DE GLI ELEMENTI DI EVCLIDE

LIBRO DVODECIMO ET DE SOLIDI LIBRO II.

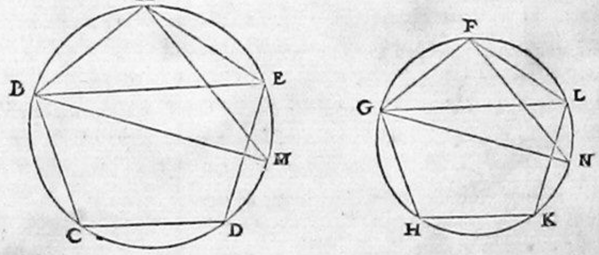
CON LI SCHOLII ANTICHI, ET COMMENTARII

Di Federico Commandino da Vrbino.

THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

I POLYGONI Simili, che si descriuono ne cerchi sono fra loro, come i quadrati delli diametri.

Siano i cerchi A B C D E F G H K L, & in essi li polygoni simili A B C D E F G H K L: & i diametri de cerchi siano BM GN. Dico come il quadrato della BM al quadrato della G N, cosi essere il polygono A B C D E al polygono F G H K L. giunganſi BE AM GL F N. & perche il polygono A B C D E è simile al polygono FGHKL, anchor l'angolo B A E è vguale all'angolo G F L: & è come la B A alla A E, cosi la G F alla F L. adunque sono due triangoli B A E G F L c'hanno vn'angolo vguale ad vn'angolo, cioè l'angolo B A E all'angolo G F L, & d'intorno à gli vgual'angoli i lati proportionali. onde il triangolo A B E è equiangolo al triangolo F G L, & però l'angolo A E B è vguale all'angolo F L G. ma l'an-



21. del terzo. golo A E B è vguale all'angolo A M B, percioche si fermano nella medesima circonferenza: & l'angolo F L G è vguale all'angolo F N G. adunque anchor l'angolo A M B è vguale

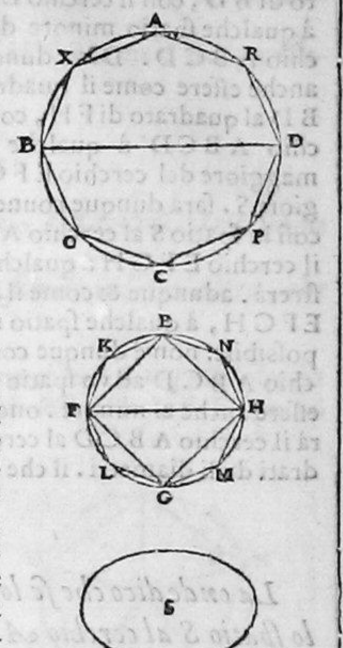
31. del terzo. al'angolo F N G. ma l'angolo B A M retto è vguale al retto G F N. onde il rimanente è vguale al rimanente. è dunque il triangolo A M B equiangolo al triangolo F G N, & percio come la B M alla G N, cosi è la B A alla G F. ma la propor-

4. del sesto. Corol. del 20 del sesto. tione del quadrato della B M al quadrato della G N è doppia della proportione della B M alla G N. & della proportione di B A à G F, è doppia la proportione del polygono A B C D E al polygono F G H K L. come dunque il quadrato della B M al quadrato della G N, cosi il polygono A B C D E al polygono

FGHKL. onde i polygoni simili, che si descriuono ne cerchi sono fra loro, come i quadrati delli diametri.

THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

I cerchi fra loro sono come i quadrati delli diametri.



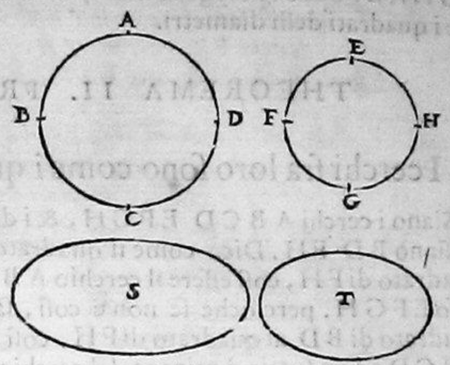
Siano i cerchi A B C D E F G H, & i diametri loro siano B D F H. Dico come il quadrato di B D al quadrato di F H, così essere il cerchio A B C D al cerchio E F G H. percioche se non è così, sarà come il quadrato di B D al quadrato di F H, così il cerchio A B C D ad vn spatio ò minore del cerchio E F G H ò maggiore. sia prima al minore, che sia S: & nel cerchio E F G H descriuasi il quadrato E F G H. onde il quadrato descritto nel cerchio è maggiore della metà del cerchio E F G H, perche se tiriamo per li punti E F G H linee rette, che tocchino il cerchio, sarà il quadrato E F G H la metà del quadrato descritto d'intorno al cerchio. ma il cerchio è minore del quadrato descritto d'intorno ad esso. adunque il quadrato E F G H è maggiore della metà del cerchio E F G H. seghinsi per mezo le circonferenze E F F G G H H E ne punti K L M N, & giunganſi EK KF FL LG GM MH HN NE. adunque ciascuno delli triangoli EKF FLG GMH HNE è maggiore, che la metà della portione del cerchio, nella quale egli consiste. perche se tiriamo per li punti K L M N linee rette, che tocchino il cerchio, & finiamo i parallelogrammi, che sono nelle linee rette EF FG GH HE, sarà ciascuno delli triangoli EKF FLG GMH HNE la metà del parallelogrammo, nel quale è descritto. ma la portione è minore del parallelogrammo. adunque ciascuno delli triangoli EKF FLG GMH HNE è maggiore, che la metà della portione del cerchio, nella quale consiste. adunque segando l'altre circonferenze per mezo, & giungendo le linee rette, & facẽdo questo sempre, lascieremo alla fine alcune portioni del cerchio, che saranno minori dell'eccesso, nel quale il cerchio E F G H auanza lo spatio S; perche si è dimostrato nel primo theorema del decimo libro, che proposte due grandezze disuguali, se dalla maggiore si tragga più, che la metà, & da quello, che rimane similmẽte si tragga piu, che la metà, & questo si faccia sempre, rimarrà alla fine vna certa grãdezza, la quale d'ogni minor grandezza proposta sarà minore. la onde siano lasciate le portioni del cerchio E F G H, nelle linee rette EK KF FL LG GM MH HN NE, che siano minori dell'eccesso, nel quale il cerchio E F G H auanza lo spatio S. adunque il rimanente polygono E K F L G M H N, sarà maggiore dello spatio S. descriuasi anchora nel cerchio A B C D il polygono A X B O C P D R simile al polygono E K F L G M H N. adunque come il quadrato di B D, al quadrato di F H, così è il polygono A X B O C P D R al polygono E K F L G M H N. ma come il quadrato di B D al quadrato di F H, così è il cerchio A B C D allo spatio S. adunque etiandio come il cerchio A B C D allo spatio S. così il polygono A X B O C P D R al polygono E K F L G M H N. & permutandosi come il cerchio A B C D al polygono, che è in esso, così lo spatio S al polygono E K F L G M H N. ma il cerchio A B C D è maggiore del polygolo, che è in esso.

A

B

C per l'antecedente.

11. del quinto



onde anchor lo spatio S è maggiore del polygono EKFLGMHN. ma è minore, che è impossibile. non è dunque come il quadrato di B D al quadrato di F H, così il cerchio A B C D à qualche spatio minore del cerchio E F G H. similmente dimostreremo non essere come il quadrato di F H al quadrato di B D, così il cerchio E F G H à qualche spatio minore del cerchio A B C D. Dico dunque ne anche essere come il quadrato di B D al quadrato di F H, così il cerchio A B C D à qualche spatio maggiore del cerchio E F G H. percioche s'egliè possibile, sia ad vn spatio maggiore S. sarà dunque conuertendosi come il quadrato di F H al quadrato di B D, così lo spatio S al cerchio A B C D. ma come lo spatio S al cerchio A B C D, così il cerchio E F G H à qualche spatio minore del cerchio A B C D, come si dimostrerà. adunque & come il quadrato di F H al quadraro di B D, così il cerchio E F G H, à qualche spatio minore del cerchio A B C D, il che si è dimostrato impossibile. non è dunque come il quadrato di BD al quadrato di F H, così il cerchio A B C D ad vn spatio maggiore del cerchio E F G H. & si è dimostrato non essere anche al minore. onde come il quadrato di B D al quadrato di F H, così sarà il cerchio A B C D al cerchio EFGH. i cerchi dunque fraloro sono come i quadrati delli diametri. il che bisognaua dimostrare.

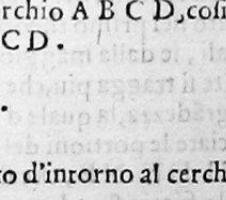
L E M M A.

La onde dico che se lo spatio S sia maggiore del cerchio EFGH, come lo spatio S al cerchio A B C D, così è il cerchio E F G H a qualche spatio minore del cerchio A B C D.

Facciasi come lo spatio S al cerchio A B C D, così il cerchio E F G H allo spatio T. Dico lo spatio T essere minore del cerchio A B C D. percioche essendo come lo spatio S al cerchio A B C D, così il cerchio EFGH allo spatio T, sarà permutandosi come lo spatio S al cerchio E F G H, così il cerchio ABCD allo spatio T, ma lo spatio S è maggiore del cerchio E F G H. adunque anchora il cerchio ABCD è maggiore dello spatio T: & però come lo spatio S al cerchio A B C D, così è il cerchio E F G H à qualche spatio minore del cerchio A B C D.

IL COMMANDINO.

A Sarà il quadrato E F G H la metà del quadrato descritto d'intorno al cerchio.



Descriuasi d'intorno al cerchio E F G H il quadrato T V Z Y, cioè tirate le linee rette per li punti E F G H, che tocchino il cerchio, come appare per la nona del quarto libro. sarà la T V doppia della T E. percioche giungasi E G F H, che si
18. del terzo. *seghino nel punto Q, le quali saranno diametri del cerchio. & il Q sarà centro del medesimo. l'angolo dunque Q E V è retto. ma è retto anchora l'angolo E Q H, percioche le due F Q Q E sono*
8. del primo. *vguali alle due H Q Q E & la base E F è vguale alla base EH.*
28 del primo. *adunque l'angolo F Q E è vguale all'angolo HQE. & però amen*

due sono retti. dalle qual cose seguita la linea retta T E V essere parallela alla F Q H. & per la medesima ragione si dimostreranno le T E Y V H Z parallele alla E Q G, & fra loro. sono dunque parallelogrammi F V V G F E E H. & essendo la F Q vguale alla Q H, sarà ancho ra la T E vguale alla E V: & però la T V è doppia della T E. dimostreremo similmente la T Y essere doppia della T F. & essendo T Y T V vguali, & le metà loro F T T E saranno vguali. & perche la T V è doppia della TE, il quadrato della T V sarà quadruplo del quadra to della T E; percioche le figure rettilinee simili sono in doppia proportione de lati homologhi. ma il quadrato della E F è vguale à quadrati delle F T T E, che sono doppij del quadrato del la T E. mà il quadrato della T V è quadruplo del quadrato della T E. adunque il quadrato della E F, cioè il quadrato E F G H sarà la metà del quadrato T V Z Y. il che bisognaua dimostrare. 34. del primo. Cor. della 20. del sesto. 47 del primo.

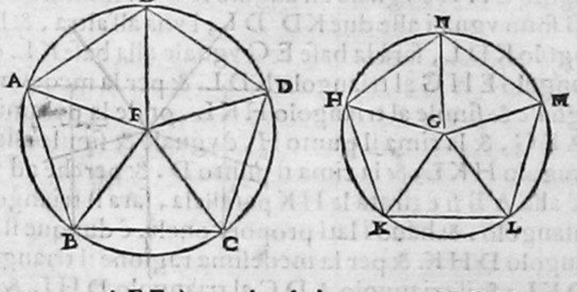
Sarà ciascuno delli triangoli E K F F L G G M H H N E la metà del parallelogrammo nel quale è descritto] *per la 41 del primo.* B

SCHOLIO.

Descriuasi anchora nel cerchio A B C D il polygono A X B O C P D R simile al polygono E K F L G M H N.

Nel dato cerchio descriuere vn polygono simile ad vn'altro, che sia descritto nel cerchio.

Siano due cerchi de quali i centri siano F G: & nel cerchio A B C D E descriua si qual si voglia polygono A B C D E, & giunganſi A F B F C F D F E F, & nel cerchio dal centro G ti risi vna linea retta G H in qualunque modo: & constituiscasi l'angolo H G K vguale all'angolo A F B. & all'angolo B F C constituiscasi vguale l'angolo K G L; & all'angolo C F D l'angolo L G M, & finalmente all'angolo D F E l'angolo M G N. adunque il rimanente A F E è vguale al rimanente H G N. & giunganſi H K K L L M M N N H. & è come la A F alla F B, cosi la H G alla G K; percioche sono simili i triangoli A F B H G K, che si è dimostrato nel sesto theorema del sesto libro de gli elementi. come dunque è il semidiametro del cerchio al semidiametro del cerchio, cosi la B A alla H K. similmente dimostreremo ciascuna di esse B C C D D E E A à ciascuna di esse K L L M M N N H hauer la medesima proportione. & sono gli angoli de polygoni vguali, perche anchor gli angoli de triangoli sono vguali. adunque gli polygoni A B C D E H K L M N hanno ciascun'angolo vguali à ciascun'angolo, & d'intorno à gli vgual'angoli i lati proportionali. & percio il polygono A B C D E è simile al polygono H K L M N. onde nel dato cerchio H K L M N si è descritto vn polygono simile ad vn'altro A B C D E. il che bisognaua fare.

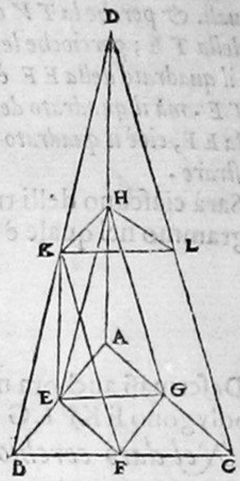


23. del primo. 4. del sesto. 1. diff. del sest.

THEOREMA III. PROPOSITIONE III.

Ogni pyramide che ha la base triangolare si diuide in due pyramidi vguali & simili fra loro, c'hanno le basi triangolari, & si mili al tutto; & in due prismi vguali, che sono maggiori della metà di tutta la piramide.

Sia la pyramide, la cui base sia il triangolo A B C, & la cima il punto D. Dico la pyramide A B C D diuider si in due pyramidi vguali, & simili fra loro, c'hanno le base triangolari, & simili al tutto, & in due prismi vguali, & li due prismi essere maggiori della metà di tutta la pyramide. seghinsi le A B B C C A A D D B D C per mezo ne punti E F G H K L: & giungansi E H E G G H H K K L L H E K K F F G. perche



2. del sesto. dunque la A E è vguale alla E B, & la A H alla H D, sarà la E H parallela alla D B. & per la medesima ragione

34. dei primo. la H K è parallela alla A B. è dunque H E B K parallelo grammo. onde la H K è vguale alla E B. ma la E B è vguale alla A E. adunque anchor la A E sarà vguale alla H K. & è la A H vguale alla H D. onde le due A E A H

29. del primo. 4. del primo. sono vguali alle due K H H D, l'vna all'altra, & l'angolo E A H vguale all'angolo K H D. adunque la base E H è vguale alla base K D: & il triangolo A E H vguale & simile al triangolo H K D. & per la medesima ragione anchor il triangolo A H G vguale & simile al triangolo H L D. & perche le due li

10. dell'unde. nee rette, che si toccano E H H G, sono parallele à due linee rette, che si tocca no K D D L, ma non nel medesimo piano, conterranno angoli vguali. adunque l'angolo E H G è vguale all'angolo K D L. similmente perche due linee rette E H

4. del primo. H G sono vguali alle due K D D L, l'vna all'altra, & l'angolo E H G è vguale all'angolo K D L, sarà la base E G vguale alla base K L. è dunque vguale & simile il triangolo E H G al triangolo K D L. & per la medesima ragione il triãgolo A E G è vguale & simile al triangolo H K L. onde la pyramide, la cui base è il triangolo A E G, & la cima il punto H, è vguale & simile alla pyramide, la cui base è il triangolo H K L, & la cima il punto D. & perche ad vn lato del triangolo A D B, cioè alla A B si è tirata la H K parallela, sara il triangolo A D B al triangolo D H K equiangolo. & hãno i lati proportionali. è dunque il triangolo A D B simile al triangolo D H K. & per la medesima ragione il triangolo D B C simile al triangolo D K L: & il triangolo A D C al triangolo D H L. & essendo due linee rette B A

10 dell'undec: A C, che si toccano parallele alle due K H H L, che si toccano, & non sono nel medesimo piano, conterranno angoli vguali. onde l'angolo B A C e vguale all'angolo K H L: & è come la B A alla A C, cosi la K H alla H L. adunque il triangolo A B C e simile al triangolo H K L: & però la pyramide, la cui base è il triangolo A B C & la cima il punto D, è simile alla pyramide, la cui base è il triangolo H K L, & la cima il punto D. ma la piramide, la cui base è il triangolo H K L, & la cima il punto D, si è dimostrata simile alla pyramide, la cui base è il triangolo A E G, & la cima il punto H. onde la pyramide, la cui base è il triãgolo A B C, & la cima il punto D, è simile alla pyramide, la cui base e il triangolo A E G & la cima il punto H. adunque amendue le pyramidi A E G H H K L D sono simili à

A tutta la pyramide A B C D. & perche la B E e vguale alla F C, sarà il parallelogrammo E B F G, doppio del triangolo G F C. & perche li due prismi sono vgualmente alti, l'vno de quali ha per base il parallelogrammo, & l'altro il triangolo, & è il parallelogrammo doppio del triangolo, saranno detti prismi vguali fra loro. adunque il prisma contenuto da due triangoli B K F & E H G, & da tre parallelogrammi E B F G E B K H K H F G è vguale al prisma cõtenuto da due triangoli G F C H K L & da tre parallelogrammi K F C L L C G H H K F G. & è manifesto l'vno & l'altro prisma, & quello, la cui base e il parallelgrãmo E B G F,

&

& la linea retta H K opposta ad esso, & quello la cui base è il triangolo G F C & il triangolo K L H opposto ad esso, essere maggiore dell'vna & l'altra delle pyramidi le cui basi sono i triangoli A E G H K L & le cime i punti H D, percioche se giungiamo le linee rette E F E H il prisma la cui base è il parallelogrammo E B F G, & la linea retta opposta ad esso H K, è maggiore della pyramide, la cui base è il triangolo E B F, & la cima il punto K. ma la pyramide, la cui base è il triangolo E B F & la cima il punto K, è vguale alla pyramide, la cui base è il triangolo A E G, & la cima il punto H, per essere contenuto da vguali & simili piani. onde il prisma, la cui base è il parallelogrammo E B F G, & la linea retta HK opposta ad esso, è maggiore della pyramide, la cui base è il triangolo A E G, & la cima il punto H. & il prisma, la cui base è il parallelogrammo E B F G, & la linea retta H K opposta ad esso, è vguale al prisma, la cui base e il triangolo GFC, & opposto ad esso il triangolo H K L; & la pyramide, la cui base e il triangolo A E G, & la cima il punto H, e vguale alla pyramide, la cui base e il triangolo H K L & la cima il punto D. adunque li due prismi, de quali si e detto, sono maggiori delle due dette pyramidi, le basi delle quali sono i triangoli A E G H K L, & le cime i punti H D. onde tutta la pyramide, la cui base e il triangolo A B C & la cima il punto D, e diuisa in due pyramidi vguali & simili fra loro, & simili à tutta, & in due prismi vguali: & sono li due prismi maggiori della metà di tutta la pyramide. il che bisognaua dimostrare. C

IL COMMANDINO.

