DE GLI ELEMENTI DI EVCLIDE

LIBRO DECIMOTERZO ET DE SOLIDI TERZO.

CON LI SCHOLII ANTICHI, ET COMMENTARII

Di Federico Commandino da Vrbino.

THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

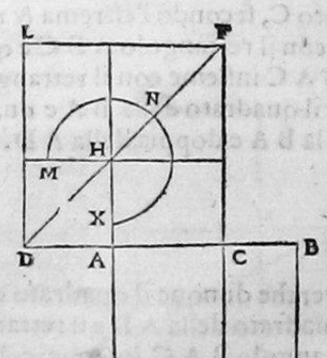
SE vna linea retta sia segata secondo l'estrema & meza proportione, la portion maggiore pigliando la metà di tutta può il quintuplo del quadrato, che si fa dalla metà.

Sia la linea retta A B, segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto C: & sia A C la portion maggiore, & prolunghisi per diritto alla C A la linea retta A D: & pongasi A D la metà della A B. Dico il quadrato della CD essere quin- A
tuplo del quadrato della D A. descriuansi dalle A B D C i quadrati A E D F, & nella D F descriuasi la figura, & prolunghisi F C sino al punto G. onde perche la A B è segata nel punto C secondo l'estrema & meza proportione, quello, che è contenuto dalle A B B C sarà vguale al quadrato della A C. & è il rettangolo C E, quello che si contiene dalle A B B C, & il quadrato della A C è F H. adunque il rettangolo C E è vguale al quadrato della F H. & perche la B A è doppia della A D, & la B A è vguale alla A K, & la D A alla A H, sarà anchor la K A doppia della A H. ma come la K A alla A H, B
così è il rettangolo K C al rettangolo C H. onde il rettangolo K C è doppio del rettangolo C H: & sono i rettangoli L H H C doppij di C H. il rettangolo dunque K C è vguale alli rettangoli L H H C. & si è dimostrato il rettangolo, C E vguale al quadrato F H: & però tutto il quadrato A E è vguale al gnomone M N X. similmente perche B A è doppia della A D, sara il quadrato della B A quadruplo del quadrato della A D, cioe il quadrato A E del quadrato D H. & il quadrato A E è vguale al gnomone MNX.

5: del sesto.

C

D



onde

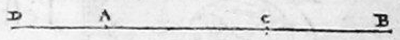
onde etiandio il gnomone e quadruplo del quadrato D H: & tutto D F e quintu
E plo di esso D H. & D F e'l quadrato della C D, & D H il quadrato della D A. il quadrato dunque della C D sarà quintuplo del quadrato della D A. il perche se vna linea retta sia segata secondo l'estrema & meza proportione, la portion maggiore pigliando la metà di tutta può il quintuplo del quadrato, che si fà dalla metà. il che bisognaua dimostrare.

S C H O L I O.

La resolutione è quando si piglia, quel che ricerca, come concesso per quelle cose, che seguitano in qualche vero concesso.

La compositione è quando si piglia quel che è concesso per le cose che seguitano nella conclusione di quello, che si ricerca.

Resolutione del precedente theorema.



Sia la linea retta A B segata nel punto C secondo l'estrema & meza proportione; & sia la portion maggiore A C: & ponganſi A D vguale alla metà della A B. Dico il quadrato della C D essere quintuplo del quadrato della D A. percioche essendo il quadrato della C D quin
4 del secondo tuplo del quadrato della D A, & al quadrato della CD sono vguali i quadrati delle C A A D insieme con quello, che due volte è contenuto dalle C A AD; saranno i quadrati delle C A AD insieme con quello, che è contenuto due volte dalle C A A D quintupli del quadrato della AD. diuidendosi dunque il quadrato della C A insieme con quello, che due volte è contenuto dalle CA AD è quadruplo del quadrato della A D. ma à quello che è contenuto due volte dalle C A A D e vguale il rettangolo B A C. percioche la B A e doppia della A D, & il rettangolo A B C e vguale al quadrato della A C; conciosiacosa, che la A B sia segata nel punto C, secondo l'estrema & meza proportione. onde il rettangolo B A C insie
2. del secondo. me con il rettangolo A B C e quadruplo del quadrato della A D. ma il rettangolo B A C insieme con il rettangolo A B C e'l quadrato, che si fa dalla A B. adun
Cor. della 20. del sesto. que il quadrato della B A e quadruplo del quadrato della A D. il che stà cosi, perche la B A e doppia della A D.

