K à K F. adunque de parallelogrāmi A I F K è proportionale di mezo E K: & è de quadrati L M N X proportionale di mezo M N. & il parallelogrammo A I è vguale al quadrato L M, & il parallelogrammo F K vguale al quadrato N X. onde M N è vguale ad E K. ma D H è vguale ad E K, & L X ad M N. tutto dunque D K sarà vguale al gnomone Y V Q & al quadrato N X. & perche tutto A K è vguale alli quadrati L M N X, de quali D K è vguale al gnomone Y V Q & al quadrato N X; sarà il rimanente A B vguale al quadrato S T, cioè à quello, che si fa dalla L N. adunque il quadrato della L N è vguale allo spatio A B. & però la linea retta L N può lo spatio A B. Dico L N essere l'apotome prima della media. percioche essendo E K rationale, & vguale ad M N, cioè ad L X, sarà anchor L X rationale, cioè quello che è contenuto dalle L O O N. & si è dimostrato N X medio. onde L X è incommensurabile ad X N. & come L X ad X N, cosi la L O alla O N. adunque le L O O N sono in lunghezza incommensurabili: & però le L O O N sono medie in potenza solamente commensurabili, che contengono vn spatio rationale. onde L N è la prima apotome della media. & può lo spatio A B. adunque la linea retta, che può lo spatio A B è la prima apotome della media.



16. di questo.

22. di questo

16. di questo.

20. di questo.

26. del sesto.

14. del sesto.

75. di questo.

IL COMMANDINO.

Sia la A C 4 & la A D R 48 men 6. sarà D G 6, & D E ò vero E G 3; & se alla A G si adatti il parallelogrammo A F G vguale al quadrato della E G, & che manchi della figura qua-

quadrata, ſarà la A F ℞ 27, la F G ℞ 3. & però il parallelogrammo A I ℞ 432, F K ℞ 48. & tutto il parallelogrammo A K ℞ 768. & il parallelogrammo D K 24, D H ò vero E K 12, & E I 12 men ℞ 48. adunque A B è ℞ 768 men 24. il qual ſpatio anchora chiamiamo apotome ſeconda, ò vero reſiduo ſecondo, & à ciò che troviamo il lato quadrato di eſſo, ò vero la radice, ſi diuidera ℞ 768 in due parti dimodo, che quello, che da eſſe è produtto ſia vguale alla quarta parte del quadrato 24, cioè vguale à 144. ſarà la maggior parte ℞ 432, la minore ℞ 48. onde ℞ ℞ 432 men ℞ ℞ 48 è il lato quadrato ò vero la radice di quel ſpatio reſiduo ℞ 768 men 24.

THEOREMA LXX. PROPOSITIONE XCIIII.

Se vn ſpatio ſia contenuto dalla rationale & dalla apotome terza, la linea retta, che può detto ſpatio ſarà l'apotome ſeconda della media.

Lo ſpatio A B ſia contenuto dalla rationale AC & dalla apotome terza A D. Dico la linea retta, che può lo ſpatio A B eſſere la ſeconda apotome della media. ſia la D G aggiunta alla A D. adunque le A G G D ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabili, & niuna di eſſe A G G D è in lunghezza commenſurabile alla propoſta rationale A C. & tutta la A G può più, che l'aggiunta D G, quanto è il quadrato della linea retta in lũghezza ad eſſa commenſurabile. ſe dunque alla A G ſi adatti vn parallelogrammo vguale alla quarta parte del quadrato della D G, che manchi della figura quadrata, la diuiderà in parti commenſurabili. onde ſeghiſi per mezo la D G nel punto E, & alla A G adattiſi vn parallelogrammo vguale al quadrato della E G, che manchi della figura quadrata, qual ſia A F G. & per li punti E F G tirinſi le E H F I G K parallele alla A C. adunque le A F F G ſono commenſurabili, & però il parallelogrammo A I è commenſurabile al parallelogrammo F K. & perche le A F F G ſono in lunghezza commenſurabili, ſarà la A G commenſurabile in lunghezza all'vna & l'altra A F F G. & la A G è rationale, & in lunghezza incommenſurabile alla A C. adunque l'vna & l'altra A F F G è rationale, & alla A C in lunghezza incommenſurabile. & però amendue li parallelogrammi A I F K ſono medij. ſimilmente perche la D E è in lunghezza commenſurabile alla E G, ſarà anchor la D G commenſurabile all'vna & l'altra D E E G. ma la D G è rationale, & in lunghezza incommenſurabile alla A C. onde etiandio l'vna & l'altra D E E G è rationale, & alla A C in lunghezza incommenſurabile. & per tal cagione amendue li parallelogrammi D H E K ſono medij. & eſſendo le A G G D in potenza ſolamente commenſurabili, la A G ſarà in lunghezza incommenſurabile alla G D. ma la A G è commenſurabile in lunghezza alla A F, & la D G alla G E. adunque la A F è in lunghezza incommenſurabile alla E G. & come la A F alla E G, coſi il parallelogrammo A I al parallelogrammo E K. il parallelogrammo dunque A I è incommenſurabile ad E K. conſtituiſcaſi il quadrato L M vguale ad A I: & traggaſi N X vguale ad F K, quale habbia il medeſimo angolo, che L M. onde i quadrati L M N X ſono intorno al medeſimo diametro. ſia il lor diametro O R. & deſcriuaſi la figura. perche dunque il rettangolo A F G è vguale al quadrato della E G, ſarà come la A F alla E G, coſi la E G alla G F. & come la A F alla E G, coſi è il



18. di queſto.
16. di queſto.
13. di queſto.
16. di queſto.
22. di queſto.
per le coſe dimoſtrate nella 14. di queſto.
26. del ſeſto.
14. del ſeſto.

paral-

parallelogrammo A I al parallelogrammo E K. & come la E G alla G F, cosi la E K alla K F. adunque come A I ad E K, cosi E K à K F. & perciò de parallelogrammi A I F K proportionale di mezo è E K. & è de quadrati L M N X proportionale di mezo M N. & il parallelogrammo A I è vguale al quadrato L M, & F K ad N X. il perche anchora E K è vguale ad M N. ma M N è vguale ad L X, & E K à D H. tutto dunque D K è vguale al gnomone Y V Q, & al quadrato N X; & il parallelogrammo A K è vguale alli quadrati L M N X. adunque il rimanente A B è vguale ad S T, cioè al quadrato della L N. & però la linea retta L N può lo spatio A B. Dico la L N essere la seconda apotome della media. perche si sono dimostrati medij i parallelogrammi A I F K, & sono vguali à quadrati delle L O O N, saranno amendue li quadrati delle L O O N medij; & però l'vna & l'altra L O O N è media. & perche A I è commensurabile ad F K, sarà anchor il quadrato della L O commensurabile al quadrato della O N. oltre à ciò perche si è dimostrato A I incommensurabile ad E K, & L M sarà incommensurabile ad M N, cioe il quadrato della L O al rettangolo L O N. onde anchor la linea retta L O è in lunghezza incommensurabile alla O N. sono dunque le L O O N medie in potenza solamente commensurabili. Dico quelle contenere anchor vn spatio medio: percioche essendosi dimostrato medio E K, & è vguale al rettangolo L O N, sarà anche L O N medio. adunque le L O O N sono medie in potenza solamente commensurabili, che contengono vn spatio medio. & però la L N è la seconda apotome della media, & può lo spatio A B. onde la linea retta, che può lo spatio A B è la seconda apotome della media.

Lemma alla 23. di questo.

76. di queste.

IL COMMANDINO.

Sia la A C 6, & la A D R 27 men R 15, sarà D G R 15 & D E ò vero E G R 3 $\frac{1}{4}$. ma se alla A G si adatti vn parallelogrammo vguale al quadrato della E G, che manchi della figura quadrata, qual sia A F G, sarà A F R 18 $\frac{3}{4}$ F G R $\frac{3}{16}$: & però il parallelogrammo A I è R 675, F K R 27, & tutto il parallelogrammo A K R 972, & il parallelogrammo D K R 540, E K R 135, & E I R 135 men R 27. è dunque A B R 972 men R 540, lo qual spatio è apotome terza, ò uero residuo terzo. onde diuidasi R 972 in due parti talmente che quello che si produce da esse sia vguale à R 135, sarà la maggior parte R 675, & la minore R 27. adunque R R 675 men R R 27 è il lato quadrato ò la R di quel spatio residuo R 972 men R 540.

THEOREMA LXXI. PROPOSITIONE XCV.

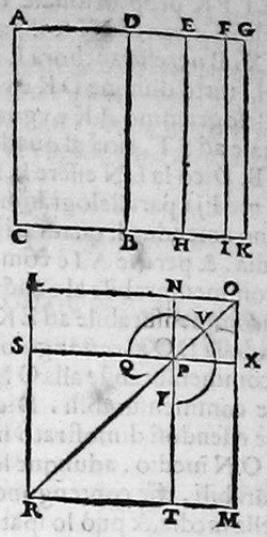
Se vn spatio sia contenuto dalla rationale, & dalla apotome quarta, la linea retta, che può detto spatio sarà la linea minore.

Sia lo spatio A B contenuto dalla rationale A C & dall'apotome quarta A D. Dico la linea retta, che può lo spatio A B esser minore. sia D G la linea aggiunta alla A D. adunque le A G G D sono rationali in potenza solamente cõmensurabili, & la A G è cõmensurabile in lunghezza alla proposta rationale A C. & tutta la A G può più, che la G D, quanto è il quadrato della linea retta in lũghezza commensurabile ad essa. se dunque alla A G si adatti vn parallelogrãmo vguale alla quarta parte del quadrato della D G, che manchi della figura quadrata, la diuiderà in parti commensurabili. onde seghisi per mezo la D G nel punto E, & adattisi ad A G vn parallelogrãmo vguale al quadrato E G, che manchi di vna figura quadrata, qual sia A F G. adunque la A F è in lunghezza incommensurabile alla F G. tirinsi per li punti E F G le E H F I G K, parallele alle A C B D. perche dunque la A G è rationale, & in lunghezza commensurabili alla A C: sarà tutto il paralle-

19. di queste.

20. di queste.

lo grammo A K rationale. oltre à ciò perche
22. di queſto. la D G è in lunghezza incommenſurabile alla A C, & amendue ſono rationali, ſarà il parallelogrammo D K medio. & eſſendo la A F in lunghezza incommenſurabile alla F G, ſarà etiandio il parallelogrammo A I incommenſurabile al parallelogrammo F K. conſtituiſcaſi il quadrato L M vguale al parallelogrammo A I, & traggaſi il quadrato N X vguale al parallelogrammo F K, quale habbia il medeſimo an-
26. del ſeſto. golo che L M, cioè L O M. adunque i quadrati L M N X ſono intorno al medeſimo diametro. ſia il loro diametro O R, & deſcriuaſi la figura. onde perche il rettangolo A F G è vguale al
24. del ſeſto. quadrato della E G, come la A F alla E G, coſi ſarà la E G alla G F. ma come la A F alla E G, coſi è il parallelogrammo A I ad E K. & come la E G alla G F, coſi è il parallelogrammo E K à K F. de parallelogrammi dunque A I F K il proportionale di mezo e E K, & e anchora de quadrati L M N X proportionale di mezo M N: & il parallelogrammo A I e vguale al quadrato L M, & il parallelogrammo F K ad N X. adunque etiandio F K e vguale ad M N. ma E K e vguale al parallelogrammo D H, & M N ad L X. tutto dunque il parallelogrammo D K e vguale al gnomone Y V Q, & al quadrato N X. & perche tutto A K e vguale alli quadrati L M N X, de quali D K e vguale al gnomone Y V Q, & al quadrato N X; ſarà il rimanente A B vguale al quadrato S T, cioe al quadrato della L N. adunque la L N può lo ſpatio A B. Dico la L N eſſere irrationale, che ſi chiama minore. percioche eſſendo il parallelogrammo A K rationale, & vguale à quadrati delle L O O N; ſarà etiandio il compoſto da quadrati delle L O O N rationale. oltre à ciò perche il parallelogrammo D K e medio, & vguale al parallelogrammo, che e due volte contenuto dalle L O O N; ſarà anche quello, che e contenuto due uolte dalle L O O N medio: & ſi e dimoſtrato il parallelogrammo A I incommenſurabile ad F K. adunque il quadrato della L O e incommenſurabile al quadrato della O N: & però le L O O N ſono in potenza incommenſurabili, che fanno il compoſto dalli lor quadrati rationale,
77. di queſto & quello che e contenuto da eſſe medio. onde la L N e irrationale chiamata minore. & può lo ſpatio A B. adũque la linea retta, che può lo ſpatio A B e minore.

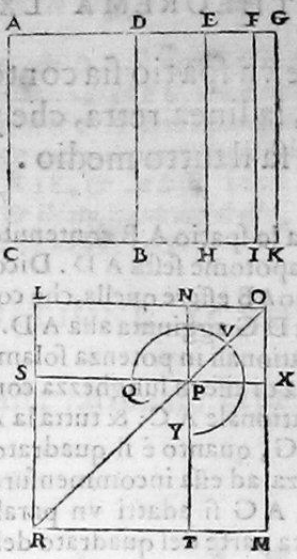


IL COMMANDINO.