Et perche la B F e vguale alla F C, sarà il parallelogrammo E B F G doppio del triangolo G F C] *percioche congiunta E F essendo la B F vguale alla F C, & la E G parallela alla B C, sarà il triangolo B E F vguale al triangolo F G C. ma il parallelogrammo E B F G è doppio del triangolo B E F. adunque sarà anchor doppio del triangolo F G C.*

Saranno detti prismi vguali fra loro] *per la vltima dell'vndecimo libro.* B

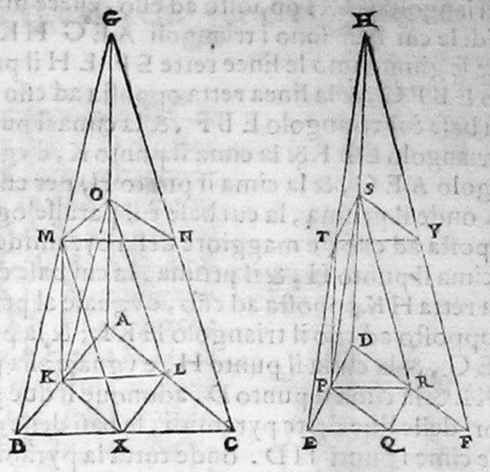
Il prisma la cui base e il parallelogrammo E B F G, & la linea retta H K opposta ad esso, e maggiore della pyramide la cui base e il triangolo E B F, & la cima il punto K] *si come il tutto è maggiore della sua parte. percioche la pyramide è vna parte del prisma, ma di sotto dalle cose, che si sono dimostrate nella 7 di questo, apparirà essere la terza parte, essendo la terza parte del prisma], la cui base è il triangolo G F C, & opposto ad esso il triangolo K L H.* C

THEOREMA IIII. PROPOSITIONE IIII.

Se siano due pyramidi vgualmente alte, c'habbiano le basi triangolari, & l'vna & l'altra di loro si diuida in due pyramidi vguali & simili à tutta, & in due prismi vguali, & delle pyramidi fatte l'vna & l'altra si diuida nel medesimo modo; & cio si faccia sempre, sarà come la base di vna pyramide alla base dell'altra, cosi anchora tutti li prismi, che sono in vna pyramide à tutti li prismi, che sono nell'altra, di numero uguali.

Siano due pyramidi vgualmente alte, che habbiano le basi triangolori A B C D E F, & le cime siano i punti C H, & l'vna & l'altra di esse diuidasi in due pyramidi fra loro vguali & simili à tutta, & in due prismi vguali, & delle pyramidi fatte l'vna & l'altra si intenda diuisa nel medesimo modo: & questo si faccia sempre. Dico come la base A B C alla base D E F, cosi essere tutti li prismi, che sono nella pyramide A B C à tutti li prismi, che sono nella pyramide D E F di numero

vguali



vguali. percioche essendo la B X vguale alla X C, & la A L vguale alla L C; sarà la X L parallela alla A B: & il triangolo A B C simile al triangolo L X C. & per la medesima ragione il triangolo D E F è simile al triangolo R Q F. & perche la B C è doppia della C X, & la E F doppia della F Q, come la B C alla C X, cosi sarà la E F alla F Q. & dalle B C C X sono descritti rettilinei simili & similméte posti A B C L X C: & dalle E F F Q rettilinei D E F R Q F simili, & similmente posti. è dunque come il triangolo B A C al triangolo L X C, cosi il triangolo D E F al triangolo R Q F: & permutandosi come il triangolo A B C al triangolo D E F, cosi il triangolo L X C al triangolo R Q F. ma come il triangolo L X C al triangolo R Q F, cosi il prisma, la cui base è il triangolo L X C, & opposto ad esso O M N, al prisma, la cui base è il triangolo R Q F, & ad esso opposto S T Y. come dunque il triangolo A B C al triangolo D E F, cosi il prisma, la cui base è il triangolo L X C, & opposto ad esso O M N, al prisma, la cui base è il triangolo R Q F, & ad esso opposto S T Y. & perche due prismi, che sono nella pyramide A B C G sono fra loro vguali, & fra loro vguali anchor li prismi, che sono nella pyramide D E F H; sarà come il prisma, la cui base è il parallelogrammo K L X B, & ad esso opposta la linea retta M O, al prisma, la cui base è il triangolo L X C, & opposto ad esso O M N, cosi il prisma, la cui base è il parallelogrãmo E P R Q, & ad esso opposta la linea retta S T, al prisma, la cui base è il triangolo R Q F, & opposto ad esso S T Y. la la onde cōponendosi come li prismi K B X L M O L X C M N O al prisma L X C M N O, cosi li prismi P E Q R S T R Q F S T Y al prisma R Q F S T Y. & permutandosi come li prismi K B X L O M N L X C O M N alli prismi P E Q R S T R Q F S T Y, cosi il prisma L X C M N O al prisma R Q F S T Y. & come il prisma L X C M N O al prisma R Q F S T Y, cosi si è dimostrata la base L X C alla base R Q F, & la base A B C alla base D E F. adunque come il triangolo A B C al triangolo D E F, cosi li due prismi, che sono nella pyramide A B C G, alli due prismi, che sono nella pyramide D E F H. similmente anchora se diuidiamo le pyramidi fatte nel medesimo modo, come O M N G S T Y H, sarà come la base O M N alla base S T Y, cosi li due prismi, che sono nella pyramide O M N G, alli due prismi, che sono nella pyramide S T Y H. ma come la base O M N alla base S T Y, cosi è la base A B C alla base D E F. come dunque la base A B C alla base D E F, cosi li due prismi, che sono nella pyramide A B C G, alli due prismi, che sono nella pyramide D E F H. & li due prismi, che sono nella pyramide O M N G, alli due prismi, che sono nella pyramide S T Y H: & quattro à quattro. le medesime cose anchora si dimostreranno ne prismi fatti per la diuisione delle pyramidi A K L O & D P R S & de tutti semplicemente di numero vguali.

2. del sesto.

LEMMA.

Ma come il triangolo L X C al triangolo R Q F, cosi essere il prisma, la cui base è il triangolo L X C, & opposto ad esso O M O, al prisma *ma, la cui base è il triangolo R Q F, & opposto ad esso S T Y, dimostreremo in questo modo.*

Nella medesima figura intendansi dalli punti G H tirate le perpendicolari alli piani de triangoli A B C D E F, che saranno fra loro vguali; percioche esse pyramidi si pongono vgualmente alte. & perche le due linee rette G C & la perpendicolare tirata dal punto G si segano dalli piani paralleli ABC OMN, saranno segate nelle medesime proportioni, & la G C è segata per mezo dal piano O M N nel punto N. adunque anchora la perpendicolare tirata dal punto G al piano A B C sarà segata per mezo dal piano O M N. per la medesima ragione, la perpendicolare, che è tirata dal punto H al piano D E F, sara segata per mezo dal piano S T Y, & sono vguali le perpendicolari, che dalli punti G H sono tirate alli piani A B C D E F. adunque etiandio vguali sono quelle, che dalli triangoli O M N S T Y si tirano perpēdicolari alli piani A B C D E F. sono dunque vgualmente alti i prismi, le cui basi sono i triangoli L X C R Q F & opposti ad essi O M N S T Y. onde anchor li solidi parallelepipedi descritti da detti prismi vgualmente alti sono fra loro, come le basi: & la metà loro. & come la base LXC alla base R Q F, così saranno fra loro detti prismi. il che bisognaua dimostrare.

17 dell'vndec.

15. del quinto.

IL COMMANDINO.

Ma come il triangolo L X C al triangolo R Q F, così il prisma, la cui base è il triangolo L X C & opposto ad esso O M N, al prisma, la cui base è il triangolo R Q F & opposto ad esso S T Y] *questo anchora può essere chiaro dal corollario, che noi habbiamo scritto nella 32 dell'vndecimo.* ✻

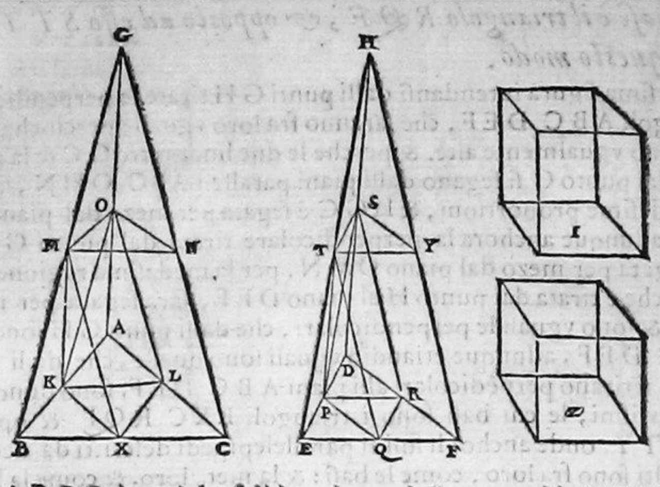
THEOREMA V. PROPOSITIONE V.

Le pyramidi c'hanno la medesima altezza & le basi triangolari, sono fra loro, come le basi.

Siano le pyramidi della medesima altezza, le cui basi siano i triangoli A B C D E F, & le cime i punti G H. Dico come la base A B C alla base D E F, così essere la pyramide A B C G alla pyramide D E F H. percioche se non è così, sarà come la base A B C alla base D E F, così la pyramide A B C G ò ad vn solido minore della pyramide D E F H, ò ad vn maggiore. sia prima ad vn solido minore, che sia Z, & diuidasi la pyramide D E F H in due pyramidi vguali fra loro, & simili à tutta, & in due prismi vguali. sono dunque li due prismi maggiori della metà di tutta la pyramide, & le pyramidi fatte dalla diuisione similmente si diuidano, & questo facciasi sempre, finche siano prese alcune pyramidi dalla pyramide D E F H, che siano minori dell'eccesso, nel quale la pyramide D E F H auanza il solido Z. piglinsi dunque & siano per essempio le pyramidi D P R S S T Y H. saranno li rimanenti prismi nella pyramide D E F H maggiori del solido Z. diuidasi anchor la pyramide A B C G in altrettante parti, come nella pyramide D E F H. onde come la A B C alla base D E F, così li prismi, che sono nella pyramide A B C G, alli prismi, che sono nella pyramide D E F H. ma come la base A B C alla base D E F, così la pyramide A B C G al solido Z. come dunque la pyramide A B C G al solido Z, così li prismi, che sono nella pyramide A B C G alli prismi nella pyramide D E F H: & permutandosi come la pyramide A B C G alli prismi che sono in essa, così il solido Z alli prismi, che sono nella pyramide D E F H. ma la pyramide A B C G è maggiore delli prismi, che sono in essa. adunque anchor il solido Z è maggiore delli prismi, che sono nella pyramide D E F H. ma è minore; che è impossibile. non è dunque come la base A B C alla base D E F, così la

3. di questo.

per l'antecedente. 4

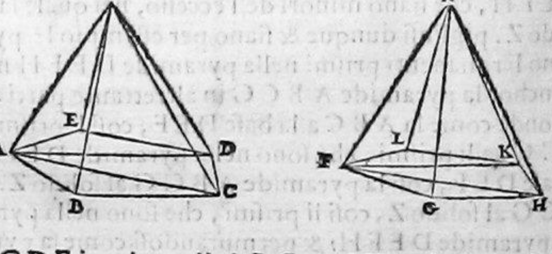


pyramide A B C G à qualche solido minore della pyramide D E F H. similmente dimostreremo non essere anchor come la base D E F alla base A B C, così la pyramide D E F H à qualche solido minore della pyramide A B C G. Dico dunque non essere come la base A B C alla base D E F, così la pyramide A B C G à qualche solido maggiore della pyramide D E F H. percioche sia ad vn maggiore se egli è possibile, cioè al solido I. sarà conuertendosi come la base D E F alla base A B C, così il solido I alla pyramide A B C G. ma come il solido I alla pyramide A B C G, così la pyramide D E F H al solido minore della pyramide A B C G, come si è poco fa dimostrato. come dunque la base D E F alla base A B C, così la pyramide D E F H à qualche solido minore della pyramide A B C G. il che è inconueniente. onde non è come la base A B C alla base D E F, così la pyramide A B C G à qualche solido maggiore della pyramide D E F H: & si è dimostrato non esser anche al minore. come dunque la base A B C alla base D E F, così è la pyramide A B C G alla pyramide D E F H. & percio le pyramidi c'hanno la medesima altezza & le basi triangolari sono fra loro come la basi. il che bisognaua dimostrare.

THEOREMA VI. PROPOSITIONE VI.

Le pyramidi, c'hanno la medesima altezza, & le basi di molti angoli sono fra loro, come le basi.

Siano le pyramidi, c'hanno la medesima altezza, & le basi di molti angoli ABCDE FGHKL, & le cime i punti MN. Dico come la base ABCDE alla base FGHKL, così essere la pyramide ABCDEM alla pyramide FGHKLM. diuidasi la base ABCDE in triangoli ABC ACD ADE, & la base FGHKL diuidasi in triangoli FGH FHK FKL: & in ciascun triangolo intendansi le pyramidi così alte, come le pyramidi da principio. perche dunque è come il triangolo A B C al triangolo A C D, così la piramide A B C M al-

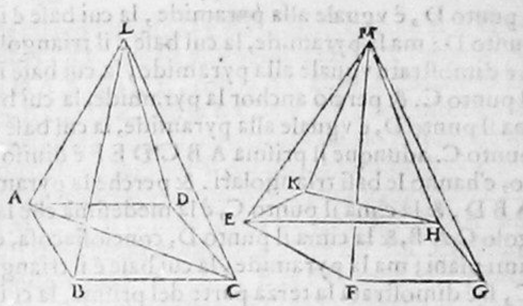


per l'antecedente.

la pyramide A C D M: sarà componendosi come il trapezio A B C D al triangolo A C D, cosi la pyramide A B C D M alla pyramide A C D M. ma come il triangolo A C D al triangolo A D E, cosi la pyramide A C D M alla pyramide A D E M. adunque per l'vgual proportione come la base A B C D alla base A D E, cosi la pyramide A B C D M alla pyramide A D E M. & similmente componendosi come la base A B C D E alla base A D E, cosi la pyramide A B C D E M alla pyramide ADEM. & per la medesima ragione come la base F G H K L alla base FKL, cosi la pyramide F G H K L N alla pyramide F K L N. & perche sono due pyrami di A D E M F K L N, che hanno le basi triangolari, & hanno la medesima altezza; sarà come la base A D E alla base F K L, cosi la pyramide A D E M alla pyramide F K L N. & essendo come la base A B C D E alla base A D E, cosi la pyramide A B C D E M alla pyramide A D E M; & come la base A D E alla base F K L, cosi la pyramide A D E M alla pyramide F K L N; sarà per l'vgual proportione come la base A B C D E alla base F K L, cosi la pyramide A B C D E M alla pyramide F K L N. ma come la base F K L alla base F G H K L, cosi era anchor la pyramide F K L N alla pyramide F G H K L N. onde similmente per l'vgual proportione come la base A B C D E alla base F G H K L, cosi è la pyramide A B C D E M alla pyramide F G H K L N. adunque le pyramidi c'hanno la medesima altezza & le basi di molti angoli sono fra loro, come le basi. il che bisognaua dimostrare.

IL COMMANDINO.

Il medesimo si dimostrerà anchora, se le basi siano contenute da lati di numero disuguali. percioche siano le pyramidi vgualmente alte A B C D L E F G H K M; & della pyramide A B C D L sia la base il quadrilatero A B C D, & la cima il punto L: & della pyramide E F G H K M sia la base il pentagono E F G H K, & la cima il punto L. Dico come il quadrilatero A B C D al pentagono E F G H K, cosi essere la pyramide A B C D L alla pyramide E F G H K M.



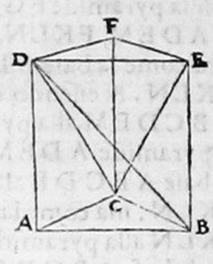
giungansi A C E G E H. sarà il quadrilatero A B C D diuiso in due triangoli A B C A C D, & il pentagono diuiso in tre triangoli E F G E G H E H K. la onde intendansi da ciasched'vn triangolo farsi pyramidi cosi alte come le prime pyramidi. & perche è come il triangolo A B C al triangolo A C D, cosi la pyramide A B C L alla pyramide A C D L, sarà componendosi come il quadrilatero A B C D al triangolo B C D, cosi la pyramide ABCDL alla pyramide A C D L. & per la medesima ragione dimostreremo nell'altra pyramide, come il quadrilatero E F G H al triangolo E G H, cosi essere la pyramide E F G H M alla pyramide E G H M. ma come il triangolo E G H al triangolo E H K, cosi è la pyramide E G H M alla pyramide E H K M. onde per l'vgual proportione come il quadrilatero E F G H al triangolo E H K, cosi è la pyramide E F G H M alla pyramide E H K M. & componendosi come il pentagono E F G H K al triangolo E H K, cosi tutta la pyramide E F G H K M alla pyramide E H K M. & conuertendosi come il triangolo E H K al pentagono E F G H K, cosi la pyramide E H K M à tutta la pyramide E F G H K M, ma come il triangolo ACD al triangolo EHK, cosi è la pyramide A C D L alla pyramide E H K M. & era come il quadrilatero A B C D al triangolo A C D, cosi la pyramide A B C D L alla pyramide A C D R. onde similmente per l'vgual proportione come il quadrilatero A B C D al pentagono E F G H K, cosi sarà la pyramide A B C D L alla pyramide E F G H K M, & nel medesimo modo si dimostrerà quando le loro basi siano contenute da altri, quanti si vogliano, lati.

per l'antecedente.

per l'antecedente.