Compositione.

Perche dunque il quadrato della B A e quadruplo del quadrato della A D, & il quadrato della A B e il rettangolo B A C insieme col rettangolo A B C; sarà il rettangolo B A C insieme col rettangolo A B C quadruplo del quadrato della A D. ma il rettangolo B A C e uguale à quello, che due volte e contenuto dalle D A A C; & il rettangolo A B C vguale al quadrato della A C. adunque il quadrato della A C insieme con quello, che due volte e contenuto dalle D A A C e quadruplo del quadrato della D A. & però i quadrati delle D A AC insieme con quello, che due volte e contenuto dalle D A A C sono quintupli del quadrato della D A. ma li quadrati delle D A A C insieme con quello, che e contenuto due volte dalle D A AC e'l quadrato, che si fà dalla D C. il quadrato dunque della CD sarà quintuplo del quadrato della D A. il che bisognaua dimostrare.

IL COMMANDINO.

Sia la linea retta A B segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto C] *in che modo si faccia questo, l'ha insegnato nell'vndecima propositione del secondo libro, & nella 30 del sesto.* A

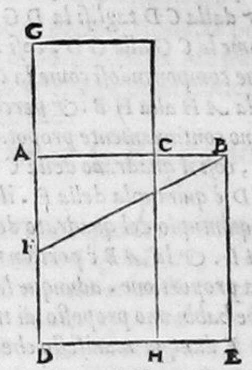
Descriuasi dalle A B D C i quadrati A F D F, & nella DF descriuasi la figura] *sia della A B il quadrato A K E B & della D C il quadrato D L C F: & giunta D F tirisi per A la linea retta A H, parallela ad vna di esse D L C F, che seghi il diametro DF nel punto H. similmente per H tirisi vna linea retta parallela ad vna di esse L F D C.* B

Et sono li rettangoli L H H C doppij di CH] *percioche i supplementi L H H C sono fra loro vguali per la 43 del libro primo.* C

Sarà il quadrato della B A quadruplo del quadrato della AD] *per la 20 del sesto.* D

Il quadrato dunque della C D sarà quintuplo del quadrato della D A] *possiamo in altro modo & forse piu speditamente dimostrare il medesimo, in questa forma.* E

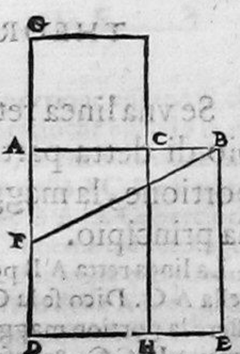
Sia la linea retta AC segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto C: & dalla A B si faccia il quadrato A D E B & segata per mezo la A D nel punto F, & giunta F B prolunghisi la F A nel punto G, dimodo che F G sia vguale alla F B. sarà la A G vguale alla A C per le cose dimostrate nell'vndecima propositione del secondo libro. onde la F G è composta dalla maggior portione, & dalla metà di tutta A B. Dico il quadrato della F G essere quintuplo del quadrato della F A, percioche essendo la A B doppia della A F. sarà il quadrato della AB quadruplo del quadrato della A F. ma il quadrato della F B è vguale alli quadrati delle F A A B, per la 47 del primo. il quadrato dunque della F B, cioè il quadrato della F G, sarà quintuplo del quadrato della F A. il che bisognaua dimostrare. ma si hanno anchora da dimostrare alcune altre cose, che appartengono à questo segamento. Cor. 20. del 6:



PROPOSITIONE I.

Data vna linea retta segata secondo l'estrema & meza proportione, l'vna & l'altra portione di essa sarà data.

Sia la linea retta data A B 10, che sia segata secondo l'estrema & meza portione nel punto C. Dico le A C C B essere date. faccians le medesime cose, che di sopra. & perche la A B è 10, sarà la sua metà A F 5, il cui quadrato è 25 & il quadrato della A B è 100. il quadrato dunque della F B è 125, & la F B cioè la F G è ℞ 125. ma la F A è 5. onde la A G, cioè la A C sarà ℞ 125 men 5. & essendo come la B A alla A C, così la A C alla C B, il rettangolo contenuto dalle A B B C, cioè il rettangolo CE sarà vguale al quadrato della A C: & il quadrato della A C, cioè il quadrato di ℞ 125 men 5 è 150 men ℞ 12500. se dunque alla C H si adatti il quadrato 150 men ℞ 12500, che faccia la larghezza C B, sarà la C B 15 men ℞ 125. adunque le AC CB sono date, come bisognaua. 17. del sesto:



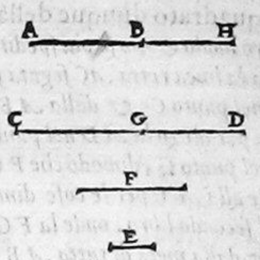
Dal che è manifesto, che se la linea retta rationale & in lunghezza commensurabile alla proposta rationale sia segata secondo l'estrema & meza proportione: la sua portion maggiore è apotome quinta, & la minore apotome prima.