Sia la A C 6, & la A D 7 men R 14. ſarà D G R 14, & D E ò vero E G R 3 $\frac{1}{2}$. & ſe alla A G ſi adatti vn parallelogrammo A F G, vguale al quadrato della E G, che manchi della figura quadrata, ſarà A F 3 $\frac{1}{2}$ più R 8 $\frac{3}{4}$, F G 3 $\frac{1}{2}$ men R 8 $\frac{1}{4}$. & il parallelogrammo A I è R 21 più R 315, F K 21 meno R 315. & tutto A K 42, & il parallelogrammo D K è R 504, C K R 126, & A B 42 men R 504, lo qual ſpatio è apotome quarta, ò vero reſiduo quarto. ſe dunque 42 ſi diuida in due parti talmente, che quello che da eſſe è prodotto ſia vguale alla quarta parte di R 504, cioè à R 126 ſarà la maggior parte 21 più R 126, & la minore 21 men R 126. adunque R V 21 più R 126 men R V 21 men R 126 è il lato qnadrato ò uero la radice di quel ſpatio reſiduo 42 men R 504.

THEOREMA LXXII. PROPOSITIONE XCVI.

Se vn ſpatio ſia contenuto dalla rationale & dalla apotome quinta, la linea retta, che può detto ſpatio ſarà quella, che col rationale fa il tutto medio.



Sia lo ſpatio A B contenuto dalla rationale A C, & dall'apotome quinta A D. Dico la linea retta che può lo ſpatio A B eſſere quella che col rationale fa il tutto medio. Sia la DG aggiunta alla A D. adunque le A G G D ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabili, & l'aggiunta DG è in lunhgezza commenſurabile all a propoſta rationale A C, & tutta la A G può più, che la G D, quato è il quadrato della linea retta in lunghezza ad eſſa incommenſurabile. ſe dunque alla A G ſi adatti vn parallelogrammo vguale alla quarta parte del quadrato della D G, che manchi della figura quadrata, la diuiderà in parti incommenſurabili. ſeghiſi dunque per mezo la DG nel punto E, & alla A G adattiſi vn parallelogrammo vguale al quadrato della E G, che manchi, della figura quadrata, qual ſia A F G. adunque la A F è in lunghezza incommenſurabile alla F G. tirinſi per li punti E F G le E H F I G K, parallele alla A C. & perche la A G è in lunghezza incommenſurabile alla A C, & ſono amendue rationali, ſarà il parallelogrammo A K medio. oltre à ciò perche la D G è rationale, & in lunghezza commenſurabile alla A C, il parallelogrammo D K ſarà rationale. conſtituiſcaſi il quadrato L M vguale al parallelogrammo A I, & traggaſi il quadrato N X vguale ad F K, qual habbia il medeſimo angolo, che L M, cioè L O M. adunque i quadrati L M N X ſono intorno al medeſimo diametro. ſia il diametro loro O R, & deſcriuaſi la figura. ſimilmente dimoſtreremo la linea retta L N potere lo ſpatio A B. Dico la L N eſſere quella, che col rationale fa il tutto medio. perciocheſſendoſi dimoſtrato il parallelogrammo A K eſſere medio, & è vguale à quadrati delle L O O N, ſarà anchor il cõpoſto da quadrati delle L O O N medio. Et perche D K è rationale, & vguale à quello, che e due volte contenuto dalle L O O N, ſarà anchor quello, che due volte e contenuto dalle L O O N rationale, & e A I incommenſurabile ad F K. e dunque il quadrato della L O incommenſurabile al quadrato della O N. & però le L O O N ſono in potenza incommenſurabili, che fanno il compoſto dalli lor quadrati medio, & quello, che e due volte da eſſe contenuto rationale. la rimanente dunque L O e irrationale, che ſi chiama quella che col rationale fa il tutto medio, & può lo ſpatio A B. onde la linea retta, che può lo ſpatio A B, e quella, che col rationale fa il tutto medio.

19. di queſto.

22. di queſto.

20. di queſto.

26. del ſeſto.

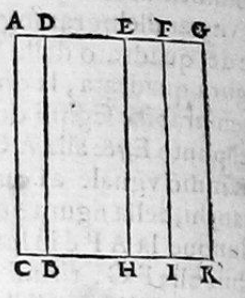
IL COMMANDINO.

Sia la A C 6 *A D* R 56 *men* 4. *ſarà D G* 4, *& D E ò vero E G* 2. *& ſe alla A G ſi adatti il parallelogrammo A F G vguale al quadrato della C G, che manchi della figura quadrata, ſarà la A F* R 14 *piu* R 10, *la F G* R 14 *men* R 10, *& il parallelogrãmo A I è* R 504 *piu* R 360 *F K* R 504 *men* R 360, *& tutto A K* R 2016. *ma D K è* 24, *E K* 12, *& A B* R 2016 *men* 24. *lo qual ſpatio è apotome quinta ò vero reſiduo quinto. diuidaſi* R 2016 *in due parti talmente, che quello, che da eſſe è prodotto, ſia vguale à* 144. *ſarà la maggior parte* R 504 *piu* R 360, *& la minore* R 504 *men* R 360. *onde* R *V* R 504 *piu* R 360 *men* R *V* R 504 *men* R 360, *& il lato quadrato di detto ſpatio reſiduo* 2016, *men* 24.

THEOREMA LXXIII. PROPOSITIONE XCVII.

Se vn ſpatio ſia contenuto dalla rationale & dalla apotome ſeſta, la linea retta, che può detto ſpatio, ſarà quella, che col medio fa il tutto medio.

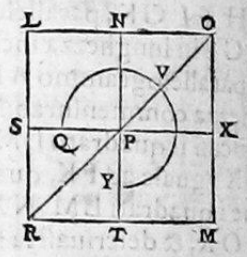
Sia lo ſpatio A B contenuto dalla rationale A C, & dall'apotome ſeſta A D. Dico la linea retta, che può lo ſpatio A B eſſere quella, che col medio fa il tutto medio.



6. diff. delle 3. ſia la D G aggiunta alla A D. adunque le A G G D ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabili: & niuna di eſſe in lunghezza commenſurabile alla propoſta rationale A C: & tutta la A G può più, che l'aggiunta D G, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza ad eſſa incommenſurabile. ſe dunque alla linea retta A G ſi adatti vn parallelogrammo vguale alla quarta parte del quadrato della D G, che manchi della

19. di queſto. figura quadrata, la diuiderà in parti incommenſurabili. onde ſeghiſi la D G per mezo nel punto E, & alla A G adattiſi vn parallelogrammo vguale al quadrato della C G, che manchi della figura quadrata, qual ſia A F G. la F G dunque è in lunghezza incommenſurabile alla F G, & come la A F alla F G, coſi è il parallelogrammo A I ad F K. adunque A I e incommenſurabile ad F K. & perche le A G A C ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabili, ſarà il parallelogrammo A K medio: & ſono le A C D G rationali, & in lunghezza incommenſurabile. adunque etiandio D K è medio: & eſſendo le A G G D in potenza ſolamente commenſurabili, ſarà la A G in lunghezza incommenſurabile alla G D. ma come la A G alla G D, coſi è A K à K D. adunque A K è incommenſurabile à K D. la onde conſtituiſcaſi il quadrato L M vguale al parallelogrammo A I, & traggaſi il quadrato N X vguale al parallelogrammo F K, qual habbia il medeſimo angolo, che L M. adunque i quadrati L M N X ſono intorno al medeſimo diametro. ſia il diametro loro O R: & deſcriuanſi la figura. ſimilmente come di ſopra dimoſtreremo la linea retta L N potere lo ſpatio A B. Dico la L N eſſer quella, che col medio fa il tutto medio. percioche eſſendoſi dimoſtrato medio A K, & è vguale a quadrati delle L O O N; ſarà anchor il compoſto dalli lor quadrati medio. oltre à ciò per che ſi è dimoſtrato medio D K & vguale à quello, che è due volte contenuto dalle L O O N; quello anchora, che è due volte contenuto dalle L O O N ſarà medio: & ſi è dimoſtrato A K incommenſurabile à K D. adunque etiandio i quadrati, delle L O O N ſono incommenſurabile à quello, che due volte è contenuto dalle L O O N. & perche A I è incommenſurabile ad F K, ſarà anche il quadrato della L O incõmenſurabile al quadrato della O N. adunque le L O O N ſono in potenza ſolamente commenſurabili, che fanno il compoſto dalli lor quadrati medio, & quello, che due volte è contenuto da eſſe, medio, & incommenſurabile al

79. di queſto. compoſto dalli lor quadrati. adunque la L N è irrationale, che ſi chiama quella che col medio fa il tutto medio, & può lo ſpatio A B. la linea retta dunque, che può lo ſpatio A B e quella, che col medio fa il tutto medio.

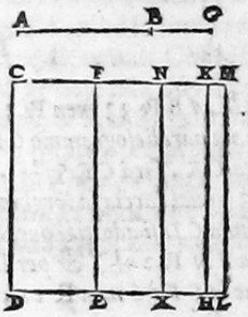


IL COMMANDINO.

Sia la A C 6, la A D R 32 men R 20. sarà D G R 20, & D E, ò vero E G R 5. & se alla A G si adatti vn parallelogrammo A F G vguale al quadrato dalla E G, che manchi della figura quadrata, sarà la A F R 8 più R 3, & la F G R 8 men R 3. & però il parallelogrammo A I è R 288 più R 108, F K R 288 men R 108. & tutto il parallelogrammo A K R 1152, & il parallelogrammo D K è R 720, D H R 18, & A B R 1152 men R 720. lo qual spatio è apotome sesta, ò vero residuo sesto: & il lato quadrato di esso, ò vero la R si troverà essere R V R 288 più R 108 men R V R 288 men R 108.

THEOREMA LXXIIII. PROPOSITIONE XCVIII.

Il quadrato della apotome adattato alla rationale fa per larghezza l'apotome prima.



Sia l'apotome A B, la rationale C D, & alla C D adattisi vn parallelogrammo C E vguale al quadrato della A B, che faccia la larghezza C F. Dico C F essere l'apotome prima. sia B G la linea aggiunta alla A B. adunque le A G G B sono rationali in potenza solamente commensurabili. & alla C D adattisi vn parallelogrammo C H, vguale al quadrato della A G: & adattisi il parallelogrammo K L vguale al quadrato della B G. tutto dunque C L è vguale à quadrati delle A G G B, de quali il parallelogrammo C E è vguale al quadrato della A B. adunque il rimanente F L è vguale à quello, che due volte è contenuto dalle A G G B. seghisi la F M per mezo nel punto N, & per lo punto N tirisi la N X parallela alla C D. onde l'uno & l'altro di essi F X L N è vguale à quello, che è contenuto dalle A G G B. & perche i quadrati delle A G G B sono rationali, & il parallelogrammo D M è vguale à quadrati delle A G G B, sarà esso D M rationale. & è adattato alla rationale C D, che fa la larghezza C M. adunque la C M è rationale & in lunghezza commensurabile alla C D. oltre à ciò perche è medio, quello che è contenuto due volte dalle A G G B, & il parallelogrammo L F è vguale à quello, che due volte è contenuto dalle A G G B, sarà esso L F medio, & è adattato alla C D, che fa la larghezza F M. onde la F M è rationale, & alla C D in lunghezza incommensurabile. & sono i quadrati delle A G G B rationali, & quello che è due volte contenuto dalle A G G B è medio. adunque i quadrati delle A G G B sono incommensurabili à quello, che è due volte contenuto dalle A G G B. ma alli quadrati delle A G G B è vguale il parallelogrammo C L: & à quello, che è due uolte contenuto dalle A G G B è vguale F L. adunque C L è incommensurabile ad L F: & come C L ad L F, così è la linea retta C M alla M F. è dunque la C M in lunghezza incommensurabile alla M F, & amendue sono rationali. onde le C M M F sono rationali in potenza solamente commensurabili: & però la C F è apotome. Dico anchor essere la prima. perche de quadrati delle A G G B è proportionale di mezo quello, che è contenuto dalle A G G B, & il parallelogrammo C H è vguale al quadrato della A G, & quello che è contenuto dalle A G G B vguale N L, & al quadrato della G B vguale K L; sarà delli C H K L proportionale di mezo L N. come dunque C H ad N L, così N L ad L K. ma come C H ad N L, così è la linea retta C K alla N M. & come N L ad

74. di questo

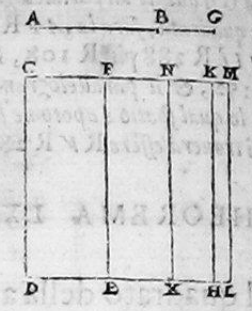
21. di questo

23. di questo.

1. del sesto.

74. di questo

11. del quinto. 17. del ſeſto. LK, coſi la linea retta NM alla MK. adunque come CK ad NM, coſi è NM ad MK: & però il rettangolo CKM è vguale al quadrato, che ſi fa dalla MN, cioè alla quarta parte del quadrato della FM. & perche il quadrato della AG è commenſurabile al quadrato della GB, ſarà anchor il parallelogrammo CH commenſurabile al paralle logrammo KL. ma come CH à KL, coſi è la linea retta CK alla KM. la CK dunque è commenſura bile alla KM. onde perche ſono due linee rette di ſuguali CM MF, & alla CM ſi è adattato vn paral lelogrammo vguale alla quarta parte del quadra to della FM, che mancha della figura quadrata, cioè quello, che è contenuto dalle CK KM, & è la CK commenſurabile alla KM, la linea retta CM potrà più, che la MF quanto è il quadrato della li nea retta in lunghezza ad eſſa commenſurabile; & la CM è in lunghezza commenſurabile alla propo ſta rationale CD. onde CF è la prima apotome. il quadrato dunque della apotome adattato alla rationale fa per larghezza l'apo tome prima.