THEOREMA VII. PROPOSITIONE VII.

Ogni prisma c'ha la base triangolare si diuide in tre pyramidi vguali fra loro, c'hanno le basi triangolari.



Sia il prisma, la cui base il triangolo A B C, & ad esso opposto il triangolo D E F. Dico il prisma A B C D E F diuidersi in tre pyramidi vguali fra loro, c'hanno le basi triangolari. giunganſi B D E C C D. & perche A B E D è
34. del primo. parallelogrammo, il cui diametro B D, sarà il triangolo A B D, vguale al triangolo E B D. adunque la pyramide, la cui base è il triangolo A B D & la cima il punto C, è
5. di questo. vguale alla pyramide, la cui base è il triangolo EBD, & la cima il punto C. ma la pyramide, la cui base è il triangolo E B D, & la cima il punto C, è la medesima, che la pyramide, la cui base è il triangolo E B C, & la cima il punto D; percioche sono contenute dalli medesimi piani, adunque anchor la pyramide, la cui base è il triangolo A B D & la cima il punto C, è vguale alla pyramide, la cui base il triangolo E B C, & la cima il punto D. similmente perche F C B E è parallelogrammo, il cui diametro C E, sarà il triangolo E C F vguale al triangolo C B E. onde etiandio la pyramide, la cui base il triangolo B E C, & la cima il punto D, è vguale alla pyramide, la cui base è il triangolo E C F, & la cima il punto D; ma la pyramide, la cui base è il triangolo B C E, & la cima il punto D, si è dimostrata vguale alla pyramide, la cui base il triangolo A B D, & la cima il punto C. & perciò anchor la pyramide, la cui base è il triangolo C E F, & la cima il punto D, è vguale alla pyramide, la cui base il triangolo A B D & la cima il punto C. adunque il prisma A B C D E F è diuiso in tre pyramidi vguali fra loro, c'hanno le basi triangolari. & perche la pyramide, la cui base è il triangolo A B D, & la cima il punto C, è la medesima che la pyramide, la cui base è il triangolo C A B, & la cima il punto D, conciosiacosa, che siano contenute dalli medesimi piani; ma la pyramide, la cui base è il triangolo A B D, & la cima al punto C, si è dimostrata la terza parte del prisma, la cui base è il triangolo A B C & opposto ad esso il triangolo D E F: sarà la pyramide la cui base è il triangolo ABC, & la cima il punto D, la terza parte del prisma, c'ha la medesima base, cioè il triangolo A B C, & opposto ad esso il triangolo D E F.

COROLLARIO.

Da questo è chiaro, che ogni pyramide è la terza parte del prisma, c'ha la medesima base, & l'vgual altezza. percioche quantunque la base del prisma habbia qualche altra figura rettilinea, & quella, che è opposta ad essa, si diuide nondimeno in prismi c'hanno le basi triangolari, & quelle che le sono opposte.

IL COMMANDINO.

per l'antecedente. Da questo corollario, & dalle cose antecedenti segue tutti li prismi c'hanno la medesima altezza essere fra loro, come le basi; percioche sono tripli delle pyramidi c'hanno la medesima altezza.

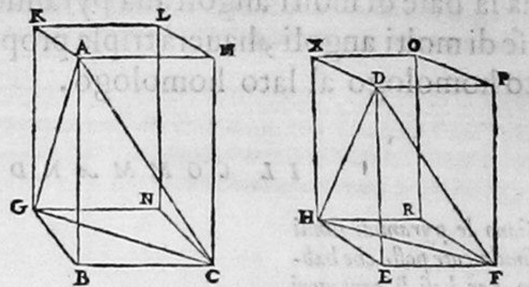
Ma questi theoremi sono anchor veri, quali noi habbiamo dimostrati nel libro del centro del *la grauità de solidi alla propositione 20 & 21.*

Tutti li prismi & pyramidi che si constituiscono nelle medesime è nell'vgual basi hanno fra loro la istessa proportione, che l'altezze.

Et oltre à ciò tutti li prismi & pyramidi hanno fra loro la proportione composta dalla proportione delle basi, & dalla proportione delle altezze.

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE VIII.

Le pyramidi simili c'hanno le basi triangolari, sono in tripla proportione di quella, c'hanno i lati homologhi fra loro.



Siano le pyramidi simili & similmente poste, le cui basi siano i triangoli triangoli A B C D E F, & le cime i punti G H. Dico la pyramide A B C D alla pyramide D E F H hauere proportione tripla di quella, c'ha la B C alla E F. compiscansi li solidi parallele pipedi di B G M L E H P O. & perche la pyramide A B C G è simile alla pyramide D E F H, sarà l'angolo A B C vguale all'angolo D E F, & l'angolo G B C vguale all'angolo H E F, & l'angolo A B G all'angolo D E H. & è come la A B alla D E, cosi la B C alla E F, & la B G al la E H. perche dunque come la A B alla D E, cosi la B C alla E F, & d'intorno à gli vgual'angoli li lati sono proportionali: sarà il parallelogrammo BM simile al parallelogrammo E P. & per la medesima ragione il parallelogrammo B N è simile al parallelogrammo E R. & il parallelogrammo B K al parallelogrãmo EX. adunque li tre parallelogrãmi B M K B B N sono simili alli tre EP E X ER. ma li tre MB B K B N alli tre opposti sono simili & vguali. & li tre EP EX ER sono simili, & vguali alli tre opposti. onde li solidi B G M L E H P O sono contenuti da piani simili & di numero vguali. & però il solido B G M L è simile al solido E H P O, ma li simili solidi parallelepipedi sono in tripla proportione delli lati homologhi. adunque il solido B G M L al solido E H P O hà tripla proportione di quella c'ha il lato homologo B C al lato homologo E F. ma come il solido B G M L al solido E H P O, cosi la pyramide A B C G alla pyramide D E F H, percio che la pyramide è la sesta parte del solido, essendo il prisma, che è la metà del solido parallepipedo, triplo della pyramide. onde anchor la pyramide A B C G alla pyramide D E F H hauerà tripla proportione di quella, che hà la B C alla E F.

9. diff. dell'undecimo.

11. diff. del 6.

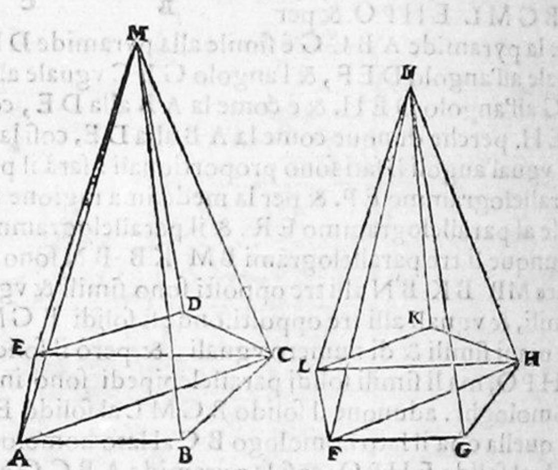
COROLLARIO.

Da questo appare le simili pyramidi c'hanno le basi di molti angoli, essere fra loro in proportione tripla di quella c'hanno i suoi lati homologhi; percioche diuise dette pyramidi in altre pyramidi c'hanno le basi triangolari, conciosiacosa che li polygoni simili, che sono nelle basi si diuidano in triango'i simili & vguali di numero & homologhi à tutti; sarà come vna pyramide

contenuta

contenuta in vna delle pyramidi grandi, c'ha la base triangolare ad vn'altra pyramide contenuta nell'altra pyramide, c'ha medesimamente la base triangolare, così tutte le pyramidi contenute in vna di quelle c'hanno le basi triangolari à tutte le pyramidi contenute nell'altra c'hanno le basi triangolari, cioè così la pyramide c'ha la base di molti angoli all'altra pyramide c'ha la base di molti angoli. ma la pyramide c'ha la base triangolare alla pyramide c'hà la base triangolare è in proportion tripla di quella c'hanno i lati homologhi fra loro. la pyramide dunque c'ha la base di molti angoli alla pyramide, che similmente ha la base di molti angoli, hauerà tripla proportione di quella c'hà il lato homologo al lato homologo.

IL COMMANDINO.



Siano le pyramidi simili & similmente poste che habbiano per basi li pentagoni ABCDEM FGHKLN & sia la base della pyramide ABCDEM il pentagono ABCDE, & la cima il pũto M: & della pyramide FGHKLN la base sia il pentagono FGHKL, & la cima il punto N: & sia il lato AB homologo al lato FG. Dico la pyramide ABCDEM alla pyramide FGHKLN hauere proportione tripla di quella c'ha AB ad FG. giungansi AC CE FH HL.

20. del sesto. *& perche li polygoni simili si diuidono in simili triangoli & di numero vguali & homologhi à tutti; sarà il triangolo ABC simile al triangolo FGH, & il triangolo ACE simile al triangolo FHL: & il triangolo CDE al triangolo HKL. & è per la similitudine delle pyramidi il triangolo AMB simile al triangolo FNG. onde come la MA alla AB, così la NF alla FG; & come la BA alla AC, così la GF alla FH. per l'vgual proportione dunque come la MA alla AC, così la LF alla FH. non altramente si dimostrerà come la MC alla CA, così la NH alla HF. adunque il triangolo MAC è simile al triangolo NFH. & è il triangolo MBC simile al triangolo NGH per la similitudine delle pyramidi. la onde la pyramide, la cui base è il triangolo ABC & la cima il punto M, è simile alla pyramide la cui base è il triangolo FGH & la cima il punto N, conciosiacosa che siano contenute da simili triangoli. per la medesima ragione si dimostrerà la pyramide ACEM simile alla pyramide FHLN & la pyramide CDEM alla pyramide HKLN. ma la pyramide ABCM alla pyramide FGHN hà tripla proportione di quella c'ha AB ad FG: & la pyramide ACEM alla pyramide FHLN ha tripla proportione di quella c'ha AE ad FL, cioe che AB ad FG; percioche è come*

9. diff dell'un decimo.
4. del sesto.

B A ad A E, così G F ad F L: & permutandosi come B A à G F, così A E ad F L, & la pyramide C D E M alla pyramide H K L M ha proportione tripla di quella, che ha la CD ad HK, cioè A B ad F G. percioche essendo come A B à B C, così F G à G H, & come B C à C D, così G H ad H K sarà per l'vgual proportione come A B à C D, così F G ad H K: & permutando sì come A B ad F G, così C D ad H K. come dunque vna delle antecedenti ad vna delle conseguenti, cioè la pyramide A B C M alla pyramide F G H N, così tutte le antecedenti à tutte le conseguenti, cioè così tutta la pyramide A B C D E M à tutta la pyramide F G H K L N. adunque anchor la pyramide A B C D E M alla pyramide F G H K L N hauerà tripla proportione di quella, che ha A B ad F G. il che bisognaua dimostrare.

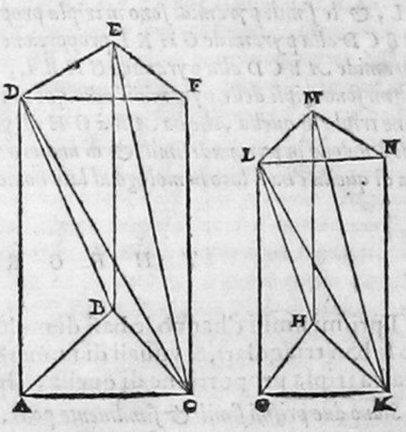
COROLLARIO.

Da queste cose si coglie le pyramidi simili, c'hanno le basi di molti angoli, diuidersi in pyramidi, c'hanno le basi triangolari simili & vguali di numero & homologhe à tutte.

Ma quello, che Euclide ha dimostrato nelle pyramidi simili, noi ci sforzeremo di dimostrare anchora ne i prismi simili. & quantunque nel libro antecedente da noi sia stato dimostrato, che i prismi simili, c'hanno le basi triangolari sono in proportione tripla di quella, c'hanno i lati homologhi fra loro, nondimeno ci è piacciuto il medesimo dimostrare altramente in questo luogo.

THEOREMA I.

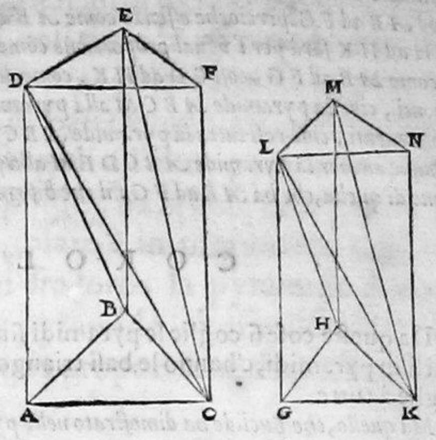
I prismi simili, c'hanno le basi triangolari, si diuidono in pyramidi simili & vguali di numero: & il prisma al prisma ha proportion tripla di quella, c'ha il lato homologo al lato homologo.



Siano i prismi simili & similmente posti A E G M: & la base del prisma A E sia il triangolo A B C, & il triangolo, che se gli oppone D E F, & del prisma G M sia la base il triangolo GHK & il triãgolo oppost LMN: & sia il lato A B homologo al lato G o H. Dico i prismi A E G M essere diuisi in pyramidi simili & di numero vguali, & il prisma A E al prisma G M hauere proportione tripla di quella c'ha A B à G H, giunganſi B D E C C D H L M K K L, sarà per le cose gia dimostrate, il prisma A E diuiso in tre pyramidi fra loro vguali: & similmente il prisma G M diuiso in altrettante pyramidi vguali, che saranno simili alle pyramidi del prisma A E. percioche per la similitudine delli prismi essendo il parallelogrammo A B E D simile al parallelogrãmo G H M L, 9. diff. dell'undecimo.
sarà come la D A alla A B, così la L G alla GH. & è l'angolo D A B vguale all'angolo LGH. adunque il triangolo D A B è simile al triangolo L G H. & per la medesima ragione il triangolo D E B simile al triangolo L M H. & altri triangoli che sono la metà de parallelogrammi ad altri triangoli à quali rispondono si dimostreranno simile. & perche come la D C alla C A, così è la L K alla K G, & come la A C alla C B, così la G K alla K H, sarà per l'vgual proportione come la D C alla C B, così la L K alla K H. & si dimostrerà similmente. come la D B al la B C, così essere la L H alla H K. onde il triangolo D B C è simile al triangolo L H K. & essendo il triangolo D A B simile al triangolo L G H, & il triangolo D B C simile al triangolo 6. del sesto.

LHK,

6. diff. del-l'undecimo. *L H K, & il triangolo D A C al triangolo L G K, sarà la pyramide, la cui base è il triangolo A B C, & la cima il punto D, simile alla pyramide, la cui base è il triãgolo GHK & la cima il punto L. per la medesima cagione sarà la pyramide, la cui base è il triangolo E B C, & la cima il punto D, simile alla pyramide, la cui base è il triangolo M H K, & la cima il punto L. & anchora la pyramide, la cui base è il triangolo E C F, & la cima il punto D, simile alla paramide, la cui base è il triangolo M K N & la cima il punto L. perche dunque la pyramide A B C D è simile alla pyramide G H K L, & le simili pyramidi sono in proportione tripla delli lati homologhi, hauerà la pyramide A B C D alla pyramide GHKL tripla proportione di quella c'ha A B à G H, & la pyramide E B C D alla pyramide M H K L ha proportione tripla di quella, che la ha E C ad H K, cioè che ha A B à G H, percioche è come A B à B C, così G H ad H K: & permutandosi come A B à G H, così B C ad H K. & similmente la pyramide E C F D alla pyramide M K N L ha proportione tripla di quella, che ha E F ad M N, cioè B C ad H K, cioè A B à G H.* 12. del quarto. *come dunque vno de gli antecedenti ad vno de conseguenti, così tutti gli antecedenti à tutti i conseguenti. onde come la pyramide A B C D alla pyramide GH K L, così tutto il prisma A E à tutto il prisma G N. ma la pyramide A B C D alla pyramide G H K L ha proportione tripla di quella che ha A B à G H. adunque anchor il prisma A E al prisma G M hauera proportione tripla di quella c'ha A B à G H.*

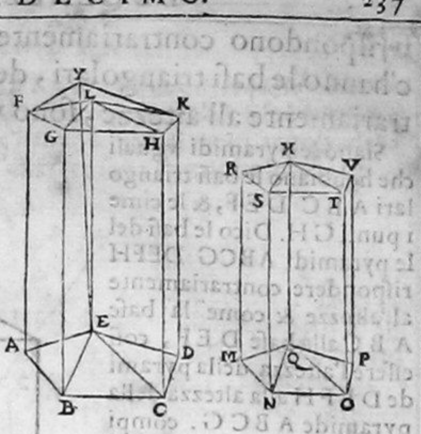


IN ALTRO MODO. Perche dunque la pyramide A B C D è simile alla pyrãide GH K L, & le simili pyramidi sono in tripla proportione de lati homologhi, hauerà la pyramide A B C D alla pyramide G H K L proportione tripla di quella, che ha A B à G H. ma come la pyramide A B C D alla pyramide G H K L, così il prisma A E al prisma G M. percioche i prismi sono tripli delle pyramidi. adunque anchor il prisma A E al prisma G M hauera proportione tripla di quella, che ha A B à G H. li prismi dunque simili, che hanno le basi triangolari si diuidono in pyramidi simili & di numero vguali, & il prisma al prisma ha proportione tripla di quella c'ha il lato homologo al lato homologo. il che bisognaua dimostrare.

THEOREMA II.

I prismi simili c'hanno le basi di molti angoli, si diuidono in prismi simili c'hanno le basi triãgolari, & vguali di numero, & homologhi à tutti: & il prisma al prisma ha tripla proportione di quella, che ha il lato homologo al lato homologo.