Percioche il quadrato della A B è quadruplo del quadrato della A F. onde il quadrato del

la F B al quadrato della B A ha la medesima proportione, che 5 à 4. & perche il quadrato della F B al quadrato della B A, non ha la proportione, che il numero quadrato al numero qua
9. del decimo. *drato; la F B sarà in lunghezza incommensurabile alla B A, & però la FB può più, che la F A, quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza incommansurabile ad essa, & la A F aggi*
5. diff. delle 3. *unta alla A G è in lunghezza commensurabile alla proposta rationale. onde la A C è apotome quinta. ma la C B essere apotome prima è manifesto. percioche il quadrato della apotome adattato alla rationale fa la larghezza apotome prima, per la 48 del 10 libro.*

PROPOSITIONE II.

Data la portion maggiore trouare tutta la linea segata secondo l'estrema & meza proportione.



Sia la portion maggiore AB; & proponganſi le linee rette C D E di modo, che la C D sia quintupla della E, & fra la C D & la E sia la proportionale di mezo F: & dalla C D taglisi la D G vguale alla F; & facciasi come la C G alla G D, così la A B alla B H. sarà dunque componendosi come la C D alla D G, cioè alla F, così la A H alla H B. & perche le tre linee rette C D F E
Cor. della 20. del sesto. *sono continuamente propotionali, sarà come la CD alla E, così il quadrano della C D al quadrato della F. & la C D è quintupla della E. il quadrato dunque della C D è quintuplo del quadrato della F. onde il quadrato della A H è quintuplo del quadrato della A B. & la A B è portion maggiore della linea retta, che è segata secondo l'estrema & meza proportione. adunque la B H è la metà di tutta, & la doppia di B H è tutta la linea retta, che habbiamo proposto di trouare.*

E dunque manifesto che data la maggior portione della linea retta, segata secondo l'estre ma, & meza proportione, etiandio la minor portione; & tutta la linea sarà data.

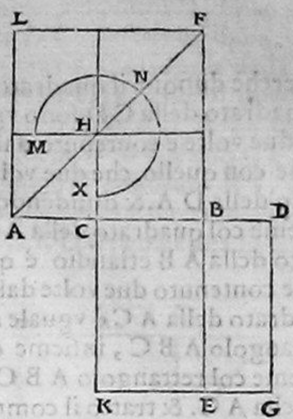
Sia la maggior portione A B 4, & sia la C D 5, & la E 1. sarà la F, cioè la G D ℞ 5, & la C G 5 men ℞ 5. facciasi come 5 men ℞ 5 à ℞ 5, così 4 ad vn altra. moltiplicheremo dunque prima ℞ 5 per 4 & si produrrà ℞ 80. poi moltiplicheremo 5 men ℞ 5, per quella, che è di due nomi, et corrispōde ad essa, cioè per 5 piu ℞ 5. ne uerrà 20: & per la medesima moltiplicheremo ℞ 80, si farà ℞ 2000 più ℞ 400. la onde se à 20 adattaremo ℞ 2000, più ℞ 400, farà per larghezza ℞ 5 pi 1. il cui doppio è ℞ 20 più 2, adunque tutta la linea retta è ℞ 20 più 2, & la minor portione ℞ 20 men 2.

THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

Se vna linea retta possa il quintuplo della sua parte, & il doppio di detta parte sia segato secondo l'estrema & meza porportione, la maggior portione è il rimanente della linea posta da principio.