18. di queſto.

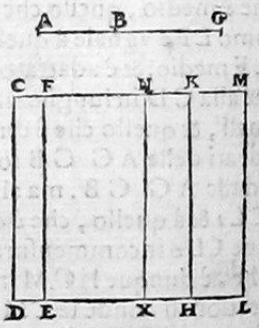
IL COMMANDINO.

Sia la AB R 33 men R 3, la BG R 3, & la rationale CD ſi a 6. & ſe ad eſſa CD ſi adatti vn parallelogrammo CH vguale al quadrato della AG, che è 33, qual faccia la larghezza CK, ſarà CK 5 $\frac{1}{2}$. & ſe alla medeſima ſi adatti KL vguale al quadrato della GB, che è 3, qual faccia la larghezza KM, ſarà KM $\frac{1}{2}$ & tutta la CM 6. oltre à ciò ſe alla medeſima CD ſi adatti il parallelogrammo FX, che è R 99, qual faccia la larghezza FN, ſarà la FN R 2 $\frac{1}{4}$. & per la medeſima ragione NM è R 2 $\frac{1}{4}$. & tutta la FM R 11. adunque la CF è 6 men R 11, che è l'apotome prima.

THEOREMA LXXV. PROPOSITIONE XCIX.

Il quadrato che ſi fa dalla prima apotome della media, adatta to alla rationale fa per larghezza l'apotome ſeconda.

Sia la prima apotome della media AB, & la rationale CD, & alla CD adattiſi il parallelogrammo CE vguale al quadrato della AB, che faccia la larghezza CF. Dico CF eſſere la ſecon da apotome. ſia la BG aggiunta alla AB. adunque le AG GB ſono medie in potenza ſolamente commenſurabili, che contengono vn ſpatio rationale, & alla CD adattiſi il parallelogrammo CH vguale al quadrato della AG, che faccia la larghezza CK: & alla medeſima adattiſi KL vguale al quadrato della GB, che faccia la larghezza KM. tutto dunque CL è vguale à quadrati delle AG GB, che ſono me dij. adunque anchor CL è medio, & è adattato alla rationale CD, che fa la larghezza CM. la CM dunque è rationale, & in lunghezza incommenſurabile alla CD. & perche CL è vguale à quadrati delle AG GB, de quali il quadrato della AB è vguale al parallelogrammo CE, ſarà il rimanente, che è due volte contenuto dalle AG GB, vguale ad FL. & quello che due volte è contenuto dalle



75. di queſto.

23. di queſto.

7. del ſecondo.

AG GB è rationale. adunque anchor FL è rationale, & è adattato alla rationale FE, che fa la larghezza FM. onde la FM è rationale, & in lunghezza commenſurabile alla CD. & perche i quadrati delle AG GB cioè il parallelogrammo CL è medio, & quello, che è due volte contenuto dalle AG GB, cioè FL e rationale, ſarà CL incommenſurabile ad LF. & come CL ad LF, coſi la linea retta CM alla MF. adunque la CM è in lunghezza incommenſurabile alla MF: & ſono amendue rationali. onde le CM MF ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabili: & però la CF è apotome. Dico eſſere la ſeconda. ſeghiſi per mezo la FM nel punto N: & per N tiriſi la NX parallela alla CD. amendue dunque i parallelogrammi FX NL ſono vguali à quello, che è contenuto dalle AG GB: & perche de quadrati delle AG GB è proportionale di mezo quello, che è contenuto dalle AG GB; & il quadrato della AG è vguale al parallelogrammo CH; & quello, che è contenuto dalle AG GB è vguale al parallelogrammo NL; & il quadrato della GB vguale à KL: ſarà de parallelogrammi CH KL proportionale di mezo NL. è dunque come CH ad NL, coſi NL ad LK. ma come CH ad NL, coſi è la linea retta CK alla NM. & come NL ad LK, coſi NM ad MK. adunque come CK ad NM, coſi NM ad MK: & però il rettangolo CKM è vguale al quadrato della NM, cioè alla quarta parte del quadrato della FM. & perche il quadrato della AG è cõmenſurabile al quadrato della GB, ſarà anchor il parallelogrammo CH commenſurabile al parallelogrammo KL, cioè la linea retta CK commenſurabile alla KM. & perche ſono due linee rette diſuguali CM MF, & alla maggiore CM ſi è adattato il parallelogrammo CKM vguale alla quarta parte del quadrato della MF, che manca della figura quadrata, & la diuide in parti commenſurabili, la linea retta CM potrà più, che la MF, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza ad eſſa commenſurabile: & è la FM aggiunta commenſurabile alla propoſta rationale CD. onde CF è la ſeconda apotome. il quadrato dunque, che ſi fa della prima apotome della media adattato alla rationale fa per larghezza l'apotome ſeconda.

21. di queſto.
1. del ſeſto.
10. di queſto.
74. di queſto.
Lemma alla 55. di queſto.
11. del quinto
17. del ſeſto.
18. di queſto
2. diff. delle 3

IL COMMANDINO.

Dalle coſe gia dimoſtrate appare manifeſtamente, che per trouare il quadrato dell'apotome noi ci ſeruiamo della ſettima propoſitione del ſecondo libro, & non della quarta, come ſi è detto alla 34 di queſto.

Sia la AB R 972 *men* RR 108, *la BG* RR 108, *& la rationale CD ſia* 6. *& ſe alla CD ſi adatti il parallelogrammo CH vguale al quadrato della AG, che è* R 972, *qual faccia la larghezza CK, ſarà CK* R 27. *& ſe alla medeſima ſi adatti KL vguale al quadrato della GB, che è* R 108, *qual faccia la larghezza KM, ſarà la KM* R 3, *& tutta la CM* R 48. *poi ſe alla CD ſi adatti il parallelogrammo FX vguale al rettangolo AGB, che è* 18, *qual faccia la larghezza FN, ſarà la FN* 3, *& la NM parimente* 3, *& tutta la FM* 6. *adunque la CF è* R 48 *men* 6, *che è l'apotome ſeconda.*

THEOREMA LXXVI. PROPOSITIONE C.

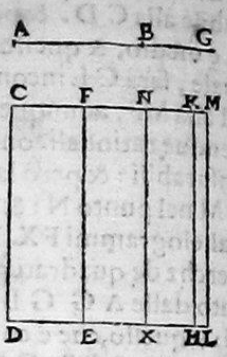
Il quadrato, che ſi fa dalla ſeconda apotome della media, adattato alla rationale, fa per larghezza l'apotome terza.

Sia l'apotome ſeconda della media AB, la rationale CD, & alla CD adattiſi il parallelogrammo CE, vguale al quadrato della AB, che faccia la larghezza CF. Dico CF eſſere l'apotome terza. Sia alla AB aggiunta la BG. adunque le AG GB ſono medie in potenza ſolamente commenſurabili, che contengono un ſpatio medio: & alla CD adattiſi il parallelogrammo CH, vguale al quadrato

76. di queſto.

della

della A G, che faccia la larghezza C K: & alla K H adattisi K L vguale al quadrato della G B, che faccia la larghezza K M. tutto dunque C L è vguale à quadrati delle A G G B. & sono i quadrati delle A G G B medij. onde anchora C L è medio, & è adattato alla rationale C D, che fa la larghezza C M. adunque la C M è rationale, & in lunghezza incommensurabile alla C D. & perche tutto C L è vguale à quadrati delle A G G B, de quali C E è vguale al quadrato della A B; sarà il rimanente F L vguale à quello, che è due volte contenuto dalle A G G B. seghisi la F M per mezo nel punto N, & per N tirisi la N X parallela alla C D. amendue dunque i parallelogrammi F X N L sono vguali à quello, che è contenuto dalle A G G B. & quello, che è contenuto dalle A G G B è medio. adunque anchora F L è medio. & è adattato alla rationale E F, che fa la larghezza F M. onde la F M è rationale, & in lunghezza incommensurabile alla C D. & perche le A G G B sono in potenza solamente commensurabili, sarà la A G in lunghezza incommensurabile alla G B: & però il quadrato della A G è incommensurabile al rettangolo A G B. ma al quadrato della A G sono commensurabili i quadrati delle A G G B: & al rettangolo A G B è commensurabile quello, che è due volte contenuto dalle A G G B. adunque i quadrati delle A G G B sono incommensurabili à quello, che due volte dalle A G G B è contenuto: ma à quadrati delle A G G B è vguale il parallelogrammo C L, & à quello, che è contenuto due volte dalle A G G B è vguale F L. adunque C L è incommensurabile ad L F. & come C L ad L F, cosi è la linea retta C M alla M F: & però la C M in lunghezza è incommensurabile alla M F. & sono amendue rationali. onde le C M M F sono rationali in potenza solamente commensurabili, & la C F è apotome. Dico anchor essere la terza. percioche essendo il quadrato della A G commensurabile al quadrato della G B, sarà il parallelogrammo C H commensurabile al parallelogrammo K L. adunque etiandio la linea retta C K è commensurabile alla K M. & perche de quadrati delle A G G B è proportionale di mezo il rettangolo A G B, & al quadrato della A G è vguale il parallelogrammo C H, & al quadrato della G B vguale K L, & al rettangolo A G B vguale N L; sarà de parallelogrammi C H K L proportionale di mezo N L. e dunque come C H ad N L, cosi N L ad L K. ma come C H ad N L, cosi è la linea retta C K alla N M: & come N L ad L K, cosi la N M alla M K. adunque & come la C K alla N M, cosi la N M alla M K. & però il rettangolo C K M è vguale al quadrato della N M, cioè alla quarta parte del quadrato della F M. il perche sono due linee rette disuguali C M. M F, & alla C M si adatta vn parallelogrammo vguale alla quarta parte del quadrato della F M, che manca della figura quadrata, & la diuide in parti commensurabili; la linea retta C M potrà più, che la M F, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza ad essa commonsurabile: & niuna delle C M M F è in lunghezza cõmensurabile alla proposta rationale C D. adunque la C F è la terza apotome. il quadrato dunque, che si fa dalla seconda apotome della media adattato alla rationale fa per larghezza l'apotome terza.



23. di questo.
7. del secondo.
23. di questo.
Lemma alla 23. di questo.
per le cose dimostrate alla 14. di questo.
1. del sesto: 10. di questo.
74. di questo.
Lemma alla 55. di questo.
1. del sesto. 11. del quinto. 17. del sesto.
18. di questo.
3. diff. delle 3.

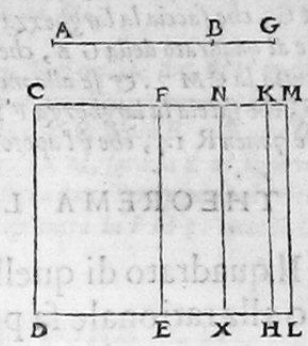
IL COMMANDINO.

Sia la A B R R 882 *men* R R 18, *& la B G* R R 18, *& la rationale C D sia 6; & se alla C D si adatti il parallelogrammo C H, vguale al quadrato della A G, che faccia la larghezza C K, sarà la C K* R 24 $\frac{1}{2}$: *& se si adatti K L vguale al quadrato della G B, che faccia la larghezza K M, sarà la K M* R $\frac{1}{2}$, *& tutta la C M* R 32. *oltre à ciò se alla medesima C D si adatti F X, vguale al rettangolo A G B, che è* R 126, *qual faccia la larghezza F N, sarà la F N* R 3 $\frac{1}{2}$, *& tutta la F M* R 14. *adunque la C F è* R 32 *mẽ* R 14, *che è l'apotome terza.*

THEOREMA LXXVII. PROPOSITIONE CI.

Il quadrato della minore adattato alla rationale fa per larghezza l'apotome quarta.

