DE GLI ELEMENTI DI EVCLIDE

LIBRO VNDECIMO

ET DE SOLIDI LIBRO PRIMO.

CON LI SCHOLII ANTICHI, ET COMMENTARII

Di Federico Commandino da Vrbino.

DIFFINITIONI.

I.

IL solido è quello, che ha lunghezza, larghezza, & grossezza.

II.

Il termine del solido è la superficie.

III.

La linea retta è perpendicolare al piano, quando con tutte le linee rette, che la toccano, & sono nel soggetto piano, fa gli angoli retti.

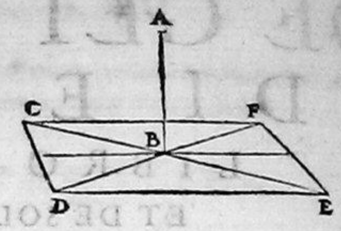
SCHOLIO.

Se il piano si potesse risoluere in linee rette, hauerebbe detto cosi, Quando con tutte le linee rette, dalle quali è constituito il piano, fa gli angoli retti, allhora sara al detto piano perpendicolare. Ma perche il piano anchor che segato fosse infinitamente da linee rette, non si risolue in esse, si contentò della infinità delle linee per tutto il piano, & ci agiunse le linee, che toccano, accioche non siano parallele.

IL COMMANDINO.

Sia la linea AB al soggetto piano CDEF perpendicolare, & dal punto B tirinsi quante si vogliano linee rette nel medesimo piano BC BD BE BF. saranno gli angoli CBA

D B A E B A F B A retti. & se gli angoli C B A D B A E B A F B A siano retti, diremo la linea A B esser perpendicolare al soggetto piano C D E F.

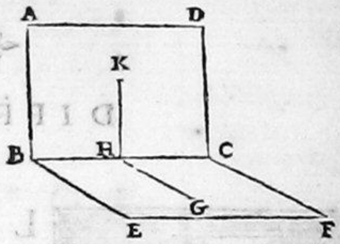


IIII.

Il piano al piano è retto, ò vero perpendicolare, quando in un pianò tirate le linee rette perpendicolari sopra il commun segamento de piani, saranno all'altro piano perpendicolari.

IL COMMANDINO.

Sia il piano A B C D retto, ò vero perpendicolare al piano B E F C: & sia il loro commun segamento la linea retta B C: & nel piano B E F C tirisi la linea retta G H perpendicolare alla B C, sarà la G H perpendicolare al piano A B C D. ma se la G H sia perpendicolare al piano A B C D, sarà anchor alla B C che è commun segamento delli due piani, perpendicolare. & similmente auuerrà se nell'altro piano sia tirata la K H perpendicolare alla B C. Ma hora pongasi il commun segamento di due piani essere vna linea retta, il che si dimostrerà di sotto.

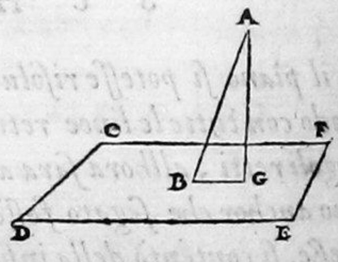


V.

L'inclinatione della linea retta ad vn piano, è quando dal termine sublime della linea retta tirata la perpendicolare al piano, & dal punto fatto tirata vn'altra linea sin'al termine di essa posto nel piano, l'angolo acuto, che si contiene dalla linea tirata & dalla linea che sta ferma.

IL COMMANDINO.

Sia la linea retta A B inclinata al soggetto piano C D E F, & dal punto sublime A al medesimo piano tirisi la perpendicolare A G, & giungasi B G. sarà l'angolo acuto A B G l'inclinatione della linea retta A B al piano C D E F.

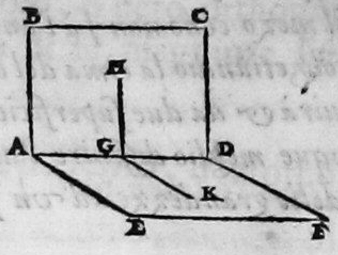


VI.

L'inclinatione del piano ad vn'altro piano è l'angolo acuto, che si contiene da linee rette, le quali al commun segamento de piani sono tirate ad angoli retti nell'vno & l'altro piano.

IL COMMANDINO.

Siano due piani inclinati fra loro ABCD EADF, de quali il commun ſegamento ſia AD. & preſo in eſſa AD qualunque punto G, tirinſi dal G ad angoli retti nell'vno & l'altro piano GH GK. ſarà l'angolo HGK l'inclinatione del piano ABCD al piano EADF.

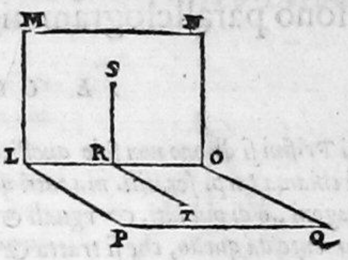


VII.

Il piano al piano ſimilmente è detto inclinarſi & l'altro all'altro, quando gli angoli della inclinatione ſono vguali fra loro.

IL COMMANDINO.

Siano due piani inclinati fra loro ABCD EADF, come di ſopra; & ſiano due altri piani inclinati LMNO PLOQ, l'inclinatione de quali ſia l'angolo SRT: & ſiano gli angoli HGK SRT vguali. ſi dirà il piano ABCD al piano EADF eſſer ſimilmente inclinato, come il piano LMNO al piano PLOQ.



VIII.

I piani paralleli ſono quelli, che non ſi congiongono mai inſieme.

IX.

Le figure ſolide ſimili ſono quelle, che ſi contengono da piani ſimili, vguali di numero.

X.

Le figure ſolide ſimili & vguali ſono quelle, che ſi contengono da piani ſimili, & vguali di numero, & grandezza.

XI.

L'angolo ſolido è l'inclinatione de piu che di due linee, le quali ſi tocchino & non ſiano nella medeſima ſuperficie con tutte l'altre linee, ò vero l'angolo ſolido è quello, che ſi comprende da più, che da due angoli piani, che non ſiano nel medeſimo piano, & ſi terminino ad vn punto.

SCHOLIO.

Euclide vuole l'angolo eſſere nell'inclinatione, ma i Stoici dicono l'inclinatione isteſſa eſſere l'angolo, ma Euclide drittamente, percio-

che ogni angolo è inclinatione delle grandezze ad vn punto. questa diffinitione è imperfetta, conciosiacosa che l'angolo della quarta parte della sphera si comprenda da più, che da due superficie, ma non piane; & il mezo cono non fà l'angolo solido alla cima, percioche se quello è angolo, etiandio la cima del cono sara angolo. onde l'angolo solido si constituirà & da due superficie, & da vna. il che certamente è vero. sara dunque meglio diffinire l'angolo solido l'inclinatione della grandezza & delle grandezze ad vn punto.

XII.

La pyramide è vna figura solida compresa da piani, la quale da vn piano si constituisce ad vn punto.

XIII.

Il Prisma è vna figura solida compresa da piani, de quali due, che sono opposti sono vguali, & simili, & paralleli, ma gli altri sono parallelogrammi.

IL COMMANDINO.

Li Prismi si dicono non solo quelli, c'hanno le basi triangolari, come volse il Campano, il quale gli chiama corpi seratili. ma tutti quelli c'hanno i piani opposti, ò trilateri ò quadrilateri, ò pentagoni, ò di più lati, & vguali & simili, ma gli altri parallelogrammi, il che appare manifestamente da quello, che si tratta & nel presente libro, & in quello, che segue. Gli altri Prysmi il Campano impropriamente chiama colonne laterate, si come anche i coni, Pyramidi rotonde, & i cylindri, colonne rotonde.

XIIII.

La sphera è vna figura compresa, quando il mezo cerchio si gira d'intorno al diametro, che stà fermo sin'à tanto, che sia riportato di nuouo al medesimo luogo, dal quale cominciò à mouersi.

XV.

L'asse della sphera è vna linea retta, che sta ferma, d'intorno alla quale il mezo cerchio si gira.

XVI.

Il centro della sphera è il medesimo, che del mezo cerchio.

XVII.

Il diametro della sphera è vna linea retta, che passa per lo centro, & dall'vna & l'altra parte è terminata dalla superficie della sphera.

XVIII.

Il cono è vna figura compresa, quando, stando fermo vn lato del triangolo rettāgolo, di quelli, che sono d'intorno all'angolo retto, il triangolo si gira sin'à tanto, che di nuouo sia riportato al medesimo luogo, dal quale cominciò à mouersi, & se la linea retta, che sta ferma è vguale all'altro lato, che si gira d'intorno all'angolo retto, il cono sarà rettangolo, ò uero orthogonio, ma se è minore, sarà ottusiangolo, & se maggiore sarà acutiangolo.

XIX.

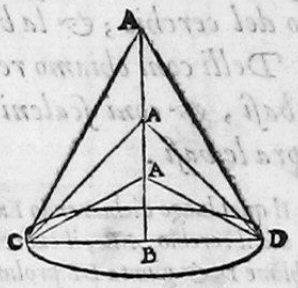
L'asse del cono è la linea retta, che sta ferma, d'intorno alla quale il triangolo si gira.

XX.

Ma la base è il cerchio descritto dalla linea retta, che si gira.

SCHOLIO.

Hora dimostreremo in che modo il cono sia orthogonio ò vero habbia alla cima l'angolo retto.



Sia il rettangolo orthogonio A B C, c'habbia l'angolo retto A B C, & la linea retta BC vguale alla retta A B. Dico nel punto A constituirsi l'angolo retto. prolunghisi la C B sin'al D: & pongasi la B D vguale alla C B, & giongasi A D. onde perche la A B è vguale alla B C, sarà l'angolo B C A vguale all'angolo B A C, & ciascuno di essi è la metà d'vn retto, po nendosi retto A B C. & per la medesima ragione B A D è la metà d'vn retto. tutto dunque l'angolo D A C è retto. & però intorno alle A B C si è descritto vn cono orthogonio, cioè stando ferma la linea retta A B, & girata d'intorno la A C sin'à tanto che sia riposta al medesimo luogo, dal quale cominciò à mouersi. girandosi dunque le A C C B, & stando la A B ferma, è necessario, che nel girare la linea retta A C conuenga alla retta A D, essendo la C B vguale alla B D, & il cerchio descritto dal punto C, sarà la base del cono, che si fa dal triangolo A B C, & il diametro di quel cerchio, sarà la base del triangolo A C D, che ha l'angolo D A C retto. & se il cono dalla cima A sia diuiso per mezo sino alla base, le superficie delle portioni non saranno altro, se non il triangolo A D C, che è orthogonio. onde anchor la cima del cono sarà orthogonia. ma se l'angolo B A C sia maggiore della metà del retto, sarà per la medesima cagione anchora l'angolo D A B maggiore della metà del retto, & D A C maggiore del retto, cioè ottuso, & il cono sarà ottusiangolo, ò uero alla cima hauerà l'angolo ottuso. se finalmente la B C sia minore della A B, sarà l'angolo B A C minore della metà del retto. adunque per le cose che si sono dimostrate l'angolo D A C sarà minore del retto, cioè acuto, & il cono sarà acutiangolo.

IL COMMANDINO.

Euclide solamente ha diffiniti i coni & cylindri retti, ò più presto ha insegnato il nascimento loro. ma à noi è piacciuto il nascimento di tutti vniuersalmente spiegare per quello, che ne hanno scritto Apollonio, & Sereno.

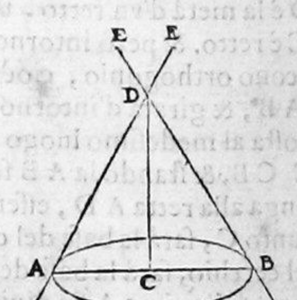
DA APOLLONIO.

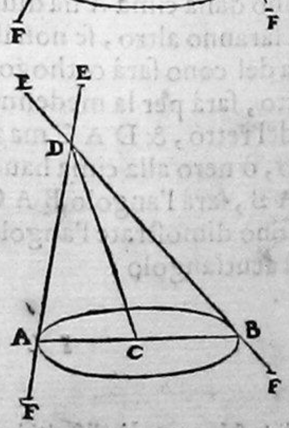
Se da qualche punto alla circonferenza del cerchio, che non sia nel medesimo piano, nel quale è il punto, tirata vna linea retta, & prolungata dall'vna & l'altra parte, stando fermo il punto, sia girata d'intorno alla circonferenza del cerchio, sin tanto che torni à quel luogo, dal quale cominciò à mouersi: la superficie descritta dalla linea retta, la quale è composta di due superficie, adattate insieme alla cima, delle quali l'vna & l'altra cresce infinitamente, allungandosi infinitamente la linea retta, che la descriue; chiamo superficie conica; & la sua cima, il punto che sta fermo; & l'asse la linea retta, che passa per lo punto, & per lo centro del cerchio; & il cono chiamo la figura contenuta del cerchio & dalla superficie conica, che è fra la cima & la circonferenza del cerchio; la cima del cono, il punto che è anchor cima della superficie conica. l'asse la linea retta, che dalla cima è tirata sino al centro del cerchio; & la base il cerchio istesso.

Delli coni chiamo retti quelli c'hanno li lor assi ad angoli retti sopra le basi, & coni scaleni quelli, che non hanno gli assi ad angoli retti sopra le basi.

Il qual luogo dichiarando Eutocio così scriue.

Sia il cerchio A B, il cui centro C, & vn punto sublime D, & giunta DB prolunghisi infinitamẽte dal l'vna & l'altra parte alli punti E F. se dunque la linea retta DB si giri nella circonferenza del cerchio AB, insino à tanto, che'l pũto B torni à quel luogo, dal quale cominciò à mouersi, descriuerà vna superficie composta di due superficie, che si toccano nel punto D. quella chiamo superficie conica, la quale cresce infinitamẽte prolungãdosi infinitamente la linea retta DB, che la descriue. la cima della superficie dice il punto D, & l'asse la linea retta D C. il cono chiama vna figura contenuta dal cerchio A B, & da quella superficie, che D B solamente descriue. la cima del cono il punto D. l'asse D C. & la base il cerchio A B. ma se D C sarà perpendicolare al cerchio, chiama cono retto, & se non sarà perpendicolare, cono scaleno.





Il cono scaleno si descriuerà, quando dal centro del cerchio si innalzi vna linea, che non sia perpendicolare al piano di detto cerchio, & dal punto sublime della linea alla circonferenza del cerchio sia tirata vna linea retta, la quale stando fermo il punto, si giri d'intorno ad essa circonferenza. percioche la figura compresa sarà cono scaleno. è dunque manifesto che la linea girata d'intorno alcuna volta si fa maggiore, alcuna uolta minore, & alcuna volta vguale in altri & altri punti del cerchio.

XXI.

Il cylindro è vna figura compresa, quando stando fermo vn lato del parallelogrammo orthogonio di quelli, che sono d'intorno all'angolo retto, il parallelogrāmo si giri, insino à tāto che di nuouo torni al medesimo luogo, dal quale cominciò à mouersi.

XXII.

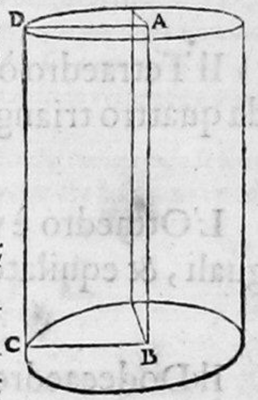
L'asse del Cylindro è la linea retta, che sta ferma, d'intorno alla quare il parallelogrammo si gira.

XXIII.

La base i cerchi descritti dalli due lati opposti, che si girano.

IL COMMANDINO.

Sia il parallelogrammo rettangolo A B C D, & stando fermo il lato A B, intendasi il lato C D girarsi fin che torni à quel luogo, dalqua le cominciò à mouersi, sarà la figura descritta, il cui asse è la linea retta A B, che sta ferma, & la base i cerchi medesimi descritti dalli punti C D intorno à i centri B A.



DA SERENO.

Se di due cerchi vguali & paralleli, i diametri essendo tutta via paralleli fra loro, si girino ne piani de cerchi d'intorno al centro che sta fermo, & insieme si giri la linea retta, che congiugne i termini de diametri dalla medesima parte fin'à tanto che di nuouo torni al luogo, dal quale cominciò à mouersi, la superficie che si descriue dalla linea retta girata, chiamisi superficie Cylindrica, la quale cresce infinitamente prolungandosi infinitamente la linea, che la descriue.

Il Cylindro, la figura contenuta da cerchi paralleli, & dalla superficie Cylindrica che è posta fra quelli.

La base de Cylindri, i cerchi medesimi.

L'asse la linea retta, che passa per li centri de cerchi.

Il lato del Cylindro, la linea che essendo retta, & nella superficie del Cylindro tocca amendue le basi, la quale anche girata dicemmo poco innanzi descriuere la superficie del Cylindro.

De Cylindri si chiamano retti quelli, c'hanno i lor assi ad angoli retti sopra le basi, & scaleni quelli, che non hanno i lor assi ad angoli retti sopra le basi.

XXIIII.

I coni & Cylindri ſimili ſono quelli, de quali gli aſsi & diametri delle baſi hanno la medeſima proportione.

IL COMMANDINO.

Tutti li coni & Cylindri ſimili coſi retti come ſcaleni diffiniremo in queſto modo.

I coni & Cylindri ſimili ſono, quando per li loro aſsi menati i piani ad angoli retti ſopra le baſi, i communi ſegamenti di detti piani, & delle baſi, contenendo con gli aſsi vguali angoli, hanno fra loro la medeſima proportione, che gli aſsi.

XXV.

Il Cubo è vna figura ſolida contenuta da ſei quadrati vguali.

XXVI.

Il Tetraedro ò vero Pyramide è vna figura ſolida compreſa da quattro triangoli vguali & equilateri.

XXVII.

L'Ottaedro è vna figura ſolida compreſa da otto triangoli vguali, & equilateri.

XXVIII.

Il Dodecaedro è vna figura ſolida, che è contenuta da dodici pentagoni vguali, equilateri, & equiangoli.

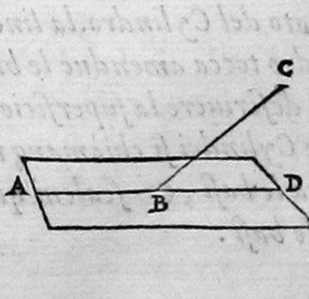
XXIX.

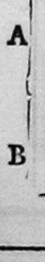
L'Icoſaedro è vna figura ſolida che è compreſa da venti triangoli vguali & equilateri.

THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

Della linea non è parte nel ſoggetto piano, & parte in vn piano eleuato.

Percioche s'egli è poſsibile, vna parte A B dalla linea retta A B ſia nel ſoggetto piano, & la parte B C nel piano eleuato. ſara vna linea retta continuata nel ſoggetto piano per diritto alla A B, & ſia la B D. adunque a due linee rette date A B C A B D è commune la portione A B, che non è poſsibile, percio che vna linea retta con vn'altra linea retta non conuiene in piu d'vn punto, altramente

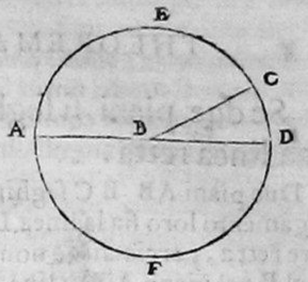




le linee rette conuerranno insieme. adunque della linea retta non è parte nel soggetto piano, & parte in vn piano eleuato.

SCHOLIO.