La linea retta A B possa il quintuplo della sua parte A C, & la C D sia doppia della A C. Dico se la C D sia segata secondo l'estrema & meza proportione C B essere la portion maggiore. descriuansi dall'una & l'altra di esse A B C D i quadrati A F C G: & descritta la figura in A F, prolunghisi F B nel punto E. perche
20. del sesto. dunque il quadrato della A F è quintuplo del quadrato A H, farà il gnomone M N X quadruplo di A H. & perche la D C è doppia della C A, il quadrato della D C è quadruplo del quadrato della C A; cioè il quadrato C G è quadruplo del quadrato A H, & si è dimostrato il gnomone MNX quadruplo del quadrato A H.

il gnomone dunque MNX è vguale al quadrato C G. oltre à ciò perche la D C è doppia della C A, & la DC è vguale alla CK, & la A C alla CH, sarà la KC doppia della C H, & perciò il parallelogrammo K B è doppio del parallelogrammo B H, & sono i parallelogrammi L H H B doppij di HB. adunque K B è vguale alli parallelogrammi LH H B. ma etiandio tutto il gnomone MNX è vguale à tutto C G. il rimanente dunque H F è vguale al rimanente BG. & B G è quello, che si contiene dalle C D D B; peroche la C D è vguale alla D G: & H F è quadrato della B C. onde quello, che è contenuto dalle C D D B è vguale al quadrato della B C. come dunque la DC alla C B, cosi è la C B alla B D. ma la D C è maggiore della CB. adunque etiandio la C B è maggiore della BD. onde segata la linea retta C D secõdo l'estrema & meza proportione, la portion maggiore è la CB. se dunque vna linea retta possa il quintuplo della sua parte & il doppio di detta parte sia segato secondo l'estrema & meza proportione, la maggior portione è il rimanente della linea posta da principio.



B

14. del sesto.

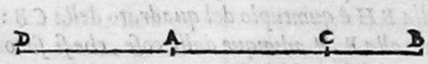
Ma che il doppio della A C sia maggiore che la C B si dimostrerà cosi.

Che se nõ è cosi, sia s'egli è possibile la B C doppia della C A. il quadrato dũque della BC è quadruplo del quadrato della C A: & però amendue li quadrati, che si fanno dalle B C C A sono quintupli del quadrato della C A. ma etiandio il quadrato della B A si pone quintuplo del quadrato della AC. onde il quadrato della B A è uguale alli quadrati delle BC CA, il che è impossibile. non è dunque la B C doppia della C A. similmente dimostreremo ne anche la minore di BC essere doppia della CA, percioche ne seguirebbe molto maggior inconueniente. la doppia dunque della A C è maggiore che la BC. il che bisognaua dimostrare.

S C H O L I O.

Resolutione del precedente theorema.

La linea retta CD possa il quintuplo della sua parte D A. & pongasi la AB doppia della D A. Dico la A B essere segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto C: & la maggior portione essere A C, che è la parte rimanente della linea retta posta da principio, percioche essendo la AB segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto C, & essendo AC la maggior portione, sarà il rettangolo ABC vguale al quadrato della A C, & è il rettangolo BAC vguale à quello, che due uolte è contenuto dalle D A A C, percioche la B A è doppia della A D. adunque il rettangolo A B C insieme col rettangolo BAC, che è il quadrato della A B, è vguale à quello, che due volte è contenuto dalle D A AC insieme col quadrato della A C. ma il quadrato della A B è quadruplo del quadrato della AD. quello dunque, che due volte è contenuto dalle D A A C insieme col quadrato della A C è quadruplo del quadrato della A D. onde etiandio i quadrati delle D A A C insieme con quello, che due volte è contenuto dalle D A A D cioe il quadrato della C D, sono quintupli del quadrato della A D. il che sta cosi.



2. del secondo.

20. del sesto:

4. del secondo

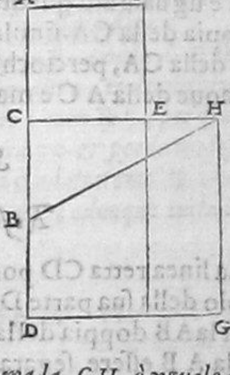
Compositione.

Perche dunque il quadrato della C D è quintuplo del quadrato della D A, & al quadrato della C D sono vguali i quadrati delle D A A C insieme con quello, che due volte è contenuto dalle D A A C; saranno i quadrati delle D A A C insieme con quello, che due volte è contenuto dalle D A A C, quintupli del quadrato della D A. & diuidendosi quello, che due volte è contenuto dalle D A A C insieme col quadrato della A C sono quadrupli del quadrato della A D. & il quadrato della A B etiandio è quadruplo del quadrato della A D. quello dunque, che e contenuto due volte dalle D A A C, che è il rettangolo B A C insieme col quadrato della A C è vguale al quadrato della A B. ma il quadrato della A B è il
2 del secondo rettangolo A B C, insieme col rettangolo B A C. la onde il rettangolo B A C insieme col rettangolo A B C è vguale al rettangolo B A C insieme col quadrato della A C. & tratto il commune rettangolo B A C, sarà il rimanente rettango lo A B C vguale al quadrato della A C. è dunque come la B A alla A C, cosi la
14. del sesto. A C alla C B. ma la B A è maggiore, che la A C. adunque etiandio la A C è maggiore, che la C B. onde la A B è segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto C & A C è la portion maggiore. il che bisognaua dimostrare.