Sia la minore A B, & la rationale C D. & alla C D adattisi il parallelogrammo C E, vguale al quadrato della A B, che faccia la larghezza C F. Dico la C F essere la quarta apotome. sia la B G aggiunta alla A B. adunque le A G G B sono in potenza incommensurabili, che fanno il composto da quadrati delle A G G B rationale, & quello, che è due volte contenuto da esse medio: & alla C D adatti C H vguale al quadrato della A G, che faccia la larghezza C K & alla K H adattisi K L uguale al quadrato della G B, che faccia la larghezza K M. tutto dunque C L è vguale à quadrati delle A G G B. & è il composto da quadrati delle A G G B rationale. adunque anchor C L è rationale; & è adattato alla rationale C D, che fa la larghezza C M. onde la C M è rationale & in lunghezza commensurabile alla C D. & perche tutto C L è vguale à quadrati delle A G G B, de quali C E è vguale al quadrato della A B, sarà il rimanente F L vguale à quello, che è due volte contenuto dalle A G G B. la onde seghisi la F M per mezo nel punto N, & per N tirisi N X parallela ad vna di esse C D M L. adunque amendue li parallelogrammi F X N L sono vguali à quello, che è contenuto dalle A G G B. & perche quello, che è due volte contenuto dalle A G G B è medio, & vguale al parallelogrammo L F, sarà anchor L F medio: & è adattato alla rationale F E, che fa la larghezza F M. adunque la F M è rationale & alla C D in lunghezza incommensurabile. & perche il composto da quadrati delle A G G B è rationale, & quello, che è due volte contenuto dalle A G G B medio, saranno i quadrati delle A G G B incommensurabili à quello, che due volte è contenuto dalle A G G B. & à quadrati delle A G G B è vguale il parallelogrâmio C L, & à quello, che due volte è contenuto dalle A G G B è vguale F L. adunque C L è incommensurabile ad L F. ma come C L ad L F, cosi la C M alla M F. onde la C M è incommensurabile alla M F in lunghezza, & sono amendue rationali. adunque le C M M F sono rationali in potenza solamente commensurabile, & per tal cagione la C F è apotome. Dico anchor essere la quarta. percioche essendo le A G G B in potenza incommensurabili, sarà il quadrato della A G incommensurabile al quadrato della G B. & al quadrato della A G è vguale il parallelogrammo C H: & al quadrato delle G B vguale K L. è dunque C H incommensurabile à K L. ma come C H à K L, cosi è la C K alla K M. adunque la C K è in lunghezza incommensurabili alla K M. & perche de quadrati delle A G G B è proportionale di mezo il rettangolo A G B. & al quadrato della A G è vguale il parallelogrammo C H, & al quadrato della G B vguale K L, & al rettangolo A G B vguale N L, sarà N L proportionale in mezo de parallelogrâmi C H K L. adunque come C H ad N L, cosi N L ad L K. ma come C H ad N L cosi è la C K alla M N. & come N L a L K, cosi la N M alla M K. adûque come la C K alla M N, cosi la N M alla M K: & però il rettangolo C K M è vguale al quadrato della N M, cioè alla quarta parte del quadrato della F M. la onde perche sono due linee rette disuguali C M M F, & alla C M si è adattato vn parallelogrammo vguale alla quarta parte del quadrato della F M. che manca della figura quadrata, qual è C K M, & la diuide in parti incommensurabili; la linea retta C M potrà più, che la M F quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza incômensurabile ad essa. & è tutta la C M in lunghezza cômensurabile alla proposta rationale C D. adun-



7. di questo.

21. di questo.

7. del secondo.

23. di questo.

1. del sesto.

10. di questo.

74. di questo.

1. del sesto.

10. di questo.

Lemma alla 55. di questo.

1. del sesto.

11. del quinto.

17. del sesto.

19. di questo.

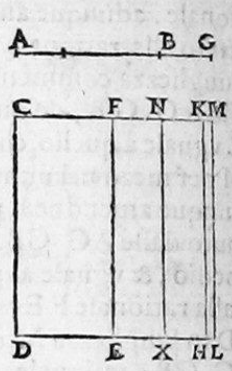
que la C F e l'apotome quarta. & però il quadrato della minore adattato alla rationale fa per larghezza l'apotome quarta.

IL COMMANDINO.

Sia la A B R *V* 21 *più* R 315 *men* R *V* 21 *più* R 315, *la B G* R *V* 21 *men* R 315, *& la rationale C D sia* 6. *& se alla C D si adatti il parallelogrammo C H vguale al quadrato della A G, che faccia la larghezza C K, sarà la C K* 3 $\frac{1}{2}$, *più* R 8 $\frac{3}{4}$. *& se si adatti K L vguale al quadrato della G B, che faccia la larghezza K M, sarà la K M* 3 $\frac{1}{2}$ *meno* R 8 $\frac{3}{4}$: *& tutta la C M* 7. *& se alla medesima C D si adatti F X, vguale al rettangolo A G B cioè* R 126, *che faccia la larghezza F N. sarà la F N* R 3 $\frac{1}{2}$, *& tutta la F M* R 14. *adunque la C F è* 7 *men* R 14, *che è l'apotome quarta.*

THEOREMA LXXVIII. PROPOSITIONE CII.

Il quadrato di quella, che col rationale fa il tutto medio adattato alla rationale fa per larghezza l'apotome quinta.



Sia quella che col rationale fa il tutto medio A B, la rationale C D, & alla C D adattisi il parallelogrammo CE, vguale al quadrato della A B, che faccia la larghezza C F. Dico C F essere l'apotome quinta, sia la B G aggiunta alla A B. adunque le linee rette A G G B sono in potenza incommensurabili, che fanno il composto dalli lor quadrati medio, & quello, che è due vólte da esse contenuto rationale; & alla C D adattisi il parllelogrammo C H, vguale al quadrato della A G, che faccia la larghezza CK: & alla medesima adattisi K L vguale al quadrato della G B, che faccia la larghezza K M. tutto dunque C L è vguale à quadrati delle A G G B. ma il composto da quadrati delle A G G B è medio. onde il parallelogrammo CL anchor è medio. & è adattato alla rationale CD, che fa la larghezza CM. & perciò la C M è rationale, & in lunghezza incommensurabile alla C D. & perche tutto C L è vguale à quadrati delle A G G B; de quali C E è vguale al quadrato della A B; sarà il rimanente F L vguale à quello, che è due volte contenuto dalle A G G B. la onde seghisi la F M per mezo nel punto N: & da N tirisi la N X parallela ad vna di esse C D M L. amendue dunque i parallelogrammi F X N L sono vguali à quello, che è contenuto dalle A G G B. & perche quello, che e due volte contenuto dalle A G G B e rationale, & vguale al parallelogrammo F L, sarà anchor F L rationale. & e adattato alla rationale E F, che fa la larghezza F M. adunque la F M e rationale, & alla C D in lunghezza commensurabile. ma il parallelogrammo C L e medio, & F L rationale. onde C L e commensurabile ad L F. & come C L ad L F, cosi la C M alla M F. adũque la C M e in lunghezza incommensurabile alla M F, & amẽdue sono rationali. le C M M F dunque sono rationali in potenza solamente commensurabili. & però la C F e apotome. Dico etiandio esser la quinta. percioche similmente dimostreremo il rettangolo C K M esser vguale al quadrato della M N, cioe alla quarta parte del quadrato della F M. & essendo il quadrato della A G incommensurabile al quadrato della G B, & il quadrato della A G vguale al parallelogrammo C H, & il quadrato della G B vguale à K L; sarà C H incommensurabile à K L. ma come C H à K L, cosi la C K alla K M. adunque la C K e in lunghezza incommensurabile alla K M. perche dunque due linee rette C M M F sono disuguali, & alle C M e adattato vn parallelogrammo vguale alla quarta parte del quadrato della F M, che mancha della figura quadrata, & la diuide in parti incommensurabili, la li-

nea

78. di questo.
23. di questo.
7. del secondo.
21. di questo.
1. del sesto.
10. di questo.
74 di questo.
1. del sesto.
10. di questo.
9. di questo.

nea retta G M potrà più, che la M F, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza incommensurabile ad essa; & la F M aggiunta è in lunghezza commensurabile alla proposta rationale C D. onde C F è apotome quinta. adunque il quadrato di quella, che col rationale fa il tutto medio adattato alla rationale fa per larghezza l'apotome quinta. 5. diff. d. 13.

IL COMMANDINO.

Sia la A B R V R 288 più R 207, men R V R 288 men R 207, la B G R V R 288 men R 207, & la rationale C D sia 6. & se alla C D si adatti il parallelogrammo C H vguale al quadrato della A G, che faccia la larghezza C K, sarà la C K R 8 più R 5 $\frac{3}{4}$. & se si adatti K L vguale al quadrato della G B, che faccia la larghezza K M, sarà la K M R 8 men R 5 $\frac{3}{4}$. & tutta la C M R 32. oltre à ciò se alla medesima C D si adatti F X vguale al rettangolo A G B, che faccia la larghezza F N, sarà la F N, 1 $\frac{1}{2}$; & tutta la F M 3. onde la C F è R 32 men 3, che è l'apotome quinta.

THEOREMA LXXIX. PROPOSITIONE CIII.

Il quadrato di quella, che col medio fa il tutto medio, adatto alla rationale fa per larghezza l'apotome sesta.



Sia quella che col medio fa il tutto medio A B: & la rationale C D, & alla C D adattisi il parallelogrammo C E vguale al quadrato della A B, che faccia la larghezza C F. Dico C F essere l'apotome sesta. sia la B G aggiunta alla A B, adunque le A G G B sono in potenza incommensurabili, che fanno il composto dalli quadrati loro medio, & quello, che è due volte contenuto dalle A G G B medio. & anchor incommensurabile à quadrati di esse. onde adattisi alla C D il parallogrammo C H, vguale al quadrato della A G, che faccia la larghezza C K. & adattisi K L vguale al quadrato della B G, che faccia la larghezza K M. tutto dunque C L è vguale à quadrati delle A G G B. & però C L è medio, & è adattato alla rationale C D, che fa la larghezza C M. onde la C M è rationale & in lunghezza incommensurabile alla C D. perche dunque C L è vguale à quadrati delle A G G B, de quali C E è vguale al quadrato della A B; sarà il rimanente F L vguale à quello, che è due volte contenuto dalle A G G B. & quello, che due volte è contenuto dalle A G G B è medio: adunque anchor F L è medio, & è adattato alla rationale F E, che fa la larghezza F M. e dunque la F M rationale, & alla C D in lunghezza incommensurabile. & perche i quadrati delle A G G B sono incommensurabili à quello, che e due volte contenuto dalle A G G B, & il parallelogrammo C L e vguale à quadrati delle A G G B, & à quello, che due volte e contenuto dalle A G G B e vguale F L; sarà C L incõmensurabile ad L F. ma come C L ad L F, così la C M alla M F. onde la C M è in lunghezza incommensurabile alla M F. & amendue sono rationali. adunque le C M M F sono rationali in potenza solamente commensurabili: & però la C F è apotome. Dico anchora esser la sesta: perche F L e vguale à quello, che e due volte contenuto dalle A G G B, seghisi la F M per mezo nel punto N, & per N tirisi la N X parallela alla C D. adunque amendue i parallelogrammi F X N L sono vguali al rettangolo A G B, & perche le A G G B sono in potenza incommensurabili, sarà il quadrato della A C incommensurabile al quadrato della B G. ma

al quadrato della A G è vguale il parallelogrammo CH; & al quadrato della BG è vguale K L. adunque C H è incommensurabile à K L. ma come C H à K L, così è la C K alla K M. la C K dunque alla K M è incommensurabile. & essendo de quadrati delle A G G B proportionale in mezo il rettangolo AGB; & al quadrato della A G vguale C H; & al quadrato della G B vguale KL; & al rettangolo A G B vguale N L: sarà anchora de parallelogrammi C H K L proportionale di mezo N L. & per la medesima ragione la C M potrà più, che la M F, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza ad essa incommensurabile. & niuna di esse è in lunghezza commensurabile alla proposta rationale C D. onde C F è l'apotome sesta. il quadrato dunque di quella, che col medio fa il tutto medio, adattato alla rationale fa per larghezza l'apotome sesta.

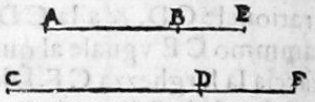
IL COMMANDINO.

Sia la A B R̃ V. R 396 piu R̃ 288. men R̃ V. R̃ 396 men R̃ 288. la B G R̃ V. R̃ 396 men R̃ 288. & la rationale C D sia 6. & se alla C D si adatti il parallelogrammo C H, che faccia la larghezza C K, sarà la C K R̃ 11 piu R̃ 8, & se si adatti K L vguale al quadrato della G B, che faccia la larghezza K M, sarà la K M R̃ 11 men R̃ 8. & tutta la C M R̃ 44. poi se alla C D si adatti F X vguale al rettangolo A G B, che faccia la larghezza F N, quella sarà R̃ 3, & tutta la F M R̃ 12. adunque la C F è R̃ 44 men R̃ 12, che è l'apotome sesta.

THEOREMA LXXX. PROPOSITIONE CIIII.

La linea retta commensurabile in lunghezza all'apotome, anchor ella è apotome del medesimo ordine.