Siano due prismi simili & similmente posti A K M V: & del prisma A K sia la base il pentagono A B C D E, & opposto ad esso F G H K L: & del prisma M V sia la base il pentagono M N O P Q, & opposto ad esso R S T V X: & il lato A B sia homologo al lato M V. Dico i prismi A K M V diuidersi in prismi c'hanno le basi triangolari simili & di numero vguali, & homologhi à tutti, & il prisma A K al prisma M V hauere proportione tripla di quella, che ha A B ad M N. giunganse E B E C L G L H Q N Q O X S X T. adunque il pentagono A B C D E, sarà diuiso in tre triangoli A B E E B C E C D. & il pentagono F G H K L in tre triangoli F G L L G H L H K, & similmente il pentagono M N O P Q, sarà diuiso in tre triangoli M N Q Q N O Q O P: & il pentagono R S T V X in altrettanti triangoli R S X X S T X T V. intendasi ciascun prisma A K M V diuiso in tre prismi c'habbiano le basi triangolari, tirando i piani per L G G B. & per L H H C, & per X S S N, & per X T T O.



perche dunque i poligoni simili si diuidono in simili triangoli, & di numero vguali & homologhi à tutti, saranno i triangoli A B E F G L simili alli triangoli M N Q R S X: & i triangoli E B C L G H simili alli triangoli Q N O X S T, & i triangoli E C D L H K alli triangoli Q O P X T V, & perche il prisma A K si pone simile al prisma M V, il parallelogrammo A B G F, sarà simile al parallelogrammo M N S R: & il parallelogrammo A E L F simile ad M Q X R. onde come L E ad E A, cosi X Q à Q M: & come A E ad E B, cosi M Q à Q N. per l'vgual proportione dunque come L E ad E B, cosi X Q à Q N: & però come B G à G L cosi N S à S X. ma l'angolo L E B è vguale ad X Q N per la similitudine de prismi; percioche essendo i prismi simili A K M V se l'angolo L E B non è vguale all'angolo X Q N, vno de loro sarà maggiore. sia maggiore X Q N: & nella linea retta B E, & nel punto E che è in essa constituiscasi l'angolo B E Y vguale all'angolo N Q X, di modo, che la linea retta E Y sia terminata dal piano del pentagono F G H K B nel punto Y. & giungansi F Y Y K. sarà il pentagono F G H K Y simile al pentagono R S T V X. ma etiandio il pentagono F G H K L si pone simile al medesimo. adunque il pentagono F G H K L è simile al pentagono F G H K Y, & l'angolo F L K è vguale all'angolo F Y K. ma è maggiore, che è impossibile. adunque essendo i prismi simili, l'angolo L E B non è disuguale all'angolo X Q N. onde è necessariamente vguale; & però l'angolo E B G è vguale all'angolo Q N S. adunque anchor quelli che se gli oppongono L G B G L E sono vguali agli angoli X S N S X Q. il parallelogrammo dunque B E L G è simile al parallelogrammo N Q X S. per la medesima ragione si dimostrerà il parallelogrammo L E C H simile al parallelogrammo X Q O T. adunque il prisma A L la cui base è il triangolo A B E, & opposto ad esso F G L è simile al prisma M X, la cui base è il triangolo M N Q, & opposto ad esso R S X. percioche sono contenuti da piani simili: & è per la similitudine de prismi il parallelogrammo B C H G simile al parallelogrammo N O T S, & il parallelogrammo E D K L simile al parallelogrammo Q P V X. adunque il prisma B H, la cui base è il triangolo E B C, & opposto ad esso L G H, è simile al prisma N T, la cui base è il triãgolo Q N O: & opposto ad esso X S T. & finalmente il prisma C L, la cui base è il triangolo E C D & opposto ad esso L S K, è simile al prisma O X, la cui base il triãgolo Q O P, & quello che se gli oppone X T V. ma li prismi simili c'hanno le basi triangolari, sono in tripla proportione de lati homologhi, il che noi habbiamo demostrato alla 34 propositione dell'antecedente libro, & poco fa in altro modo: onde il prisma A L al prisma M X ha proportione tripla di quella c'ha A B ad M N. & il prisma B H al prisma N T ha proportione tripla di quella c'ha B C à N O, cioè A B ad M N: & il prisma C L al prisma O X ha proportione tripla di quella c'ha C D ad O P, cioe A B ad M N, come dimostrammo di sopra; percioche tutti i lati homologhi hanno la medesima proportione fra loro. come dunque vno degli antecedenti ad vno de conseguenti, cosi tutti gli antecedenti à tutti i conseguenti. & però come il prisma A L al prisma M X, cosi tutti i prismi à tutti i prismi, cioè tutto il prisma A K à tutto il prisma M V. ma il prisma A L al prisma M X ha proportione tripla di quella c'ha A B ad M N. adunque il prisma A K al prisma M V hauerà proportione tripla di quella c'ha A B ad M N. la onde i prismi simili, che hanno le basi di molti angoli si diuidono in prismi simili c'hanno le basi triangolari & vguali di numero & homologhi à tutti. & il prisma al prisma ha proportione tripla di quella c'ha il lato homologo al lato homologo. il che bisognaua dimostrare.

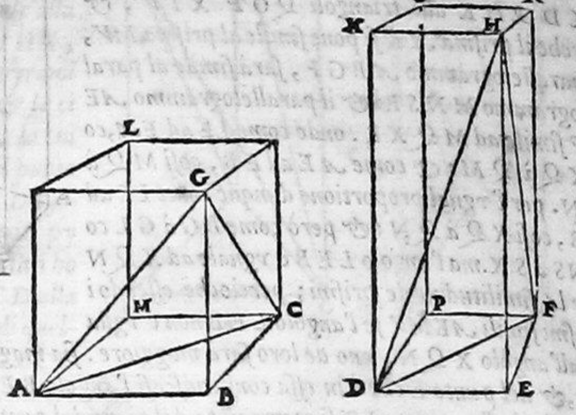
9. diff. dell'undecimo prima diff. del sesto.

34. del primo.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE IX.

Delle pyramidi vguali & che hanno le basi triangolari, le basi rispondono contrariamente all'altezze, & quelle pyramidi c'hanno le basi triangolari, delle quali le basi rispondono contrariamente all'altezze, sono vguali fra loro.

Siano le pyramidi vguali che habbiano le basi triangolari A B C D E F, & le cime i punti G H. Dico le basi delle pyramidi ABCG DEFH rispondere contrariamente all'altezze & come la base A B C alla base D E F, cosi essere l'altezza della pyramide D E F H alla altezza della pyramide A B C G. compiscansi i solidi parallelepipedi B G M L E H P O. & perche la pyramide A B C G, è vguale alla pyramide D E F H, & il solido B G M L è sestuplo della piramide A B C G, & il solido E H P O

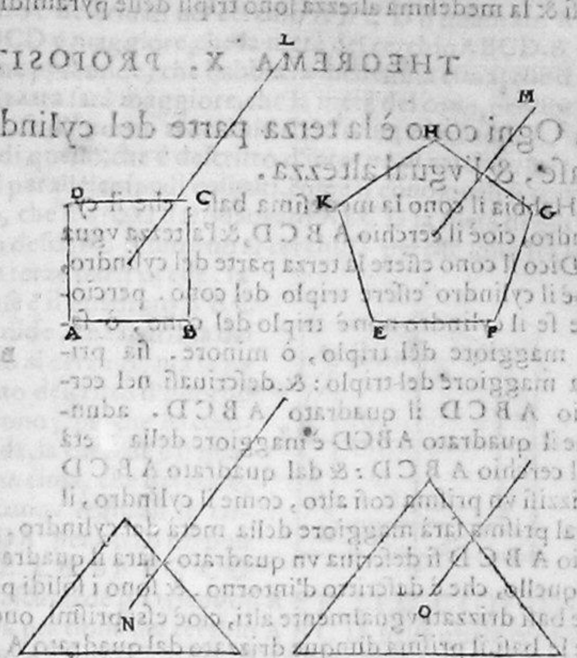


15. del quinto. è sestuplo della pyramide D E F H, sarà il solido B G M L vguale al solido E H
34 dell'undec. P O, & le basi de solidi parallelepipedi vguali rispondono all'altezze contrariamente. come dunque la base B M alla base E P, cosi è l'altezza del solido E H P O
15. del quinto. all'altezza del solido B G M L, ma come la base B M alla base E P, cosi il triangolo A B C al triangolo D E F. adunque come il triangolo A B C al triãgolo D E F, cosi l'altezza del solido E H P O all'altezza del solido B G M L. ma l'altezza del solido E H P O è la medesima, che l'altezza della pyramide D E F H: & l'altezza del solido B G M L è la medesima, che l'altezza della pyramide A B C G. è dunque come la base A B C alla base D E F, cosi l'altezza della pyramide D E F H all'altezza della pyramide ABCG. onde le basi delle pyramidi ABCG DEFH rispõdono all'altezze contrariamente. Ma le basi delle pyramidi ABCG DEFH rispondano cõtrariamẽte all'altezze; & sia come la base ABC alla base DEF, cosi l'altezza della pyramide DEFH all'altezza della pyramide ABCG. Dico la pyramide ABCG essere vguale alla pyramide D E F H. percioche fatte le medesime cose, come la base A B C alla base D E F, cosi è l'altezza della pyramide D E F H all'altezza della pyramide A B C G, & come la base A B C alla base D E F, cosi il parallelogrammo B M al parallelogrammo E P. onde come il parallelogrammo B M al parallelo-
15. del quinto. grammo E P, cosi sarà l'altezza della pyramide D E F G all'altezza della pyramide A B C G. ma l'altezza della pyramide D E F H è la medesima, che l'altezza del solido parallelepipedo E H P O: & l'altezza della pyramide A B C G è la medesima, che l'altezza del solido parallelepipedo B G M L. è dunque come la base BM alla base E P, cosi l'altezza del solido parallelepipedo E H P O all'altezza del solido parallelepipedo B G M L: & quei solidi parallelepipedi, le cui basi rispondono contrariamente all'altezze, sono vguali fra loro. adunque il solido parallelepipedo B G M L è vguale al solido parallelepipedo E H P O. & la pyramide A B C G è la sesta parte del solido B G M L; & del solido E H P O parimente la sesta parte è la pyramide D E F H. onde la pyramide A B C G è vguale alla pyramide D E F H. & però delle pyramidi vguali & che hanno le basi triangolari, le basi rispondono contrariamente all'altezze, & quelle pyramidi, che hanno le basi triangolari, delle quali le basi rispondono contrariamente all'altezze, sono vguali fra loro. il che bisognaua dimostrare.

IL COMMANDINO.

Il medesimo si dimostrerà nelle pyramidi c'hanno le basi di molti angoli, in questo modo.

Delle pyramidi vguali & c'hanno le basi di molti angoli, le basi rispōdono contrariamente all'altezze. & quelle pyramidi c'hanno le basi di molti angoli, delle quali le basi rispondono contrariamente all'altezze, sono vguali fra loro.



Siano le pyramidi vguali ABCDL EFGHKM: & sia della pyramide ABCDL la base il quadrilatero ABCD, & la cima il punto L: & della pyramide EFGHKM sia la base il pentagono EFGHK, & la cima il punto M. Dico le basi rispondere contrariamente all'altezze, cioè il quadrilatero ABCD essere al pentagono EFGHK, come l'altezza della pyramide EFGHKM, all'altezza della pyramide ABCDL. facciasi per la 25 del sesto il triangolo nel quale è N, vguale al quadrilatero ABCD: & facciasi altresì vn'altro triangolo nel quale è O, vguale al pentagono EFGHK: & dal triangolo N drizzisi vna pyramide così alta, come la pyramide ABCDL. & del triangolo O drizzisi vn'altra pyramide alta, come la pyramide EFGHKM. sarà la pyramide N vguale alla pyramide ABCDL; percioche sono nelle vgual basi, & hanno l'altezza vguale. & per simil ragione la pyramide O sarà vguale alla pyramide EFGHKM. adunque la pyramide N sarà vguale alla pyramide O. ma delle pyramidi vguali, & c'hanno le basi triangolari, le basi respondono contrariamente all'altezze. come dunque il triangolo N al triangolo O, così è l'altezza della pyramide O all'altezza della pyramide N. ma come il triangolo N al triangolo O, così il quadrilatero ABCD al pentagono EFGHK, percioche l'vno è vguale all'altro. adunque come il quadrilatero ABCD al pentagono EFGHK, così l'altezza della pyramide O all'altezza della pyramide N, cioè l'altezza della pyramide EFGHKM all'altezza della pyramide ABCDL. Ma stando le medesime cose, sia come il quadrilatero ABCD al pentagono EFGHK, così l'altezza della pyramide EFGHKM all'altezza della pyramide ABCDL. Dico la pyramide ABCDL essere vguale alla pyramide EFGHKM. percioche come il quadrilatero ABCD al pentagono EFGHK, così è il triangolo N al triangolo O. onde come il triangolo N al triangolo O, così l'altezza della pyramide EFGHKM all'altezza della pyramide ABCDL. cioè così l'altezza della pyramide O all'altezza della pyramide N. ma quelle pyramidi, c'hanno le basi triangolari, le cui basi rispondono all'altezze contrariamente, sono fra loro vguali. adunque la pyramide N è vguale alla pyramide O: & però la pyramide ABCDL è vguale alla pyramide EFGHKM. onde delle pyramidi vguali, & c'hanno le basi di molti angoli: & quello che seguita. il che bisognaua dimostrare.

6. di questo.

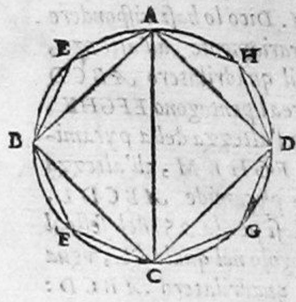
per l'antecedente.

COROLLARIO.

Dalle cose già dette si raccoglie, che di tutti i prismi vguali le basi rispondono contrariamente all'altezze, & che quei prismi, le cui basi rispondono contrariamente all'altezze, sono vguali fra loro, percioche i prismi, c'hanno le medesime basi & la medesima altezza sono tripli delle pyramidi.

THEOREMA X. PROPOSITIONE X.

Ogni cono è la terza parte del cylindro, c'ha la medesima base, & l'vgual altezza.



Habbia il cono la medesima base, che il cylyndro, cioè il cerchio A B C D, & l'altezza vguale. Dico il cono essere la terza parte del cylindro, cioè il cylindro essere triplo del cono. percioche se il cylindro non è triplo del cono, ò sarà maggiore del triplo, ò minore. sia prima maggiore del triplo: & descriuasi nel cerchio A B C D il quadrato A B C D. adunque il quadrato A B C D è maggiore della metà del cerchio A B C D: & dal quadrato A B C D drizzisi vn prisma cosi alto, come il cylindro, il qual prisma sarà maggiore della metà del cylindro. perche se d'intorno al cerchio A B C D si descriua vn quadrato, sarà il quadrato descritto dentro la metà di quello, che è descritto d'intorno. & sono i solidi parallelepipedi dalle medesime basi drizzati vgualmente alti, cioè essi prismi. onde i prismi sono fra loro, come le basi. il prisma dunque drizzato dal quadrato A B C D è la metà del prisma drizzato dal quadrato, che si descriue d'intorno al cerchio A B C D. & è il cylindro minore del prisma drizzato dal quadrato, che si descriue d'intorno al cerchio A B C D. il prisma dunque drizzato dal quadrato A B C D cosi alto, come il cylindro, è maggiore della metà del cylindro. seghinsi le circonferenze A B B C C D D A per mezzo ne punti E F G H. & giunganſi A E E B B F F C C G G D D H H A. adunque ciascun triangolo A E B B F C C G D D H A, è maggiore della metà della portione del cerchio A B C D, nella quale consiste, come si è dimostrato disopra. drizzinsi da ciascun triangolo A E B B F C C G D D H A i prismi alti, come il cylindro. onde etiandio ciascuno delli prismi drizzati è maggiore della metà della portione del cylindro, che è d'intorno ad esso. perche se si tirino per i punti E F G H le parallele alle A B B C C D D A, & compiscansi in esse i parallelogrammi A B B C C D D A, dalli quali si drizzino solidi parallelepipedi, cosi alti, come il cylindro: saranno i prismi, che sono ne i triangoli A E B B F C C G D D H A la metà di ciascun de solidi drizzati. & sono le portioni del cylindro minori delli solidi parallelepipedi drizzati. adunque anchor i prismi, che sono nelli triangoli A E B B F C C G D D H A sono maggiori della metà delle portioni del cylindro, che sono in esse. la onde segando per mezo l'altre circonferenze: & giungendo le linee rette, & da ciascun triangolo drizzando prismi cosi alti, come il cylindro; & questo facendo sempre alla fine lascieremo alcune portioni del cylindro minori dell'eccesso, nel quale il cylindro auanza il triplo del cono. lascinsi, & siano A E E B B F F C C G G D D H H A. adunque il rimanente prisma, la cui base è il polygono A E B F C G D H, & l'altezza medesima del cylindro, è maggiore del triplo del cono. ma il prisma, la cui base è il polygono A E B F C G D H, & la medesima altezza del cylindro, è

Cor. della 7. di questo.

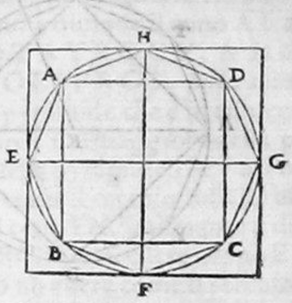
1. del decimo.