IL COMMANDINO.

A La linea retta A B possa il quintuplo della sua parte A C] *cioè il quadrato della linea retta A B sia il quintuplo del quadrato della parte A C.*

B Ma la D C è maggiore della C B] *cioè la doppia di A C è maggiore della B C. & questo lo dimostrerà subitamente, ma si puo il medesimo dimostrare in altro modo, cosi.*

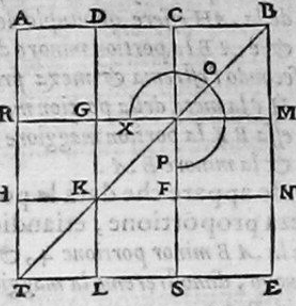


La linea retta A B possa il quintuplo della sua parte BC, & prolunghisi la A B nel punto D, di modo, che la D C sia doppia di CB. Dico se la C D sia segata secondo l'estrema & meza proportione, la portion maggiore di essa essere la A C. faccian si dalle A C CD i quadrati A C E F C D G H, & giungasi la B H. perche dunque la D C, cioè H C è doppia della C B, sarà il quadrato della H C quadruplo del quadrato della C B. ma il quadrato della B H è vguale alli due quadrati, che si fanno dalle HC CB. il quadrato dunque della B H è quintuplo del quadrato della C B: & pero la B H è vguale alla B A. adunque dalle cose, che si sono dimostrate nell' undecimo del secondo, la linea retta CH è segata nel punto E secondo l'estrema, & meza proportione: & C E è la portion maggiore. ma la C H è vguale alla C D, & la C E vguale alla C A. se dunque lo linea retta possa il quintuplo della sua parte, & il rimanente. il che bisognaua dimostrare.

THEOREMA III. PROPOSITIONE III.

Se vna linea retta sia segata secondo l'estrema & meza proportione, la portion minore pigliando la metà della maggiore può il quintuplo del quadrato, che si fa dalla metà della maggior portione.

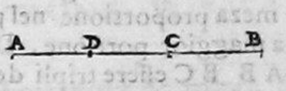
La linea retta A B sia segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto C, & A C sia la portion maggiore, & seghisi per mezo nel punto D. Dico il quadrato della B D essere quintuplo del quadrato della D C. descriuasi dalla A B il quadrato A E, & compiscasi la figura. perche dunque la A C è doppia della CD, il quadrato della A C sarà quadruplo del quadrato della C D. cioè il quadrato R S del quadrato F G. & perche il rettangolo contenuto dalle A B B C è vguale al quadrato della A C, & il rettangolo contenuto dalle A B B C è esso C E, & il quadrato della A C è R S; sarà il rettangolo C E vguale al quadrato R S. ma il quadrato R S è quadruplo del quadrato F G. adunque anchor il rettangolo C E è quadruplo del quadrato F G. oltre à cio perche la A D è vguale alla D C. sarà etiandio la H K vguale alla K F: & però il quadrato GF è vguale al quadrato H L. la GK dunque è vguale alla K L, cioè la M N alla N E. onde il parallelogrammo M F è vguale al parallelogrammo F E. ma M F è vguale à C G. adunque anchor la C G, sarà vguale alla F E. pongasi C N commune. il gnomone dunque XOP è vguale al parallelogrammo C E. & si è dimostrato C E quadruplo del quadrato G F. onde etiandio il gnomone XOP è quadruplo di GF: & però il quadrato D N è quintuplo del quadrato G F. & il quadrato D N è quello, che si fa dalla D B: & G F dalla D C. adunque il quadrato della B D è quintuplo del quadrato della D C. il che bisognaua dimostrare.



S C H O L I O.

Resolutione del precedente theorema.