Sia la A B apotome, & ad essa A B sia in lunghezza commensurabile la C D. Dico la C D essere apotome, & del medesimo ordine, che la A B. Percioche essendo la A B apotome, aggiungasi ad essa la B E. adunque le A E E B sono rationali in potenza solamente commensurabili. & facciasi la proportione della B E alla D F la medesima che è della A B alla C D. onde come vna è ad vna, così saranno tutte à tutte. è dunque, come la A B alla C D, così la A E alla C F. & la A B è in lunghezza commensurabile alla C D. adunque etiandio la A E sarà in lunghezza commensurabile alla C F. & la B E alla D F. & sono le A E E B rationali in potenza solamente commensurabili. onde anchor le E F F D saranno rationali in potenza solamente commensurabili. & però la C D è apotome. Dico altresì essere del medesimo ordine. percioche essendo come la A E alla C F, così la B E alla F D, sarà permutandosi come la A E alla E B, così la C F alla F D. ò vero dunque la A E può più, che la E B, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza ad essa commensurabile, ò vero incommensurabile. & se commensurabile, anchor la C F potrà più, che la F D, quãto è il quadrato della linea retta in lunghezza commensurabite ad essa. & se la A E in lunghezza e commensurabile alla proposta rationale, etiandio la C F sarà commensurabile in lunghezza alla proposta rationale. & se la E B e commensurabile, anchora la D F sarà commensurabile; & se niuna di esse A E E B e in lunghezza commensurabile alla proposta rationale, niuna anche delle C F F D sarà in lunghezza commensurabile alla medesima. & se A E può più, che la E B, quanto e il quadrato della linea retta in lunghezza ad essa incommensurabile, anchor la C F potrà più, che la F D quanto e il quadrato della linea retta in lunghezza commensurabile ad essa. & se la A E in lũghezza e commensurabile alla proposta rationale, etiandio la C F sarà commensurabile in lunghezza alla proposta rationale; & se la B E e commensurabile, anchor la D F sarà commensurabile. & se niuna di esse A E E B e in lunghezza commensurabile alla proposta rationale, niuna anchora delle C F F D sarà in lunghezza commensurabile alla medesima. adunque la C D e apotome & del medesimo ordine, che la A B.



74. di questo
12. del quinto.
10. di questo.
A
B
74. di questo

IL COMMANDINO.

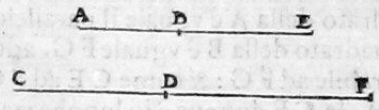
Et la BE alla DF] *Perche come la AE alla CF, cosi la AB alla CD, sarà anchor la rimanente BE alla DF, come la AE alla CF, cioè come la AB alla CD. è dunque etiandio la BE in lunghezza commensurabile alla DF.* A

Onde anchor le CF FD saranno rationali in potenza solamente commensurabili] *Perche essendo come la AE alla CF, cosi la BE alla DF, sarà permutandosi come la AE alla EB, cosi la CF alla FD. & sono le AE EB rationali, in potenza solamente commensurabili. adunque anchor le CF FD saranno rationali in potenza solamente commensurabili.* B

THEOREMA LXXXI. PROPOSITIONE CV.

La linea retta commensurabile all'apotome della media, anchor ella è apotome della media & del medesimo ordine.

Sia l'apotome della media AB: & alla AB in lunghezza commensurabile sia la CD. Dico la CD essere apotome della media & del medesimo ordine. Perche la AB è apotome della media, sia la BE aggiunta alla AB. adunque le AE EB sono medie, in potenza solamente commensurabili. & facciasi come la AB alla CD, cosi la BE alla DF. & sono le AE EB medie in potenza solamente commensurabili. onde le CF FD saranno medie commensurabili in potenza solamente. & però la CD è apotome della media. Si ha da dimostrare, che è del medesimo ordine, che la AB. percioche essendo come la AE alla EB, cosi la CF alla FD; & come la AE alla EB, cosi il quadrato della AE al rettangolo AEB; & come la CF alla FD, cosi il quadrato della CF al rettangolo CFD: sarà etiandio come il quadrato della AE al rettangolo AEB, cosi il quadrato della CF al rettangolo CFD. ma il quadrato della AE è commensurabile al quadrato della CF. adunque il rettangolo AEB è commensurabile al rettangolo CFD. & se il rettangolo AEB è rationale, anchor il rettangolo CFD sarà rationale; & se il rettangolo AEB è medio, sarà medio etiandio il rettangolo CFD. adunque la CD è apotome della media, & del medesimo ordine, che la AB.



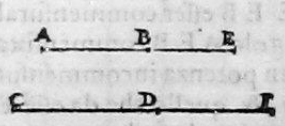
75. 76. di que.

Lemma alla 23. di questo.

THEOREMA LXXXII. PROPOSITIONE CVI.

La linea retta commensurabile alla minore, anchor essa è minore.

Sia la minore AB; & ad essa commensurabile la CD. Dico anchor la CD esser minore. facciansi le medesime cose, che disopra. & perche le AE EB sono incommensurabili in potenza, saranno anchora le CF FD in potenza incommensurabili. & è come la AE alla EB, cosi la CF alla FD. adũque etiandio come il quadrato della AE al quadrato della EB, cosi il quadrato della CF al quadrato della FD. & componendosi come i quadrati delle AE EB al quadrato della EB, cosi i quadrati delle CF FD al quadrato della FD, & per-



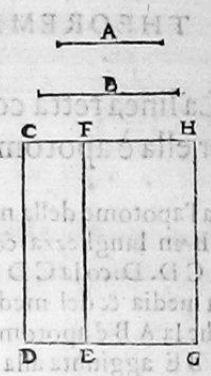
77. di questo.

22. di questo.

mutandoſi. ma il quadrato della B E è commenſurabile al quadrato della D F. onde anchor il compoſto da quadrati delle A E E B ſarà commenſurabile al compoſto da quadrati delle C F F D. ma il compoſto da quadrati delle A E E B è rationale. adunque etiandio il compoſto da quadrati delle C F F D ſarà rationale. oltre à ciò perche come il quadrato della A E al rettangolo A E B, coſi è il quadrato della C F al rettangolo C F D; & permutandoſi; & è il quadrato della A E commenſurabile al quadrato della C F: ſarà anchor il rettangolo A E B commenſurabile al rettangolo C F D. ma il rettangolo A E B è medio. adunque anchora ſarà medio il rettangollo C F D; & però le C F F D ſono in potenza incõmenſurabili, che fanno il compoſto dalli quadrati loro rationale; & quello, che da eſſe ſi contiene, medio. la C D dunque è minore.

77. di queſto.

IN ALTRO MODO. Sia la minore A, & alla A ſia commenſurabile la B. Dico la B eſſer minore. propongaſi la rationale C D, & alla C D adattiſi il parallelogrammo C E vguale al quadrato della A, che faccia la larghezza C F. adunque la C F è apotome quarta. & alla F E adattiſi il parallelogrammo F G, vguale al quadrato della B, che faccia la larghezza F H. perche dunque la A è commenſurabile alla B, ſarà anchor il quadrato della A commenſurabile al quadrato della B, ma al quadrato della A è vguale il parallelogrammo C E, & al quadrato della B è vguale F G. adunque C E è cõmenſurabile ad F G: & come C E ad F G, coſi è la C F alla F H. la C F dunque è in lunghezza commenſurabile alla F H. ma la C F è apotome quarta, onde anchora F H ſarà l'apotome quarta. & lo ſpatio F G è contenuto dalla rationale & dall'apotome quarta. adunque la linea retta, che può detto ſpatio è minore. & la B può lo ſpatio F G. onde la B è minore.



101. di queſto.

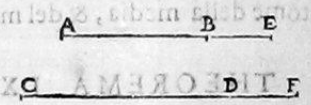
104 di queſto.

95 di queſto.

THEOREMA LXXXIII. PROPOSITIONE CVII.

La linea retta commenſurabile à quella, che col rationale fa il tutto medio, è medeſimamente quella, che col rationale fa il tutto medio.

Sia la A B quella, che col rationale fa il tutto medio, & ad eſſa ſia commenſurabile la C D. Dico la C D eſſere quella, che col rationale fa il tutto medio. ſia la B E aggiunta alla A B. adunque le A E E B ſono in potenza incommẽſurabili, che fanno il compoſto dalli loro quadrati medio, & quello che da eſſe è contenuto rationale. & faccianſi le medeſime coſe, che diſopra. ſi dimoſtrerà ſimilmente, come prima le C F F D eſſere nella medeſima proportione, che le A E E B, & il compoſto da quadrati delle A E E B eſſer commenſurabile al compoſto da quadrati delle C F F D; & il rettangolo A E B commenſurabile al rettangolo C F D. onde anchor le C F F D ſono in potenza incommenſurabili, che fanno il compoſto dalli loro quadrati medio, & quello che da eſſe è contenuto rationale. adunque la C D è quella, che col rationale fa il tutto madio.



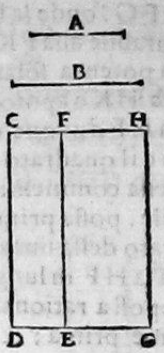
78. di queſto.

78. di queſto.

IN ALTRO MODO. Sia quella, che col rationale fa il tuttto medio A. & alla A ſia cõmenſurabile la B. Dico la B eſſer quella, che col rationale fa il tutto medio. propongaſi la rationale C D: & alla C D adattiſi il parallelogrammo C E vguale al quadrato della A, che faccia la larghezza C F. adunque la C F è apoto-

102 di queſto.

me quinta. & alla F E adattiſi il parallelogrammo F G vguale al quadrato della B, che faccia la larghezza F H. perche dunque la A è commenſurabile alla B, ſarà anchor il quadrato della A commenſurabile al quadrato della B. ma al quadrato della A è vguale il parallelogrammo C E: & al quadrato della B è vguale F G. adunque C E è commenſurabile ad F G: & però la linea retta C F in lunghezza è commenſurabile alla F H. ma C F è l'apotome quinta. adunque anchor F H ſarà l'apotome quinta. & la F E è rationale. & ſe vn ſpatio ſia contenuto alla rationale, & dall'apotome quinta, la linea retta, che può detto ſpatio è quella, che col rationale fa il tutto medio. ma la B può il ſpatio F G. adunque la B è quella, che col rationale fa il tutto medio.



101. di queſto.

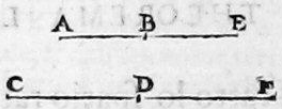
104. di queſto.

96. del quinto.

THEOREMA LXXXIIII. PROPOSITIONE CVIII.

La linea retta commenſurabile à quella, che col medio fa il tutto medio, è altresì quella, che col medio fa il tutto medio.

Sia quella, che col medio fa il tutto medio A B, & alla A B ſia commenſurabile la C D. Dico la C D eſſer quella, che col medio fa il tutto medio. Sia la B E aggiunta alla A B: & conſtituiſcanſi le medeſime coſe. adunque le A E E B ſono in potenza incommenſurabili, che fanno il compoſto dalli lor quadrati medio, & quello, che è contenuto da eſſe, medio, & incommenſurabile al compoſto dalli quadrati loro. & ſono le A E E B commenſurabili alle C F F D, come ſi è dimoſtrato. & il compoſto da quadrati delle A E E B è commenſurabile al compoſto da quadrati delle C F F D: & il rettangolo A E B al rettangolo C F D. adunque le C F F D ſono in potenza incommenſurabili, che fanno il compoſto dalli lor quadrati medio, & quello, che da eſſe è contenuto, medio, & incommenſurabile al compoſto dalli quadrati loro. adunque la C D è quella, che col medio, fa il tutto medio.



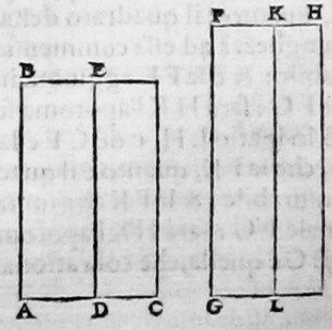
79. di queſto.

79. di queſto.

THEOREMA LXXXV. PROPOSITIONE CIX.

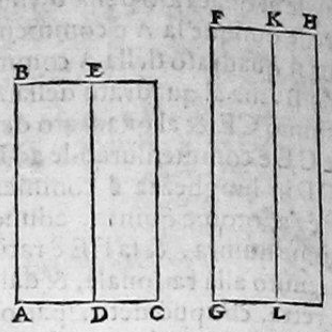
Tratto lo ſpatio medio dal rationale, la linea retta, che può lo rimanente ſpatio è vna delle due irrationali, ò apotome, ò minore.

Dallo ſpatio rationale B C traggaſi il medio B D. Dico, quella, che può lo rimanente ſpatio E C eſſere vna delle due irrationali, ò apotome, ò minore. Propongaſi la rationale F G: & alla F G adattiſi G H vguale al parallelogrammo B C, & traggaſi G K vguale al parallelogrammo B D. il rimanente dunque C E è vguale ad L H. Onde perche B C è rationale, & B D medio; & è B C vguale à G H, & B D à G K, ſarà G H rationale, & G K medio: & è adattato alla rationale F G. adunque F H è rationale, & in lunghezza commenſurabile alla F G; & la



21. di queſto.

23. di queſto. 13 di queſto. FK rationale, & in lunghezza incommenſurabile alla FG. onde la FH in lunghezza e incommenſurabile alla FK; & le HF FK ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabili. & 64. di queſto. però la HK e apotome, & ad eſſa e aggiunta la KF. la HF dunque ò vero può più che la FK, quãto e il quadrato della linea retta in lunghezza ad eſſa commenſurabile, ò uero incommenſurabile. poſſa primieramente più, quanto è il quadrato della linea retta commenſurabile: & è tutta la HF in lunghezza commenſurabile al- 1. diff. delle 3. la propoſta rationale FG. adunque la HK è apotome prima; & la linea retta, che può lo

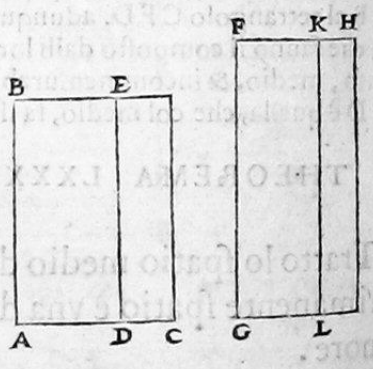


ſpatio contenuto dalla rationale, & dall'apotome prima è apotome. quella dunque che può LH, cioe CE e apotome, & ſe la HF poſſa piu, che la FK, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza ad eſſa incommenſurabile; & tutta la HF è in lunghezza commenſurabile alla propoſta rationale FG; ſara la HK 92. di queſto. apotome quarta; & quella, che può lo ſpatio contenuto dalla rationale & dal- 4. diff. delle 3. l'apotome quarta è la minore. onde quella, che può lo ſpatio LH, cioè EC 95. di queſto. è la minore.