Cor. 7. di que.

triplo

triplo della pyramide,la cui base è il polygono A E B F C G D H,& la cima il medesimo punto,che del cono. la pyramide dunque,la cui base il polygono A E B F C G D H, & la cima il medesimo punto, che del cono, è maggiore del cono c'ha per base il cerchio A B C D. ma è minore,essendo compreso da esso, che è impossibile. onde non sarà il cylindro maggiore, che il triplo del cono. Dico oltre à ciò ne anche essere minore, che il triplo del cono; percioche s'egli è possibile,sia il cylindro minore,che il triplo del cono. sarà conuertendosi il cono maggiore, che la terza parte del cylindro. descriuasi nel cerchio A B C D il quadrato A B C D.adunque il quadrato A B C D è maggiore,che la metà del cerchio A B C D.& dal quadrato A B C D drizzisi vna pyramide, che habbia la medesima cima, che il cono.la pyramide dunque drizzata sarà maggiore,che la metà del cono, percioche, come habbiamo dimostrato, se d'intorno al cerchio si descriua vn quadrato, sarà il quadrato A B C D la metà di quello,che è descritto d'intorno al cerchio: & se dalli quadrati si drizzino solidi parallelepipedi cosi alti,come il cono,quali si chiamano anche prismi,sarà quello, che si drizza dal quadrato A B C D la metà di quello, che è drizzato dal quadrato descritto d'intorno al cerchio; perche sono fra loro come le basi.onde etiãdio le terze parti di esse. la pyramide dunque,la cui base è il quadrato A B C D, è la metà di quella pyramide, che si drizza dal quadrato descritto d'intorno al cerchio: ma la pyramide drizzata dal quadrato descritto d'intorno al cerchio è maggiore del cono, perche lo comprende. adunque la pyramide,la cui base è il quadrato A B C D, & la medesima cima, che del cono, è maggiore della metà del cono. seghinsi le circonferenze AB BC CD DA per mezo ne punti E F G H, & giunganſi A E E B B F F C C G G D D H H A.adunque ciascuno de gli triangoli A E B B F C C G D D H A è maggiore,che la metà della portione del cerchio A B C D, nella quale consiste. drizzinsi da ciascun triangolo AEB BFC CGD DHA le pyramidi, che habbiano le medesime cime, che il cono. ciascuna dunque delle pyramidi drizzate al medesimo modo è maggiore, che la metà della portione del cono, che è d'intorno ad essa. la onde segando per mezo l'altre circonferenze, & giungendo le linee rette, & da ciascun triangolo drizzando la pyramide, che habbia la medesima cima, che il cono,& questo facendo sempre, lascieremo alla fine alcune portioni del cono, che saranno maggiori dell'eccesso, nel quale il cono auanza la terza parte del cylindro. lascinsi & siano quelle, che sono nelle A E E B B F F C C G G D D H H A. adunque la rimanente pyramide, la cui base è il polygono A E B F C G H, & la cima la medesima,che del cono,è maggiore della terza parte del cylindro. ma la pyramide, la cui base è il polygono A E B F C D H, & la cima medesima,che del cono, è la terza parte del prisma, la cui base è il polygono A E B F C D H, & la medesima altezza,che del cylindro. onde il prisma,la cui base è il polygono A E B F C G H, & la medesima altezza, che del cylindro, è maggiore del cylindro, la cui base è il cerchio A B C D. ma è minore; percioche da esso è compreso,che non è possibile.non è dunque il cylindro minore,che il triplo del cono, & si è dimostrato non esser maggiore,che il triplo.onde è necessario, che il cylindro sia triplo del cono. & però il cono è la terza parte del cylindro. ogni cono dunque è la terza parte del cylindro,che ha la medesima base, & l'vgual altezza. il che bisognaua dimostrare.

15. del quinto.



IL COMMANDINO.

Nel medesimo modo quello si dimostrerà ne coni, & cylindri scaleni.

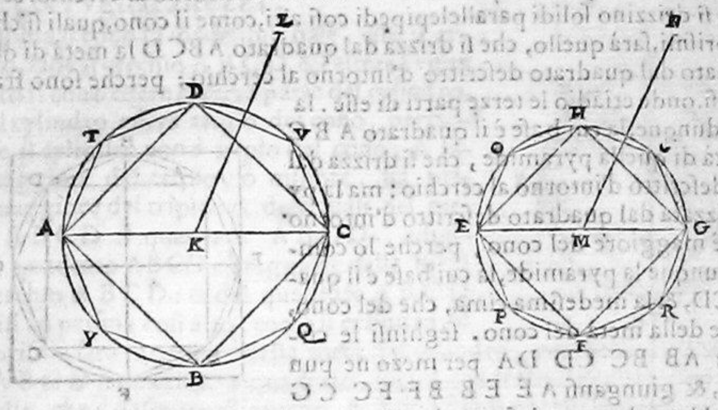
CO-

COROLLARIO.

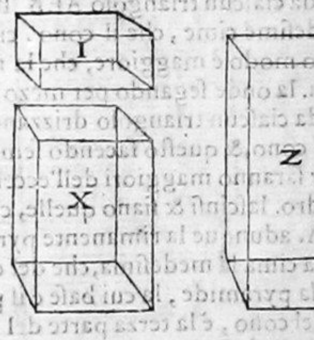
Dalle qual cose appare ogni cono ò sia retto, ò scaleno, essere la terza parte del cylindro, ò retto ò scaleno, c'ha la medesima base & l'vgual'altezza.

THEOREMA XI. PROPOSITIONE XI.

I coni & cylindri c'hanno la medesima altezza sono fra loro, come le basi.



Siano i coni & cylindri della medesima altezza, c'habbiano per basi i cerchi A B C D E F G H, & gli assi K L M N, & i diametri delle basi A C E G. Dico come il cerchio A B C D al cerchio E F G H, così essere il cono A L al cono E N. & se non è così, sarà come il cerchio A B C D al cerchio E F G H, così il cono A L à qualche solido minore del cono E N, ò maggiore. sia prima al minore, che sia X. & di quanto e minore il solido X del cono E N, tanto sia il solido I. adũque il cono E N e vguale alli solidi X I. descriuasi nel cerchio



E F G H il quadrato E F G H. la onde il quadrato e maggiore, che la metà del cerchio. drizzisi dal quadrato E F G H vna pyramde così alta, come il cono. la pyramide dunque drizzata e maggiore, che la metà del cono; perche se descriuiamo vn quadrato d'intorno al cerchio, & da esso drizziamo vna pyramide alta, come il cono; sarà la pyramide descritta di dentro, la metà della pyramide descritta d'intorno. percioche sono fra loro come le basi, ma il cono è minore della pyramide, che descritta d'intorno. adunque la pyramide, la cui base è il quadrato E F G H, & la cima la medesima, che del cono, è maggiore della metà del cono. seghinsi le circonferenze E F F G G H H E per mezo ne punti O P R S: & giunganſi O E E P P F F R R G G S S H.. ciascun triangolo dunque H O E E P F F R G G S H è maggiore che la metà della portione del cerchio, nella quale consiste. drizzisi da ciascun triangolo H O E E P F F R G G S H vna pyramide alta come il cono. adunque ciascuna delle pyramidi drizzate è maggiore, che la metà della portione del cono, che è in essa. la onde segando l'altre circonferenze per mezo, & giungendo le linee rette, & drizzando da ciascun triangolo pyramidi alte, come il cono, & questo facendo sempre lascieremo alla fine alcune portioni del cono, che saranno minori del solido I. lascinsi & siano quelle, che in esse HO OE EP PF FR RG GS SH. adunque la rimanente pyramide, la cui base è il polygono HOEPFRGS, & la medesima altezza, che del cono, è maggiore del solido X. descriuasi nel cerchio ABCD il polygono DTAYBQCV simile & similmente posto al polygono HOEPFRGST: & da esso drizzisi una pyramide alta come il cono AL. perche dunque è come il quadrato della AC al quadrato della EG, cosi il polygono DTAYRQCV al polygono HOEPFRGS: & come il quadrato della AC al quadrato della EG, cosi il cerchio ABCD al cerchio EFGH; sarà come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, cosi il polygono DTAYBQCV al polygono HOEPFRGS. ma come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, cosi il cono AL al solido X; & come il polygono DTAYBQCV al polygono HOEPFRGS, cosi la pyramide la cui base è il polygono DTAYBQCV, & la cima il punto L, alla pyramide, la cui base è il polygono HOEPFRGS, & la cima il punto N. come dunque il cono AL al solido X, cosi la pyramide, la cui base è il polygono DTAYBQCV, & la cima il punto L alla pyramide la cui base è il polygono HOEPFRGS, & la cima il punto N. onde permutandosi come il cono AL alla pyramide che è in esso, cosi il solido X alla pyramide che è nel cono EN. ma il cono AL è maggiore della pyramide che è in esso. adunque il solido X è maggiore della pyramide, che è nel cono EN. ma è minore, che è impossibile. non è dunque come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, cosi il cono AL ad vn solido minore del cono EN. similmente si dimostrerà ne anche come il cerchio EFGH al cerchio ABCD, cosi essere il cono EN à qualche solido minore del cono AL. Dico oltre à ciò nõ essere come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, cosi il cono AL à qualche cono maggiore del solido EN. percioche s'egli è possibile sia ad un solido maggiore, che sia Z. cõuertendosi dunque come il cerchio EFGH al cerchio ABCD, cosi sarà il solido Z al cono AL. ma come il solido Z al cono AL, cosi il cono EM à qualche solido minore del cono AL. come dunque il cerchio EFGH al cerchio ABCD, cosi il cono EN à qualche solido minore del cono AL, che si è dimostrato impossibile. onde non è come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, cosi il cono AL à qualche solido maggiore del cono EN. & si è dimostrato non essere anche al minore. adunque come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, cosi è il cono AL al cono EN. ma come il cono al cono, cosi è il cylindro al cylindro; percioche l'vno è triplo dell'altro. & come dunque il cerchio ABCD al cerchio EFGH, cosi i cylindri, che sono in essi vgualmente alti à coni. adunque i coni & cylindri, c'hanno la medesima altezza sono fra loro, come le basi. il che bisognaua dimostrare.

1. di questo.
2. di questo.
15. del quinto. per l'antecedente.

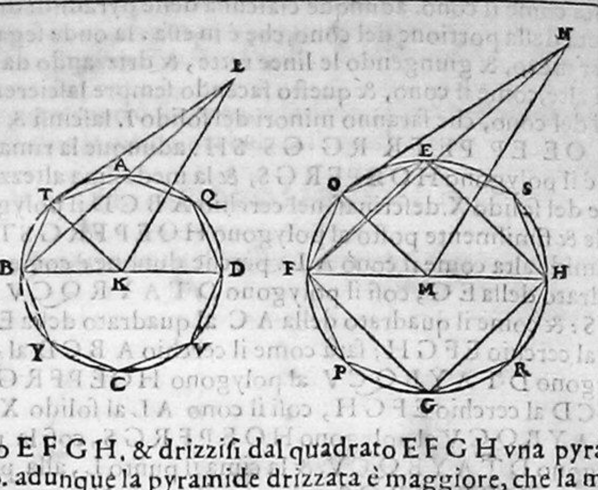
IL COMMANDINO.

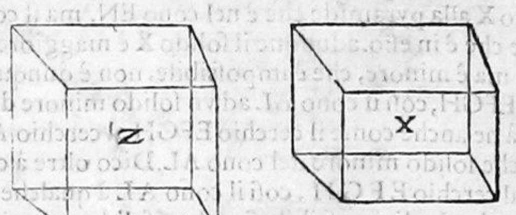
Et questo anchora similmente si dimostrerà ne i coni & cylindri scaleni.

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XII.

I coni & cylindri simili sono fra loro in tripla proportione di quella c'hanno i diametri delle basi.

Siano i coni & cylindri simili le cui basi siano i cerchi ABCD EFGH, & i diametri delle basi BD FH & gli assi de coni ò cylindri KLMN. Dico il cono la cui base è il cerchio ABCD, & la cima il punto L, al cono, la cui base è il cerchio EFGH, & la cima il punto N, hauere proportione tripla di quella, c'ha BD ad FH. percioche se il cono ABCDL al cono EFGHN non ha proportione tripla di quella c, ha B D ad F H, haurà il cono A B C D L à qualche solido minore del cono E F G H N proportione tripla, ò vero à maggiore. habbia prima ad un minore, che sia X: & descriuasi nel cerchio E F G H il quadrato E F G H. il quadrato dũque E F G H è maggiore della metà del cerchio E F G H. & drizzisi dal quadrato E F G H vna pyramide cosi alta come il cono. adunque la pyramide drizzata è maggiore, che la metà del cono. seghinsi le circonferenze E F F G G H H E per mezo ne punti O P R S, & giunganſi E O O F F P P G G R R H H S S E. la onde ciascun triangolo E O F F P G G R H H S E è maggior, che la metà della portione del cerchio E F G H, nella quale consiste. & drizzisi da ciascun triangolo E O F F P G G R H H S E vna pyramide che habbia la medesima cima, che il cono. adunque ciascuna delle pyramidi drizzate è maggiore, che la metà della portione del cono che è d'intorno ad essa. & percio segando l'altre circonferenze per mezo, & giungendo le linee rette, & da ciascuno de triangoli drizzãdo le pyramidi c'habbiano la medesima cima che il cono, & questo sempre facendo si lascieranno alla fine alcune portioni del cono, che saranno minori dell'eccesso, nel quale il cono E F G H N auanza il solido X. lascinsi & siano quelle, che sono nelle E O O F F P P G G R R H H S S E. onde la pyramide rimanente, la cui base è il polygono E O F P G R H S, & la cima il punto N è maggiore del solido X. descriuasi anchora nel cerchio A B C D il polygono A T B Y C V D Q simile & similmente posto al polygono E O F P G R H S, dal quale drizzisi vna pyramide, che habbia la medesima cima, che il cono: & de triangoli, che contengono la pyramide, la cui base è il polygono A T B Y C V D Q, & la cima il pũto L, uno sia L B T: & de triangoli, che contengono la pyramide, la cui base è il polygono E O F G R H S, & la cima il punto N, sia vno N F O, & giunganſi K T M O. perche dunque il cono A B C D è simile al cono E F G H, sarà come B D ad F H, cosi l'asse K L all'asse M N. ma come B D ad F H, cosi B K ad F M. adunque come B K ad F M, cosi K L ad M N: & permutandosi come B K à K L, cosi F M ad M N, percioche l'vna & l'altra è perpendicolare, & d'intorno à gli vgual'angoli B K L F M N sono i lati proportionali. è dunque simile il triangolo B K L al triangolo F M N. & similmẽte perche come B K à K T, cosi è F M ad M O, & d'intorno à gli vgual'angoli B K T F M O sono i lati proportionali, conciosiacosa, che qual parte è l'angolo B K T di quattro retti, che sono al centro K, tal sia l'angolo F M O di quattro retti, che sono al centro M; sarà il triangolo B K T simile al triangolo F M O. & perche si è dimostrato come B K à K L, cosi F M ad M N: & B K è vguale à K T, & F M





ad M O; ſarà come T K a K L, coſi O M ad M N. & d'intorno à gli vguali angoli T K L O M N eſſendo retti ſono i lati proportionali. il triangolo dunque L K T è ſimile al triangolo N M O. & per la ſimilitudine de triangoli B K L F M N eſſendo come L B à B K, coſi N F ad F M. & per la ſimilitudine de triangoli B K T F M O, come K B à B T, coſi M F ad F O, ſarà per l'vgual proportione come L B à B T, coſi N F ad F O. oltre à ciò per la ſimilitudine de triangoli L T K N O M, eſſendo come L T à T K coſi N O ad O M; & per la ſimilitudine de triangoli K B T O M F, come K T à T B, coſi M O ad O F, ſarà per l'vgual proportione come L T à T B, coſi N O ad O F, & ſi è dimoſtrato come T B à B L, coſi O F ad F N. onde per l'vgual proportione come T L ad L B, coſi O N ad N F. de triangoli dunque L T B N O F ſono i lati proportionali. & però i triangoli L T B N O F ſono equiãgoli & ſimili fra loro. onde anchora la pyramide, la cui baſe è il triangolo B K T, & la cima il punto L, è ſimile alla pyramide la cui baſe è il triangolo F M O, & la cima il punto N. percioche ſono contenute da ſimili piani & vguali di numero. ma le pyramidi ſimili; & c'hanno le baſi triangolari ſono in tripla proportione de lati homologhi. adunque la pyramide B K T L alla pyramide F M O N ha proportione tripla di quella, c'ha B K ad F M. ſimilmente da punti A Q D V C Y à K & da punti E S H K G P ad M tirando linee rette, & da triangoli drizzando le pyramidi, c'habbiano le cime medeſime, che il cono, dimoſtreremo ciaſcuna pyramide del medeſimo ordine à ciaſcuna dell'altro ordine hauere proportione tripla di quella, c'ha il lato B K homologo al lato homologo F M, cioè che B D ad F H. ma ſi come vno delli antecedenti ad vno de conſeguenti, coſi tutti gli antecedenti à tutti i conſeguenti. è dunque come la pyramide B K T L alla pyramide F M O N, coſi tutta la pyramide, la cui baſe è il polygono A T B Y C V D Q, & la cima il punto L à tutta la pyramide la cui baſe è il polygono E O F P G R H S & la cima il punto N. onde la piramide la cui baſe è il polygono A T B Y C V D Q & la cima il punto L, alla pyramide, la cui baſe è il polygono E O F P G R H S & la cima il punto N ha proportione tripla di quella che ha B D ad F H. & ſi pone il cono, la cui baſe è il cerchio A B C D & la cima il punto L al ſolido X hauere proportione tripla di quella, che ha B D ad F H. come dunque il cono la cui baſe è il cerchio A B C D & la cima il punto L, al ſolido X, coſi è la pyramide la cui baſe è il polygono A T B Y C V D Q, & la cima il punto L alla pyramide, la cui baſe è il polygono E O F P R H S & la cima il punto N: & permutandoſi come il cono, la cui baſe è il cerchio A B C D & la cima il punto N alla pyramide che è in eſſo, la cui baſe è il polygono A T B Y C V D Q & la cima il punto L, coſi il ſolido X alla pyramide la cui baſe è il polygono E O F P G R H S & la cima il punto N. ma detto cono è maggiore della pyramide che è in eſſo, percioche la comprende. adunque etiandio il ſolido X è maggiore della pyramide, la cui baſe è il polygono E O F P G R H S, & la cima il punto N. ma è minore che è impoſsibile. il cono dunque la cui baſe è il cerchio A B C D & la cima il punto L à qualche ſolido minore del cono, la cui baſe è il cerchio E F G H & la cima il punto N, non ha proportione tripla di quella, che ha B D ad F H. ſimilmente dimoſtreremo ne anche il cono E F G H M à qualche ſolido minore del cono A B C D L hauere tripla proportione di quella che ha F H à B D. la onde Dico ne anche il cono A B C D L ad vn ſolido maggiore del cono E F G H N hauere proportione tripla di quella, che ha B D ad F H. percioche s'egli è poſsibile habbia à qualche ſolido maggiore che ſia Z. conuertendoſi dunque il ſolido Z. al cono A B C D L ha proportione tripla di quella, che ha F H à B D. ma come il ſolido Z al cono A B C D L coſi il cono E F G H N à qualche ſolido minore del cono A B C D L. adunque anchor il cono E F G H N al ſolido minore del cono A B C D L hauerà proportione tripla di quella c'ha F H a B D, che ſi è dimoſtrato impoſsibile. il cono dunque A B C D L ad vn ſolido maggiore del cono E F G H N non ha tripla proportione di quella c'ha B D ad F H. & ſi è dimoſtrato ne anche al minore. onde il co-

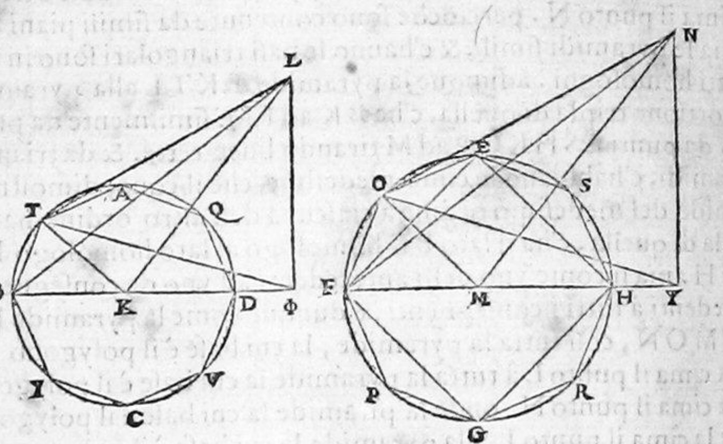
no A B C D L al cono E F G H N ha proportione tripla di quella, c'ha BD ad FH.
15. del quinto. ma come il cono al cono, cosi il cylindro al cylindro. percioche il cylindro che consiste nella medesima base, che il cono, & vgualmente alto è triplo del cono, essendosi dimostrato ogni cono essere la terza parte del cylindro, che habbia la medesima base, & l'altezza vguale. adunque anchor il cylindro al cylindro hauerà proportione tripla di quella, che ha B D ad F H. i coni dunque & cylindri simili sono fra loro in proportione tripla di quella, c'hanno i diametri delle basi. il che bisognaua dimostrare,

10. di questo.