Adunque a due linee rette date A B C A B D è commune la portione A B, che non e possibile] A *percioche à due linee rette non è portion commune, & s'eglié possibile, sia alle due linee rette A B C A B D la portion commune A B, & piglisi nella linea retta A B C il centro B, & l'interuallo B A, & descriuasi il cerchio A E F. perche dunque B è centro del cerchio A E F, & per B si è tirata la linea retta A B C, sarà la A B C diametro del cerchio A E F, & il diametro sega per mezo il cerchio. adunque A E C è mezo cerchio. similmente perche B è centro del cerchio A E F, & per B è tirata vna linea retta ABD, sarà la A B D diametro del cerchio AEF,*



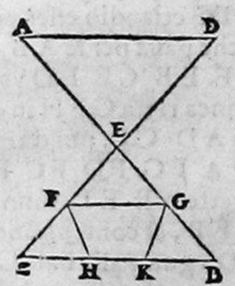
& si è dimostrata la A B C diametro del medesimo cerchio, & li mezi cerchi del medesimo cerchio sono vguali fra loro. adunque il mezo cerchio A E C è vguale al mezo cerchio A E D, il minore al maggiore, che non è possibile. non è dunque à due linee rette vna portion commune, ma differente. & però non è possibile che ad vna linea retta terminata sia continuata dirittamente vn'altra linea retta per cose che si sono dimostrate, perche à due linee rette non è una linea retta commun portione.

Altramente le linee rette conuerranno insieme] *è manifesto che conuenendo le linee rette, i loro fini anchora conuengano insieme. & se cosi è, due linee rette che habbiano i medesimi fini conterranno vn spatio, che non è possibile.* B

THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

Se due linee rette si seghino fra loro, sono in vn piano, & ogni triangolo consiste in vn piano.

Due linee rette A B C D seghinsi fra loro nel punto E. Dico le A B C D essere in vn piano, & ogni triangolo consistere in vn piano. piglinsi nelle E B E C quai si vogliano punti F G, & giungansi C B F G; & tirinsi F H G K. Dico prima il triangolo E C B essere in vn piano. percioche se del triangolo E B C vna parte F H C ò vero G B K è nel soggetto piano, & la rimanente nell'altro piano, sarà anche di vna delle linee E B E C parte nel soggetto piano, & parte nell'altro. & se del triangolo E C B vna parte F G B C sia nel soggetto piano, & la rimanente nell'altro, di amendue le linee rette E C E B vna parte sarà nel soggetto piano, & vna nell'altro. il che dimostrammo essere inconueniente.



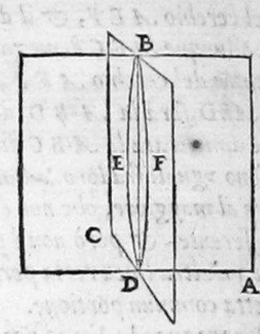
adunque il triangolo EBC è in vn piano. & in qual piano è il triangolo E B C, nel medesimo sono amendue le linee rette E C E B, & in quale amendue le E C E B, nel medesimo sono le A B C D. adunque le linee rette A B C D sono in vn piano, & ogni triangolo consiste in vn piano.

SCHOLIO.

L'intentione è di dimostrare le linee rette, che si segano fra loro essere in vn piano. ma perche ciò si dimostra per mezo del triangolo, ci aggiunse; & ogni triangolo consiste in vn piano.

THEOREMA III. PROPOSITIONE III.

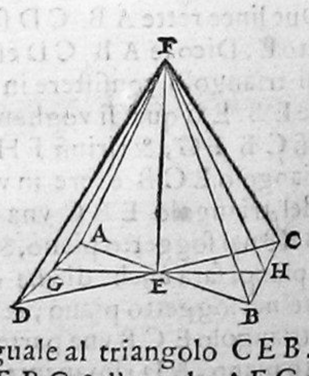
Se due piani si seghino fra loro, il commun segamento è vna linea retta.



Due piani AB BC seghinsi fra loro, & il commun segamento loro sia la linea D B. Dico la linea D B esser retta, percioche se non sia così, tirisi dal punto D al B nel piano A B la linea retta D E B, & nel piano B C la linea retta D F B. saranno li medesimi termini di due linee rette D E B D F B, & esse conterranno vn spatio, che è inconueniente. adunque le DEB DFB non sono linee rette. similmente dimostreremo niun'altra, che si tira dal punto D al B essere retta, fuori, che la D B, cioè il comun segamento de piani AB BC. se dunque due piani si seghino fra loro il commun segamento, sarà vna linea retta.

THEOREMA IIII. PROPOSITIONE IIII.

Se vna retta linea à due linee rette, che si segano fra loro, nel cōmune segamento è perpendicolare, sarà ancho perpendicolare al piano, che passa per le dette linee.



Sia la linea retta E F perpendicolare à due linee rette A B C D, che nel punto E fra loro si segano: & sia la perpendicolare alzata sopra il punto E. Dico la E F etiandio esser perpendicolare sopra il piano, che passa per le A B C D. piglinsi le linee rette A E E B C E E D vguali fra loro: & per E tirisi la linea retta G E H in qualunque modo; & giungansi A D C B. poi da qual si voglia punto F tirinsi le F A F G F D F C F H F B. & perche due linee rette A E E D sono vguali à due linee rette C E E B, & contengono angoli vguali, sarà la base A D vguale alla base C B, & il triangolo A E D vguale al triangolo C E B. adunque anchor l'angolo D A E è vguale all'angolo E B C; & l'angolo A E G è vguale all'angolo B E H. sono dunque due triangoli A E G B E H, che hanno due angoli vguali à due angoli l'vn all'altro, & vn lato A E vguale ad vn lato E B, che è dintorno à gli angoli vguali. onde haueranno gli altri lati vguali à gli altri lati. & però G E è vguale ad E H, & A G à B H. & essendo la A E vguale alla E B, & la F E commune, & ad angoli retti, sarà la base A F vguale alla base F B. & per la medesima ragione anchora la CF sarà vguale alla FD. oltre à ciò perche la AD è vguale alla C B, & la A F alla F B, saranno le due F A A D vguali alle due F B

4. del primo.

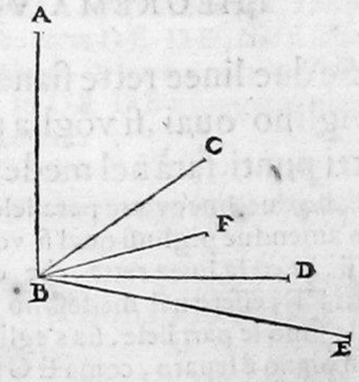
26. del primo.

4. del primo.

B C, l'vna all'altra, & ſi è dimoſtrata la baſe D F vguale alla baſe F C. adunque l'angolo F A D è vguale all'angolo F B C. & la A G ſi è dimoſtrata vguale alla B H. 8. del primo.
ma anchor la A F è vguale alla F B. le due dunque F A A G ſono vguali alle due F B B H, & l'angolo F A G è vguale all'angolo F B H, come ſi è dimoſtrato. on 4. del primo.
de la baſe G F è vguale alla baſe F H. Et perche ſi è dimoſtrata la G E vguale alla E H, & la F E è commune, ſaranno le due G E E F vguali alle due H E E F: & la baſe H F è vguale alla baſe F G. l'angolo dunque G E F è vguale all'angolo H E F: & però amendue gli angoli G E F H E F ſono retti. adunque la F E alla G H tirata in qualunque modo per E fa gli angoli retti, ſimilmente dimoſtreremo la F E con tutte le linee rette, che la toccano, & ſono nel ſoggetto piano, fare gli angoli retti. ma la linea retta è perpendicolare al piano, quando con le linee 3. diffinitione.
rette, che la toccano, & ſono nel medeſimo piano, fa gli angoli retti. onde la F E è perpendicolare al ſoggetto piano. ma il ſoggetto piano è quello, che paſſa per le linee rette A B C D. adunque la F E ſarà perpendicolare al piano, che paſſa per le A B C D. il perche ſe vna retta linea à due linee rette, che ſi ſegano fra loro nel comun ſegamento è perpendicolare, ſarà anchor perpendicolare al piano, che paſſa per le dette linee.

THEOREMA V PROPOSITIONE V.

Se vna retta linea à tre linee rette, che ſi toccano fra loro nel commun ſegamento è perpendicolare, ſaranno le dette tre linee in vn medeſimo piano.



La linea retta A B ſia perpendicolare à tre linee rette B C B D B E nel toccamento B. Dico le B C B D B E eſſere in vn piano. ſiano, ſe però è poſsibile; le B D B E nel ſoggetto piano, & la B C in vn piano eleuato: & il piano per le A B B C prolunghiſi. ſarà il commun ſegamento nel ſoggetto piano vna linea retta. faccia B F. ſono dúque in vn piano, che paſſa per le A B B C 3. di queſto.
tre linee rette A B B C B F. & perche la A B è perpendicolare all'vna & l'altra B D B E, ſarà anche perpendicolare al piano, che paſſa per le D B B E. ma il piano, che paſſa per le D B B E è piano ſoggetto. adunque la A B è perpendicolare al ſoggetto piano. & però ſarà perpendicolare à tutte le linee rette, che la toccano, & ſono nel medeſimo piano. ma B F che è nel ſoggetto piano la tocca. adunque l'angolo A B F è retto. & ſi pone retto l'angolo A B C. è dunque l'angolo A B F all'angolo A B C vguale. & ſono nel medeſimo piano, che non è poſsibile. la onde la linea B C non è in vn piano eleuato. dal che ne ſeguita, che le tre linee rette B C B D B E ſiano in vn piano. ſe dunque vna retta linea à tre linee rette, che ſi toccano fra loro nel commun ſegamento è perpendicolare, ſaranno le dette tre linee in vn medeſimo piano.

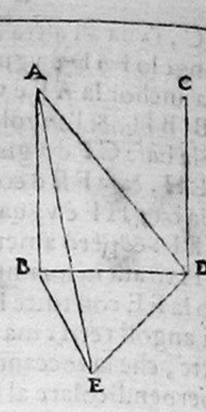
per l'antecedente.

3. diffinitione.

THEOREMA VI. PROPOSITIONE VI.

Se due linee rette ſono perpendicolari ad vn medeſimo piano, ſaranno parallele fra loro.

Due linee rette A B C D ſiano perpendicolari al ſoggetto piano. Dico la A B esser parallela alla C D. tocchino le A B C D il soggetto piano ne punti B D: & giungasi la linea retta B D, alla quale nel soggetto piano tirisi la D E perpendicolare. & posta la D E vguale alla A B, giunganſi B E A E A D. perche dunque la A B è perpendicolare al ſoggetto piano, con tutte le linee rette, che la toccano & ſono nel ſoggetto piano, farà gliangoli retti. ma l'vna & l'altra B D B E tocca la A B, eſſendo nel ſoggetto piano. adunque amendue gli angoli A B D A B E ſono retti, per la medeſima ragione anchora ſono retti amendue C D B C D E. & perche la A B è vguale alla D E, & la B D è commune, ſaranno le due A B B D vguali alle due E D D B, & contengono angoli retti. la baſe dunque A D è vguale alla baſe B E. ſimilmente perche la A B è vguale alla D E, & la A D alla B E, le due A B B E ſono vguali alle due E D D A: & la baſe di eſſe AE è commune. l'angolo dunque A B E è vguale all'angolo E D A. ma A B E è retto. adunque è retto E D A. & però la E D è perpendicolare alla D A. ma etiandio è perpendicolare all'vna & l'altra di eſſe B D D C. onde la E D è perpendicolare alle tre linee rette B D D A D C nel toccamanto. & per tal cagione le tre linee rette B D D A D C ſono in vn piano, & in qual piano ſono le B D D A, nel medeſimo è la A B, percioche ogni triangolo è in vn piano. adunque è neceſſario, che le A B B D D C ſiano in vn piano. & amendue gli angoli A B D B D C ſono retti. la A B dunque è parallela alla C D. onde ſe due linee rette ſono perpendicolari ad vn medeſimo piano, ſaranno parallele fra loro.



: diffinitione.

4. del primo.

8. del primo.

per lantecedente.

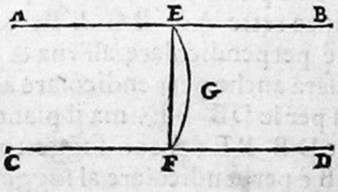
2. di queſto.

28. del primo.

THEOREMA VII. PROPOSITIONE VII.

Se due linee rette ſiano parallele, & nell'vna & l'altrà di loro ſi piglino quai ſi voglia punti, la linea retta, che congiunge detti punti, ſarà nel medeſimo piano, nel quale ſono le parallele.

Siano due linee rette parallele A B C D; & in amendue piglinſi qual ſi vogliano punti E F. Dico la linea retta, che congiunge i punti E F, eſſere nel medeſimo piano, nel quale ſono le parallele. ſia s'egli è poſsibile, in vn piano è leuato, come E G F. & per la E G F tiriſi vn piano, il quale farà il ſegamento nel ſoggetto piano, vna linea retta. faccia come E F. adunque due linee rette EGF EF conterranno vn ſpatio, che non è poſsibile. & percio quella linea retta, che e tirata dal punto E ad F non è in vn piano eleuato. onde ſarà in quello, che paſſa per le parallele A B C D. ſe dunque due linee rette ſiano parallele, & quello che ſegue. il che biſognaua dimoſtrare.



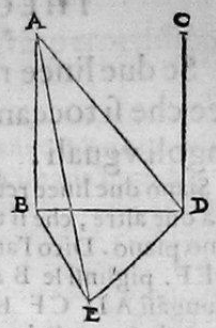
3. di queſto.

10. com. not:

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE VIII.

Se due linee rette ſiano parallele, & l'vna di loro ſia perpendicolare à qualche piano, l'altra anchora al medeſimo piano ſarà perpendicolare.

Siano due linee rette parallele A B C D, & vna di eſſe A B ſia perpebdicolare al ſoggetto piano. Dico anchor la rimanente C D eſſere al medeſimo piano perpendicolare. tocchino le A B C D il ſoggetto piano ne punti B D. & giungaſi B D. adunque, le A B C D B D ſono in vn piano. tiriſi la D E nel ſoggetto piano perpendicolare alla B D,& pongaſi la D E vguale alla A B, & giongánſi B E A E A D. & perche la A B è perpendicolare al ſoggetto piano, anchor à tutte le linee rette, che la toccano, & ſono nel ſoggetto piano ſarà perpendicolare. adunque amendue gli angoli A B D A B E ſono retti. & cadendo la BD nelle linee rette parallele AB C D, ſaranno gli angoli A B D C D B vguali à due retti. ma è retto A B D. adunque anchor C D B è retto: & però la C D è perpendicolare alla B D. & perche la A B è vguale alla D E, & la B D commune, le due AB B D ſono vguali alle due E D D B, & l'angolo A B D è vguale all'angolo EDB. percioche amendue ſono retti. adunque la baſe A D è vguale alla baſe B E. ſimilmente perche la A B è vguale alla D E,& la B E alla A D, ſaranno le due A B B E vguali alle due E D D A, l'vna all'altra,& la baſe loro A E è commune. onde l'angolo A B E è vguale all'angolo E D A. & è retto A B E. adunque anchor E D A è retto. & la ED è perpendicolare alla D A. ma è perpendicolare etiandio alla B D. adunque anchor la E D ſarà perpendicolare al piano, che paſſa per le B D D A, & con tutte le linee rette, che eſſendo nel medeſimo la toccano, farà angoli retti. ma la D C è nel piano che paſſa per le B A A D, perche nel piano per le B D D A ſono le A B B D, & in qual piano ſono le A B B D, è la D C. onde la E D è perpendicolare alla D C; & però la C D è perpendicolare alla D E. ma anchor la C D è perpendiculare alla D B. adunque la C D à due linee rette D E D B, che ſi ſegano fra loro nel commun ſegamento D è perpendicolare. & però è perpendilare al piano che paſſa per le D E D B. ma il piano per le D E D B è ſoggetto piano. adunque la C D al ſoggetto piano ſarà perpendicolare.



per l'antecedente.

3. diff.

29. del primo.

4. del primo.

8 del primo.

4 di queſto.

9. diffinitione.

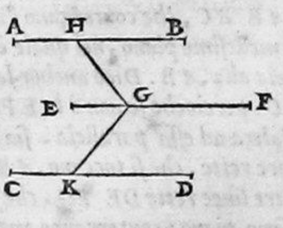
2. di queſto.

4. di queſto.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE IX.

Le linee parallele ad vna medeſima, che non ſono nel medeſimo piano, ſaranno altresì fra loro parallele.

Siano amendue A B C D parallele alla E F, che non ſiano nel medeſimo piano, nel quale e eſſa. Dico la A B eſſere parallela alla C D. pigliſi nella E F qual ſi voglia punto G, dal quale ſi tiri la G H perpendicolare alla E F nel piano, che paſſa per le E F A B,& nel piano, che paſſa per F E C D tiriſi la G K perpendicolare alla E F. & perche la E F è ad amendue G H G K perpendicolare, ſarà anchora perpendicolare al piano, che paſſa per le G H G K. & la F E è parallela alla A B. adunque anche la A B è perpendicolare al piano, che paſſa per H G K. & per la medeſima ragione la C D è perpendicolara al piano per la H G K. onde amendue le A B C D ſaranno perpendicolari al piano, che paſſa per le H G K. ma ſe due linee rette ſono perpendicolari ad vn medeſimo piano, ſaranno parallele fra loro. adunque la A B è parallela alla C D.



4. di queſto.

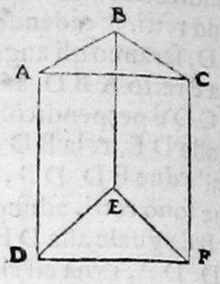
per l'antecedente.

6. di queſto.

THEO-

THEOREMA X. PROPOSITIONE X.

Se due linee rette che si toccano, sono parallele à due altre linee che si toccano, ma non nel medesimo piano, conterranno angoli vguali.



Siano due linee rette, che si toccano A B B C, parallele à due altre, che si toccano D E E F, ma non nel medesimo piano. Dico l'angolo A B C essere vguale all'angolo D E F. piglinsi le B A B C E D E F fra loro vguali, & giungãsi A D C F B E A C D F. perche dunque la B A è vguale & parallela alla E D, sarà anchor la A D vguale & parallela alla B E. & per la medesima ragione la C F sarà vguale & parallela alla B E. amendue dunque A D C F sono vguali & parallele alla B E & quelle che sono parallele alla medesima linea retta, & non sono nel medesimo piano, nel quale è essa, saranno fra loro parallele. onde la AD è parallela alla CF, & è vguale; & A C D F le congiungono. adunque la A C è vguale & parallela alla D F. perche due linee rette AB BC sono vguali à due D E E F, & la base A C è vguale alla base D F, sarà l'angolo A B C vguale all'angolo D E F. se adũque due linee rette, che si toccano sono parallele à due altre, che si toccano, ma non nel medesimo piano, conterranno angoli vguali. il che bisognaua dimostrare.

33. del primo

per l'antecedente.

33. del primo:
8. del primo:

SCHOLIO.

LA CONVERSA, Se siano due angoli vguali, contenuti da linee rette, che non siano nel medesimo piano, & l'vna di loro sia parallela ad vna di quelle, che contẽgono l'angolo vguale, la rimanente anchora sarà parallella alla rimanente.

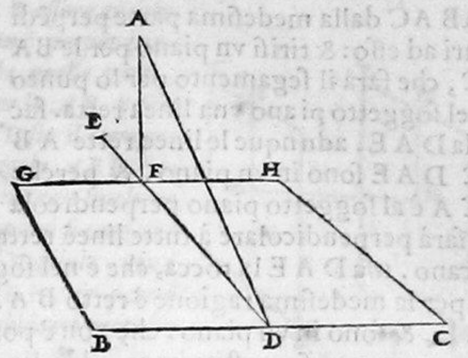
IL COMMANDINO.

Siano due angoli vguali A B C D E F, & le linee rette A B B C, che contengano l'angolo A B C, non siano nel medesimo piano, nel quale è D E F; & sia la DE parallela alla A B. Dico anchor la E F essere parallela alla B C. percioche se non è la E F parallela alla B C, sarà vn'altra ad essa parallela. sia la E G. onde perche due linee rette, che si toccano A B B C sono parallele à due altre linee rette DE EG. che si toccano, ma non nel medesimo piano; conterranno angoli vguali. adunque l'angolo D E G è vguale all'angolo A B C. ma anchora l'angolo D E F si pone vguale all'angolo A B C. adunque l'angolo D E F sarà vguale all'angolo D E G, il minore al maggiore, che non è possibile. la E G dunque non è parallela alla B C, similmente dimostreremo niun altra fuori, che la E F essere parallela alla B C. adunque la E F è parallela alla B C. il che bisognaua dimostrare.

per l'antecedente:

PROBLEMA I. PROPOSITIONE XI.