THEOREMA LXXXVI. PROPOSITIONE CX.

Tratto lo ſpatio rationale dal medio ſi fanno altre due linee irrationali, ò l'apotome prima della media, ò vero quella, che col rationale fa il tutto medio.

Dal medio BC traggaſi il rationale BD. Dico la linea retta, che può lo rimanente ſpatio EC eſſere vna delle due irrationali, ò la prima apotome della media, ò quella, che col rationale fa il tutto medio. propongaſi la rationale FG: & ad eſſa ſimilmente adattinſi li ſpatij, ſarà la 23. di queſto. FH rationale, & in lunghezza incommen- 21. di queſto. ſurabile alla FG: & la FK è rationale, & in lunghezza commenſurabile alla FG. adunque le HF FK ſono rationali in poten- 74. di queſto. za ſolamente commenſurabili. & però la HK è apotome; & ad eſſa è aggiunta la KF. onde la HF ò uero può più, che la FK, quanto è il quadrato della linea retta

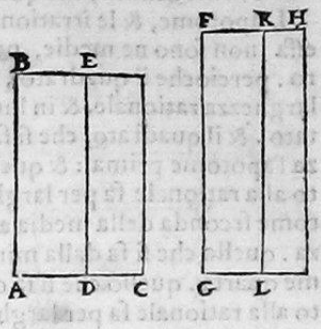


in lunghezza ad eſſa commenſurabile, ò vno incommenſurabile. & ſe commenſurabile: & è la FK aggiunta in lunghezza commenſurabile alla propoſta rationale FG: ſarà HK l'apotome ſeconda. & la FG è rationale. adunque quella, che 2. diff. delle 3. può lo ſpatio LH, cioè CE è la prima apotome della media. & ſe la HF può piu, che la FK, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza ad eſſa incommenſurabile: & la FK aggiunta è in lunghezza commenſurabile alla propoſta ra- 93. di queſto. tionale FG: ſarà HK l'apotome quinta. adunque la linea retta, che può lo ſpa- 5. diff. delle 3. tio EC è quella, che col rationale fa il tutto medio. 96. di queſto.

THEOREMA LXXXVII. PROPOSITIONE CXI.

Tratto lo ſpatio medio dal medio, che ſia incommenſurabile al tutto, ſi fanno le due rimanenti irrationali, ò l'apotome ſeconda della media, ò vero quella, che col medio fa il tutto medio.

Traggaſi come nelle propoſte figure, dallo ſpatio medio B C il medio B D, che ſia incommenſurabile al tutto. Dico la linea retta, che può lo ſpatio C E eſſere vna delle due irrationali, ò l'apotome ſeconda della media, ò quella, che col medio fa il tutto medio. percioche eſſendo l'vno & l'altro B C B D medio, & B C incommenſurabile à B D, cioè G H à G K; ſarà la H F in lunghezza incommenſurabile alla F K. adunque le H F F K ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabili: & però la H K è apotome, & la K F e aggiunta ad eſſa. onde la H F, ò vero può più, che la F K, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza ad eſſa commenſurabile, ò vero in commenſurabile. & ſe commenſurabile, & niuna di eſſe H F F K è in lunghezza commenſurabile alla propoſta rationale F G, ſarà H K l'apotome terza. & la K L è rationale: & il rettangolo contenuto dalla rationale, & dall'apotome terza è irrationale. adunque la linea retta, che può lo detto ſpatio è irrationale, che ſi chiama apotome ſeconda della media. & ſe la H F può più, che la F K quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza incommenſurabile ad eſſa, & niuna delle H F F K è in lunghezza commenſurabile alla propoſta rationale F G, ſarà H K l'apotome ſeſta. ma la linea retta, che può lo ſpatio contenuto dalla rationale, & dall'apotome ſeſta è quella, che col medio fa il tutto medio. adunque quella, che può lo ſpatio L H, cioè E C e quella, che col medio fa il tutto medio.

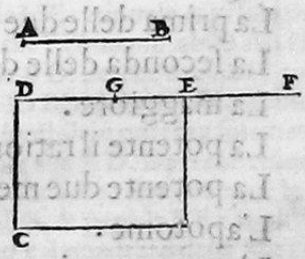


23. di queſto.
74. di queſto.
3. diff. delle 3.
94. di queſto.
6. diff. delle 3.
97. di queſto.

THEOREMA LXXXVII I. PROPOSITIONE CXII.

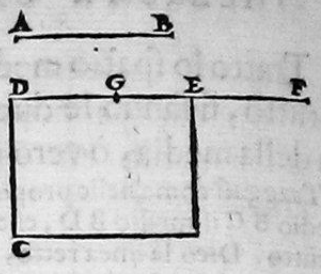
L'apotome non è la medeſima, che quella di due nomi.

Sia l'apotome A B. Dico la A B non eſſere la medeſima, che quella di due nomi. ſia s'egli è poſsibile: & propongaſi la rationale D C; & alla D C adattiſi il rettangolo C E vguale al quadrato della A B, che faccia la larghezza D E. perche dunque la A B è apotome, ſarà D E l'apotome prima. ſia la E F aggiunta ad eſſa. adunque le D F F E ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabili, & la D F può più, che la F E, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza commenſurabile ad eſſa: & la D F è in lunghezza commenſurabile alla propoſta rationale C D. oltre à ciò perche la A B è di due nomi, ſarà D E la prima di due nomi. diuidaſi ne ſuoi nomi al punto G: & ſia D G il maggior nome. adunque le D G G E ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabili: & la D G può più, che la G E, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza ad eſſa commenſurabile: & la maggiore D G è in lunghezza commenſurabile alla propoſta rationale D C. onde la D F è in lunghezza commenſuraaile alla D G: & però ſarà anchor commenſurabile alla rimanente F G. perche dunque la D F è commenſurabile alla F G, & è rationale, ſarà



98. di queſto.
1. diff. delle 3.
61. di queſto.
37. di queſto.
12. di queſto.
per le coſe dimoſtrate alla 17. di queſto.

etiandio rationale la F G. poi perche la D F è in lunghezza commenſurabile alla F G; & è in lunghezza incommenſurabile alla F E, ſarà anchor la F G alla F E in lunghezza incommenſurabile. & ſono rationali. adunque le G F F E ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabili. & però la E G è apotome. ma è anchora rationale; che non può eſſere. adunque l'apotome non è la medeſima, che quella di due nomi.



74. di queſto.

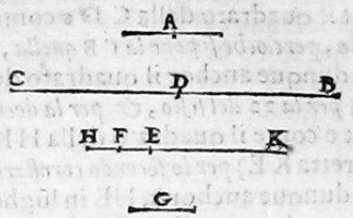
L'apotome, & le irrationali, che ſono doppo eſſa, non ſono ne medie, ne le medeſime fra loro. percioche il quadrato, che ſi fa dalla media, adattato alla rationale, fa la larghezza rationale, & in lunghezza incommenſurabile à quella, alla quale è adattato. & il quadrato, che ſi fa dall'apotome, adattato alla rationale fa per larghezza l'apotome prima: & quello, che ſi fa dall'apotome prima della media adattato alla rationale fa per larghezza l'apotome ſeconda, & quello che ſi fa dall'apotome ſeconda della media adattato alla rationale, fa per larghezza l'apotome terza. quello che ſi fa dalla minore adattato alla rationale fa per larghezza l'apotome quarta. quello che ſi fa da quella, che col rationale fa il tutto medio, adattato alla rationale fa per larghezza l'apotome quinta. quello, che ſi fa da quella, che col medio fa il tutto medio adattato alla rationale, fa per larghezza l'apotome ſeſta. perche dunque le dette larghezze ſono differenti, coſi della prima, come anchor fra loro; dalla prima eſſendo rationale; fra loro, non eſſendo del medeſimo ordine, è manifeſto etiandio eſſe rationali fra loro eſſere differenti. & ſi è dimoſtrato l'apotome non eſſere la medeſima, che quella di due nomi. & i quadrati dell'apotome, & di quelle che ſono doppo l'apotome, adattati alla rationale, fanno l'apotome del medeſimo ordine, de cui ſono quelle, i quadrati delle quali ſi adattano. ſimilmente anchora i quadrati di quella, che è di due nomi, & di quelle, che ſono doppo eſſa adattati alla rationale fanno per larghezza quelle di due nomi del medeſimo ordine, di cui eſſe ſono. adunque le linee rette, che ſeguono l'apotome, & quella di due nomi ſono fra loro differenti, talmente che tutte ſono di numero tredici, cio è

23. di queſto.
98. di queſto.
99. di queſto.
100. di queſto.
101. di queſto.
102. di queſto.
103. di queſto.

1 Media.
2 Quella di due nomi.
3 La prima delle due medie.
4 La ſeconda delle due medie.
5 La maggiore.
6 La potente il rationale & medio.
7 La potente due medij.
8 L'apotome.
9 L'apotome prima della media.
10 L'apotome ſeconda della media.
11 La minore.
12 Quella, che col rationale fa il tutto medio.
13 Quella, che col medio fa il tutto medio.

THEOREMA LXXXIX. PROPOSITIONE CXIII.

Il quadrato della rationale adattato à quella di due nomi fa per larghezza l'apotome, li cui nomi ſono commenſurabili alli nomi di quella, che è di due nomi, & nella medeſima proportione. & oltre à ciò l'apotome, che ſi fa tiene il medeſimo ordine che quella, che è di due nomi.



Sia la rationale A, quella che è di due nomi B C, il cui nome maggiore C D, & al quadrato della A ſia vguale il rettangolo contenuto dalle B C E F. Dico la E F eſſere apotome, li cui nomi ſono cõmenſurabili alle C D D B, & nella medeſima proportione. & anchora la E F eſſere del medeſimo ordine, che la B C. ſia ſimilmẽte il rettangolo contenuto dalle D B & G vguale al quadrato della A. perche dunque il rettangolo contenuto dalle B C E F è vguale à quello, che è contenuto dalle B D G; ſarà come la C B alla B D, coſi la G alla E F, & la C B è maggiore, che la B D. adunque etiandio la G ſarà maggiore, che la E F. ſia alla G vguale la E H. è dunque come la C B alla B D, coſi la H E alla E F. & diuidendoſi come la C D alla D B, coſi la H F alla F E. facciaſi come la H F alla F E, coſi la F K alla K E. onde anchor tutta la H K à tutta la K F è come la F K alla K E; percioche come vno de gli antecedenti ad vno de conſeguenti, coſi tutti gli antecedenti à tutti i conſeguenti. ma come la F K alla K E, coſi la C D alla D B. come dunque la H K alla K F, coſi la C D alla D B. & il quadrato della C D è commenſurabile al quadrato della D B. adunque anchor il quadrato della H K è commenſurabile al quadrato della K F. & è come il quadrato della H K al quadrato della K F, coſi la linea retta H K alla retta K E, percioche tre linee rette H K K F K E ſono continuatamente proportionali: & però la H K è in lunghezza commenſurabile alla K E. adunque anchor la H E in lunghezza è commenſurabile alla E K. & per che il quadrato della A è vguale à quello, che ſi contiene dalla H E B D, & il quadrato della A è rationale; ſarà anchor quello, che ſi contiene dalla H E B D rationale: & è adattato alla rationale B D. è dunque la H E rationale & in lunghezza commenſurabile alla B D. onde anchor la E K, che è cõmenſurabile alla H E, ſarà rationale, & in lunghezza commenſurabile alla B D. perche dunque è come la C D alla D B, coſi la F K alla K E, & ſono le C D D B in potenza ſolamente cõmenſurabili, ſaranno etiandio le F K K E commenſurabili in potenza ſolamente. & la K E è rationale, & in lunghezza commenſurabile alla B D. il perche etiandio la F K è rationale, & alla C D in lunghezza commenſurabile. ſono dunque le F K K E rationali, & in potenza ſolamente commenſurabili, & però la E F è apotome. adunque la C D ò vero può più, che la D B, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza ad eſſa commenſurabile, ò vero incommenſurabile. & ſe cõmenſurabile, anchora la F K potrà più, che la K E, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza ad eſſa commenſurabile. & ſe la C D è cõmenſurabile in lunghezza alla propoſta rationale, anchor la F K ſarà commenſurabile alla medeſima. & ſe la B D, anchor la K E. & ſe niuna di eſſe C D D B, etiandio niuna delle F K K E. & ſe la C D può più, che la D B, quanto è il quadrato della linea retta incõmenſurabile ad eſſa in lunghezza, anchor la F K potrà più, che la K E, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza ad eſſa incommẽſurabile. & ſe B D, etiandio

A
B
C
D
E
F
G
21. di queſto.
H
K
15. di queſto.