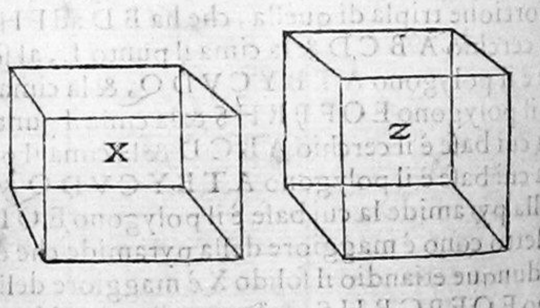
IL COMMANDINO.

La demostratione precedente conuiene solo ne i coni & cylindri retti, la quale noi vniuersalmente accommoderemo à tutti i coni & cylindri cosi retti come scaleni.

Tutti i coni & cylindri simili sono fra loro in proportione tripla di quella, c'hanno i diametri delle basi.



Siano i coni & cylindri simili, le basi de quali siano i cerchi A B C D E F G H. & gli assi K L M N: & per gli assi tirinsi i piani perpendicolari alle basi, che seghino le basi: & siano di quei piani & delle basi i communi segamēti BD F H, quali saranno diametri de cerchi. Dico il cono la cui base è il cerchio A B C D & la cima il pūto L al cono, la cui base è il cerchio E F G H & la cima il punto N, hauere proportione tripla di quella, c'ha B D ad F H. percioche se non sia cosi, il cono ABCDL à qualche solido minore del cono EFGHN hauerà proportione tripla di quella, c'ha B D ad F H, ò vero à maggiore. habbia prima ad vn solido minore, che sia X. & descriuasi nel cerchio EFGH il quadrato E F G H. sarà dunque il quadrato E F G H maggiore della metà del cerchio EFGH. drizzisi dal quadrato E F G H vna pyramide cosi alta, come il cono la quale sara maggiore, che la metà del cono, & seghinsi le circonferenze E F, F G G H H E. per mezo ne punti O P R S: & giunganfi E O O F F P P G G R R H H S S E. adunque ciascun triangolo E O F E P G G R H H S E è maggiore, che la metà della portione del cerchio E F G H, nel la quale consiste: poi drizzisi da ciascun triangolo E O F F P G G R H H S E vna pyramide, che habbia la medesima cima che il cono. onde ciascuna delle drizzate pyramidi è maggiore, che la metà della portione del cono, che è d'intorno ad essa. & percio segando per mezo l'altre circonferenze, & giungendo le linee rette, & da ciascun triangolo drizzando le pyramidi, che habbiano le cime medesime, che il cono: & facendo questo sempre lascieremo vltimamente alcune portioni di cono, che saranno minori dell'eccesso nel quale il cono E F G H N auanza il solido X. lascinsi & siano quelle che sono nelle E O O F F P P G G R R H H S S E. adunque la rimanente pyramide, la cui base è il polygono E O F P G R H S & la cima il punto N è maggiore, del solido X. descriuasi anchora nel cerchio A B C D il polygono A T B Y C V D Q simile & similmente posto al polygono E O F P G R H S. & da esso drizzisi vna py-

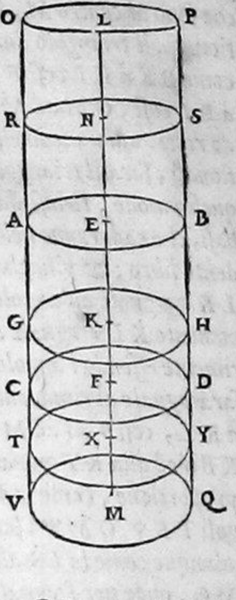


ramide, che habbia la cima medesima, che il cono, & de triangoli che contengono la pyramide,
la cui base è il polygono A T B Y C V D Q & la cima il punto L, vno sia L B T. & de trian-
goli che contengono la pyramide la cui base è il polygono E O F P G R H S & la cima il punto
N, sia vno N F O, & giungansi K T M O. perche dunque il cono A B C D è simile al cono E F
G H, sarà per la diffinitione de coni simili che noi habbiamo posta nel principio del libro ante-
cedente, come il diametro B D al diametro F H, cosi l'asse K L all'asse M N. & come B D ad
F H, cosi B K ad F M. adunque come B K ad F M, cosi K L ad M N. & permutandosi come
B K ad K L, cosi F M ad M N, & l'angolo B K L è vguale all'angolo F M N per la medesima
diffinitione de coni simili. essendo dunque intorno à gli vgual'angoli B K L F M N i lati propor
tionali, sara il triangolo B K L simile al triangolo F M N. & perche come B K à K T, cosi è 6. del sesto.
F M ad M O, & l'angolo B K T è vguale all'angolo F M O, conciosiacosa che qual parte è l'an
golo B K T de quattro retti, che sono al centro K, tal sia il triangolo F M O de quattro retti,
che sono al centro M, saranno altresi d'intorno à gli vgual'angoli B K T F M O, i lati propor
tionali. il triangolo dunque B K T è simile al triangolo F M O. la onde perche si è dimostrato
come B K à K L cosi F M ad M N, & B K è vguale à K T, & F M ad M O, sarà come T K
à K L cosi, O M ad M N. & sono ne i coni retti gli angoli T K L O M N vguali fra loro essen
do retti. adunque in essi perche d'intorno à gli vgual'angoli T K L O M N sono i lati propor
tionali, sarà il triangolo L K T simile al triangolo N M O. ma nelli coni scaleni si dimostrerà in
questo modo, tirinsi dalle loro cime L N le linee rette L Φ N Ψ perpendicolari alli piani delle
basi, che caderanno nelli commun segamēti de piani & delle basi BD FH, per la 38 dell'antece
dente libro: & giunghinsi T Φ O Ψ. essendo dunque per la diffininione delli coni simili l'angolo
L K Φ vguale all'angolo N M Ψ & amendue gli angoli L Φ K M Ψ N retti, sarà anchora il ri
manente K L Φ vguale al rimanente M N Ψ & il triangolo L Φ K simile al triangolo N Ψ M. pa
rimente essendo l'angolo B K T vguale all'angolo F M O & il rimanente delli due retti T K Φ
sarà vguale al rimanente O M Ψ. & è per la simiglianza de triangoli L Φ K N Ψ M, come Φ K
à K L, cosi Φ M ad M N. & per la simiglianza de triangoli B K L F M N come la L K alla
K B cioè alla K T vguale ad essa, cosi la N M alla M F, cioè alla M O. adunque per l'vgual
proportione, come la Φ K alla K T cosi la Ψ M alla M O. & essendo d'intorno à gli vguali an-
goli T K Φ O M Ψ i lati proportionali, sarà etiādio il triangolo K T Φ simile al triāgolo M O Ψ.
adunque come la L Φ alla Φ K, cosi la N Ψ alla Ψ M, & come la Φ K alla Φ T, cosi la Ψ M alla
M O. onde per l'vgual proportione come la L Φ alla Φ T, cosi la N Ψ alla Ψ O. & sono gli an
goli L Φ T N Ψ O fra loro vguali, essendo amendue retti per la diffinitione della linea retta,
che è perpendicolare al piano. essendo dunque d'intorno à gli vguali angoli L Φ T N Ψ O i lati
proportionali, segue anchora i triangoli L T Φ N O Ψ essere simili fra loro: & però come la
L T alla T Φ cosi la N O alla O Ψ. & come la T Φ alla T K, cosi la O Ψ alla O M. adunque
per l'vgual proportione come la L T alla T K cosi la N O alla O M: & si è dimostrato come la
L K alla K T, cosi essere la N M alla M O. onde conuertendosi come la T K alla K L, cosi la
O M alla M N. adunque per l'vgual proportione come la T L alla L K, cosi la O N alla N M.
& hauendo i triangoli L K T N M O i lati proportionali, sono equiangoli, & però sono simi- 6. del sesto.
li fra loro. la onde perche per la simiglianza de triangoli B K L F M N è come la L B alla BK,
cosi la N F alla F M, & per la simiglianza de triangoli B K T F M O, come la K B alla B T
cosi la M F alla F O, sarà per l'vgual proportione come la L B alla B T, cosi la NF alla F O:
& conuertendosi come la T B alla B L, cosi la O F alla F N. oltre à ciò perche per la simiglian
za de triangoli L K T N M O come la L T alla T K cosi è la N O alla O M. & per la simigli-
anza de triangoli K B T M F O, come la K T alla T B, cosi la M O alla O F, sarà per l'vgual
proportione, come la L T alla T B, cosi la N O alla O F. & si è dimostrato come la T B alla
B L, cosi la O F alla F N. adunque etiandio per l'vgual proportione come la T L alla L B, cosi
sarà la O N alla N F. onde i lati de triangoli L T B N O F sono proportionali; & per questo sa
ranno equiangoli & simili fra loro. la pyramide dunque la cui base è il triangolo B K T & la
cima il punto L è simile alla pyramide la cui base è il triangolo F M O & la cima il punto N.
percioche sono contenute da piani simili & di numero vguali, & le pyramidi simili sono in pro
portione tripla de lati homologhi. adūque la pyramide BKTL alla pyramide FMON ha propor
tione tripla di quella c'ha la B K alla F M. l'altre cose dimostreremo come nell'antecedente.

THEOREMA XIII. PROPOSITIONE XIII.

Se il cylindro ſia ſegato da vn piano parallelo alli piani oppoſti, ſarà come il cylindro al cylindro, coſi l'aſſe all'aſſe.

Il cylindro A D ſia ſegato dal piano G H parallelo alli piani oppoſti A B C D. il quale ſeghi l'aſſe E F nel punto K. Dico come il cylindro B G al cylindro G D, coſi eſſere l'aſſe E K all'aſſe K F. prolunghiſi l'aſſe E F dall'vna & l'altra parte ne punti L M. & all'aſſe E K propongan ſi vguali quante ſi uogliano E N NL. & all'aſſe F K vguali quante ſi vogliano F X XM: & per li punti L N X M tirinſi piani paralleli alli A B C D: & nelli piani per L N X M d'intorno alli centri LNXM, intendanſi i cerchi OP RS TY VQ vguali alli A B CD. & intendanſi i cylindri PR RB DT TQ. perche dunque gli aſsi LN NE EK ſono vguali fra loro, ſaranno i cylindri PR RB BG fra loro, come le baſi: & le baſi ſono vguali. adũque i cylindri PR RB BG ſono vguali, & eſſendo gli aſſi LN NE EK vguali fra loro, & altresì i cylindri PR RB BG fra lor vguali, & la moltitudine delli LN NE EK vguale alla moltitudine delli P R R B B G, quante volte è moltiplice l'aſſe K L dell'aſſe E K, tante volte ſarà moltiplice etiandio il cylindro PG del cylindro G B. & per la medeſima ragione quante volte è moltiplice l'aſſe M K dell'aſſe KF, tante volte è moltiplice anchor il cylindro Q G del cylindro G D, & ſe l'aſſe L K ſia vguale all'aſſe K M, ſarà il cylindro P G vguale al cylindro G Q, & ſe l'aſſe L K ſia maggiore dell'aſſe K M, anchor il cylindro P G ſarà maggiore del cylindro G Q. & ſe minore, minore. eſſendo dunque quattro grãdezze cioè gli aſsi E K K F, & i cylindri B G G D ſi ſono preſi vgualmente moltiplici dell'aſſe EK, & del cylindro B G cioè l'aſſe K L & il cilyndro P G: & dell'aſſe K F & del cylindro G D vgualmente moltiplici cioè l'aſſe K M, & il cylindro G Q, & ſi è dimoſtrato ſe l'aſſe L K auanza l'aſſe KM, il cylindro P G anchora auanzare il cylindro G Q: & ſe vguale, vguale, & ſe minore, minore. è dunque l'aſſe E K all'aſſe K F, come il cylindro B G al cylindro G D. la onde ſe il cylindro ſia ſegato da vn piano parallelo alli piani oppoſti, ſarà come il cylindro al cylindro, coſi l'aſſe all'aſſe. il che biſognaua dimoſtrare.

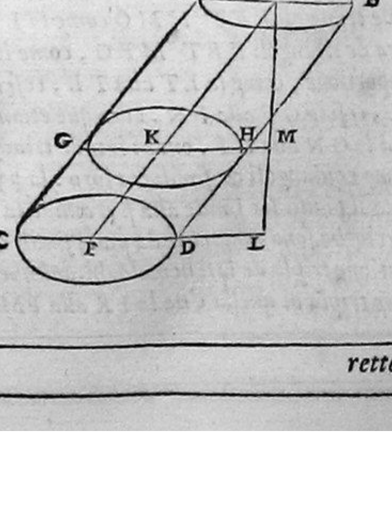


IL COMMANDINO.

Il medeſimo auuiene nel cylindro ſcaleno, il che nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà.

Dalle quali coſe è manifeſto, che ſe qual ſi voglia cylindro ſia ſegato da vn piano parallelo alla baſe, come il cylindro al cylindro, coſi ſarà l'altezza del cylindro all'altezza del cylindro.

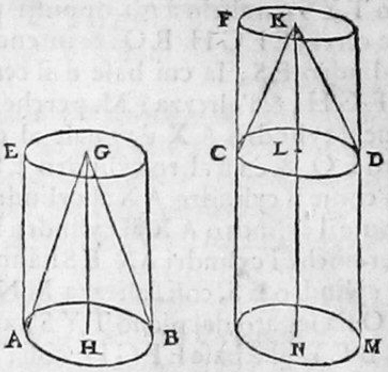
Nelli cylindri retti quello è chiaro quando l'altezze loro ſiano determinate da gli aſſi. ma nelli ſcaleni apparerà facilmẽte tirata vna linea retta EL dal pũto E perpẽdicolare al piano della baſe, la quale ſeghi il piano tirato per le G H nel punto M. percioche ſe eſſendo due linee



rette E F E L segate dalli piani paralleli, saranno segate nelle proportioni medesime. onde come la E K alla K F, così sarà la E M alla M L: & però come il cylindro BG al cylindro G D, così l'altezza L M del cylindro B G all'altezza M L del cylindro G D. il che si douea dimostrare.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIONE XIIII.

I coni & cylindri, c'hanno le basi vguali sono fra loro come l'altezze.



Siano nelle vguali basi A B C D li cylindri E B F D. Dico come il cylindro E B al cylindro E D, così essere l'asse G H all'asse K L: prolunghisi l'asse K L al punto N; & pongasi la L N vguale all'asse G H, & d'intorno l'asse L N intendasi il cylindro C M. perche dunque li cylindri E B C M hanno la medesima altezza sono fra loro come le basi; & le basi sono vguali. adunque anchora li cylindri E B C M saranno vguali fra loro. & perche il cylindro F M è segato dal piano C D parallelo à gli opposti piani, sarà come il cylindro C M al cylindro F D, così l'asse L N all'asse K L. & il cylindro C M è vguale al cylindro E B, & l'asse L N all'asse G H. è dunque come il cylindro E B al cylindro F D, così l'asse G H all'asse K L, & come il cylindro E B al cylindro F D, così il cono A B G al cono C D K, percioche i cylindri sono tripli de coni. adunque etiandio come l'asse GH all'asse K L, così il cono ABG al cono CDK, & il cylindro E B al cylindro F D. onde i coni & cylindri, c'hanno le basi vguali sono fra loro, come l'altezze. il che bisognaua dimostrare.

IL COMMANDINO.

Dico come il cylindro E B al cylindro F D, così essere l'asse G H l'asse K L] *cioè così essere l'altezza G H all'altezza K L perche ne coni retti de quali tratta Euclide l'altezza è l'asse istesso ò vero è determinata dall'asse, ma ne i coni scaleni non è così, nientedimeno si dimostra i coni & cylindri constituiti nelle basi vguali essere fra loro come gli assi; & però come l'altezze dalle cose che noi habbiamo detto poco innanzi.*

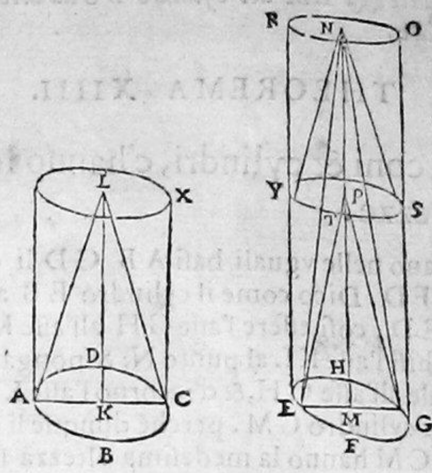
THEOREMA XV. PROPOSITIONE XV.