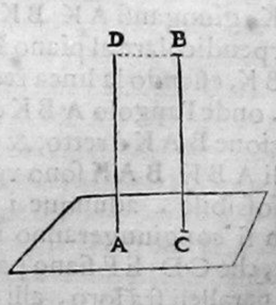
Da vn punto sublime dato tirare vna linea retta perpendicolare al soggetto piano.



Sia il dato punto sublime A, & sia dato il soggetto piano. bisogna del punto A, tirare vna linea retta perpendicolare al soggetto piano. tirisi nel soggetto piano vna linee retta in qualunque modo B C: &
dal punto A alla B C, tirisi la perpendicolare A D. se la A D sia per pendicolare anchor al soggetto piano, gia sarà fatto cio che si pro 11. del primo.
poneua. ma se nò, tirisi dal punto 11 del primo.
D la D E perpendicolare alla B C 12 del primo.
nel soggetto piano: & dal punto A alla D E tirisi la A F perpendicola
re; & finalmente per F tirisi la G H parallela alla B C. & perche la B C è perpen- 31. del primo.
dicolare ad amendue le D A D E, sarà anchor la B C perpendicolare al piano, 4. di questo.
che passa per le E D D A, & è la G H parallela ad essa, & se sono due linee rette
parallele, l'vna delle quali sia perpendicolare à qualche piano, l'altra anchora sa 8. di questo.
rà al medesimo piano perpendicolare. onde anchor la G H è perpendicolare al
piano, che passa per le E D D A, & pero è perpendicolare à tutte le linee rette, 3. diffinitione.
che essendo nel medesimo piano la toccano. ma A F la tocca, quale è nel medesimo piano, che passa per le E D D A. adunque la G H è perpendicolare alla F A: & però la F A è perpendicolare alla G H. & è la A F perpendicolare alla D E. adunque la A F è ad amendue H G D E perpendicolare. & se vna retta linea à due
linee rette, che si segano fra loro nel commun segamento è perpendicolare, sarà 4. di questo.
anchor perpendicolare al piano, che passa per le dette linee. onde la F A è perpendicolare al piano, che passa per le E D G H. ma il piano per le E D G H è soggetto piano. adunque la A F al soggetto piano è perpendicolare. & perciò da vn punto sublime dato A si è tirata vna linea retta A F perpendicolare al soggetto piano. il che bisognaua fare.

PROBLEMA II. PROPOSITIONE XII.

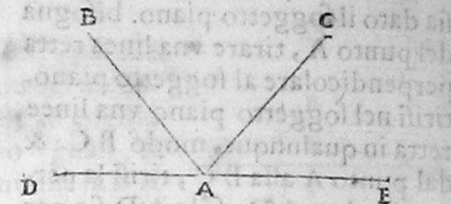
Dal punto che sia in vn piano dato constituire vna linea retta perpendicolare al detto piano.



Sia il dato piano soggetto; & vn punto, che è in esso sia A. bisogna dal punto A constituire vna linea retta perpendicolare al soggetto piano. intendasi qualche punto sublime B, dal quale si tiri la B C perpendi-
colare al soggetto piano, & per A tirisi la A D paralle per l'antecedente:
la alla B C. perche dunque due linee rette sono paral- 13. del primo.
lele A D C B, & vna di esse B C, è perpendicolare al
soggetto pianao; anchor la rimanente A D, sarà al sog 8. di questo.
getto piano perpendicolare. la onde dal punto, che è in vn piano dato, si è constituita vna linea retta perpendicolare al detto piano. il che bisognaua fare.

THEOREMA XI. PROPOSITIONE XIII.

Dal punto che sia in vn piano dato non si constituiranno due linee rette perpendicolari al detto piano dalla medesima parte.



S'egli è possibile, dal punto A che è nel dato pianoconstituiscasi due linee ret- A te AB AC dalla medesima parte perpēdi- 3. di questo. colari ad esso: & tirisi vn piano per le BA AC, che farà il segamento per lo punto A nel soggetto pi ano vna linea retta. faccia la DAE. adunque le linee rette AB AC DAE sono in vn piano. & perche 3. diff. la CA è al soggetto piano perpendicolare, sarà perpendicolare à tutte linee rette, che essendo nel medesimo piano la toccano. ma DAE la tocca, che è nel soggetto piano. onde l'angolo CAE è ret- B to. per la medesima ragione è retto BAE. l'angolo dunque CAE è vguale à BAE, & sono in vn piano. che non è possibile. la onde dal punto, che sia in vn dato piano non si constituiranno due linee rette perpendicolari al piano dalla medesima parte. il che bisognaua dimostrare.

IL COMMANDINO.

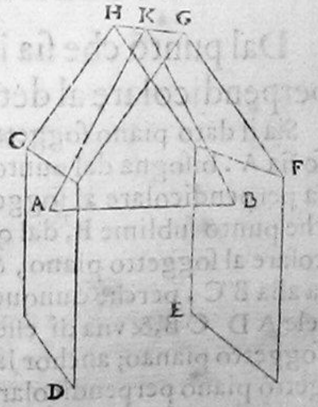
A Et tirisi vn piano per le BA AC] *percioche sono per la seconda di questo le linee rette BA AC in vn piano.*

SCHOLIO.

B Che non è possibile] *percioche sarebbono etiandio parallele, essendo al medesimo perpendicolare, & si congiungerebbono insieme, che è inconueniente, sarebbono dico parallele per la sesta di questo.*

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XIIII.

Quei piani sono paralleli fra loro, alli quali la medesima linea retta è perpendicolare.



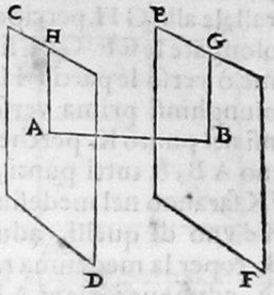
Sia linea retta la AB perpēdicolare all'vno & l'altro piano CD EF. Dico detti piani essere paralleli. & se non è così, prolungati si congiungeranno insieme. 3. di questo. congiunganfi & facciano il commun segamento la linea retta GH. & in essa GH preso qual si voglia punto K, giunganfi AK BK. perche dunque la AB è 3. diff. perpendicolare al piano EF, sarà perpendicolare alla BK, essendo la linea retta nel piano EF prolungato. onde l'angolo ABK è retto. & per la medesima ragione BAK è retto, & del triangolo ABK due angoli ABK BAK sono vguali à due retti, che non è possibile. adunque i piani CD EF prolungati non si congiungeranno insieme & però è necessario, che CD EF siano paralleli. onde quei piani sono paralleli fra loro, alli quali la medesima linea retta è perpendicolare. il che bisognaua dimostrare.

SCHOLIO.

LA CONVERSA, Se due piani sono paralleli, la linea retta, che è perpendicolare ad vno di quelli, sara anchor penpendicolare al rimanente.

IL COMMANDINO.

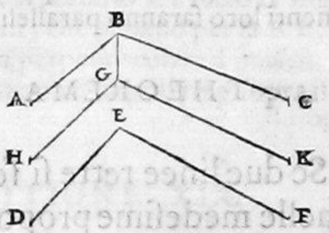
Siano due piani paralleli C D E F, & vna linea retta A B sia perpendicolare al piano, C D. Dico la A B essere anchor perpeodicolare al piano E F. percioche se non è perpendicolarc, tirisi nel piano E F la linea retta B G da quelle parti, nelle quali fa l'angolo minore del retto. & per le A B B G tirisi vn'altro piano, del quale & del piano C D sia il commun segamento la linea retta A H. & perche l'angolo A B G è acuto', prolunganſi i piani, si cangiungeranno insieme finalmente le linee rette B G A H. onde etiandio essi piani si congiungeramo. ma si pongano paralleli, che nonè possibile. non è dnnque la A B non perpendicolare al piano E F, & pero è necessario, che sia perpendicolare, il che ci babbiamo proposto da dimostrare.



THEOREMA XIII. PROPOSITIONE XV.

Se due linee rette che si toccano siano parallele à due altre linee che si toccano, ma non nel medesimo piano, anchor i piani che passano per le dette linee saranno paralleli fra loro.

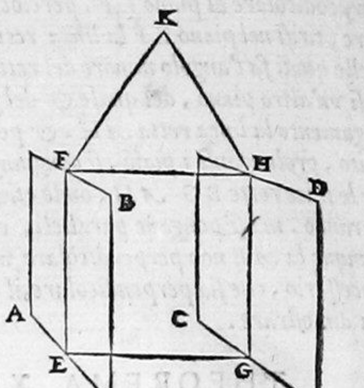
Due linee rette che si toccano AB BC siano parallele à due altre che si toccano DE EF, & non nel medesimo piano. Dico i piani che passano per le AB BC DE EF se si prolunghino congiungersi insieme. tirisi dal punto B al piano che passa per le DE EF la perpendicolare BG, che tocchi il piano nel punto G: & per G tirisi la GH parallela alla ED, & la GK parallela alla EF. perche dunque la BG è perpendicolare al piano che passa per le DE EF, sarà anchora perpendicolare à tutte le linee rette, che la toccano, & sono nel medesimo piano. & 3.diff.



amendue GH GK la toccano, che sono nel medesimo piano. adunque l'vno & l'altro angolo BGH BGK è retto. & perche la BA è parallela alla GH, gliangoli GBA BGH sono vguali à due retti, & BGH è retto. adunque anche GBA sarà retto; & pero la GB è pereendicolare alla BA. & per la medesima ra 29 del primo gione la GB è perpendicolare alla BC. essendo dunque la BG perpendicolare alle due linee rette BA BC, che si segano fra loro, sarà anchor la BG perpendicolare al piano che passa per le AB BC. & per la medesima cagione, la BG 4. di questo. e perpendicolare al piano per le HG GK, ma il piano per le HG GK è quello, che passa per le DE EF. onde la BG è perpendicolare al piano, che passa per le DE EF. & si è dimostrata etiandio BG perpendicolare al piano per le AB BC: & è perpendicolare al piano per DE EF. adunque la BG è perpendicolare ad amendue li piani che passano per le AB BC DE EF. ma quei piani sono paralleli fra loro, alli quali la medesima linea retta è perpendicolare. è dunque il piano per le AB BC parallelo al piano per le DE EF; & perciò se due linee rette che si toccano siano parallele à due altre linee che si toccano, ma non nel medesimo piano, anchor i piani che passano per le dette linee saranno paralleli fra loro. il che bisognaua di mostrare.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIONE XVI.

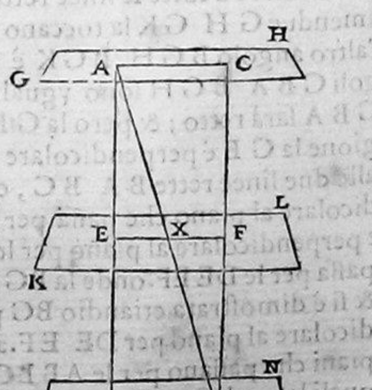
Se due piani paralleli siano segati da qualche piano, i communi segamenti loro saranno paralleli.



Due piani paralleli A B C D siano segati da qualche piano E F G H: & i loro communi segamenti siano E F G H. Dico la E F essere parallela alla G H. percioche se non è parallela, prolongate le E F G H si congiungeranno insieme ò verso le parti F H, ò verso le parti E G. prolunghinsi prima verso le F H: & congiungansi nel punto K. perche dunque la EFK è nel piano A B, & tutti punti, che si pigliano nella E F K saranno nel medesimo piano. ma il punto K è vno di quelli. adunque K è nel piano A B. & per la medesima ragione K è nel piano C D. adunque i piani A B C D prolungati si congiungeranno insieme. ma non si congiungono, conciosiacosa che sian posti paralleli. adunque le linee rette E F G H prolungate non si congiungeranno verso le parti FH. similmente dimostreremo se si prolunghino non congiungersi verso le parti E G. & quelle che da niuna parte si congiungono, sono parallele. onde le E F è parallela alla G H. se dunque due piani paralleli siano segati da qualche piano, i communi segamenti loro saranno paralleli. il che bisognaua dimostrare.

THEOREMA XV. PROPOSITIONE XVII.

Se due linee rette si seghino da piani paralleli, saranno segate nelle medesime proportioni.

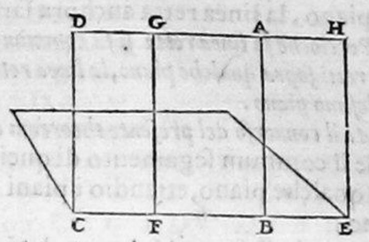


Due linee rette A B, C D siano segate da piani paralleli G H, K L, M N, ne punti A E B C F D. Dico come la linea retta AE alla retta E B, così essere la C F alla F D. giungansi A C B D A D; & la A D tocchi il piano K L nel punto X; & giungansi E X E F. perche dũque due piani paralleli K L M N sono segati dal piano E B D X, i communi segamenti E X B D sono paralleli. per la medesima ragione perche due piani paralleli G H K L sono segati dal piano A E F C, i communi segamenti loro A C F X sono paralleli. & perche ad vn lato del triangolo A B D, cioè à B D si è tirata la E X parallela, come la A E alla E B, così sarà la A X alla X D. similmente perche ad vn lato del triangolo A D C, cioè ad A C si è tirata la X F parallela, sarà come la A X alla X D, così la C F alla F D. & si è dimostrato come la A X alla X D, così essere la A E alla E B. come dunque la A E alla E B, così è la

CF alla F D. onde se due linee rette si seghino da piani paralleli, saranno segate nelle medesime proportioni. il che bisognaua dimostrare.

THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XVIII.

Se vna linea retta sia perpendicolare à qualche piano, tutti li piani che passano per la detta linea, saranno ad angoli retti sopra il medesimo piano.



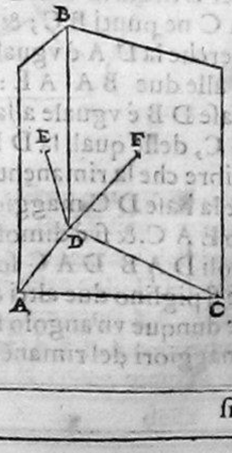
Sia la linea retta A B perpendicolare al soggetto piano. Dico anchor tutti i piani che passano per la A B essere ad angoli retti sopra il soggetto piano. prolunghisi per la A B il piano B E, & sia del piano D E, & del soggetto piano il commun segamento C E, & piglisi nella C E qual si voglia punto F: dal quale nel piano D E ti risi la F G perpendicolare alla CE. perche dunque la A B è perpendicolare al soggetto piano, sarà anchor perpendicolare à tutte le linee rette, che la toccano, & sono nel medesimo piano, & percio è altresi perpendicolare alla C E. onde l'angolo A B F è retto. ma etiandio G F B è retto. adunque la A B è parallela alla F G: & è la A B perpendicolare al soggetto piano. la F G dunque sarà perpendicolare al medesimo piano. ma il piano al piano è retto, quando in vn piano tirate le linee rette perpendicolari sopra il cō mun segamento de piani, siano all'altro piano perpendicolari. & al commun segamento de piani C E tirata in un piano D E, la F G perpendicolare si è dimostrata perpendicolare al soggetto piano. adunque il piano D E è retto al soggetto piano. similmente si dimostreranno tutti li piani, che passano per la A B, esse re retti al detto piano. la onde se vna linea retta sia perpendicolare à qualche piano, tutti i piani che passano per la detta linea, saranno ad angoli retti sopra il medesimo piano. il che bisognaua dimostrare.

3. diff.

8. di questo.
4. diff.

THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XIX.

Se due piani, che si segano siano ad angoli retti sopra qualche piano, etiandio il commune segamento loro sarà perpendicolare al medesimo piano.



Siano due piani che si seghino A B B C ad angoli retti sopra il soggetto piano & il commune segamento loro sia B D. Dico la B D essere perpendicolare al soggetto piano. non gia, ma s'egliè possibile, non sia la B D perpendicolare al soggetto piano: & dal punto D tirisi nel piano A B la linea retta D E, perpēdicolare alla AD; & nel piano BC tirisi la DF perpēdicolare alla CD. & perche il piano A B è retto al soggetto piano, & al commune segamento loro A D è tirata ad angoli retti la D E nel piano A B, sarà la D E perpendicolare al soggetto piano. similmente dimostreremo la D F essere perpēdicolare al soggetto piano. onde dal medesimo punto D sono constituite due linee rette perpendicolari al soggetto piano dalla medesima parte. il che impossibile. adunque dal punto D non si constituiranno altre linee rette perpendicolari al soggetto, fuori che la D B segamento commune de piani A B B C. adunque se due piani che si segano siano ad angoli retti sopra qualche piano, etiandio il commun segamento loro sarà perpendicolare al medesimo piano.

IL COMMANDINO.

Dalle cose dimostrate poco fa appare il conuerso dell'antecedente theorema che è questo.

Se tutti i piani che passano per qualche linea retta siano ad angoli retti sopra vn piano, la linea retta anchora sarà perpendicolare al medesimo piano.

Percioche la linea retta si fa commun segamento di detti piani. onde ponendosi i piani ad angoli retti sopra qualche piano, la linea retta che è commune segamento sarà perpendicolare al medesimo piano.

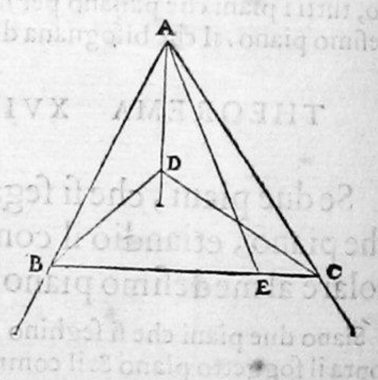
Ma il conuerso del presente theorema appare dall'antecedente, che è in questo modo.

Se il commun segamento di quei piani che si segano fra loro, sia perpendicolare à qoalche piano, etiandio i piani saranno ad angoli retti sopra il medesimo piano.

Percioche il commun segamento de piani è vna linea retta, per la quale passano detti piani. & essendo la linea perpendicolare ad un piano, i piani anchora sono ad angoli retti sopra il medesimo.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIONE XX.

Se vn'angolo solido sia contenuto da tre angoli piani, due di loro sono maggiori del rimanẽte, presi in qual sivoglia modo.



L'angolo solido A sia contenuto da tre angoli piani B A C C A D D A B. Dico de gli angoli B A C C A D D A B due essere maggiori del rimanente, presi in qualunque modo. percioche se gli angoli B A C C A D D A B. siano fra loro vguali, è manifesto due essere maggiori del rimanente, presi in qualunque modo. ma se non siano vguali, sia B A C maggiore, & nella linea retta A B & nel punto in essa A constituiscasi nel piano, che passa per le B A A C l'angolo B A E vguale all'angolo D A B; & pongasi la A E vguale alla AB: & per E tirata la B E C seghi le linee rette A B A C ne punti B C; & giunganfi B D D C. & perche la D A è vguale alla A E, & la A B è commune, le due D A AB sono vguali alle due B A A E: & l'angolo D A B è vguale all'angolo B A E. adunque la base D B è vguale alla base B E. & perche le due B D D C sono maggiori della B C, delle quali la D B si dimostrata vguale alla B E, sarà la rimanente D C maggiore che la rimanente E C. & essendo la D A vguale alla A E, & la C commune, & la base D C maggiore dalla base E C; sarà l'angolo D A C maggiore dell'angolo E A C. & si è dimostrato l'angolo D A B vguale all'angolo B A E. onde gli angoli D A B D A C sono maggiori dell'angolo B A C. similmente dimstreremo se si piglino due altri angoli, quali si siano, quelli essere maggiori del rimanente. se dunque vn'angolo solido sia contenuto da tre angoli piaui, due di loro sono maggiori del rimanẽte, presi in qual si voglia modo. il che bisognaua dimostrare.

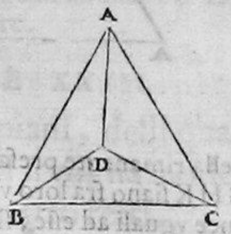
23. del primo:

8. del primo:

THEO-

THEOREMA XXI. PROPOSITIONE XXI.