K KE. ma ſe niuna di eſſe CD DB, anchor niuna delle FK KE. adunque la EF è apotome, li cui nomi FK KE ſono cõmenſurabili alli nomi CD DB di quella, che è di due nomi. & nella medeſima proportione, & del medeſimo ordine, che la CB.

IL COMMANDINO.

A Sarà come la C B alla B D, coſi la G alla E F] *per le 14 del ſeſto.*

B Adunque etiandio la G ſarà maggiore, che la E F] *per le coſe, che ſi ſono da noi dimoſtrate alla 16 del quinto.*

C Onde anchor tutta la HK à tutta la KF è come la FK alla KE] *per la 12 del quinto.*

D Et il quadrato della C D è commenſurabile al quadrato della D B] *per la 37 di queſto, percioche ſi pone la C B quella, che è di due nomi.*

E Adunque anchor il quadrato della HK è commenſurabile al quadrato della KF] *per la 22 del ſeſto, & per la decima di queſto.*

F Et è come il quadrato della H K al quadrato della K F, coſi la linea retta HK alla retta K E] *per lo ſecondo corollario della 20 del ſeſto.*

G Adunque anchor la HE in lũghezza è cõmenſuraaile alla E K] *per la 16 di queſto.*

H Il perche etiandio la F K è rationale, & in lunghezza cõmenſurabile alla CD.] *perche dunque è come la C D alla D B, coſi la F K alla K E, ſarà permutandoſi come la K E alla D B, coſi la F K alla C D. ma la K E è in lunghezza commenſurabile alla B D. adunque etiandio la F K ſarà in lunghezza commenſurabile alla C D. & eſſendo le F K K E in potenza commenſurabili, & la K E rationale, ſarà anchora la F K rationale, & alla C D in lunghezza commenſurabile.*

K Adunque la E F è apotome] *per la 74 di queſto.*

Sia la A 2, la C B R 12 più 3, dimodo, che la C D ſia R 12, D B 3. & ſe'l quadrato della A, che è 4 ſi adatti alla D B, che faccia la larghezza G, ſarà la G 1 $\frac{1}{3}$, à cui ſia vguale la H E. facciaſi come la C B alla B D, coſi la H E alla E F, cioè come R 12 più 3 à 3, coſi 1 $\frac{1}{3}$ ad vn'altro. moltiplicheremo dunque 3 per 1 $\frac{1}{3}$, ſi produrrà 4. & diuideremo 4 per R 12 più 3, cioè adatteremo 4 à R 12 più 3. il che ſi farà in queſto modo. moltiplichiſi R 12 più 3 per l'apotome riſpondente ad eſſa, cioè per R 12 men 3, ſi fa 3. poi moltiplichiſi 4 per la medeſima R 12 men 3, ſi fa R 192 men 12. onde per la 17 del ſettimo 3 à R 192 men 12, haurà la medeſima proportione, che R 12 più 3 à 4. & però R 192 men 12 adattata à 3 farà la medeſima larghezza, che 4, ſe ſi adatterà à R 12 più 3. ma R 192 men 12 adattata à 3 fa la larghezza R 21 $\frac{1}{3}$ men 4. il quadrato dunque della rationale 2, cioè 4 adattato à quella, che è la ſeconda di due nomi, cioè à R 12 più 3 fa la larghezza R 21 $\frac{1}{3}$ men 4, che è l'apotome ſeconda, i cui nomi ſono commenſurabili alli nomi C D D B, & nella medeſima proportione.

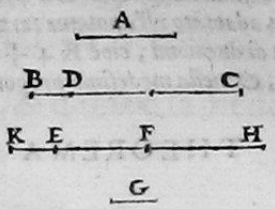
THEOREMA XC. PROPOSITIONE CXIIII.

Il quadrato della rationale adattato all'apotome, fa per larghezza quella di due nomi, li cui nomi ſono commenſurabili alli nomi dell'apotome, & nella medeſima proportione. & oltre à ciò quella, che ſi fa di due nomi ha il medeſimo ordine, che l'apotome.

Sia la rationale A, & l'apotome B D: & quadrato della A ſia vguale quello, che è contenuto dalle B D KH, talmente che il quadrato della rationale A adattato alla B D faccia la larghezza K H. Dico la K H eſſere di due nomi, li cui nomi ſono commenſurabili alli nomi di B D, & nella medeſima proportione, & la K H eſſere del medeſimo ordine, che la B D. ſia la D C aggiunta alla B D. adun

74. di queſto.

que le B C C D ſono rationali in potenza ſolamente commenſurabili. & al quadrato della A ſia vguale quello, che ſi contiene dalle B C C, & il quadrato della A è rationale. adunque quello, che ſi contiene dalle B C G è rationale; & è adattato alla rationale B C. onde la linea retta G è rationale, & in lunghezza commenſurabile alla B C. perche dunque il rettangolo contenuto dalle B C G è vguale à quello, che ſi contiene dalle B D K H; ſarà come la C B alla B D, coſi la K H alla G. & la C B e maggiore, che la B D. adunque la K H anchora è maggiore, che la G ponga ſi la K E vguale alla G. è dunque la K E in lunghezza commenſurabile alla B C. & perche è come la C B alla B D, coſi la H K alla K E, ſarà per la conuerſione del la proportione come la B C alla C D, coſi la K H alla H E. facciaſi come la K H al la H E, coſi la H F alla F E. adunque etiandio la rimanente K F alla F H e come la K H alla H E, cioè come la B C alla C D. ma le B C C D ſono in potenza ſolamente commenſurabili. onde le K F F H ſaranno commenſurabili in potenza ſolamente. & eſſendo come la K H alla H E, coſi la K F alla F H, & come la K H alla H E, coſi la H F alla F E; ſarà anchora come la K F alla F H, coſi la H F alla F E. come dunque la prima alla terza, coſi il quadrato della prima al quadrato della ſeconda: & però come la K F, alla F E, coſi il quadrato della K F al quadrato della F H. ma il quadrato della K F è commenſurabile al quadrato della F H, perche le K F F H ſono in potenza ſolamente commenſurabili. onde anchor la K F è in lunghezza commenſurabile alla F E; & perciò la F K alla K E è commenſurabile in lunghezza. ma la K E è rationale, & alla B C in lunghezza commenſurabile. adunque la K F ſarà rationale, & in lunghezza commenſurabile alla B C. & perche come la B C alla C D, coſi è la K F alla F H, ſarà permutandoſi come la B C al la K F, coſi la D C alla F H. & la B C è commenſurabile alla K F. onde etiandio la C D alla F H è commenſurabile. & ſono le B C C D rationali in potenza ſolamente commenſurabili. adunque anchor le K F F H ſaranno rationali, & commenſurabili in potenza ſolamente. la K H dunque è di due nomi. & ſe la B C può più, che la C D, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza commenſurabile ad eſſa, anchor la K F potrà più, che la F H quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza ad eſſa commenſurabile. & ſe la B C è in lunghezza commenſurabile alla propoſta rationale, etiandio la K F ſarà commenſurabile alla medeſima. & ſe la C D in lunghezza è commenſurabile alla propoſta rationale, ſarà anchor la F H commenſurabile alla medeſima. & ſe niuna di eſſe B C C D; anchor niuna di eſſe K F F H. ma ſe la B C può più, che la C D quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza ad eſſa incommenſurabile, etiandio la K F potrà più, che la F H, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza incommenſurabile ad eſſa & ſe la B C ſarà commenſurabile in lunghezza alla propoſta rationale, anche la K F ſarà in lunghezza commenſurabile alla medeſima. & ſe la C D, etiandio la F H; & ſe niuna delle B C C D, niuna anchora delle K F F H. adunque la K H è di due nomi, i nomi della quale K F F H ſono commenſurabili à nomi dell'apotome B C G D, & nella medeſima proportione. & la K H è del medeſimo ordine, che la B C.



21. di queſto.

14. del ſeſto. per le coſe dimoſtrate alla 16. del quinto. 19. del quinto.

11. del quinto: Cor. 1. della 20. del ſeſto.

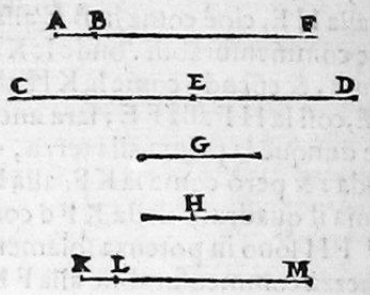
IL COMMANDINO.

Sia la A 2, la B D R 18 men R 10, & moltiplichiſi R 18 men R 10, per quella di due nomi, che riſponde ad eſſa, cioè per R 18 più R 10, ſi produce 8. poi moltiplichiſi il quadrato della rationale A, che è 4 per la medeſima, ſi produce R 288 più R 160. hauerà dunque 8 à R 288 più R 160 la medeſima proportione, che R 18 men R 10 à 4 per la 17 de ſetti mo. la onde ſe R 288 più R 160 ſi adatti ad 8 ſarà la larghezza R 4 + più R 2 +; &

la medeſima larghezza farà 4 ſe ſi adatti è R 18 men R 10. adunque il quadrato della ratio nale 4 adattato all'apotome terza, cioè à R 18 men R 10 fa per larghezza quella, che è la terza di due nomi, cioè R 4 $\frac{1}{2}$ più R 2 $\frac{1}{2}$, li cui nomi ſono commenſurabili à nomi dell'apotome, & nella medeſima proportione.

THEOREMA XCI. PROPOSITIONE CXV.

Se vn ſpatio è contenuto dall'apotome, & da quella di due nomi, li cui nomi ſiano commenſurabili à nomi dell'apotome & nella medeſima proportione; la linea retta, che può detto ſpatio, ſarà rationale.



Sia cõtenuto vn ſpatio dalle A B C D, cioe dall'apotome A B & da quella di due nomi C D, il cui maggior nome ſia C E: & ſiano i nomi di quella C E E D commenſurabili à nomi dell'apotome A F F B, & nella medeſima proportione: & ſia la linea retta G quella, che può lo ſpatio contenuto dalle A B C D. Dico eſſa G eſſere rationale. Propongaſi la rationale H: & alla C D adattiſi vn paral lelogrammo vguale al quadrato della H, che faccia la larghezza K L. e dunque la K L apotome, li cui nomi K M M L ſono commenſurabili à nomi di queſla, che e di due nomi C E E D, & nella medeſima proportione. ma le C E E D ſono commenſurabili alle A F F B, & nella medeſima proportione; & e come la A F alla F B, coſi la K M alla M L: & permutandoſi, come la A F alla K M, coſi la F B alla M L. onde etiandio la rimanente A B alla rimanente K L e come la A F alla K M. & la A F e commenſurabile alla K M. adunque la A B alla K L è commenſurabile: & e come la A B alla K L, coſi il rettangolo contenuto dalle C D A B à quello, che e contenuto dalla C D K L. e dunque il rettangolo contenuto dalle C D A B commenſurabile al rettangolo contenuto dalle C D K L. ma il rettangolo conte nuto dalle C D K L e vguale al quadrato della H. adunque il rettangolo contenuto dalle C D A B al quadrato della H e commeoſurabile: & il rettangolo con tenuto dalle C D A B e vguale al quadrato della G. onde il quadrato della G e commenſurabile al quadrato della H. & il quadrato della H è rationale: & però è rationale il quadrato della G, & eſſa G è ratienale, & può quello, che è contenuto dalle C D A B. ſe dunque vn ſpatio è contenuto dall'apotome & da quella di due nomi, li cui nomi ſiano commenſurabili à nomi dell'apotome, & nella medeſima proportione, la linea rettta, che può detto ſpatio è rationale.

113. di queſto.

19. del quinto.

10. di queſto.

1. del ſeſto:

COROLLARIO.

Dalle coſe già dimoſtrate appare manifeſtamente, che vn ſpa tio rationale può eſſer contenuto da linee rette irrationali.

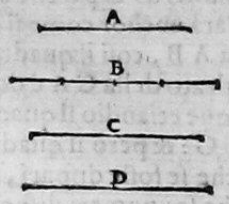
IL COMMANDINO.

Sia l'apotome A B R 21 $\frac{1}{3}$ men 4: & quella di due nomi C D ſia 12 piu 3: & moltipli chiſi R 21 $\frac{1}{3}$ men 4 per R 12 piu 3, ſi fa R 256, che è 16 men 12, cioè 4, che è rationale. & la radice di eſſo 2 è rationale.

THEOREMA XCII. PROPOSITIONE CXVI.

Dalla media ſi fanno infinite irrationali, & niuna è la medeſima, che alcuna delle antecedenti.