De coni & cylindri vguali, le basi rispondono contrariamente all'altezze, & quei coni & cylindri de quali le basi rispondono contrariamente all'altezze sono fra loro vguali.

Siano i coni & cylindri vguali, c'hanno per basi i cerchi A B C D E F G H, & diametri A C E G, & gli assi K L M N, che sono l'altezze de coni ò cylindri: & compiscansi i cylindri A X E O. Dico le basi de cylindri A X E O rispondere all'altezze contrariamente, cioè come la base ABCD alla base E F G H, così essere l'altezza M N all'altezza K L. percioche l'altezza K L ò vero è vguale all'altezza

M N, ò disugale. sia prima vguale, & è il cylindro A X uguale al cylindro E O. ma quei coni & cylindri c'hanno la medesima altezza fra loro sono come le basi. è dunque la base A B C D vguale alla base E F G H. & però si rispondono contrariamente, & come la base A B C D alla base E F G H, cosi è l'altezza M N all'altezza K L. Ma l'altezza K L non sia uguale all'altezza M N, ma sia maggiore la M N, & traggasi dalla M N la P M vguale all'altezza L K, & per P sia segato il cylindro E O dal piano T Y S parallelo à gli opposti piani de cerchi E F G H R O. & intendasi il cylindro E S, la cui base è il cerchio E F G H, & l'altezza P M. perche dunque il cylindro A X è vguale al cylindro E O, & è vn'altro cylindro E S; sarà come il cylindro A X al cylindro E S, cosi il cylindro E O al cylindro E S. ma come il cylindro A X al cylindro E S, cosi è la base A B C D alla base E F G H. percioche i cylindri A X E S hanno la medesima altezza, & come il cylindro E O al cylindro E S, cosi l'altezza M N all'altezza M P, conciosiacosa che il cylindro E O sia segato dal piano T Y S parallelo alli piani opposti. è dunque come la base A B C D alla base E F G H, cosi l'altezza M N all'altezza M P, & l'altezza M P è vguale all'altezza K L. onde come la base A B C D alla base E F G H, cosi è l'altezza M N all'altezza K L. le basi dunque de cylindri vguali A X E O rispondono contramente all'altezze. Ma le basi de cylindri A X E O rispondano contrariamente all'altezze, & sia come la base A B C D alla base E F G H, cosi l'altezza M N all'altezza K L. Dico il cylindro A X essere vguale al cylindro E O. hauendo fatto le medesime cose perche come la base A B C D alla base E F G H, cosi è l'altezza M N al l'altezza K L, & l'altezza K L è vguale all'altezza M P, sarà come la base A B C D alla base E F G H, cosi l'altezza M N all'altezza M P. ma come la base A B C D alla base E F G H, cosi il cylindro A X al cylindro E S, percioche hanno l'altezza medesima. & come l'altezza M N all'altezza M P, cosi il cylindro E O al cylindro E S. è dunque come il cylindro A X al cylindro E S, cosi il cylindro E O al cylindro E S. onde il cylindro A X è vguale al cylindro E O. similmente anchora ne i coni. il che bisognaua dimostrare.

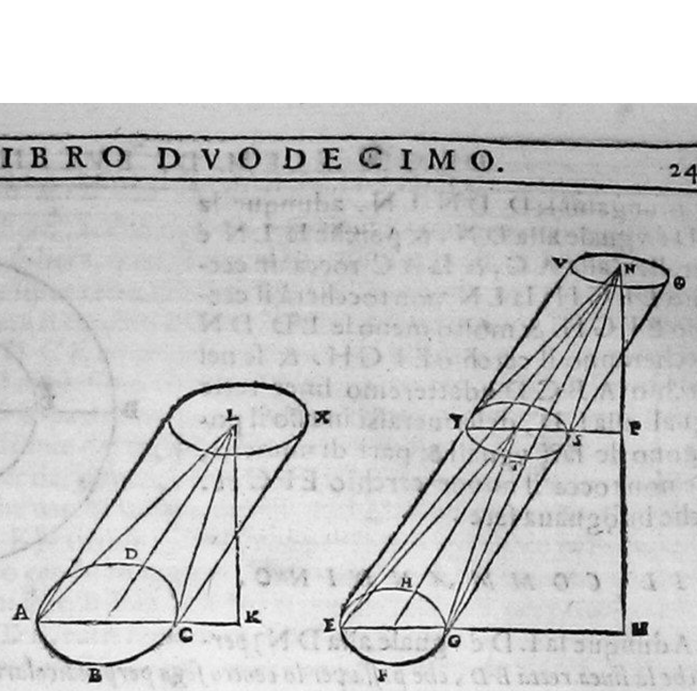
11. di questo · 11. di questo: 13. di questo.



IL COMMANDINO.

Questo ne i coni & cylindri retti solamente ha dimostrato Euclide, ma in tutti si dimostrerà in questo modo.

Siano gli vguali coni & cylindri ò retti ò scaleni, le basi de quali siano i cerchi A B C D E F G H, & l'altezze L K N M; & compiscansi i cylindri A X E O. Dico le basi de cylindri A X E O rispondere contrariamente all'altezze, cioè come la base A E C D alla base E F G H, cosi essere l'altezza N M all'altezza L K. percioche l'altezza L K N M ò sono vguali, ò disuguali, se vguali essendo i cylindri vguali, anhora le basi saranno vguali fra loro, conciosiacosa che i cylindri & coni che hanno la medesima altezza siano fra loro, come le basi. la onde le basi rispondono contrariamente all'altezze. ma se l'altezze non siano vguali, sia l'altezza N M maggiore, dalla quale si tragga la T M, vguale all'altezza L K: & per T tirisi il piano T Y S, che seghi il cylindro, & sia parallelo alli piani opposti: & intendasi il cylindro E S,



la cui base è il cerchio E F G H, & l'altezza T M. onde perche il cylindro A X è vguale al cylindro E O, & è vn' altro cylindro E S: sarà come il cylindro A X al cylindro E S, cosi il cylindro E O al cylindro E S. ma come il cylindro A X al cylindro E S, cosi è la base A B C D alla base E F G H, hauendo la medesima altezza. & come il cylindro E O al cylindro E S, cosi l'altezza N M all'altezza M T. percioche il cylindro E O è segato dal piano T Y S parallelo alli piani opposti. onde come il cylindro R S al cylindro S E, cosi l'altezza N T all'altezza T M. & componendosi come il cylindro E O al cylindro E S, cosi l'altezze N M all'altezza M T. come dunque la base A B C D alla base E F G H, cosi l'altezza N M all'altezza M T. & l'altezza M T è uguale all'altezza K L. adunque come la base A B C D alla base E F G H, cosi è l'altezza N M all'altezza L K. 11. di questo: 13. d iquesto.

Ma le basi de cylindri A X E O rispondano all'altezze contrariamente, & sia come la base A B C D alla base E F G H, cosi l'altezza N M all'altezza L K. Dico il cylindro A X esse re vguale al cylindro E O. Hauendo fatte le medesime cose perche come la base A B C D alla base E F G H, cosi l'altezza N M all'altezza L K, & l'altezza L K è vguale all'altezza T M, sarà come la base A B C D alla base E F G H, cosi l'altezza N M all'altezza M T. ma come la base A B C D alla base E F G H, cosi il cylindro A X al cylindro E S, hauendo l'altezza medesima. & come l'altezza N M all'altezza M T, cosi il cylindro E O al cylindro E S. come dunque il cylindro A X al cylindro E S, cosi il cylindro E O al cylindro E S. onde il cylindro A X è vguale al cylindro E O. similmente anchora ne i coni. le basi dunque de coni & cylindri vguali rispondono all'altezze contrariamente: & quei coni & cylindri, le basi de quali rispondono contrariamente all'altezze, sono vguali fra loro. il che bisognaua dimostrare. 11. di questo. 9. del quinto.

Ma anchor quello è vero, che noi habbiamo dimostrato ne i commentarij del libro d'Archimede de conoidi & spheroidi alla undecima propositione.

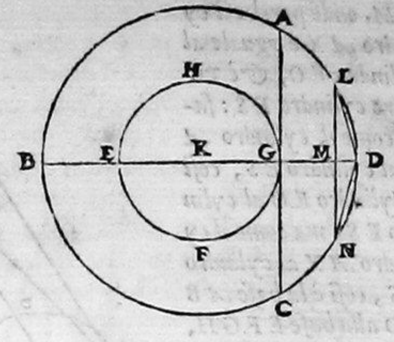
Tutti i cylindri & coni hanno fra loro la proportione composta dalla proportione delle basi, & dalla proportione dell'altezze.

PROBLEMA I. PROPOSITIONE XVI.

Essendo due cerchi d'intorno al medesimo centro, descriuere nel maggiore vn polygono de lati vguali & pari di numero, che non tocchi il minor cerchio.

Siano due cerchi dati A B C D E F G H intorno al medesimo centro K. bisogna nel maggior cerchio A B C D descriuere vn polygono de lati vguali & pari di numero, che non tocchi il minor cerchio E F G H. tirisi per lo centro K la linea retta B D, & dal punto G tirisi la A G perpendicolare alla B D, & prolunghisi nel punto C. adunque la A C tocca il cerchio E F G H. la onde segando la circonferenza B A D per mezo, & la sua metà anchora per mezo, & facendo questo sempre, alla fine lascieremo vna circonferenza minore della A B. lascisi, & sia L D, & dal punto L tirisi la L M perpendicolare alla B D: & prolunghisi nel punto N: A

* & giunganſi L D D N L N. adunque la L D è vguale alla D N. & perche la L N è parallela alla A C, & la A C tocca il cerchio E F G H, la L N non toccherà il cerchio E F G H. & molto meno le L D D N toccheranno il cerchio E F G H. & ſe nel cerchio A B C D adatteremo linee rette vguali alla L D, deſcriueraſsi in eſſo il polygono de lati vguali & pari di numero, che non tocca il minor cerchio E F G H. il che biſognaua fare.



IL COMMANDINO.

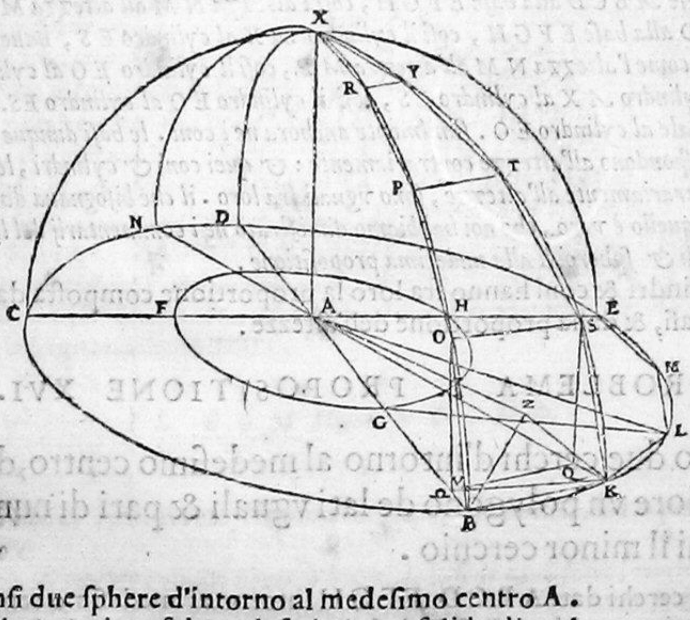
* Adunque la L D è vguale alla D N] *percioche la linea retta B D, che paſſa per lo centro ſega perpendicolarmente la retta L N non tirata per lo centro. onde la ſegherà per mezo: & la L M ſarà vguale alla M N. perche dunque le due L M M D ſono vguali alle due N M M D, & contengono gli vgual'angoli, cioè retti, ſarà la baſe L D vguale alla baſe L N.*

3. del terzo.

4. del primo.

PROBLEMA II. PROPOSITIONE XVII.

Eſſendo due ſphere d'intorno al medeſimo centro, deſcriuere nella maggiore vn ſolido polyedro, cioè di molti lati, che non tocchi la ſuperficie della minor ſphera.



Intendanſi due ſphere d'intorno al medeſimo centro A. biſogna nella maggiore ſphera deſcriuere vn ſolido di molti lati, che non tocchi la ſuperficie della minor ſphera. ſeghinſi le ſphere da qualche piano, tirato per lo centro. i ſegamenti ſaranno cerchi, percioche ſtando fermo il diametro del cerchio, & girato il mezo cerchio d'intorno ſi è fatta la ſphera. adunque intendendo il mezo cerchio in qual ſi voglia poſitione il piano, che paſſa per eſſo farà vn cerchio

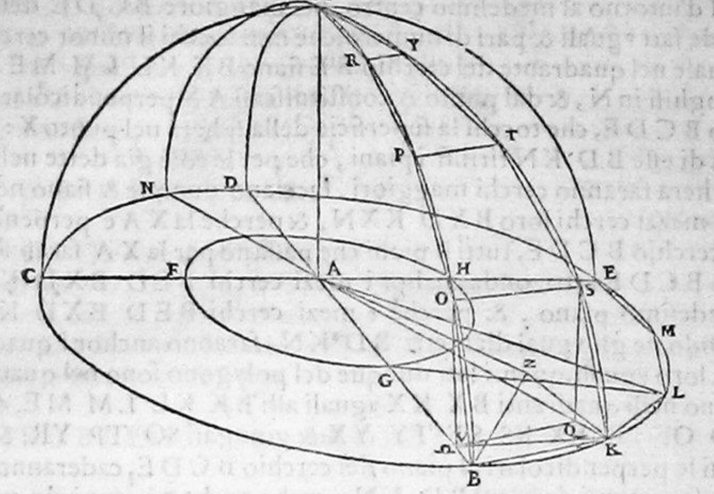
A

nella

nella superficie della sphera, & è manifesto essere cerchio maggiore, conciosiaco sa, che il diametro della sphera, quale è diametro del cerchio & del mezo cerchio sia maggiore de tutte le linee rette, che si tirano nel cerchio, & nella sphera. sia dũque nella maggior sphera il cerchio BCDE, nella minore il cerchio FGH. & tirinsi i due diametri d'essi B D C E ad angoli retti fra loro. & essendo i due cerchi B C DE F G H d'intorno al medesimo centro, nel maggiore B C D E descriuasi un polygono de lati vguali & pari di numero, che non tocchi il minor cerchio FGH, i lati del quale nel quadrante del cerchio B E siano BK KL LM ME. & giunta K A prolunghisi in N, & dal punto A constituiscasi A X perpendicolare al piano del cerchio B C D E, che tocchi la superficie della sphera nel punto X: & per A X & ciascuna di esse B D KN tirinsi i piani, che per le cose già dette nella superficie della sphera faranno cerchi maggiori. facciano dunque & siano ne diametri B D K N i mezzi cerchi loro B X D K X N. & perche la X A è perpendicolare al piano del cerchio B C D E, tutti li piani che passano per la X A saranno al piano del cerchio B C D E retti. onde anchor i mezi cerchi B E D B X D K X N sono retti al medesimo piano. & perche i mezi cerchi B E D B X D K X N sono vguali essendo ne gli vgual diametri B D K N, saranno anchor i quadranti B E BX KX fra loro vguali. quanti lati dunque del polygono sono nel quadrante BE, tanti saranno nelli quadranti B X K X vguali alli B K KL LM ME. descriuansi & siano BO OP PR RX KS ST TY YX: & giungasi SO TP YR: & dalli punti O S tirinsi le perpendicolari al piano del cerchio B C D E, caderanno queste ne i communi segamenti de piani B D KN, perche anchor i piani de mezi cerchi B X D K X N, sono retti al piano del cerchio B C D E. caggiano dunque, & siano OV SQ: & giungasi V Q. essendo dunque nelli vgual mezi cerchi B X D K X N prese le circonferenze vguali BO KS, & tirate le perpendicolari OV SQ, sarà la O V vguale alla S Q, & la B V vguale alla K Q. & è tutta la B A vguale à tutta la K A. adunque etiandio la rimanente V A è vguale alla rimanente Q A. come dunque la B V alla V A, così la K Q alla Q A. & però la V Q è parallela alla B K. & essendo ciascuna di esse O V S Q perpendicolare al piano del cerchio B C D E, sarà la O V parallela S Q. & si è dimostrato vguale ad essa. adunque le Q V S O sono vguali, & parallele. & perche la Q V è parallela alla S O, & parallela alla K B, sarà la S O parallela anchor alla K B; & B O K S le congiungono. onde etiandio il quadrilatero K B O S è in vn piano, perche se due linee rette siano parallele, & in ciascuna di esse si piglino quai si voglian punti, la linea retta che congiunge detti punti è nel medesimo piano, nel quale sono le parallele. & per la medesima ragione amendue i quadrilateri S O P T T P R Y sono in vn piano, & è in vn piano il triangolo Y R X. se dunque dalli punti O S P T R Y intendiamo tirate le linee rette ad A, si constituirà vna figura solida di molti lati fra le circonferenze B X K X, composta de pyramidi, le cui basi sono i quadrilateri K B O S S O P T T P R Y, & il triangolo YRX, & la cima il punto A. & se in ciascun lato KL LM ME, si come il K B facciamo le medesime cose, & così negli altri tre quadranti, & nell'altra meza sphera, si constituirà vna figura di molti lati descritta nella sphera, & composta de pyramidi, le cui basi sono i detti quadrilateri, & il triangolo Y R X, & gli altri del medesimo ordine, & la cima il punto A. Dico la detta figura di molti lati non toccare la superficie della minor sphera, nella quale è il cerchio F G H. tirisi dal punto A al piano del quadrilatero KB S O la perpendicolare AZ, che lo tocchi nel punto Z: & giunganfi B Z Z K. la onde perche la A Z è perpendicolare al piano del quadrilatero K B S O, sarà anchor perpendicolare à tutte le linee rette, che la toccano & sono nel medesimo piano. adunque la A Z è perpendicolare à ciascuna di esse BZ ZK. & perche la A B è vguale alla A K sarà il quadrato della A B vguale al quadrato della A K. & sono i quadrati delle A Z Z B vguali al quadrato della AB, conciosiacosa che l'angolo Z sia retto. & i quadrati delle A Z Z K sono vguali al quadrato della A K. onde i qua-

16. del terzo.
per l'antecedente.
18. dell'undec.
38. dell'undec.
B
2. del sesto.
6. dell'undec.
33. del primo;
9. dell'undec.
C
2. dell'undec
3. diff dell'undecimo.
49. del primo.

drati delle A Z Z B ſono vguali alli quadrati delle A Z Z K. traggaſi il quadrato
commune della A Z. il rimanente dunque della B Z è vguale al rimanente della
Z K. & però la linea retta B Z è vguale alla retta Z K. ſimilmente dimſtreremo



quelle, che ſi tirano dal punto Z ad O S eſſere vguali all'vna
& l'altra di eſſe B Z Z K. il cerchio dunque deſcritto dal cen
tro Z cō l'interuallo di vna di eſſe ZB ZK paſſerà anche per li
punti O S: & ſarà nel cerchio il quadrilarero KBOS. & per-
D che la K B è maggiore della QV, & la Q V vguale alla SO, ſa
rà anchor la K B maggiore della S O. ma la K B è vguale al-
l'vna & l'altra di eſſe KS BO. l'vna & l'altra dūque KS BO è
maggiore della S O. onde eſſendo nel cerchio il quadrilate

E ro K B O S, & eſſendo vguali le K B B O K S, & la O S minore, & B Z ſemidiame
F tro del cerchio; ſarà il quadrato della K B maggiore che doppio del quadrato di
G B Z. tiriſi dal punto K la K Ω perpendicolare alla B V. & perche la B D è minore,
che doppia della D Ω; & è come la B D alla D Ω, coſi il rettangolo contenuto dal
le D B B Ω al rettangolo contenuto dalle D Ω Ω B, cioe deſcritto il quadrato
di B Ω & compito il parallelogrammo in Ω D: ſarà anchor il rettangolo contenu
H to dalle D B B Ω minore che doppio di quello, che è contenuto dalle D Ω Ω B.
& giunta K D quello, che è contenuto dalle D B BΩ è vguale al quadrato di K B:
& quello, che è contenuto dalle D Ω Ω B è vguale al quadrato di K Ω. il quadrato
dunque di K B è minore, che doppio del quadrato di K Ω. ma il quadrato di K B è
maggiore, che doppio del quadrato di BZ. adunque il quadrato di K Ω maggiore
chel quadrato di BZ. & perche la B A è vguale alla AK, ſarà il quadrato di B A vgua
le al quadrato di A K. & ſono al quadrato di B A vguali i quadrati di B Z Z A, &
al quadrato di A K vguali i quadrati di K Ω Ω A. adunque i quadrati di B Z ZA
ſono vguali alli quadrati di K Ω Ω A: de quali il quadrato di KΩ è maggiore chel
quadrato di B Z. adunque il rimanente di Ω A è minore chel quadrato di Z A, &
però la linea retta A Z e maggiore della retta A Ω. e dunque molto maggiore la
K A Z, che la A G. & e la A Z in vna baſe del polyedro, & la AG nella ſuperficie della
ſphera minore. onde il polyedro non tocca la ſuperficie della minor ſphera.