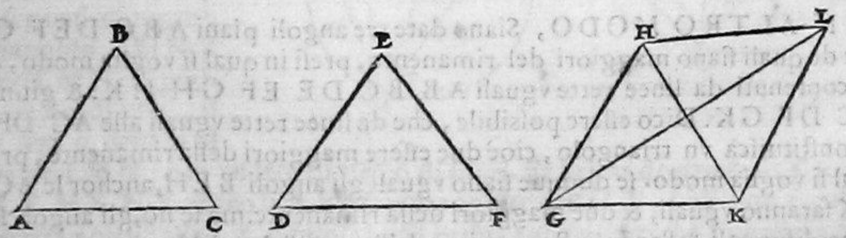
Ogni angolo ſolido è contenuto da angoli piani minori di quattro retti.



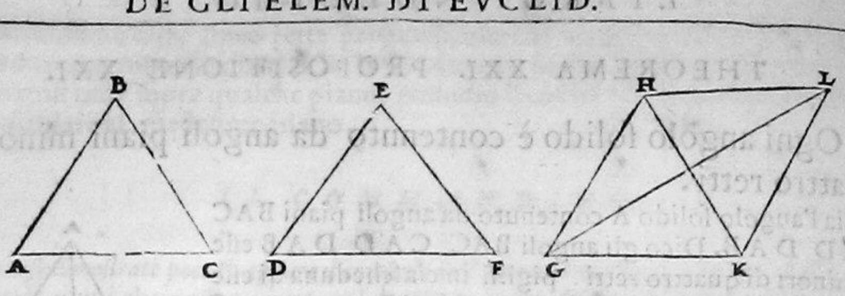
Sia l'angolo ſolido A contenuto da angoli piani BAC CAD DAB. Dico gli angoli BAC CAD DAB eſſere minori di quattro retti. pigliſi in ciaſcheduna di eſſe AB AC AD quai ſi voglino punti B C D: & giunganſi BC CD DB. perche dunque l'angolo ſolido B è contenuto da tre angoli CBA ABD CBD, due quali ſi vogliano ſono maggiori del rimanente. adunque gli angoli CBA ABD ſono maggiori dell'angolo CBD. & per la medeſima ragione gli angoli BCA ACD ſono maggiori dell'angolo BCD. & gli angoli CDA ADB maggiori dell'angolo CDB. onde ſei angoli CBA ABD BCA ACD ADC ADB ſono maggiori di tre angoli CBD BCD CDB. ma tre angoli CBD BDC DCB ſono vguali a due retti. adunque ſei angoli CBA ABD BCA ACD ADC ADB ſono maggiori de due retti. & eſſendo tre angoli di ciaſcun triangolo ABC ACD ADB vguale à due retti, ſaranno di tre triangoli noue angoli CBA ACD BAC ACD DAC CDA ADB DBA BAD vguali à ſei retti. de quali ſei angoli ABC BCA ACD CDA ADB DBA ſono maggiori di due retti. adunque i tre angoli rimanenti BAC CAD DAB che contengano vn'angolo ſolido ſaranno minori di quattro retti. la onde ogni angolo ſolido è contenuto da angoli piani minori di quattro retti. il che biſognaua dimoſtrare.

THEOREMA XX. PROPOSITIONE XXII.

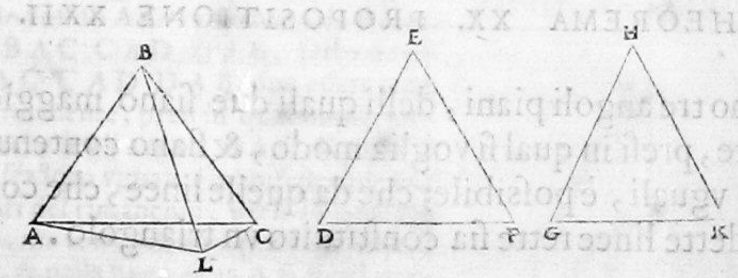
Se ſiano tre angoli piani, delli quali due ſiano maggiori del rimanente, preſi in qual ſi voglia modo, & ſiano contenuti da linee rette vguali, è poſsibile, che da quelle linee, che congiungono le dette linee rette ſia conſtituito vn triangolo.



Siano tre angoli pianı ABC DEF GHK, due de quali ſiano maggiori del rimanente, preſi in qualunque modo, cioè gli angoli ABC DEF ſiano maggiori del rimanente angolo GHK, & gli angoli DEF GHK maggiori dell'angolo ABC. & oltre à ciò gli angoli GHK ABC maggiori dell'angolo DEF: & ſiano vguali le linee rette AB BC DE EF GH HK: & giunganſi AC DF GK. Dico eſſere poſsibile, che da linee rette vguali alle AC DF GK ſi conſtituiſca vn triangolo, cioè, due quali ſi vogliano delle AC DF GK eſſere maggiori



della rimanente presa in qualunque modo. se dunque gli angoli A B C D E F G H K siano fra loro vguali, è manifesto che facendosi vguali A C D F G K da
23. del primo. linee vguali ad esse, si può constituire vn triangolo. ma se nò, siano disuguali, & nella linea retta H K, & nel punto in essa H constituiscasi l'angolo K H L vguale all'angolo A B C: & pongasi ad vna di esse A B B C D E E F G H H K vguale H L, & giunganſi G L K L. onde perche le due A B B C sono vguali alle due
4. del primo: K H H L, & l'angolo B è vguale all'angolo K H L, sarà la base A C vguale alla base K L: & perche gli angoli A B C G H K sono maggiori dell'angolo D E F, & l'angolo A B C è vguale all'ãgolo K H L, sarà G H L maggiore dell'angolo D E F. & essendo le due G H H L vguali alle due D E E F, & l'angolo C H L maggiore
24. del primo. dell'angolo E, sarà la base G L maggiore della base D F. ma le G K K L sono mag
20. del primo. giori della G L. adunque molto maggiori sono G K K L della D F. & la K L è vguale alla A C. onde le A C G K sono maggiori della rimanente D F. nel medesimo modo dimostreremo le A C D F essere maggiori della G K, & le G K D F maggiori della A C. è dunque possibile, che da linee rette vguali alle A C D F G K si constituisca vn triangolo.



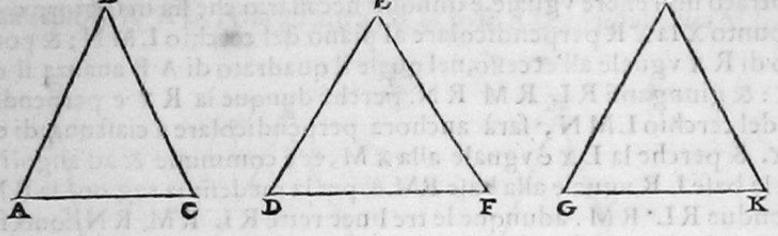
IN ALTRO MODO, Siano date tre angoli piani A B C D E F G H K, due de quali siano maggiori del rimanente, presi in qual si voglia modo, & siano contenuti da linee rette vguali A B B C D E E F G H H K: & giunganſi A C D F G K. Dico essere possibile, che da linee rette vguali alle A C D F G K si constituisca vn triangolo, cioè due essere maggiori della rimanente, prese in qual si voglia modo. se dunque siano vguali gli angoli B E H, anchor le A C D F G K saranno vguali, & due maggiori della rimanente. ma se nò, gli angoli B E H
24. del primo. siano disuguali, & l'angolo B maggiore dell'vno & l'altro E H. adunque anchor la linea retta A C è maggiore dell'vna & l'altra di esse D F G K. & è manifesto, che
23. del primo. la A C insieme con vna di esse D F G K è maggiore della rimanente. Dico etiandio le D F G K essere maggiori della A C. constituiscasi nella linea retta A B, & nel punto in essa B, l'angolo A B L vguale all'angolo G H K, & ad vna di esse A B B C D E E F G H H K pongasi vguale la B L: & giunganſi A L L C. perche dunque le due A B B L sono vguali alle due G H H K, l'vna all'altra, & conten
4. del primo. gono angoli vguali; sara la base A L vguale alla base G K. & perche gli angoli E H sono maggiori dell'angolo A B C, de quali l'angolo G H K è vguale all'an-

golo

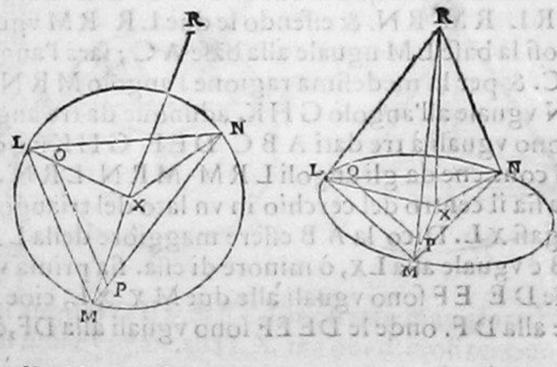
golo A B L, sarà il rimanente E maggiore dell'angolo LBC, & essendo le due LB
B C vguali alle due D E E F, l'vna all'altra , & l'angolo D E F maggiore dell'an- 24. del primo.
golo L B C; & la base D F sarà maggiore della base L C ; & si è dimostrata la G K
vguale alla A L. adunque le D F G K sono maggiori delle A L L C. ma le A L
L C sono maggiori della A C . saranno dunque le D F G K molto maggiori del
la A C . onde delle linee rette A C D F G K due sono maggiori della rimanen-
te, prese in qualunque modo; & però è possibile che dalle vguali ad esse A C D F
G K si constituisca vn triangolo . il che bisognaua dimostrare .

PROBLEMA III. PROPOSITIONE XXIII.

Constituire vn'angolo solido di tre angoli piani, delli quali due siano maggiori del rimanente, presi in qual si voglia modo; ma bisogna che li tre angoli siano minori di quattro retti.



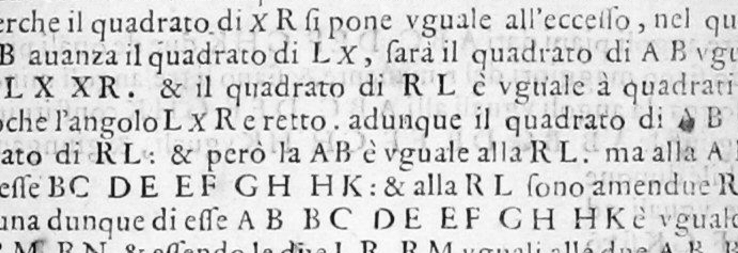
Siano li tre angoli piani dati A B C D E F G H K, due de quali presi in qual si
uoglia modo siano maggiori del rimanente, & siano li tre angoli minori di quat-
tro retti. bisogna da angoli vguali alli A B C D E F G H K constituire vn'ango-
lo solido. taglinsi le A B B C D E E F G H H K vguali, & giunganisi A C D F
G K. è possibile dunque per l'antecedente.
che da linee vguali ad
esse A C D F G K si cõ
stituisca vn triangolo.
onde constituiscasi L M
N, talmente che la A C
sia vguale alla L M, & 22 del primo.
la D F alla M N. & oltre
à questo la G K alla L N:
& descriuasi d'intorno
al triangolo L M N il
cerchio L M N: & pigli 5. del quarto.
si il centro di esso, il
quale sarà ò dentro al



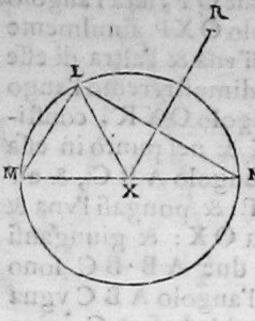
triangolo L M N, ò in vn lato di essi, ò di fuori. sia prima dentro & sia X. & giun
gasi L X M X N X. Dico la A B essere maggiore della L X, & se non è cosi, la
A B ò sarà vguale alla L X, ò minore. sia prima vguale. perche dunque la A B è
vguale alla L X, & è vguale alla B C; sarà L X alla B C vguale. ma la L X è vgua-
le alla X M. adunque le due A B B C sono vguali alle due L X X M l'vn'all'altra:
& la base A C si pone vguale alla base L M. onde l'angolo A B C è vguale all'ango
lo L X M. & per la medesima ragione l'angolo D E F è vguale all'angolo M X N; 8. del primo.
& l'angolo G H K all'angolo N X L. tre angoli dunque A B C D E F G H K sono
vguali à tre angoli L X M M X N N X L. ma li tre L X M M X N N X L sono vgua
li à quattro retti. adunque anchor li tre A B C D E F G H K saranno vguali à Corol. 15. del primo.
quattro retti: & si pongono minori di quattro retti. il che è inconueniente. non

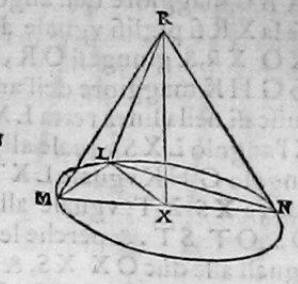
è dunque la A B vguale alla L X. Dico etiandio la A B non essere minore della
L X. percioche s'egli è possibile, sia minore: & pongasi la X O vguale al a A B, &
alla B C vguale la X P: & giungasi O P. perche dunque la A B è vguale alla B C,
etiandio la X O sarà vguale alla X P. adunque anchora la rimanente O L e vguale
2. del sesto. alla rimanente P M. & però la L M è parallela alla O P, & il triangolo L M X e-
4. del sesto. quiangolo al triangolo O P X. è dunque come la X L alla L M, cosi la X O alla O P:
& permutandosi come la L X alla X O, cosi la L M alla O P; & la L X è maggiore
della X O. adunque la L M è maggiore della O P. ma la L M si è posta vguale alla
A C. onde anchor la A C sarà maggiore della O P. & perche due linee rette A B
B C sono vguali alle due O X X P, & la base A C è maggiore della base O P; sarà
25. del primo. l'angolo A B C maggiore dell'angolo O X P. similmente dimostreremo l'angolo
D E F essere maggiore dell'angolo M X N, & l'angolo G H K dell'angolo N X L.
tre angoli dunque A B C D E F G H K sono maggiori delli tre L X M M X N
N X L. ma gli angoli A B C D E F G H K si pongono minori di quattro retti,
adunque gli angoli L X M M X N N X L saranno molto minori di quattro retti,
Cor. 15. del primo. ma sono vguali, che è inconueniente. non è dunque la A B minore della L X: &
si è dimostrato non essere vguale. e dunque necessario che sia maggiore. constitui
12. di questo. scasi dal punto X la X R perpendicolare al piano del cerchio L M N; & pongasi il
quadrato di R X vguale all'eccesso, nel quale il quadrato di A B auanza il quadra
to de L X: & giungansi R L R M R N. perche dunque la R X e perpendicolare
3 diff. al piano del cerchio L M N, sarà anchora perpendicolare à ciascuna di esse L X
M X N X. & perche la L X è vguale alla X M, & è commune & ad angoli retti la
4. del primo. X R. sarà la base L R vguale alla base R M. & per la medesima ragione la R N vgua
le ad amendue R L R M. adunque le tre linee rette R L R M, R N sono fra loro
vguali, & perche il quadrato di X R si pone vguale all'eccesso, nel quale il qua-
drato di A B auanza il quadrato di L X, sarà il quadrato di A B vguale à qua-
47 del primo. drati delle L X X R. & il quadrato di R L è vguale à quadrati delle L X
X R, percioche l'angolo L X R e retto. adunque il quadrato di A B sarà vgua-
le al quadrato di R L: & però la A B è vguale alla R L. ma alla A B e vguale
ciascuna di esse B C D E E F G H H K: & alla R L sono amendue R M R N u-
guali. ciascuna dunque di esse A B B C D E E F G H H K è vguale à ciascuna
delle R L R M R N. & essendo le due L R R M vguali alle due A B B C, & po-
8 del primo. nendosi la base L M uguale alla base A C; sarà l'angolo L R M vguale all'angolo
A B C. & per la medesima ragione l'angolo M R N all'angolo D E F, & l'angolo
L R N vguale all'angolo G H K. adunque da tre angoli piani L R M M R N L R N
che sono vguali à tre dati A B C D E F G H K si è constituito l'angolo solido R;
che si contiene da gli angoli L R M M R N L R N.

Ma sia il centro del cerchio in vn lato del triangolo, cioe in M N, che sia X. &
giungasi X L. Dico la A B essere maggiore della L X. percioche se non sia cosi, ò
la A B è vguale alla L X, ò minore di essa. sia prima vguale. le due dunque A B B C
20. del primo. cioè le D E E F sono vguali alle due M X X L, cioe alla M N. ma la M N si pone v-
guale alla D F. onde le D E E F sono vguali alla D F, che nō è possibile. nō dunque la

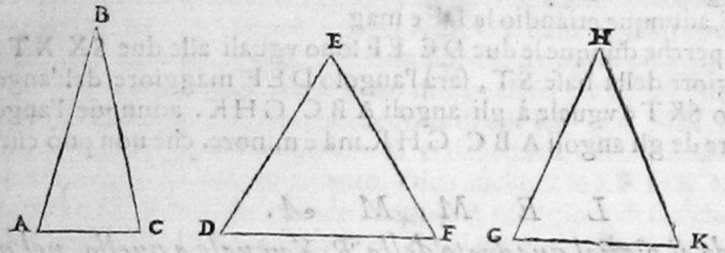


AB vguale alla LX. similmente anco nõ è minore. percioche ne seguirebbe molto maggiormẽte l'impossibile. onde la A B è maggiore della L X. & similmẽte se a l'eccesso, nel quale il quadrato di A B auanza il quadrato di L X si ponga vguale, come il quadrato di R X. & la RX si constituisca perpendicolare al piano del cerchio, si farà il problema.



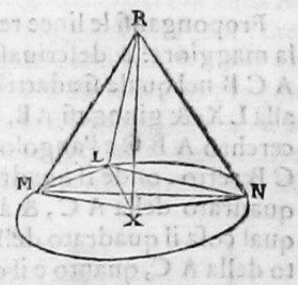


Ma sia il centro del cerchio fuori del triangolo L M N che sia X, & giunganſi LX MX NX. Dico anchora la A B essere maggiore della L X, percioche se non è cosi, ò vero è vguale, ò minore, sia prima vguale. adunque le due A B B C sono vguali alle M X X L, l'vna all'altra: & la base A C e vguale alla M L. adunque



l'angolo A B C e vguale all'angolo M X L. & per la medesima ragione l'angolo G H K è vguale all'angolo L X N: & però tutto l'angolo M X N e vguale alli due A B C G H K. ma anchor gli angoli A B C G H K sono maggiori dell'angolo D E F. adunque etiandio l'angolo M X N e maggiore di esso D E F. & perche le due D F E F sono vguali alle due M X X N, & la base D F è vguale alla base M N; sarà l'angolo M X N vguale all'angolo D E F. & si è dimostrato maggiore, che è inconueniente. adunque la A B non è vguale alla L X. ma poi dimostreremo ne anche essere minore. onde è necessario, che sia maggiore, & se constituiamo similmente la X R ad angoli retti sopra'l piano del cerchio, & la poniamo vguale al lato di quel quadrato, nel quale il quadrato della A B auanza il quadrato della LX, si farà il problema. Onde dico la A B non essere ancho minore della L X. percioche sia minore, se esser può; & alla A B pongasi vguale la X O: & alla B C vguale la X P, & giungasi O P. perche dunque la A B è vguale alla B C, sarà anchor la X O vguale alla X P. adunque la rimanente O L e vguale alla rimanente P M. & però la L M e parallela alla P O: & il triangolo L M X equiangolo al triangolo P X O. onde come la X L alla L M, cosi la X O alla O P, & permutandosi come la L X alla X O, cosi la L M alla O P. ma la L X e maggiore, che la X O. adunque la L M è maggiore che la O P: & la L M e vguale alla A C. onde anchor la A C sarà maggiore, che la O P. perche dunque le due A B B C sono

8. del primo.