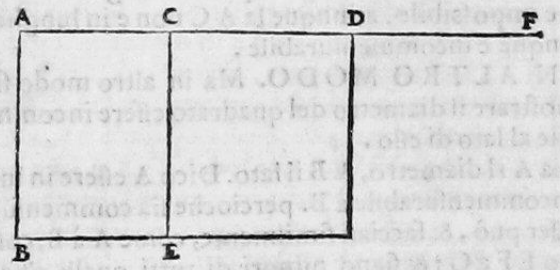
Sia la media A. Dico da eſſa A farſi infinite irrationali, & niuna eſſere la medeſima, che alcuna delle antecedenti. Proponganſi la rationale B: & al rettangolo contenuto dalle A B ſia vguale il quadrato della C. adunque eſſa C è irrationale; percioche quello, che è contenuto dalla rationale, & dalla irrationale, è irrationale, & non è la medeſima, che alcuna delle prime, concioſiacoſa, che il quadrato di alcuna delle antecedenti adattato alla rationale non faccia per larghezza la media. oltre à ciò al rettangolo che è contenuto contenuto dalle B C ſia vguale il quadrato della D. è dunque irrationale quello, che ſi fa dalla D: & però la D è irrationale, & non è la medeſima, che alcuna delle antecedenti, perche ne anche il quadrato di alcuna di quelle, che ſon poſte prima, adattato alla rationale fa per larghezza la C. ſimilmente prolungato in infinito il medeſimo ordine, è manifeſto della media farſi infinite irrationali, & niuna eſſere la medeſima, che alcuna delle antecedenti.



ſcholio alla 35. di queſto.

IN ALTRO MODO.

ſia la media A C. Dico dalla A C farſi infinite irrationali, & niuna eſſere la medeſima, che alcuna delle prime. tiriſi la A B ad angoli retti ſopra la A C: & ſia la A B rationale, & compiſcaſi il parallelogrammo BC. adunque B C è irrationale, & quella, che può eſſo ſpatio è irrationale. poſſalo la linea retta C D. onde la C D è irrationale: non è la medeſima, che alcuna delle prime, percioche ne il quadrato di alcuna delle prime adattato alla rationale fa per larghezza la media. poi compiſcaſi il parallelogrammo E D. ſarà E D irrationale, & irrationale la linea retta, che può detto ſpatio. poſſalo la linea retta D F. adunque la D F è irrationale, & non è la medeſima, che alcuna delle prime, concioſiacoſa, che il quadrato de niuna delle prime, ſe ſi adatti alla rationale, faccia per larghezza la C D. adunque dalla media ſi fanno infinite irrationali, & niuna è la medeſima, che alcune delle prime.



THEOREMA XCIII. PROPOSITIONE CXVII.

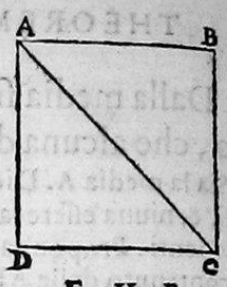
Sia propoſto di dimoſtrare nelle figure quadrate, il diametro al lato eſſere in lunghezza incommenſurabile.

Sia il quadrato A B C D, il cui diametro A C. Dico la A C eſſere in lunghezza in lunghezza incommenſurabile alla A B. percioche ſia commenſurabile, ſe eſſer può. Dico da queſto ſeguitare, il medeſimo numero eſſer pari, & diſpari. onde è manifeſto il quadrato dello A C eſſere doppio del quadrato della A B. & perche la A C è commenſurabile alla A B, hauerà la A C alla A B quella proportione, che

A

B

ha il numero al numero. habbia quella, che ha E F à G. & ſiano i numeri E F G minori di tutti quelli, c'hanno la medeſima proportione. non è dunque E F l'vnità. percio che ſe è l'vnità, & ha à G la medeſima proportione, che la A C alla A B, & la A C è maggiore della A B, etiandio l'vnità E F ſarà maggiore del numero G, che è inconueniente. adunque E F non è l'vnità. onde è neceſſario, che



C ſia numero. & perche come la A C alla A B, coſi è E F a G, ſarà anchor come il quadrato della A C al quadrato della A B, coſi il quadrato di E F al quadrato di G. ma il quadrato della C A è doppio del quadrato della A B. adunque etiandio il quadrato di E F è doppio del quadrato di G: & però il quadrato di E F è pari, & eſſo E F pa-

D ri. che ſe foſſe diſpari, anchor il quadrato, che da eſſo ſi fa, ſarebbe diſpari. per cioche ſe i numeri diſpari inqualunque modo ſi compongano, & la moltitudine di eſsi ſia diſpari, anchor il tutto ſarà diſpari. adunque E F è pari. ſeghiſi per me zo in H, & perche i numeri E F G ſono minori di tutti quelli, c'hanno la medeſi

E ma proportione, ſaranno fra loro primi. & è E F pari. adunque G è diſpari; per che ſe foſſe pari, il numero binario miſurarebbe i numeri E F G concioſiacoſa, che ogni numero pari habbia la metà, ma ſono fra loro primi, che non può eſſe

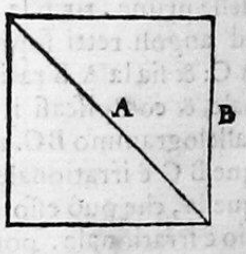
F re. la onde G non è diſpari. adunque è pari. & perche F E è doppio di E H, ſarà il quadrato di F E quadruplo del quadrato di E H, & è il quadrato di F E doppio

G del quadrato di G. il quadrato dunque di G è doppio del quadrato di E H. & pe

H rò il quadrato di G è pari. & per le coſe gia dette eſſo G è pari. ma è diſpari. il

K che è impoſsibile. adunque la A C non è in lunghezza commenſuraaile alla A B. adunque è incommenſurabile.

IN ALTRO MODO. Ma in altro modo ſi ha da dimoſtrare il diametro del quadrato eſſere incommenſurabile al lato di eſſo.



Sia A il diametro, & B il lato. Dico A eſſere in lunghezza incommenſurabile à B. percioche ſia commenſurabile, ſe eſſer può, & facciaſi ſimilmente, come A à B, coſi il numero E F à G: & ſiano minori di tutti quelli c'hanno la medeſima proportione. adunque i numeri E F G ſono primi fra loro. Dico primieramente G non eſſere l'vnità. percioche, ſe eſſer può, ſia G l'unità. & perche come A à B, coſi è E F à G; ſarà come il quadrato della A al quadrato della B, coſi il quadrato di E F al quadrato di G. & il quadrato della A è doppio del quadrato della B. adunque anchor il quadrato di E F è doppio del quadrato di G. & G è l'vnità. adunque il quadrato di E F è il binario, che non può eſſere. onde G non è l'vnità. & però è numerò, & perche come il quadrato della A al quadrato della B, coſi è il quadrato di E F al quadrato di G: & conuertendoſi come il quadrato della B al quadrato della A, coſi il quadrato di G al quadrato di E F. ma il quadrato della B miſura il quadrato della A. adunque etiandio il quadrato di G miſura il qua-

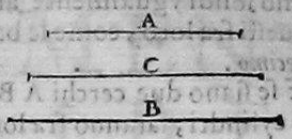
L drato di E F: & però il lato G miſura il lato E F, & miſura ſe ſteſſo, onde G miſura i numeri E F G, primi fra loro, che non è poſsibile. la A dunque non è in lunghezza commenſurabile alla B. onde è neceſſario, che ſia incommenſurabile.

Trouate dunque le linee rette in lunghezza incommenſurabili, come A B, ſi troueranno molte altre grandezze di due dimenſioni, cioè le ſuperficie, incommenſurabili fra loro. percioche ſe pigliamo la linea retta C proportionale di me

M zo fra le A B, ſarà come la A alla B, coſi la figura, che ſi fa dalla A à quella, che ſi fa dalla C, ſimile, & ſimilmente deſcritta, ò ſiano quadrati, ò altri rettilinei

N ſimili, ò cerchi che ſi deſcriuano d'intorno alli diametri A C; concioſiacoſa,

che



che i cerchi ſiano fra loro, come i quadrati delli diametri. ſi ſono dunque trouati i ſpatij pianì fra loro incommenſurabili, & dimoſtrate queſte coſe: dimoſtreremo anchora dalla contemplatione de ſolidi, eſsi ſolidi eſſere commenſurabili, & incommenſurabili fra loro. percioche ſe ne i quadrati delle A B, ò vero ne i rettilinei vguali ad eſsi conſtituiamo ſolidi vgualmente alti, ò parallelepipedi, ò pyramidi, ò priſmi; ſaranno quelli fra loro, come le baſi. & ſe le baſi ſiano commenſurabili, anchora i ſolidi ſaranno commenſurabili: & ſe incommenſurabili, anchor eſsi ſaranno incommenſurabili. & ſe ſiano due cerchi A B, & in eſsi conſtituiamo coni vgualmente alti, ò vero cylindri, ſaranno fra loro, come le baſi, cioè come i cerchi A B. & ſe i cerchi ſiano commenſurabili, etiandio i coni, & cylindri ſaranno commenſurabili fra loro: & ſe incommenſurabili, anchor quelli, ſaranno incommenſurabili. dalle qual coſe appare manifeſtamente la commenſurabilità, & incommenſurabilità non ſolamente eſſere nelle linee, & ſuperficie, ma anchora nelle figure ſolide. O P

IL COMMANDINO.

Onde è manifeſto il quadrato della A C eſſere doppio del quadrato della A B] *per la 47 del primo.* A

Hauerà la A C alla A B quella proportione, che ha il numero al numero] *per la 5 di queſto.* B

Et perche come la A C alla A B, coſi è E F à G, ſarà anchor come il quadrato della A C al quadrato della A B, coſi il quadrato di E F al quadrato di G] *percioche eſſendo come la A C alla A B, coſi E F à G, ſarà etiandio, come la proportione di A C alla A B duplicata, coſi la proportione di E F à G duplicata. ma come la proportione di A C alla A B duplicata, coſi è il quadrato della A C al quadrato dalla A B, per lo ſecondo corollario della 20 del ſeſto. & come la proportione di E F à G duplicata, coſi è il quadrato di E F al quadrato di G per là 11 dell'ottauo. adunque per l'vndecima del quinto come il quadrato della A C al quadrato della A B, coſi ſarà il quadrato di E F al quadrato di G.* C

Percioche ſe i numeri diſpari in qualunque modo ſi compongano & la moltitudine di eſsi ſia diſpari, anchor il tutto ſarà diſpari] *per la 23 del nono. ſeguita anchor queſto per la 29 del medeſimo.* D

Saranno fra loro primi] *per la 24 del ſettimo.* E

Sarà il quadrato di F E quadruplo del quadrato di E H] *per l'undecima dell'ottauo.* F

Il quadrato dunque di G è doppio del quadrato di E H] *percioche la proportione del quadrato di F E al quadrato di E H interponendoſi il quadrato di G è compoſta dalla proportione del quadrato di F E al quadrato di G, & dalla proportione del quadrato di G al quadrato di E H. ma la proportione del quadrato di F E al quadrato di E H è quadrupla. & la proportione del quadrato di F E al quadrato di G è doppia. adunque anchor la proportione del quadrato di G al quadrato di E H ſarà doppia.* G

Et pero il quadrato di G è pari] *percioche eſſendo il quadrato di G doppio del quadrato di E H, harà la metà. onde neceſſariamente ſarà pari.* H

Et per le coſe gia dette eſſo G è pari] *percioche ſe ſia diſpari, & il quadrato di eſſo è diſpari per la 29 del nono. ma è pari, che non può eſſere.* K

Et però il lato G miſura il lato E F] *per la 14 dell'ottauo.* L

Sarà come la A alla B, coſi la figura, che ſi fa dalla A à quello, che ſi fa dalla C, ſimile, & ſimilmente deſcritta] *per lo ſecondo corollario della 20 del ſeſto.* M

Concioſiacoſa che i cerchi ſiano fra loro, come i quadrati delli diametri] *ciò ſi dimoſtra nella 2 propoſitione del 12 libro. onde ſi può conoſcere, queſte coſe ò ſiano di Euclide ò d'altri eſſer poſte fuor del proprio luogo.* N

Percioche ſe ne i quadrati delle A B, ò vero ne i rettilinei vguali ad eſsi conſti- O

tuiamo ſolidi vgualmente alti, ò parallelepipedi, ò pyramidi, ò priſmi; ſaranno queſti fra loro, come le baſi] *per la 32 dell'vndecimo, & per la quinta, & ſeſta del duodecimo.*

P Et ſe ſiano due cerchi A B, & in eſsi conſtituiamo coni vgualmente alti, ò vero cylindri, ſaranno fra loro, come le baſi] *per la 11 del duodecimo.*

IL FINE DEL DECIMO LIBRO.

∴ ∴ ∴

SCHOLIO.

Gli antichi ſeparorono la cognitione de piani della ſcienza de ſolidi, percioche quella chiamorono Geometria, come mostra Platone ne i libri politici, & queſta Stereometria. Ma li moderni, perche la cognitione dell'vna, & dell'altra ſcienza conſiſte intorno alle grandezze, etiandio con vn nome commune l'hanno chiamata Geometria, congiungendo quelle inſieme, & facendone vna ſola. & ſi come ne i piani, altre figure erano rettilinee, altre circolari, & altre miſte, come le helici, coſi ne i ſolidi altre ſono compoſte di ſuperficie rettilinee, altre di ſpherice. & altre di miſte, come il cylindro, & cono. & le ſpherice appartengono al termine, & fine. ma le rettilinee, & quelle che da rettilinee ſi fanno, appartengono all'infinito, & le miſte à quello, che è occulto. & ciò che è corpo, il medeſimo è ſolido, ma non al contrario, come in quelle, che ſi ſono dette. percioche queſti ſono ſolidi imaginabili, non duri, & reſiſtenti.

∴ ∴ ∴