Si può dimoſtrare anchora in altro modo, & piu ſpeditamente la A Z eſſere
maggiore della A G. tiriſi dal punto G la G L perpendicolare alla A G: & giun-
ganſi A L. la onde ſegando per mezo la circonferenza E B, & la ſua metà ſimil-

mente

mente per mezo, & questo facendo sempre, alla fine lascieremo vna circonferenza minore, che la circonferenza del cerchio B C D, che è sottoposta ad vna vguale à G L. lascisi & sia la circonferenza K B. adunque la linea retta K B è minore del la retta G L. & perche il quadrilatero K B S O è nel cerchio, & sono vguali O B B K K S, & O S minore; sarà l'angolo B Z K ottuso; & però la B K è maggiore del la B Z. ma la G L è maggiore della B K. molto maggiore dunque è la G L, del a BZ, & il quadrato della GL è maggiore del quadrato della BZ. & essendo la A L vguale alla A B, sarà il quadrato della A L vguale al quadrato della A B. ma al quadrato della A L sono vguali i quadrati delle A G G L, & al quadrato della A B sono uguali i quadrati delle B Z Z A. adunque i quadrati delle A G GL sono vguali alli quadrati delle BZ ZA: de quali il quadrato della BZ è minore chel quadrato della GL. onde il rimanente quadrato della ZA è maggiore chel quadrato della A G: & però la linea retta Z A è maggiore della retta A G. adunque essendo due sphere d'intorno al medesimo centro, si è descritto nella maggiore un solido di molti lati, che non tocca la superficie della minor sphera. il che bisognaua fare.

L

M

N

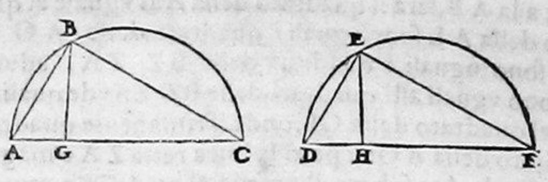
COROLLARIO.

Et se anch'in vn'altra sphera si descriua vn solido polyedro simile al solido polyedro descritto nella sphera BCDE, hauerà il solido polyedro nella sphera BCDE al solido polyedro nell'altra sphera tripla proportione di quella, c'ha il diametro della sphera BCDE al diametro dell'altra sphera. percioche diuisi che siano i solidi in pyramidi vguali di numero, & del medesimo ordine, sarãno le pyramidi simili. ma le pyramidi simili sono fra loro in proportione tripla di quella, c'hãno i lati homologhi. adunque la pyramide la cui base è il quadrilatero K B O S, & la cima il punto A alla pyramide, che è nell'altra sphera del medesimo ordine hà proportion tripla di quella, che hà il lato homologo al lato hogo, cioè A B semidiametro della sphera d'intorno al centro A al semidiametro dell'altra sphera. Et somigliantemente ciascuna pyramide di quelle, che sono nella sphera d'intorno al centro A à ciascuna pyramide del medesimo ordine, che sono nell'altra sphera, hauerà proportion tripla di quella, c'ha A B al semidiametro dell'altra sphera: & come è vno de gli antecedenti ad vno de conseguenti, così saranno tutti gli antecedenti à tutti i conseguenti. onde tutto il solido polyedro, che è nella sphera d'intorno al centro A à tutto il solido polyedro, che è nell'altra sphera, hauerà tripla proportione di quella c'hà AB al semidiametro dell'altra sphera, cioè il diametro B D al diametro dell'altra sphera.

IL COMMANDINO.

A I segamenti saranno cerchi] *questo da Theodosio è stato dimostrato vniuersalmente nella prima propositione delli spherici, cioe in qualunque modo sia segata la sphera dal piano, sempre i segamenti farsi cerchi.*

B Sara la O V vguale alla S Q, & la B V vguale alla K Q] *Siano due mezi cerchi vguali ABC DEF: & piglinsi circonferenze vguali A B D E, & dalli punti B E tirinsi le perpendicolari B G E H. Dico la B G essere vguale alla E H, & la A G alla D H. percioche essendo la circonferenza A B vguale alla circonferenza D E, che sono de cerchi vguali, saranno le linee rette A B D E vguali fra loro. & per la medesima ragione saranno vguali le B C E F. adunque come la A B alla B C,*

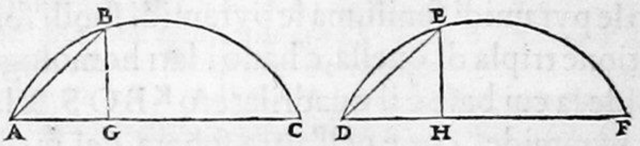


29. del terzo. *cosi la D E alla E F. & è l'angolo A B C retto nel mezo cerchio vguale al retto D E F. essendo dunque d'intorno à gli vgual'angoli i lati proportionali, sarà il triangolo A B C simile al triangolo D E F. ma il triangolo A B G è simile al triangolo A B C. adunque è simile anchor à D E F: & il triangolo D E H è simile al triangolo D E F. il triangolo dunque A B G è simile al triangolo D E H. onde come la A B alla B G, cosi la D E alla E H, & permutandosi come la A B alla D E, cosi la B G alla E H; & è la A B vguale alla D E. adunque la B G è vguale alla E H. & nel medesimo modo si dimostrerà la A G vguale alla D H. il che bisognaua dimostrare.*

6. del sesto.
8. del sesto.
4. del sesto.
14. del quinto.

Ma quello anchora si dimostra vniuersalmente in tutte le portioni nel seguente lemma.

Siano vguali portioni de cerchi vguali ABC DEF: & piglinsi le circonferenze vguali A B DE: & dalli pũti B E tirinsi le B G E H, perpendicolari alle A C D F. Dico la B G essere vguale alla E H, & la A G alla D H.



27. del terzo. *Giunganſi A B D E. & perche sono vguali le circonferenze A B D E, saranno anchor le rimanenti B C E F vguali fra loro. adunque etiandio gli angoli, che si fermano in esse sono vguali. & però l'angolo B A C è vguale all'angolo E D F. ma sono retti anchor gli angoli GH. la onde sono due triangoli A B G D E H, che hanno due angoli vguali à due angoli, l'vno all'altro, & vn lato B A vguale ad vn lato D E, che è sottoposto ad vno degli angoli vguali. tutti dunque sono vguali à tutti, & la A G è vguale alla DH, & la B G alla EH. il che bisognaua dimostrare.*

C Perche se due linee rette siano parallele & in ciascuna di esse si piglino quai si voglian punti, la linea retta che congiunge detti punti è nel medesimo piano, nel quale sono le parallele] *per la 7 dell'vndecimo.*

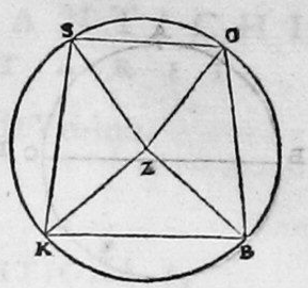
D Et perche la K B è maggiore della Q V] *percioche il triangolo A Q V è simile al triangolo A K B, essendo l'angolo A commune all'vno & l'altro, & l'angolo A Q V vguale al l'angolo A K B & l'angolo A V Q all'angolo A B K. come dunque la A K alla K B, cosi la A Q alla Q V: & permutandosi come la A K alla A Q, cosi la K B alla Q V. ma la A K è maggiore della A Q. adunque la K B sarà maggiore della Q V.*

29. del primo.
4. del sesto.

E Sarà il quadrato della K B maggiore, che doppio del quadrato di B Z] *perche essendo vguali le linee rette K B B O K S, & minore di esse la O S, saranno le circonferenze*

che

che tagliano le K B B O K S vguali fra loro, & maggiori della rimanente circonferenza O S. onde anchor gli angoli K Z S K Z B B Z O sono vguali: & maggiori dell'angolo O Z S, & sono quattro angoli vguali à quattro retti. adunque l'angolo O Z S è minore del retto, cioè acuto; & ciascuno degli alti tre ottuso: & però il quadrato che si fa dalla K B è maggiore di due quadrati delle KZ ZB, cioè maggiore che'l doppio del quadrato della BZ. percioche le KZ ZB sono vguali fra loro, come si è dimostrato, ma anchor questo si dimostra più chiaramente nel seguente lemma.

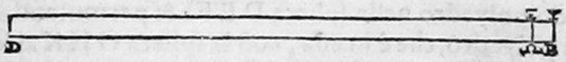


Sia nel cerchio il quadrilatero K B O S, del quale i tre lati SK KB B O siano fra loro vguali. & sia la B O maggiore della O S: & preso il centro del cerchio Z, giungasi B Z. Dico il quadrato della K B essere maggiore che doppio del quadrato della B Z.

Giunganşi OZ SZ KZ. perche dunque la BZ è vguale alla ZS, & la ZO commune, saranno le due BZ ZO vguali alle due SZ ZO l'vn'all'altra, & la base BO maggiore della base OS. onde l'angolo BZO è maggiore dell'angolo OZS. & perche l'angolo OZB è vguale à ciascuno di essi B Z K KZS, essendo nelle vguali circonferenze OB BK KS, conciosiacosa, che le linee rette siano vguali, sarà etiandio l'vno & l'altro di essi B Z K K Z S, maggiore dell'angolo O Z S. ma li quattro angoli O Z S S Z K K Z B B Z O sono vguali à quattro retti, percioche stanno d'intorno ad vn punto Z. ciascuno angolo dunque O Z B B Z K K Z S è ottuso, & però il triangolo B Z O è ottusiangolo. ma ne triangoli ottusiangoli il quadrato che si fa dal lato sottoposto all'angolo ottuso è maggiore delli quadrati, che si fanno da i lati, che l'angolo ottuso contengono. adunque il quadrato della BK è maggiore delli quadrati delle K Z ZB. ma li quadrati delle KZ Z B sono doppij del quadrato della B Z. percioche la K Z è vguale alla Z B. il quadrato dunque della K B è maggiore, che doppio del quadrato della B Z. il che bisognaua dimostrare. Cor. 15. del 1.

Et perche la B D è minore che doppia della D Ω] *percioche la perpendicolare dal punto K tirata alla B D cade fra il punto G & B non toccando il cerchio F G H, come appare per l'antecedente. & perche la B D è doppia della D A, sarà minore che doppia della D Ω.* F

Et è come la B D alla D Ω, così il rettangolo contenuto dalle D B B Ω al rettangolo contenuto dalle D Ω Ω B] *descriuasi dalla Ω B il quadrato, che sia Ω B Ψ Ξ, & compiscasi il parallelogrammo D Ξ. sarà come la B D alla D Ω, così il rettangolo D Ψ al rettangolo D Ξ, per la prima del sesto, cioè così il rettangolo che è contenuto dalle D B B Ω al rettangolo contenuto dalle D Ω Ω B.* G



Et giunta K D quello che è contenuto dalle D B B Ω è vguale al quadrato di K B] *percioche l'angolo nel mezo cerchio D K B è retto: & da esso alla base si tira la K Ω perpendicolare. onde per lo corollario della ottaua del sesto libro, la K B è proportionale di mezo fra le D B B Ω, & la K Ω proportionale fra le D Ω Ω B: & però il quadrato della K B è vguale al rettangolo contenuto dalle D B B Ω. & il quadrato della K Ω è vguale à quello che è contenuto dalle D Ω Ω B.* H

E dunque molto maggiore la AZ che la A G] *percioche essendo il polygono BKLME descritto nel maggior cerchio B C D E, che non tocca il cerchio minore F G H, la perpendicolare tirata dal punto K alla B D, cioè la K Ω non toccherà la circonferenza di esso, per le cose che si sono dimostrate nell'antecedente. onde la A Ω sarà maggiore della A G. & però la AZ è molto maggiore di quella che dal centro della minor sphera è tirata alla superficie di essa.* K

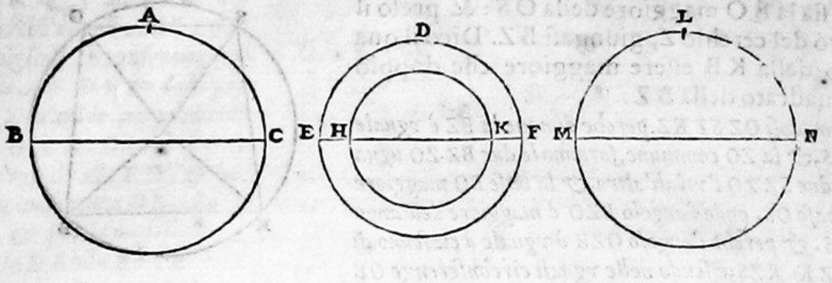
Et perche il quadrilatero B K S O è nel cerchio] *intendasi il quadrilatero BKSO descritto, come nell'antecedente.* L

Et

M Et sono vguali le O B B K K S & O S minore] *queste cose poco fa si sono dimostrate.*
N Et essendo la A L vguale alla A B] *percioche sono dal centro alla circonferenza del maggior cerchio B C D E.*

THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XVIII.

Le sphere fra loro sono in tripla proportione di quella c'hanno i suoi diametri.



Intendansi le sphere A B C D E F, i diametri delle quali siano B C E F. Dico la sphera A B C alla sphera D E F hauere proportione tripla di quella c'ha la B C alla E F. & se non è cosi, la sphera A B C ad vna sphera minore di essa D E F ò à maggiore hauerà proportion tripla di quella, c'ha la B C alla E F. habbia prima à minore cioè à G H K: & intēdasi la sphera D E F d'intorno al medesimo centro, che la sphera G H K: & descriuasi nella maggior sphera D E F vn solido polyedro, che non tocchi la minor sphera G H K nella superficie: & nella sphera A B C descriuasi vn solido polyedro simile à quello, che è descritto nella sphera D E F. adunque il solido polyedro, che è nella sphera A B C al solido polyedro che è nella D E F hauerà tripla proportione di quella, c'ha la B C alla E F. & la sphera A B C alla sphera G H K ha tripla proportione di quella, c'ha la B C alla E F. come dunque la sphera A B C alla sphera G H K, cosi il solido polyedro nella sphera A B C al solido polyedro nella sphera D E F: & permutandosi come la sphera A B C al solido polyedro, che è in essa, cosi la sphera G H K al solido polyedro, che è nella sphera D E F. ma la sphera A B C è maggiore del solido polyedro, che è in essa. adunque la sphera G H K è maggiore del solido polyedro, che è nella sphera D E F. ma è anchor minore, percioche da esso è compresa. il che non è possibile. la sphera dunque A B C ad vna sphera minore della D E F non ha proportione tripla di quella, c'ha la B C alla E F. similmente dimostreremo ne anche la sphera D E F ad vna sphera minore della A B C hauere tripla proportione di quella, c'ha la E F alla B C. Dico oltre à questo la sphera A B C non hauere ad vna sphera maggiore della D E F tripla proportione di quella, c'ha la B C alla E F. percioche habbia s'egli è possibile ad vna maggiore che sia L M N. cōuertendosi dunque la sphera L M N alla sphera A B C ha proportione tripla di quella, che ha il diametro E F al diametro B C. & come la sphera L M N alla sphera A B C, cosi la sphera D E F ad vna sphera minore della A B C, come si è dimostrato di sopra, perche la sphera L M N è maggiore della D E F. onde anchor la sphera D E F ad vna sphera minore della A B C ha proportione tripla di quella, c'ha la E F alla B C, che si è dimostrato essere impossibile. adunque la sphera A B C alla sphera maggiore della D E F non ha proportione tripla di quella, c'ha la B C alla E F. & si è dimostrato ne anche alla minore. adunque la sphera A B C alla sphera D E F hauerà tripla proportione di quella c'ha la B C alla E F. il che bisognaua dimostrare.

per l'antecedente.

per il cor. dell'antecedente.

IL FINE DEL DVODECIMO LIBRO.