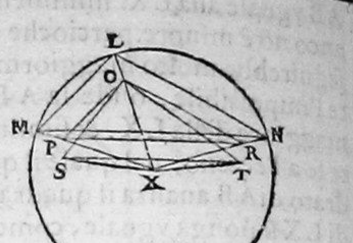


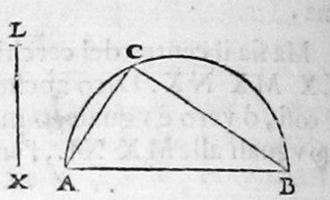
8. del primo

1. del sesto.

4. del sesto.

vguali alle due O X X P, l'una all'altra, & la ba
25. del primo. se A C è maggiore della base O P, sarà l'angolo
A B C maggiore dell'angolo O X P. similmente
se la X R si piglisi vguale all'vna & l'altra di esse
X O X P, & giungasi O R, dimostreremo l'ango
23. del primo. lo G H K maggiore dell'angolo O X R. consti-
tuiscasi nella linea retta L X & nel punto in essa
X l'angolo L X S vguale all'angolo A B C, & all'
angolo G H K vguale L X T: & pongasi l'vna &
l'altra X S X T vguale alla O X: & giunganſi
O S O T S T. & perche le due A B B C sono
vguali alle due O X X S, & l'angolo A B C vgua
vguale all'angolo O X S, sarà la base A C, cioè
4. del primo. L M vguale alla base O S. & per la medesima ra-
gione la L N e vguale alla O T. & essendo le due
M L L N vguali alle due O S S T, & l'angolo
M L N maggiore dell'angolo S O T, sarà anchor
24. del primo. la base M N maggiore della base S T. ma la M N
e uguale alla D F. adunque etiandio la D F e mag
giore della S T. perche dunque le due D E E F sono vguali alle due S X X T, &
25. del primo. la base D F maggiore della base S T, sarà l'angolo D E F maggiore dell'angolo
S X T, & l'angolo S X T e vguale à gli angoli A B C G H K. adunque l'angolo
D E F è maggiore de gli angoli A B C G H R. ma è minore. che non può essere.

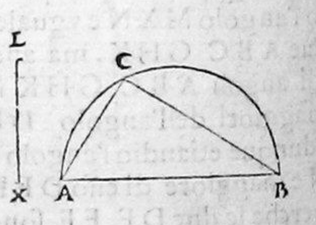




L E M M A.

In che modo si pigli il quadrato della R X uguale a quello, nel quale il quadrato della A B auanza il quadrato della L X, dimostreremo cosi.

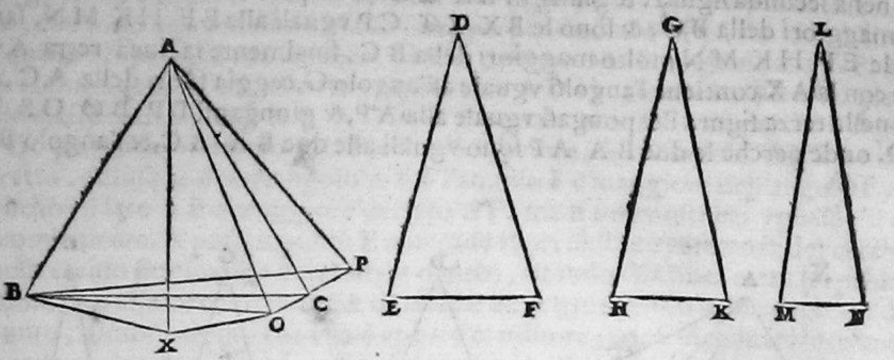
Proponganſi le linee rette A B L X: & sia A B
la maggiore: & descriuasi in essa il mezo cerchio
A C B nel quale si adatti la linea retta A C uguale
alla L X: & giungasi A B. perche dunque nel mezo
31. del sesto. cerchio A B C e l'angolo A C B, sarà l'angolo A
47 del primo. C B retto. onde il quadrato della A B e vguale al
quadrato della A C, & à quello della C B. per la
qual cosa il quadrato della A B auanza il quadra-
to della A C, quanto e il quadrato della C B: & la A C e vguale alla L X. adunque
il quadrato della A B auanza il quadrato della L X quanto è'l quadrato della C B:
& però se pigliamo alla C B vguale la X R, il quadrato della A B auanzerà il qua-
drato della L X, quanto è'l quadrato, che si fa dalla R X.



S C H O L I O.

P R O P O S I T I O N E I.

Se siano quanti angoli piani si vogliano, de quali tutti gli altri siano maggiori, che vno, presi in qualunque modo; & siano contenuti da linee rette vguali. Dico delle linee rette, che sono sottoposte a detti angoli tutte le altre essere maggiori, che una, prese in qualunque modo, cioè esser possibile, che da quelle linee che con giungono le dette linee rette, sia constituta vna figura di molti lati.

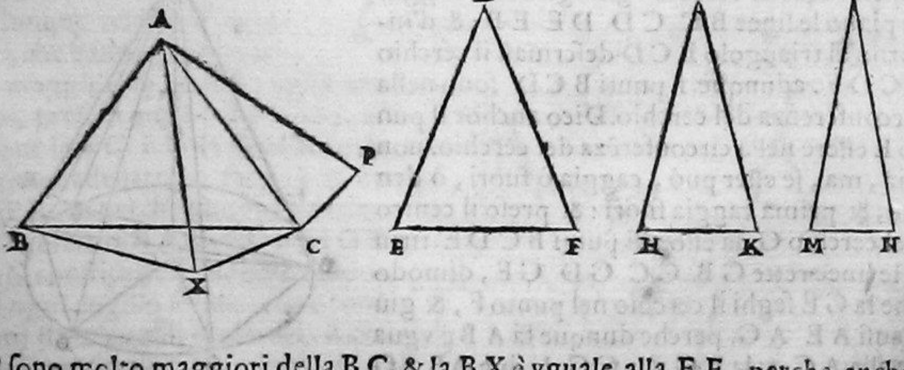


Se siano dati quattro angoli ne punti A D G L, tre de quali siano maggiori, chel rimanente, presi in qualnnque modo: & siano le linee rette vguali B A AC ED DF HG GK ML LN: & giunganfi B C EF HK MN. Dico delle BC EF HK MN tre essere maggiori, che la rimanente, prese in qual si voglia modo, percioche se'gli angoli ne pũti A D G L siano vguali, etiandio i lati BC EF HK MN saranno vguali. & è manifesto le tre essere maggiori, che vna, prese in qual si voglia modo. ma se siano disuguali sia maggiore l'angolo A. è dunque la base B C maggiore, che ciascheduna di esse E F HK MN. onde la B C insieme con vna di quelle è maggiore di ciascheduna delle rimanenti. & con due è molto maggiore della rimanente. Dico anchora le E F HK M N essere maggiori della B C, percioche essendo l'angolo A maggiore di ciaschedun di essi DGL, constituiscasi nella linea retta B A, & nel punto in essa A l'angolo B A X vguale all'angolo D: & nella linea retta A X & nel punto in essa A constituiscasi l'angolo X A O vguale all'angolo G. la linea retta A O ò cadera dentro la linea A C, ò in essa, ò fuori di essa. caggia primieramente dentro. & nella linea retta O A, & nel punto in essa A facciasi l'angolo O A P vguale all'angolo L. caderà la linea AP fuori della linea A C; percioche tre angoli D G L sono maggiori del rimanente. & alle A B A C ponganfi vguali le A X A O A P: & giunganfi BX XO BO OP B P. perche dunque le due B A A P sono vguali alle due B A A C. & l'angolo B A P è maugiore dell'angolo B A C, sarà anchor la base B P maggiore della base A C. ma della B P sono maggiori le B O O P. onde le B O O P sono molto maggiori della B C. & sono le B X X O maggiori della B O. adonque le BX XO

24. del primo.

23. del primo.

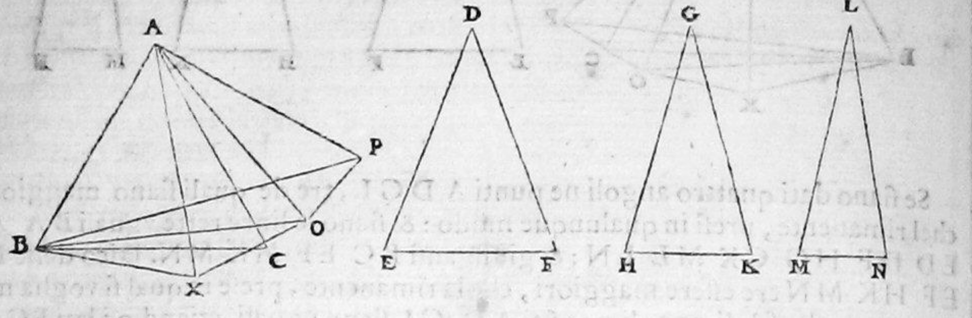
24. del primo.



O P sono molto maggiori della B C. & la B X è vguale alla E F, perche anchor l'angolo B A X è vguale all'angolo E D F, & la X O è vguale alla H K, & la O P al la M N. & pero le E F HK M N saranno molto maggiore della B C. ma la linea retta, che con la A X contiene l'angolo vguale all'angolo G, caggia in A C, co-

4. ddl primo.

me nella seconda figura: & giungasi B X X C C P. perche dunque B X X C sono maggiori della B C, & sono le B X X C C P vguali alle E F H K M N, saranno le E F H K M N molto maggiori della B C. finalmente la linea retta A O, che con la A X contiene l'angolo vguale all'angolo G, caggia fuori della A C, come nella terza figura: & pongasi vguale alla A P, & giungansi B P B O O P B X X O. onde perche le due B A A P sono vguali alle due B A A C, & l'angolo B A P

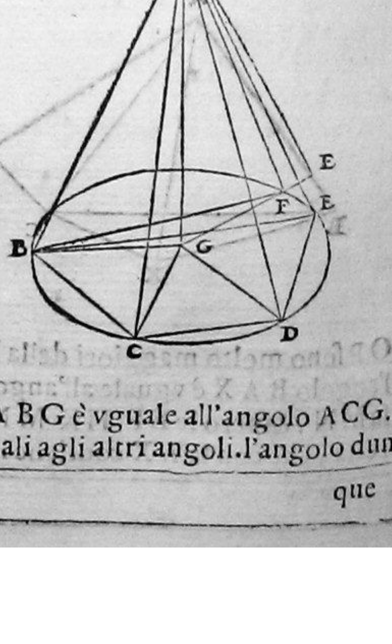


24. del primo. è maggiore dell'angolo B A C, sarà la B P maggiore della B C. oltre à ciò perche le B O O P sono maggiori della B P; & le B X X O maggiori della B O; saranno le B X X O O P molto maggiori della B P. ma la B P è maggiore della B C. onde le B X X O O P sono molto maggiori della B C; & sono le B X X O O P vguali alle E F H K M N. adunque le E F H K M N sono molto maggiori della B C. & perche tre sono maggiori della rimanente, prese in qual si voglia modo, è possibile, che da esse sia constituito vn quadrilatero.

PROPOSITIONE II.

Se da vn punto sublime in qualche piano caggiano linee rette vguali, saranno nella circonferenza di vn cerchio; & quella, che dal detto punto si tira al centro del cerchio, sarà perpendicolare al suo piano.

Dal punto A caggiano nel soggetto piano linee rette vguali A B A C A D A E alli punti B C D E. Dico detti punti essere nella circonferenza del cerchio: giunganſi nel soggetto piano le linee B C C D D E E B: & d'intorno al triangolo B C D descriuasi il cerchio B C D F. adunque i punti B C D sono nella circonferenza del cerchio. Dico anchor il punto E essere nella circonferẽza del cerchio. non già, ma, se esser può, caggia ò fuori, ò dentro, & prima caggia fuori: & preso il centro del cerchio G da esso alli punti B C D E tirinsi le linee rette G B G C G D G E, dimodo che la G E seghi il cerchio nel punto F, & giũgansi A E A G. perche dunque la A B è vguale alla A C, & la B G alla C G, le due A B B G sono vguali alle due A C C G; & la base A G



8. del primo. è commune all'vna & l'altra. adunque l'angolo A B G è vguale all'angolo A C G. & il triangolo al triangolo, & gli altri angoli vguali agli altri angoli. l'angolo dun

que A G B è vguale all'angolo A G C. & per la medesima ragione l'angolo AGC, sarà vguale all'angolo A G D. & essendo la A G perpendicolare à più di due linee rette, che sono nel medesimo piano, sarà perpendicolare al piano che è tirato per quelle: & però ad esso cerchio. perche dunque la G D è vguale alla G F, & la G A commune & ad angoli retti, sara la base A D vguale alla base A F. onde eti andio ciascheduna di esse A B A C A E è vguale alla A F. & perche l'angolo A F E è maggiore del retto A G F, essendo esteriore; sarà l'angolo A E F minore del retto. adunque del triangolo A E F l'angolo F è maggiore dell'angolo E. onde anchor il lato A E è maggiore del lato A F. ma si è dimostrato vguale. il che è inconueniente. & però il punto E non cade fuori della circóferenza del cerchio. dimostreremo similmente non cadere dentro, tirando essa linea retta, & prolungandola fino alla circonferenza, & di nuouo da A giungendo la linea retta al detto punto, dimostreremo che essa è vguale & minore, che è inconueniente. ma se non cade ne dentro ne fuori, resta che caggia in essa circonferenza. adunque le A B A C A D A E sono nella circonferenza del cerchio, & la A G è perpendicolare ad esso cerchio. il che bisognaua dimostrare. 4. di questo. 4. del primo.

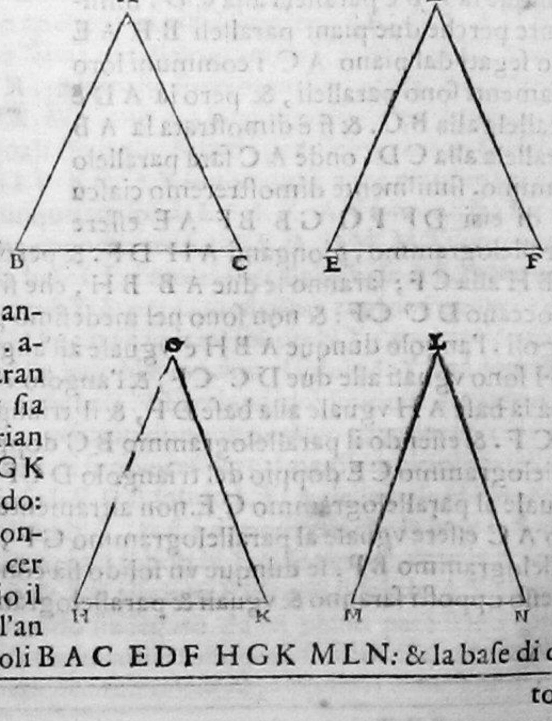
C O R O L L A R I O.

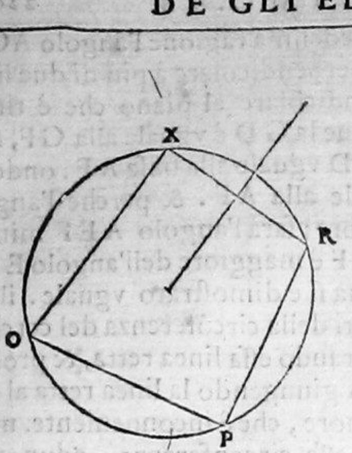
Da questo è chiaro la base di ogni angolo solido, che è contenuto da piani equicruri, descriuersi in vn cerchio.

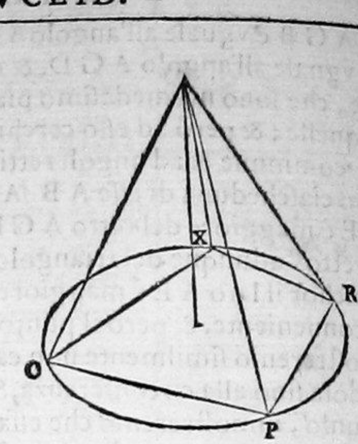
PROPOSITIONE III.

Constituire vn'angolo solido de quanti angoli piani si vogliano, de quali tutti gli altri siano maggiori di vno, presi in qualunque modo. ma bisogna che gli angoli dati, siano minori di quattro retti.

Siano detti angoli B A C E D F H G K M L N. bisogna da gli angoli, che sono ne punti A D G L, constituire vn'angolo solido. piglinsi linee rette vguali, che contengano essi angoli, & giungansi B C E F H K M N. sono dunque triangoli equicruri, che hanno gli altri angoli maggiori di qual si voglia angolo, presi in qualunque modo. adunque le B C E F H K M N faranno vn quadrilatero. facciasi & sia X O P R. & perche bisogna da triangoli equicruri B A C E D F H G K M L N constituire vn'angolo solido: & di ogni angolo solido, che è contenuto da triangoli equicruri, il cerchio circonscriue la base, etiandio il cerchio circonscriuerà la base dell'angolo solido contenuto da triangoli B A C E D F H G K M L N: & la base di det



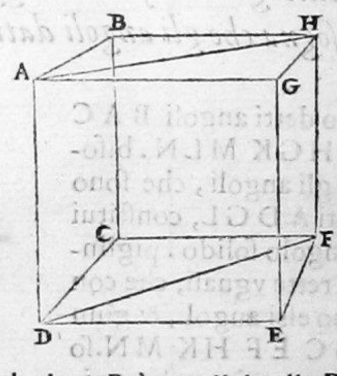




to angolo, è composta dalle basi de essi triangoli cioè X O P R. adunque il cerchio circonscriue il quadrilatero X O P R. & poi formando le medesime cose, che si sono dette, faremo quello, che s'è proposto nell'angolo solido, che ha per base il triangolo.

THEOREMA XXI. PROPOSITIONE XXIIII.

Se vn solido sia contenuto da piani paralleli, i piani di esso opposti saranno & vguali & parallelogrammi.



Il solido C D G H sia contenuto da piani paralleli A C G F A H D F F B A E. Dico i piani di esso opposti essere & vguali & parallelogrammi. percioche essendo due piani paralleli B G C E segati dal piano A C,
16. di questo. i communi segamenti loro sono paralleli. adunque la A B è parallela alla C D. similmente perche due piani paralleli B F A E sono segati dal piano A C i communi loro segamenti sono paralleli, & pero la A D è parallela alla B C. & si è dimostrata la A B parallela alla C D. onde A C sarà parallelogrammo. similmente dimostreremo ciascuno di essi D F F G G B B F A E essere parallelogrammo, gionganси A H D F. & perche la A B è parallela alla D C; & la B H alla C F; saranno le due A B B H, che si toccano, parallele alla due, che
10. di questo. si toccano D C C F: & non sono nel medesimo piano. onde conterranno vguali angoli. l'angolo dunque A B H è vguale all'angolo D C F. & perche le due A B
34. del primo. B H sono vguali alle due D C C F, & l'angolo A B H è vguale all'angolo D C F,
4. del primo. sarà la base A H vguale alla base D F, & il triangolo A B H vguale al triangolo D C F. & essendo il parallelogrammo B G doppio del triangolo A B H. & il pa-
41. del primo. rallelogrammo C E doppio del triangolo D C F, sarà il parallelogrammo B G vguale al parallelogrammo C E. non altramente dimostreremo il parallelogrammo A C essere vguale al parallelogrammo G F, & il parallelogrammo A E al parallelogrammo B F. se dunque vn solido sia contenuto da pianiparalleli, i piani di esso opposti saranno & vguali & parallelogrãmi. il che bisognaua dimostrare.

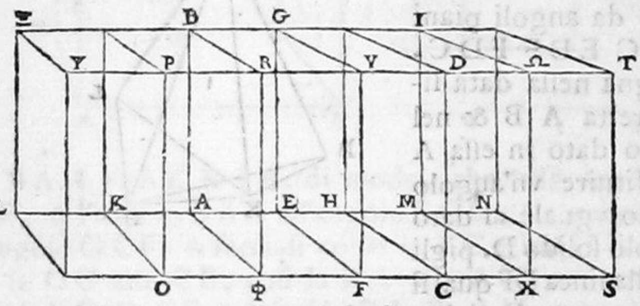
IL COMMANDINO.

COROLLARIO.

Dalle cose gia dimostrate appare, che sel solido sia contenuto da piani paralleli i piani di esso opposti sono vguali & simili, hauendo ciascun'angolo vguale, & d'intorno à gli vguali angoli i lati proportionali.

THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXV.

Se vn solido parallelepipedo, cioè contenuto da piani paralleli sia segato da vn piano parallelo alli piani opposti, sarà come la base alla base, cosi il solido al solido.



Il solido parallelepipedo A B C D sia segato dal piano Y E, parallelo alli piani oppositi R A D H. Dico come la base A E F Φ alla base E H C F, cosi essere il solid A B F Y al solido E G C D. prolunghisi la A H dall'vna & dall'altra parte. & ponganſi alla E H quanti si voglian o, vguali H M M N: & a la A E quanti si vogliano vguali A K K L. & compiscansi i parallelogrammi L O K Φ H X M S & i solidi L P K R D M M T. perche dunque le linee rette LK KA A E sono fra loro vguali, saranno anchor i parallelogrammi L O K Φ A F fra loro vguali; & parimente vguali fra loro i parallelogrammi K X K B A G, & altre si i parallelogrammi L ✝ K P A R, percioche sono opposte. per la medesima ragione i parallelogrammi E C H X M S sono fra loro vguali, & parimente i parallelogrammi H G H I I N vguali fra loro. & cosi i parallelogrammi D H M Ω N T. adunque tre piani de solidi L P K R A Y sono vguali à tre piani. ma tre piani à tre opposti sono vguali. adunque tre solidi L P K R A Y saranno fra loro vguali, & per la medesima ragione etiandio tre solidi E D D M M T sono vguali fra loro. quante volte dunque la base L F è moltiplice della base A F, tante volte il solido L Y è moltiplice del solido A Y. & per la medesima ragione quante volte la base N F è moltiplice alla base H F, tante volte il solido N Y è moltiplice del solido H Y, & se la base L F è vguale alla base N F, anchor il solido L Y sarà vguale al solido N Y, & se la base L F auanza la base N F, etiandio il solido L Y auanzera il solido N Y, & se minore, minore. essendo dunque quattro grandezze, cioè due basi A F F H, & due solidi A Y Y H, si sono presi vgualmenle moltiplici della base A F & del solido A Y, cioè la base L F, & il solido L Y; & della base H F & del solido H Y, cioè la base N F & il solido N Y. & si è dimostrato che la base L F auanza la base N F, & il solido L Y auanzerà il solido N Y, & se vguale, vguale & se minore, minore. è dunque come la base A F alla base F H, cosi il solido A Y al solido Y H. onde se il solido parallelepipedo sia segato da vn piano parallelo à gli oppositi piani, sara come la base alla base, cosi il solido al solido. il che bisognaua dimostrare.

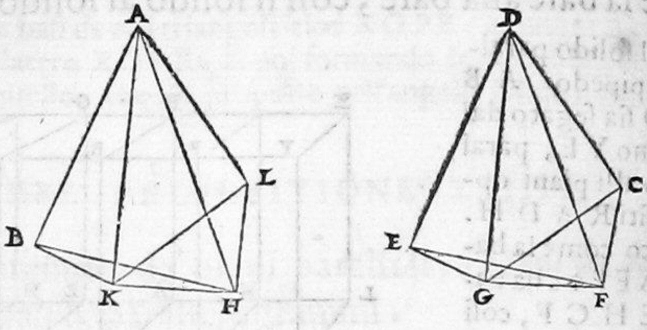
IL COMMANDINO.

Et se vn solido parallelepipedo sia segato da vn piano parallelo alle basi, sarà il solido al solido come l'altezza all'altezza.

Questo noi habbiamo dimostrato nel libro del cenrro della grauita de solidi, nella propositione XVIII.

PROBLEMA IIII. PROPOSITIONE XXVI.

Nella data retta linea, & nel punto dato in essa constituire vn'angolo solido vguale ad'vn'altro dato.



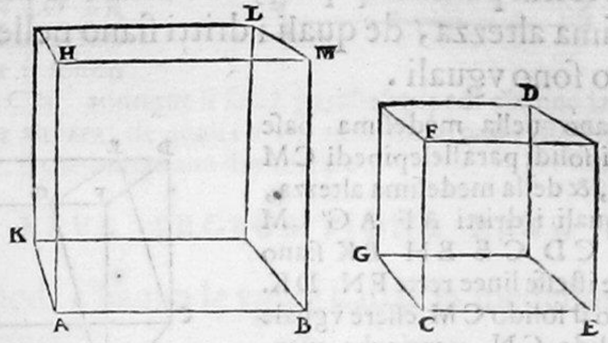
Sia la data linea retta A B, il punto in essa dato A, & l'angolo solido D, che sia contenuto da angoli piani E D C E D F F D C. bisogna nella data linea retta A B & nel punto dato in essa A constituire vn'angolo solido vguale al dato angolo solido D. piglisi nella linea DF qual si voglia punto F, dal quale si tiri la F G perpendicolare al piano, che passa per le E D D C, & tocchi il piano nel punto G: & giungasi D G; & nella linea retta A B & nel punto in essa A, constiluiscasi l'angolo B A L vguale all'angolo E D C, & all'angolo E D G constituiscasi vguale l'angolo B A K. oltre à ciò pongasi la A K vguale alla D G: & dal punto K drizzisi la K H perpendicolare al piano per B A L; & pongasi la K H vguale alla G F: & giungasi H A. Dico l'angolo solido A che è contenuto da gli angoli B A L B A H H A L, essere vguale all'angolo solido D, contenuto da gli angoli E D C E D F F D C. piglinsi linee rette vguali A B D E, & giungansi H B K B F E G E, perche dunque la F G è perpendicolare al soggetto piano, & à tutte le linee rette, che la toccano, & sono nel soggetto piano sarà perpendicolare. onde l'vno & l'altro angolo F G D F G E è retto. & per la medesima ragione l'vno & l'altro H K A H K B è retto. & perche le due K A A B sono vguali alle due G D D E l'vna all'altra, & contengono angoli vguali, sarà la base B K vguale alla base E G: & la K H vguale alla G F: & contengano angoli retti. è dunque anchor la H B vguale alla F E. similmente perche le due A K K H sono vguali alle due D G G F, & contengono angoli retti, sarà la base A H vguale alla base DF: & è la A B vguale alla D E. adunque le due H A A B sono vguali alle due F D D E, & la base H B è vguale alla base E F. onde l'angolo B A H sarà vguale all'angolo E D F. per la medesima ragione l'angolo HAL è vguale all'angolo F D C. percioche se pigliamo le A L D C vguali, & giungiamo K L H L G C F C, essendo tutto B A L vguale à tutto E D C, de quali BAK si pone vguale ad E D G, sarà il rimanente K A L vguale al rimanente G D C. & perche le due K A A L sono vguali alle due G D D C, & contengono angoli vguali, sarà la base K L vguale alla base G C. & la K H è vguale alla G F. adunque le due L K K H sono vguali alle due C G G F. & contengono angoli retti. onde la base HL è vguale alla base F C. oltre à ciò perche le due H A A L sono vguali alle due F D D C, & la base H L è vguale alla base F C, sarà l'angolo H A Z vgua-

11. di questo.
23. del primo.
12. di questo.
3. diffinitione.
4. del primo.
4. del primo.
8. del primo.
4. del primo.

le all'angolo F D C. & è l'angolo B A L vguale all'angolo E D C. adunque nella data retta linea, & nel punto dato in essa si è constituito vn'angolo solido vguale ad vn'altro dato. il che bisognaua fare. 8. del primo.

PROBLEMA V. PROPOSITIONE XXVII.

Dalla linea retta data descriuere vn solido parallelepipedo simile & similmente posto ad vn'altro dato.



Sia la linea retta A B, il dato solido parallepipedo C D. bisogna dalla retta linea A B descriuerevn solido parallepipedo simile & similmente posto al dato solido parallepipedo C D. constituiscasi nella linea retta A B, & nel punto dato in essa A, vn'angolovguale all'angolo solido C, qual sia contenuto da gl angoli B A H H A K K A B, di modo, che l'angolo B A H sia vguale all'angolo E C F, & l'angolo B A K all'angolo E C G, & anchor l'angolo K A H vguale all'angolo G C F. & facciasi come la E C alla C G, cosi la B A alla A K. & come la G C alla C F, cosi la K A alla A H. adunque per l'vgual proportione come la E C alla C F, cosi sarà la B A alla A H. compiscasi il parallelogrammo B H, & il solido A L. perche dunque è come la E C alla C G, cosi la B A alla A K, & d'intorno a gli vgual' angoli E C G B A K i lati sono proportionali; sarà il parallelogrammo K B simile al parallelogrammo G E: per la medesima ragione il parallelogrammo K H simile al parallelogrammo G F: & il parallelogrammo H B al parallelogrammo F E. sono dunque tre parallelogrammi del solido A L simili à tre parallelogrammi del solido C D. ma li tre sono vguali & simili alli tre opposti. & però tutto il solido A L sarà simile à tutto il solido C D. adunque dalla linea retta A B si è descritto vn solido parallelopipedo C D simile & similmente posto al dato solido parallelepipedo A L. il che bisognaua fare.

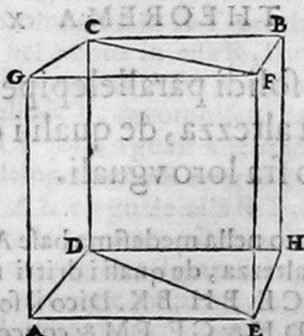
per l'antecedente.

12. del sesto.

THEOREMA XXIII.

PROPOSITIONE XXVIII.

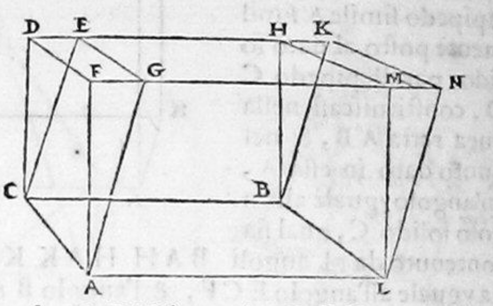
Se vn solido parallelepipedo sia segato da vn piano, che passi per li diametri de piani opposti, sarà segato per mezo.



Il solido parallelepipedo A B sia segato dal piano C D E F per li diametri de piani opposti, cioè C F D E. Dico il solido A B essere segato per mezo dal piano C D E F. perche il triangolo C G F è vguale al triangolo C B F, & il triangolo A D E al triangolo D E H; & il parallelogrammo C A vguale al parallelogrammo B E, che gli è op posto: & il parallelogrammo G E vguale al parallelogrammo CH; sarà il prisma contenuto da due triangoli C G F A D E & da tre parallelogrammi G E A C C E vguale al prisma, che è contenuto da due triangoli C F B D E H, & da tre parallelogrammi C H B E C E, conciosiacosa, che siano contenuti da piani & di numero & di grandezza vguali. adunque tutto il solido AB è segato per mezo dal piano CD EF. il che bisognaua dimostrare.

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIONE XXIX.

I solidi parallelepipedi, che hanno la medesima base & la medesima altezza, de quali i dritti siano nelle istesse linee rette, fra loro sono vguali.



Siano nella medesima base A B i solidi parallelepipedi C M C N, & della medesima altezza, de quali i dritti A F A G L M L N C D C E B H B K siano nelle istesse linee rette F N D K. Dico il solido C M essere vguale al solido C N. percioche essendo amendue C H C K parallelogrammi, sarà la C B vguale all'vna & l'altra di esse D H E K. onde anchor la DH è vguale alla E K, traggasi la commune E H. la rimanente dunque D E è vguale alla rimanente H K. & perciò etiandio il triangolo D E C è vguale al triangolo H K B: & il parallelogrammo D G vguale al parallelogrammo H N, & per la medesima ragione il triangolo A F G è vguale al triangolo L M N, & è il parallelogrammo C E vguale al parallelogrammo B M, & il parallelogrammo C G al parallelogrammo B N, essendo opposti. adunque anchor il prisma contenuto da due triangoli A F G D E C & da tre parallelogrammi A D D G G C è vguale al prisma contenuto da due triangoli L M N H B K & da tre parallelogrammi B M N H B N. pongasi il solido commune, la cui base è il parallelogrammo A B, & opposto ad esso G E H M. tutto dunque il solido parallelepipedo CM è vguale à tutto il solido parallelepipedo C N. la onde i solidi parallelepipedi c'hanno la medesima base & la medesima altezza, de quali i dritti siano nelle istesse linee rette, fra loro sono vguali. il che bisognaua dimostrare.

34 del primo.
1. del sesto.

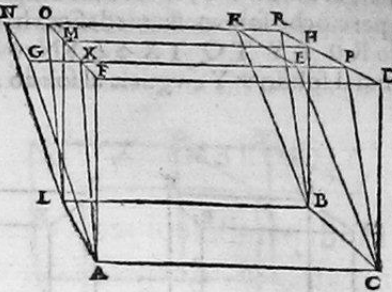
THEOREMA XXV. PROPOSITIONE XXX.

I solidi parallelepipedi c'hanno la medesima base & la medesima altezza, de quali i dritti non siano nell'istesse linee rette, sono fra loro vguali.

Siano nella medesima base A B i solidi parallelepipedi C M C N, & della medesima altezza, de quali i dritti non siano nelle istesse linee rette A F A G L M L N C D C E B H B K. Dico il solido C M essere vguale al solido C N. prolunghinsi N K D H & G E F M & concorrano fra loro ne punti R X, & anchora prolunghinsi F M G E alli punti O P: & giunganfi A X L O C P B R, il solido C M, la cui base è il parallelogrammo A C B L, & opposto ad esso F D H M, è vguale al solido C O, la cui base è il parallelogrammo A C B L & opposito ad esso X P

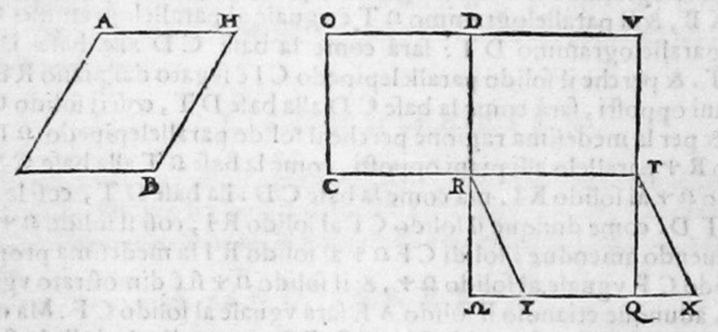
RO,

RO, percioche sono nella medesima base A C B L, & i lor dritti A F AX LM LO CD CP BH BR sono nelle medesime linee rette F O D R. ma il solido C O, la cui base è il parallelogrammo A C B L & opposto ad esso X P R O, è vguale al solido C N, la cui base è il parallelogrãmo A C B L, & opposto ad esso G E K N conciosiacosa, che siano nella medesima base A C B L, & i dritti loro A G A X C E C P L N L O B K B R, siano nelle medesime linee rette G P N R. onde anchor il solido C M, sarà vguale al solido C N. adunque li solidi parallelepipedi c'hanno la medesima base & la medesima altezza, de quali i dritti non siano nelle istesse linee rette, fra loro sono vguali. il che bisognaua dimostrare.



THEOREMA XXVI. PROPOSITIONE XXXI.

I solidi parallepipedi c'hanno le vgual basi & la medesima altezza, fra loro sono vguali.

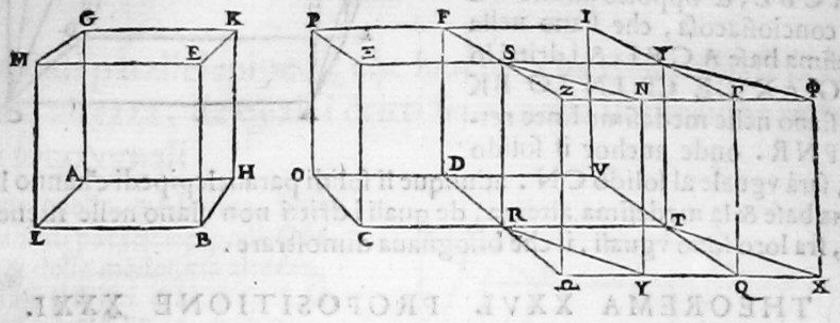


Siano nelle vgual basi A B C D i solidi parallepipedi A E C F, & nella medesima altezza. Dico il solido A E essere vguale al solido C F. siano prima i dritti loro HK BE AG LM OP DF CΞ RS perpendicolari alle basi A B C D, & l'angolo A L B sia disuguale all'angolo C R D: & prolunghisi la R T per diritto alla C R, & constituiscasi nella linea retta R T & nel punto in essa R, l'angolo T R Y vguale all'angolo A L B, & pongasi la R T vguale alla A L: & nella L B vguale la R Y: & al punto Y tirisi la X Y parallela alla R T, & compiscasi la base R X, & il solido Ψ Y. perche dunque le due T R R Y sono vguali alle due A L L B, & contengono gli angoli vguali, sarà il parallelogrammo R X vguale & simile al parallelogrammo H L. & perche altresi la A L è vguale alla R T, & la L M alla R S, & contengono gli angoli vguali, il parallelogrammo R Ψ sarà vguale & simile al parallelogrammo A M. per la medesima ragione il parallelogrammo L E è vguale & simile al parallelogrammo S Y. adunque tre parallelogrammi del solido A E sono vguali & simili à tre parallelogrammi del solido Ψ Y. ma anchor i tre opposti alli tre sono & vguali & simili, tutto dunque il solido parallelepipedo A E è vguale à tutto il solido parallelepipedo Ψ Y. prolunghinsi D R XY, & concorrano fra loro nel punto Ω; & per T tirisi la T Q parallela alla D Ω:

1. diff. del sest.

24. di questo.

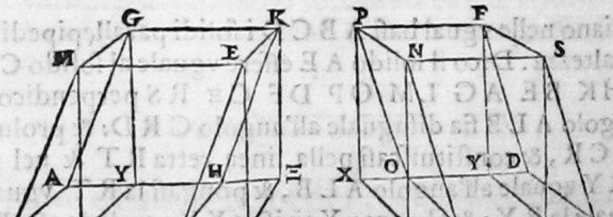
29. di queſto. & prolunghinſi T Q O D & concorrano in V, & compiſcanſi i ſolidi Ω Ψ R I. adunque il ſolido Φ Ω, la cui baſe il parallelogrammo R Ψ & oppoſto ad eſſo Ω Γ, e vguale al ſolido Ψ Y, la cui baſe e il parallelogrammo R Ψ, & oppoſito ad eſſo Υ Φ; percioche ſono nella medeſima baſe R Υ & nella medeſima altezza, & i dritti loro R Ω R Y T Q T X S Z S N Φ Γ Υ Φ ſono nelle medeſime linee rette Ω X Z Φ. ma il ſolido Ψ Y è vguale al ſolido A E. adunque anchor Ψ Ω è vguale al ſoli



do A E. oltre à ciò perche il parallelogrammo R Y X T è vguale al parallelogrāmo Ω T, eſſendo nella medeſima baſe R T & nelle medeſime parallele R T Ω X, ma il parallelogrammo R Y X T è vguale al parallelogrammo C D, perche anchor ad A B, & il parallelogrammo Ω T è vguale al parallelogrammo C D, & è vn'altro parallelogrammo D T: ſarà come la baſe C D alla baſe D T, coſi Ω T à D T. & perche il ſolido parallelepipedo C I è ſegato dal piano R F paralle-

25. di queſto. lo alli piani oppoſti, ſarà come la baſe C D alla baſe D T, coſi il ſolido C F al ſolido R I. & per la medeſima ragione perche il ſolido parallelepipedo Ω I è ſegato dal piano R Ψ parallelo alli piani oppoſti, come la baſe Ω T alla baſe C D, coſi ſarà il ſolido Ω Ψ al ſolido R I. ma come la baſe C D alla baſe D T, coſi la baſe Ω T alla baſe T D. come dunque il ſolido C F al ſolido R I, coſi il ſolido Ω Ψ al ſolido

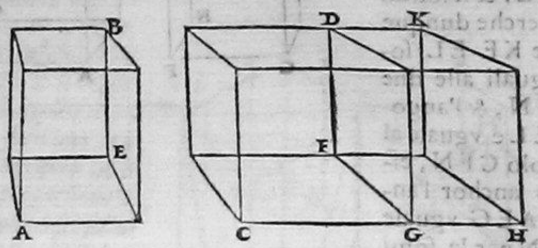
9. del quinto. R I. & hauendo amendue i ſolidi C F Ω Ψ al ſolido R I la medeſima proportione, ſarà il ſolido C F vguale al ſolido Ω Ψ, & il ſolido Ω Ψ ſi è dimoſtrato vguale al ſolido A E. adunque etiandio il ſolido A E ſarà vguale al ſolido C F. Ma non ſiano i dritti A G H K B E L M C N O P D F R S perpendicolari alle baſi A B C D. Dico ſimilmenle il ſolido A E eſſere vguale al ſolido C F. tirinſi da punti K E G M P F N S al ſoggetto piano le K Ξ E T G Y M Φ P X F Ψ N Ω S I, & tocchino il piano ne punti Ξ T Y Φ X Ψ Ω I: & giunganſi Ξ T Y Φ X Y T Φ X Ψ X Ω Ω I Ψ I.



adunque il ſolido K Φ è vguale al ſolido P I, percioche ſono nelle vguali baſi K M P S, & della medeſima altezza, de quali i dritti ſono perpendicolari alle baſi. ma il ſolido K Φ è vguale al ſolido A E, & il ſolido P I vguale al ſolido C F, conciosiacoſa che ſiano nella medeſima baſe & della medeſima altezza, de quali li dritti non ſono nelle isteſſe linee rette. adunque etiandio il ſolido A E ſarà vguale al ſolido C F. la onde i ſolidi parallelepipedi c'hanno le vgual baſi, & la medeſima altezza fra loro ſono vguali. il che biſognaua dimoſtrare.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIONE XXXII.

I solidi parallelepipedi, c'hanno la medesima altezza fra loro sono come le basi.



Siano i solidi parallelepipedi A B C D, che habbiano la medesima altezza. Dico essere fra loro, come le basi, cioè come la base A E alla base C F, così il solido A B al solido C D. adattisi alla linea retta F G il parallelogrammo F H vguale al parallelogrammo A E; & dalla base F H, & della medesima altezza à C D, compiscasi il solido parallelepipedo G K. adunque il solido A B è vguale al solido G K, percioche sono nelle vgual basi A E F H, & della medesima altezza. onde perche il solido parallelepipedo G K è segato dal piano D G parallelo à gli opposti piani, sarà come la base H F alla base F C, così il solido H D al solido D C, & è la base F H vguale alla base A E. & il solido G K vguale al solido A B. adunque & come la base A E alla base C F, così il solido A B al solido C D. onde i solidi parallelepipedi c'hanno la medesima altezza fra loro sono come le basi. il che bisognaua dimostrare.

per l'antecedente. 25. di questo.

IL COMMANDINO.

E manifesto anchora i solidi parallelepipedi, che sono nella medesima ò vero nelle vgual basi, hauere fra loro la medesima proportione, che l'altezza.

Il che noi habbiamo dimostrato nel libro del centro della grauità de solidi nella propositione decimanona.

COROLLARIO.

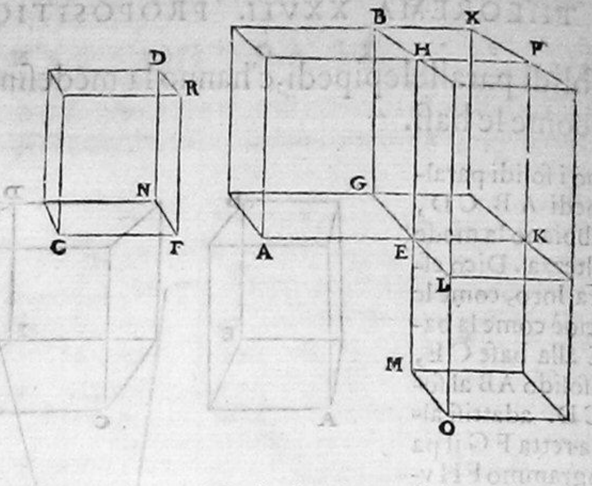
Da questo & dalle cose già dimostrate segue, che i prismi, c'hanno le basi triangolari, & sono nelle medesime, ò nelle vgual basi & della medesima altezza, fra loro siano vguali. & oltre à ciò che quelli c'hanno la medesima altezza siano fra loro, come le basi; & quelli che sono nelle medesime ò nelle vgual basi, siano come l'altezze.

Percioche quei prismi sono la metà de solidi parallelepipedi. & per le basi de prismi intendiamo non ciascuna, ma solamente vno delli piani opposti simili & paralleli, come hora nel prisma c'ha la base triangolare l'vno de triangoli. altramente ci saria contrario quello, che si dice nell'vltima propositione di questo libro. 28. di questo.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIONE XXXIII.

I solidi parallelepipedi simili sono in proportione tripla di quella c'hanno i lati homologhi.

Siano i solidi parallelepipedi simili A B C D, & il lato A E sia homologo al lato C F. Dico il solido A B al solido C D hauere tripla proportione di quella, c'ha la A E alla C F. prolunghinsi E K E L E M per diritto alle A E G E H E. & pongasi la EK vguale al la CF, & alla FN vguale la EL: & anchora alla FR vguale la EM: & compiscasi il parallelogrã mo KL, & il solido KO. perche dunque le due KE EL sono vguali alle due CF FN, & l'angolo KEL è vguale al l'angolo CFN, essendo anchor l'angolo AEG vguale à CFN per la somigliãza de solidi AB



CD; sarà etiandio il parallelogrammo KL simile al parallelogrammo CN. & per la medesima ragione il parallelogrammo KM è vguale & simile al parallelogrammo CR: & anchor il parallelogrammo OE al parallelogrammo DF. adunque i tre parallelogrammi del solido KO sono vguali & simili alli tre parallelogrammi del solido CD. ma i tre alli tre opposti sono vguali & simili. onde tutto il solido KO è vguale & simile a tutto il solido CD. compiscasi il parallelogrammo GK. & dalle basi GK KL parallelogramme & della medesima altezza che AB, compiscansi i solidi AX LP, & perche per la simiglianza de solidi AB CD è come la AE alla CF, cosi la EG alla FN, & la EH alla FR, & la FC è vguale alla EK, & la FN alla EL, & la FR alla EM, sarà come la AE alla EK, cosi la GE alla EL, & la HE alla EM. ma come la AE alla EK, cosi il parallelogrammo AG al parallelogrammo GK: & come la GE alla EL, cosi il parallelo grammo GK à KL: & come la HE alla EM, cosi il parallelogrammo PE à KM. & come dunque il parallelogrammo AG al parallelogrammo GK, cosi GK à KL, & PE à KM. ma come AG à GK, cosi il solido AB al solido EX: & come GK à KL cosi il solido XE al solido PL. & come PE à KM, cosi il soido PL al solido KO. come dunque il solido AB al solido EX, cosi EX à PL. & PL à KO. ma se siano quattro grandezze continuatamente proportionali la prima alla quarta ha tripla proportione di quella, che ha alla seconda. adunque anchora il solido AB al solido KO ha tripla proportione di quella, che ha AB ad EX. ma come AB ad EX, cosi è il parallelogrammo AG al parallelogrammo GK: & la linea retta AE alla retta EK. onde il solido AB al solido KO hauerà tripla proportione di quella cha la AE alla EK, il solido KO è vguale al solido CD, & la linea retta EK è vguale alla retta CF. adunque il solido AB al solido CD ha tripla proportione di quella c'ha il lato homologo di essa AE al lato homologo CF. il che bisognaua dimostrare.

24. di questo.

1. del sesto.

per l'antecedente.
11. del quinto.
11. diff. delle 3.

per l'antecedente.
1. del sesto.

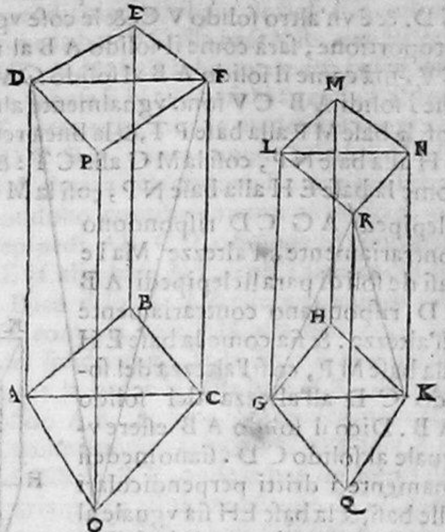
COROLLARIO.

Da questo è chiaro che se quattro linee rette siano proportionali come la prima alla quarta, cosi è il solido parallelepipedo che si fa dalla prima al solido parallelepipedo fatto dalla seconda simile & similmente descritto, percioche la prima alla quarta ha tripla proportione di quella, che ha alla seconda.

IL COMMANDINO.

Dalle cose dimostrate poco fa seguita, li prismi simili c'hanno le basi triangolari, essere in tripla proportione di quella c'hanno i lati homologhi fra loro.

Siano i prismi simili c'habbiano le basi triangolari, & similmente posti A F G N: & del prisma A F sia la base il triangolo ABC & quello, che si oppone ad esso D E F, & del prisma G N la base sia il triangolo GHK, & opposto ad esso L M N; & sia il lato AB homologo al lato G H. Dico il prisma A F al prisma G N hauere tripla proportione di quella che ha A B à GH. compiscansi i solidi parallelepipedi: & sia del solido parallelepipedo A F la base il quadrilatero A B C O, & opposto ad esso il quadrilatero D E F P: & del solido parallelepipedo G N la base sia il quadrilatero G H K Q: & quello che è opposto ad esso L M N R. perche dunque il prisma A F si pone simile al prisma G N, sarà il parallelogranmo A B E D simile al parallelogrammo G H M L. onde etiandio il parallelogrammo O C F P opposto ad esso, sarà simile al parallelogrammo Q K N R: & per la medesima ragione si dimostrerà il parallelogrammo A O P D simile al parallelogrammo G Q R L. adunque il solido parallelepipedo A F è simile al solido parallelepipedo G N. ma i solidi parallelepipedi simili sono in proportione tripla di quella che hanno i lati homologhi. onde anchor la metà di essi sarà nella medesima proportione. il prisma dunque AF al prisma GN hauerà proportione tripla di quella, che ha A B à G H. il che bisognaua dimostrare.



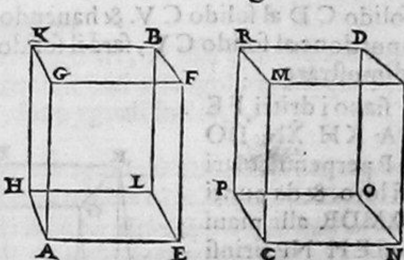
9. diff. di que.

24. di questo.

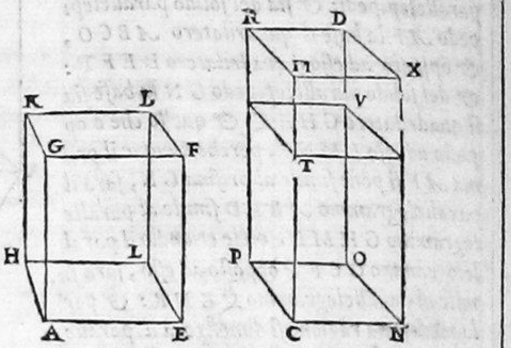
THEOREMA XXIX. PROPOSITIONE XXXIIII.

De solidi parallelepipedi vguali, le basi rispondono contrariamente all'altezze: & i solidi parallelepipedi, dequali le basi rispondono contrariamente all'altezza, sono vguali fra loro.

Siano solidi parallelepipedi vguali A B C D. Dico le basi loro rispondere contrariamente all'atezze, cioè come la base E H alla base N P, cosi essere l'altezza del solido C D all'altezza del solido A B. siano prima i dritti A G E F I B H K C M N X O D P R perpendicolari alle basi loro. Dico come la base E H alla base N P, cosi essere la C M alla A G. se dunque sia vguale la base E H alla base N P, & è il solido A B vguale al solido C D, sarà anchor la C M vguale alla A G, percioche se essendo le basi E H N P vguali, non siano l'altezze A G C M vguali, ne anche il solido A B sarà vguale al solido C D. & si pone vguale. non è dunque l'altezza CM disuguale all'altezza A G. onde è necessario che sia vguale, & pero come la ba-

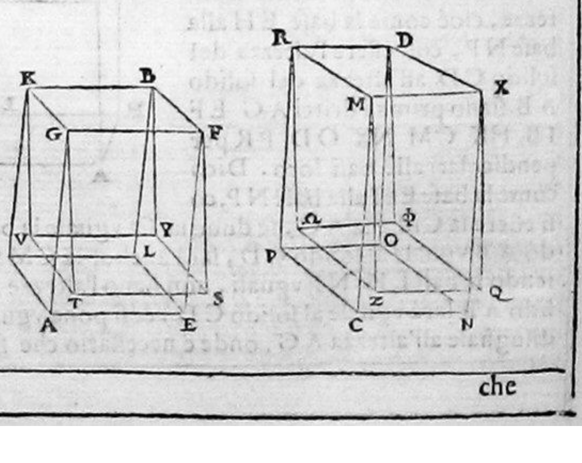


se E H alla base N P, cosi sarà la C M alla A G. dalle qual cose appare de solidi
parallelepipedi A B C D le basi rispondere contrariamente all'altezze. Ma la ba-
se E H non sia vguale alla base N P. ma la E H sia maggiore. & è il solido A B v-
guale al solido C D. adunque la C M è maggiore della A G, altramente seguireb-
be altresì, che i solidi A B C D non fossero vguali, che vguali si pongono. la on
de pongasi la C T vguale alla A G: & dalla base N P, & dall'altezza C T compisca
si il solido parallelepipedo V C. perche dunque il solido A B è vguale al solido
C D. & è vn'altro solido V C, & le cose vguali alla medesima, hanno la medesima
7. del quinto. proportione, sarà come il solido A B al solido C V, cosi il solido C D al solido
C V. ma come il solido A B al solido C V, cosi la base E H alla base N P, percio-
32. di questo. 25. di questo 1. del sesto. che i solidi A B C V sono vgualmente alti. & come il solido C D al solido C V,
cosi la base M P alla base P T, & la linea retta M C alla C T. come dunque la base
E H alla base N P, cosi la M C alla C T: & la C T è vguale alla A G. adun que &
come la base E H alla base N P, cosi la M C alla A G. onde le basi de solidi paral-
lelepipedi A G C D rispondono
contrariamente all'altezze. Ma le
basi de soli di parallelepipedi A B
C D rispondano contrariamente
all'altezze. & sia come la base E H
alla base M P, cosi l'altezza del so-
lido C D all'altezza del solido
A B. Dico il solido A B essere v-
guale al solido C D. siano medesi
mamente i dritti perpendicolari
alle basi, & la base EH sia vguale al
la base N P, & è come la base E H
alla base N P, cosi l'altezza del so-
lido C D all'altezza del solido A B; sarà l'altezza del solido C D vguale all'altezza



31. di questo: del solido A B. ma i solidi parallelepipedi, che sono nelle vgual basi & della mede
sima altezza sono vguali fra loro. adunque il solido A B è vguale al solido C D.
ma non sia la base E H vguale alla base N P: & sia la E H maggiore. è dunque l'al
tezza del solido C D maggiore dell'altezza del solido A B, cioè la C M è maggio
re della A G. pongasi anchora la C T vguale alla A G, & compiscasi similmente
il solido C V. onde perche è come la base E H alla base N P, cosi la M C alla AG,
& la A G è vguale alla C T, sarà come la base E H alla base N P, cosi M C à C T.
ma come la base E H alla base N P, cosi il solido A B al solido C V. percioche i so-
lidi A B C A sono vgualmente alti: & come là M C alla C T, cosi la base M P al-
la base P T, & il solido C D al solido CV. come dunque il solico A B al solido CV
cosi il solido C D al solido C V. & hauendo amendue i solidi A B C D la medesi
ma proportione al solido C V, sarà il solido A B vguale al solido C D. il che biso
gnaua dimostrare.

Non siano i dritti F E
B L G A K H X N D O
M C R P perpendicolari
alle basi loro, & da punti
FGBKXMDR alli piani
delle basi E H N P tirinsi
le perpẽdicolari che toc
chino i piani ne punti S T
Y V Q Z Ω Φ: & compi-
scansi i solidi F V X Ω. Di
co anchora cosi essendo i
solidi A B C D vguali,



che

che le basi rispondono contrariamente all'altezze, & come la base E H alla base N P, cosi è l'altezza del solido CD all'altezza del solido A B. perche il solido AB è vguale al solido C D, & al solido A B è vguale il solido B T per essere nella medesima base FK, & della medesima altezza: de quali i dritti non sono nelle medesime linee rette, & il solido D C è vguale el solido D Z, che sono nella medesima base X R & della medesima altezza, i dritti de quali non sono nelle medesime linee rette, sarà etiandio il solido B T vguale al solido D Z. ma de gli vgual solidi parallelepipedi l'altezze de quali sono perpendicolari alle basi, le basi rispondono contrariamente all'altezze. è dunque come la base F K alla base X R, cosi llaltezza del solido D Z all'altezze del solido B T. & è la base F K vguale alla base E H& la base X R alla base N P. adunque come la base E H alla base N P, cosi è l'altezza del solido D Z all'altezza del solido B T, percioche sono le medesime altezze de solidi D Z B T. & parimente de solidi D C B A. come dunque la base E H alla base N P, cosi è l'altezza del solido D C all'altezza del solido A B. & pero le bab de solidi parallelepipedi A B C D rispondono contrariamente all'altezze. oltre à questo le basi de solidi parallelepipedi AB CD rispondano contrariamente all'atezze. & sia come la base E H alla base N P, cosi l'altezza del solido CD all'altezza del solido A B. Dico il solido A B essere vguale al solido C D. perche fatte le medesime cose come la base E H alla base N P, cosi è l'altezza del solido C D all'altezza del solido A B, & la base E H è vguale alla base F K & N P ad X R: sarà come la base F K alla base X R, cosi l'altezza del solido C D all'altezza del solido A B: & sono le medesime altezze de solidi A B C D, & de B T D Z. come dunque la base F K alla base X R, cosi è l'altezza del solido D Z all'altezza del solido B T. onde le basi de solidi parallelepipedi B T D Z rispondono contrariamente all'altezze. & quei solidi parallelepipedi, de quali le altezze sono perpendicolari alle lor basi, & le basi rispondono contrariamente all'altezze, sono fra loro vguali. adunque il solido B T è vguale al solido D Z. ma il solido B T è vguale al solido B A. perche sono nella medesima base F K, & della medesima altezza, i dritti de quali non sono nelle medesime linee rette, & il solido D Z è vguale al solido D C, conciosiacosa, che siano nella medesima base X R, & della medesima altezza, & non nelle medesime linee rette. adunque il solido A B, è vguale al solido C D. il che bisognaua dimostrare.

34. di questo.

per le cose dimostrate innanzi.

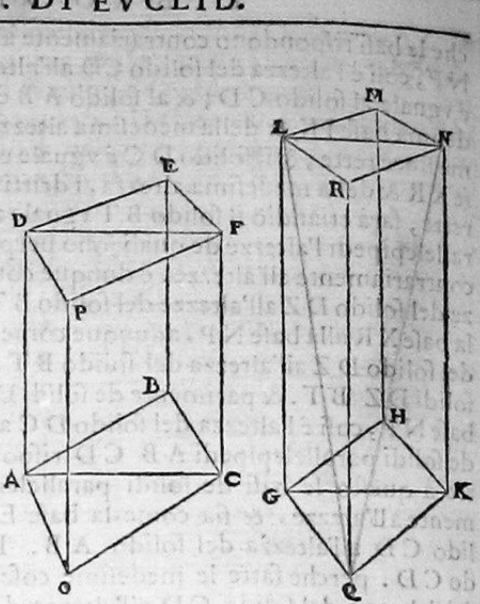
IL COMMANDINO.

Dalle cose dette quello anchora si puo dimostrare.

De prismi vguali c'hanno le basi triangolari, le basi rispondono contrariamente all'altezze. & quei prismi c'hanno le basi triangolari, de quali le basi rispondeno contratiamente all'altezze, sono vguali fra loro.

Siano i prismi c'hanno le basi triãgolari, fra loro vguali AF GN. Dico le basi rispondere all'altezze cõtrariamẽte, cioè come il triãgolo ABC al triãgolo GHK, cosi essere l'altezza del prisma G N all'altezza del prisma AF. cõpiscansi i solidi parallelepipedi, che saranno anchor fra loro vguali, essendo doppij delli prismi: ma de solidi parallelepipedi vguali le basi rispondono cõtrariamẽte all'altezze. adunque come la base del solido parallelepipedo AF alla base del solido parallelepipedo G N, cioè come il quadrilatero A B C O al quadrilatero G H K Q, cosi è l'altezza del solido parallelepipedo G N all'altezza del solido parallelepipedo A F, ma come il quadrilatero A B C O al quadrilatero G H K Q, cosi il triangolo A B C al triangolo G H K. adunque come il triangol o A B C al tri angolo G H K, l'altezza del solido parallelepipedo GN all'altezza del solido parallelepipedo A F, cioè cosi è l'altezza del prisma G N all'altezza del pris-

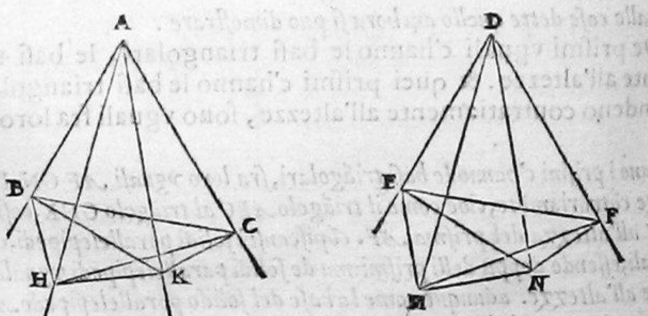
ma A F. oltre à ciò le basi de prismi A F G N rispondano contrariamente all'altezze, cioè come il triangolo A B C al triangolo G H K, così sia l'altezza del prisma G N all'altezza del prisma A F. Dico i prismi A F G N essere vguali fra loro. compiscansi medesimamente i solidi parallelepipedi. sarà il quadrilatero A B C O al quadrilatero G H K Q, come il triangolo ABC al triangol o G H K. onde come la base del solido parallelepipedo A F alla base del solido parallelepipedo G N, così sarà l'altezza del prisma GN all'altezza del prisma A F, cioè così l'altezza del solido parallelepipedo G N all'altezza del solido parallelepipedo A F, ma quei solidi parallelepipedi, de quali le basi rispondono contrariamente all'altezze, sono fra loro vguali. adunque anchor le metà loro saranno vguali: & però il prisma A F è vguale al prisma G N. il che bisognaua dimostrare.



THEOREMA XXX. PROPOSITIONE XXXV.

Se due angoli piani siano vguali, & nelle cime loro siano constituite linee rette sublimi, che con le linee rette poste da principio contengano angoli vguali, l'vn all'altro. poi nelle sublimi siano presi qual si vogliano punti, & da quelli alli piani, ne quali sono i primi angoli, si tirino le perpendicolari, & da punti fatti dalle perpendicolari ne i piani alli primi angoli si congiungano linee rette, conteneranno le dette linee con li sublimi vguali angoli.

Siano due angoli rettilinei vguali **B A C E D F.** & da punti **A D** constituiscansi sublimi rette linee **A G D M**, che con le linee rette poste da principio contengano angoli vguali, l'vn all'altro, cioè l'angolo **M D E** vguale all'angolo **G A B**, & l'angolo **M D F** vguale all'angolo **G A C.** & piglinsi nelle **A G, D M** quai si uogliano punti **G M**, da



quali

quali si tirino le G L M N perpendicolari alli piani per le B A C E D F che tocchino detti piani ne punti L N, & giunganſi L A N D. Dico l'angolo G A L eſſere vguale all'angolo M D N. pongaſi la A H vguale alla D M, & per H tiriſi la H K parallela alla G L. & la G L è perpendicolare al piano per B A C. adunque etiandio la H K ſarà perpendicolare al piano per B A C. tirinſi da punti K N alle linee rette A B A C D F D E le perpendicolari K C N F K B N E, & giunganſi H C C B M F F E. perche dunque il quadrato della H A è vguale à quadrati delle H K K A, & al quadrato della K A ſono vguali i quadrati delle K C C A; ſarà il quadrato della H A vguale à quadrati delle H K K C C A. & à quadrati delle H K K C è vguale il quadrato della H C. il quadrato dunque della H A ſarà uguale à quadrati delle H C C A. & però l'angolo H C A è retto. & per la medeſima ragione l'angolo D F M è retto. onde l'angolo A C H è vguale all'angolo D F M & è l'angolo H A C vguale all'angolo M D F. ſono dunque due triangoli M D F H A C che hannó due angoli vguali à due angoli, l'vn'altro: & vn lato vguale ad ad vn lato, che è ſottopoſto ad vno de gli angoli vguali, cioè H A à D M. onde haueranno anchor gli altri lati vguali à gli altri lati, l'un'alltro, & ſarà la A C vguale alla D F. ſimilmente dimoſtreremo etiandio la A B eſſere vguale alla D E. giunganſi H B M E, & perche il quadrato della A H è vguale à quadrati delle A K K H, & al quadrato della A K ſono vguali i quadrati delle A B B K, ſaranno i quadrati delle A B B K K H vguali al quadrato della A H. ma à quadrati delle B K K H è vguali il quadrato della B H, percioche l'angolo H K B è retto, eſſendo la H K perpendicolare al ſoggetto piano. il quadrato dunque della A H è uguale à quadrati delle A B B H: & però l'angolo A B H è retto, & per la medeſima ragione è retto l'angolo D E M, & l'angolo B A H è uguale all'angolo E D M che coſi ſi pone, & è la A H vguale alla D M. adunque anchor la A B è vguale alla D E. onde perche la A C è vguale alla D F, & la A B alla D E, ſaranno le due C A A B uguali alle due F D D E. ma l'angolo B A C è uguale all'angolo F D E. la baſe dunque B C è vguale alla baſe E F. & il triangolo al triangolo, & gli altri angoli à gli altri angoli. adunque l'angolo A C B è vguale all'angolo D F E. & è il retto A C K vguale al retto D F N. onde anchor il rimanente B C K è vguale al rimanente E F N. & per la medeſima ragione l'angolo C B K vguale all'angolo F E N, il perche ſono due triangoli B C K E F N che hanno due angoli vguali à due angoli l'un'all'altro, & un lato vguale ad un lato, che è fra gli angoli vguali, cioè B C ad E F. adunque haueranno gli altri lati vguali a gli altri lati. è dunque la C K vguale alla F N, & la A C è vguale alla D F. onde le due A C C K ſono vguali alle due D F F N: & contengono vguali angoli. la baſe dunque A K è vguale alla baſe D N. & eſſendo la A H vguale alla D M, ſarà anchor il quadrato che ſi fa dalla A H uguale al quadrato della D M; ma al quadrato della A H ſono vguali i quadrati delle A K K H, percioche l'angolo A K H è retto: & al quadrato della D M ſono vguali i quadrati delle D N N M, conciosiacoſa che l'angolo D N M ſia retto. adunque i quadrati delle A K K H ſono vguali à quadrati delle D N N M, de quali il quadrato della A K è vguale al quadrato della D N. adunque il rimanente quadrato della K H è vguale al rimanente della M N: & però la linea retta H K è vguale alla M N. & perche le due H A A K ſono vguali alle due M D D N l'un'all'altra, & la baſe H K ſi è dimoſtrata vguale alla baſe N M; ſarà l'angolo H A K vguale all'angolo M D N. il che biſognaua dimoſtrare.

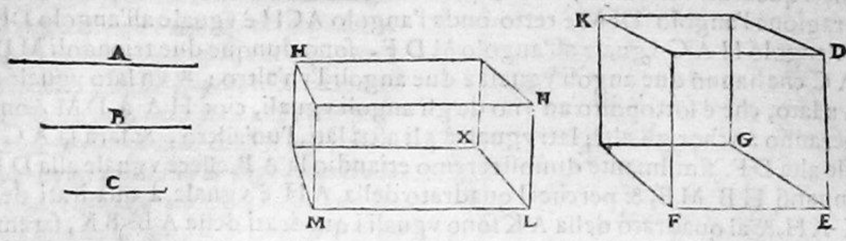
8. di queſto.
47. del primo.
48. del primo.
26. del primo.
48. del primo.
26. del primo.
4. del primo.
26. del primo.
4 del primo.
47. del primo.

COROLLARIO.

Da queſto è chiaro che ſe due angoli piani rettilinei ſiano vguali, & da eſsi ſiano conſtituite linee rette ſublimi vguali, che con linee rette poſte da principio contengano vgual'angoli, l'vn'all'altro, le perpendicolari che da esse si tirano alli piani, ne quali sino i primi angoli, saranno vguali.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIONE XXXVI.

Se tre linee rette siano proportionali, il solido parallelepipedo fatto dalle tre linee, sarà vguale à quello, che si fa dalla linea di mezo essendo equilatero & equiangolo all'altro.



Sia tre linee rette proporcionali A B C: & sia come la A alla B, cosi la B alla C. Dico il solido che si fa dalle A B C essere vguale al solido che si fa dalla B, equilatero & equiangolo all'altro. propongasi l'angolo solido E contenuto da tre angoli piani D E G G E F F E D, & alla D pongasi vguale ciascuna di esse D E E G E F, & compiscasi il solido parallelepipedo E K. & pongasi la L M vguale alla A. & nella retta linea L M & nel punto in essa L constituiscasi l'angolo contenuto dalle N L X X L M M L N vguale all'angolo solido E: & pongasi alla B vguale la L X & alla C vguale la L N. perche dunque come la A alla B cosi è la B alla C, & la A è vguale alla L M, & la B à ciascuna di esse L X E F E G E D, & la C alla L N, sarà come la L M alla E F, cosi la D E alla L N. & d'intorno à gli vgual'angoli M L N D E F i lati si rispondono contrariamente. adunque il parallelogrammo M N è vguale al parallelogrammo D F. & perche due angoli piani rettilinei sono vguali D E F N L M, & in essi si constituiscono linee rette sublimi L X E G vguali fra loro, & che con linee rette poste da principio contengono gli angoli vguali, l'vn'all'altro, saranno le perpendicolari, che si tirano da punti G X alli piani per le N L M D E F, vguali fra loro. adunque i solidi L H E K sono della medesima altezza; & quei solidi parallelepipedi, che sono nelle vgual basi & della medesima altezza sono fra loro vguali. il solido dunque H L è vguale al solido E K, & è il solido H L, che si fa dalle tre A B C, & il solido E K quello, che si fa dalla B. la onde se tre linee rette siano proportionali, il solido parallelepipedo fatto dalle tre linee sarà vguale à quello, che si fa dalla linea di mezo, essendo equilatero & equiangolo all'altro. il che bisognaua dimostrare.

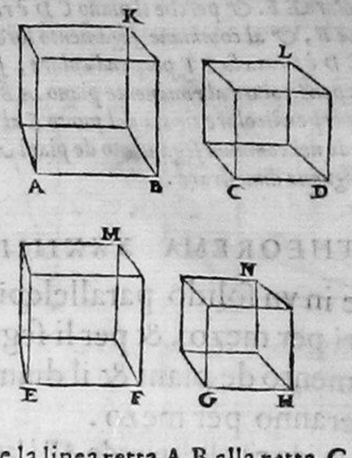
THEOREMA XXXII. PROPOSITIONE XXXVII.

Se quattro linee rette siano proportionali, i solidi parallelepipedi, che si fanno da esse simili & similmente descritti, saranno anchora proportionali, & se i solidi parallelepipedi che si fanno da esse simili & similmente descritti siano proportionali, le linee rette anchora saranno proportionali.

Siano quattro linee rette proportionali A B C D E F G H, & sia come la A B

alla

alla C D, così la E F alla G H, & descriuansi dalle A B C D E F G H solidi parallelepipedi simili & similmente posti K A L C M E N G. Dico come K A ad L C così essere M E ad N G. percioche essendo il solido parallelepipedo K A simile ad L C, hauerà K A ad L C tripla proportione di quella che ha la A B alla C D. per la medesima ragione il solido M E al solido N G hauerà tripla proportione di quella c'ha la E F alla G H, & è come la A B alla C D, così la E F alla G H. come dunque A K ad L C; così M E ad N G. ma sia come il solido A K al solido L C, così il solido M E al solido N G. Dico come la linea retta A B alla retta C D, così essere la retta E F alla retta G H. percioche hauendo A K ad L C tripla proportione di quella c'ha la A B alla C D, & M E ad N G tripla proportione di quella che ha la E F alla G H, & come A K ad L C, così è M E ad N G; sarà come la A B alla C D, così la E F alla G H. se dunque quattro linee rette siano proportionali & quello che seguita. il che bisognaua dimostrare.

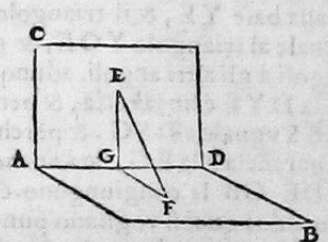


33. di questo.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIONE XXXVIII.

Se vn piano sia retto ò vero perpendicolare ad vn'altro piano, & da qualche punto di quelli che sono in vn piano all'altro piano sia tirata la perpendicolare, caderà quella nel commun segamento di detti piani.

Sia il piano C D al piano A B retto ò vero perpendicolare & il commune segamento loro sia A D. & nel piano C D piglisi qual punto si voglia E. Dico la perpendicolare, che dal punto E si tira al piano A B, cadere nella A D. non già, ma se esser può caggia fuori, come la E F: & tocchi il piano A B nel punto F: & da F alla D A nel piano A B tirisi la F G perpendicolare. la quale etiandio sarà perpēdicolare al piano C D: & giungasi E G. perche dunque la F G è perpendicolare al piano C D, & la linea retta E G che è nel medesimo piano C D la tocca, sarà l'angolo F G E retto. ma anchor la E F è perpendicolare al piano A B. onde l'angolo E F G è retto, & del triangolo E F G due angoli sono vguali à due retti, che è inconueniente. non caderà dunque fuori della linea retta D A la perpendicolare tirata dal punto E al piano A B: & però è necessario che caggia in essa A D. se dunque vn piano sia retto ad vn'altro piano & quello, che seguita. il che bisognaua dimostrare.

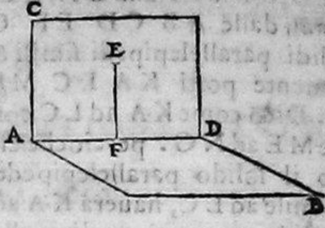


3. diff.

17. de primo.

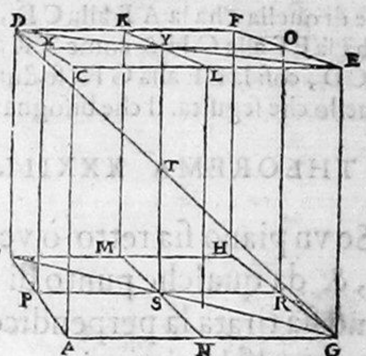
IL COMMANDINO.

Possiamo anchora in ciò vsare la dimostratione retta in questo modo. sia altresì il piano C D retto al piano A B, & il commune segamento loro sia A D, & nel piano C D piglisi qual si voglia punto E. Dico la perpendicolare che si tira dal punto E al piano A B cadere nella *linea retta A D. tirisi dal punto E alla A D la per pendicolare E F. & perche il piano C D è retto al piano A B, & al commune segamento loro in vn piano C D è tirata la E F perpendicolare, sarà la E F perpendicolare al rimanente piano A B. adunque la perpendicolare tirata dal punto E al piano A B cade nel commun segamento de piani A D. il che bisognaua dimostrare.*



THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIONE XXXIX.

Se in vn solido parallelepipedo i lati de piani opposti siano segati per mezo, & per li segamenti si tirino i piani. il commun segamento de piani & il diametro del solido parallelepipedo si segheranno per mezo.

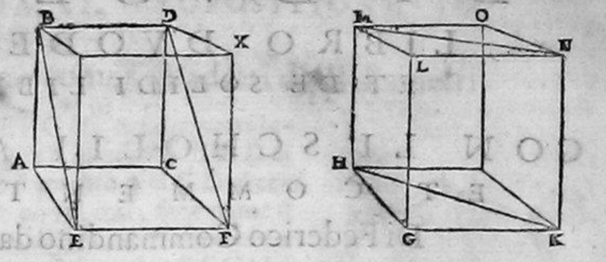


Nel solido parallelepipedo AF i lati de piani opposti C F AH siano segati per mezo ne punti KLMNXPOR, & per li segamenti si tirino i piani KN XR, & il commun segamento de piani sia Y S, & il diametro del solido parallelepipedo D G. Dico le YS DG segarsi per mezo, cioè la Y T essere vguale alla T S & la D T alla T G. giungansi D Y YE BS SG. perche dunque la D X è parallela alla O E, gli an-
29. del primo. goli alterni D X Y Y O E sono fra lo-
ro vguali. & perche la D X è uguale al la O E, & la X Y alla Y O, & contengo-
4. del primo. no vgual'angoli; sarà la base D Y vguale alla base Y E, & il triangolo D X Y vguale al triangolo Y O E, & gli altri angoli à gli altri angoli. adunque l'angolo X Y D è vguale all'angolo O Y E: & pe
14. del primo. rò la D Y E è linea retta. & per la medesima ragione anchora è retta la B S G, & è la B S vguale alla S G. & perche la C A è vguale & parallela alla D B, & è vguale
9. di questo. & parallela alla E G, sarà anchor la D B alla E G uguale & parallela, & le linee ret
33. del primo. te DE GB le congiungono. è dunque la D E parallela alla BG, & si sono presi in
7. di questo. amendue quai si vogliano punti D Y G S, & sono giunte le DG YS. onde le DG Y S sono in un piano, & essendo la D E parallela alla B G, sarà l'angolo E D T v-
29. del primo. guale all'angolo B G T; percioche sono alterni: & è l'angolo D T Y vguale all'an
15. del primo. golo G T S. adunque sono due triangoli D T Y G T S, che hanno due angoli vguali à due angoli, & vn lato vguale ad vn lato, che è sottoposto ad vno de gli angoli vguali cioe D Y à G S, che sono la metà delli D E B G. haueranno dunque
26. del primo. gli altri angoli vguali à gli altri angoli. onde la D T è vguale alla T G, & la Y T alla TS. & però se in un solido parallelepipedo i lati de piani opposti siano segati per mezo, & quello, che seguita. il che bisognaua dimostrare.

THEOREMA XXXV. PROPOSITIONE XL.

Se siano due prismi vgualmente alti, de quali vno habbia un parallelogrammo per base & l'altro vn triangolo: & sia il parallelogrammo doppio del triangolo, detti prismi saranno fra loro vguali.

Siano i prismi vgualmente alti ABCDEF GHKLMN & vno habbia per base il parallelogrammo AF, & l'altro il triangolo GHK: & il parallelogrammo AF sia doppio del triangolo GHK. Dico il prisma ABCDEF essere vguale al prisma GHKLMN. Compiscansi i solidi AX GO. & perche il parallelogrammo AF è doppio del triangolo GHK, & anchora il parallelogrammo HK è doppio del triangolo GHK, sarà il parallelogrammo AF vguale al parallegrammo HK. ma i solidi parallelepipedi che sono nelle ugual basi & della medesima altezza, sono fra loro vguali. adunque il solido AX è vguale al solido GO. & è il prisma ABCDEF la metà del solido AX, & il prisma GHKLMN la metà del solido GO. adunque il prisma ABCDEF è vguale al prisma GHKLMN. onde se siano due prismi vgualmente alti, & quello, che seguita. il che bisognaua dimostrare. 38. di questo



IL FINE DELL'VNDECIMO LIBRO.