La linea retta A B sia segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto C; & sia A C la portion maggiore, la cui metà sia C D. Dico il quadrato della B D essere quintuplo del quadrato della D C, percioche essendo il quadrato della B D quintuplo del quadrato della D C, & il quadrato della B D quello, che è contenuto 6. del secondo: dalle A B B C insieme col quadrato della D C; sarà quello che è contenuto dalle A B B C insieme col quadrato della D C quintuplo del quadrato della D C; & diuidendosi quello che è contenuto dalle A B B C quadruplo del quadrato della D C. ma à quello che è contenuto dalle A B B C è vguale il quadrato della AC, conciosiacosa che la AB sia segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto C. adunque il quadrato della A C e quadruplo del quadrato della C D. il che e cosi, percioche la A C e doppia della C D.



Compositione.

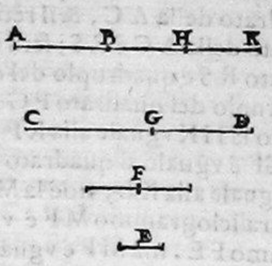
Perche dunque la A C è doppia della C D, sarà il quadrato della A C quadruplo del quadrato della C D. ma il quadrato della A C è vguale à quello, che è contenuto dalle A B B C. quello dunque, che e contenuto dalle A B B C quadruplo del quadrato della C D: & componendosi quello, che è contenuto dalle A B BC insieme col quadrato della C D, che è il quadrato della B D, è quintuplo del quadrato, che si fa dalla D C. & questo è quello, che bisognaua dimostrare.

IL COMMANDINO.

Dalle cose gia dette si possono dimostrare anchor delle altre.

Data la portion minore trouare tutta la linea segata secondo l'estrema & meza proportione.

Sia la minor portione A B: & propongansi, le linee rette C D E: & sia la C D quintupla della E, & fra le C D E piglisi la proportionale di mezo F: & faccians l'altre cose, come s'è detto di sopra nella seconda propositione di quelle, che noi habbiamo poste alla prima di questo. si dimostrerà similmente il quadrato della AH essere quintuplo del quadrato della H B. & è A B la portion minore della linea retta segata secondo l'estrema & meza proportione. adunque B H è la metà della portion maggiore, & la doppia di essa B K la portion maggiore. adunque tutta la linea è A K, la cui maggior portione è K E, & la minore B A.



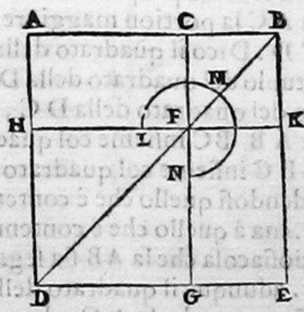
Onde appare che data la portion minore della linea segata secondo l'estrema & meza proportione, etiandio la portion maggiore & tutta la linea sarà data.

Sia la A B minor portione 4, & sia la C D 5, & la E 1, similmente come di sopra nel medesimo luogo, dimostreremo la maggior portione essere ℞ 20 più 2. onde tutta la linea retta sarà 6 più ℞ 20.

THEOREMA IIII. PROPOSITIONE IIII.

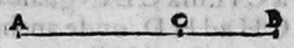
Se vna linea retta sia segata secondo l'estrema & meza proportione, li due quadrati che si fanno da tutta la linea & dalla portion minore sono tripli del quadrato della portion maggiore.

Sia linea retta A B segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto C; & sia A C la maggior portione. Dico i quadrati delle A B B C essere tripli del quadrato della A C. descriuasi dalla A B il quadrato A D E B: & compiscasi la figura. onde perche la A B è segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto C, & la portion maggiore è la A C; sarà il rettangolo contenuto dalle A B B C vguale al quadrato della A C; & è il rettangolo A K quello, che è contenuto dalle A B B C; & il quadrato H G è quello, che si fa dalla A C. adunque A K è vguale ad H G. & perche il rettangolo A F è vguale al rettangolo F E, pongasi C K commune. sarà tutto A K vguale à tutto C E. adunque li rettangoli A K C E sono doppij dello A K. ma li rettangoli A K C E sono il gnomone L M N, & il quadrato C K. il gnomone dunque L M N & il quadrato C K sono doppij di A K. & si è dimostrato il rettangolo A K vguale al quadrato H G. onde il gnomone L M N & il quadrato C K sono doppij di H G: & però il gnomone L M N & i quadrati C K H G sono tripli del quadrato H G: & il gnomone L M N, & i quadrati C K H G sono tutto il quadrato A E, & il quadrato C K, che sono i quadrati delle A B B C, & il quadrato G H è quello, che si fa dalla A C. adunque i quadrati delle A B B C sono tripli del quadrato della A C. il che bisognaua dimostrare.



SCHOLIO.

Resolutione del precedente theorema.



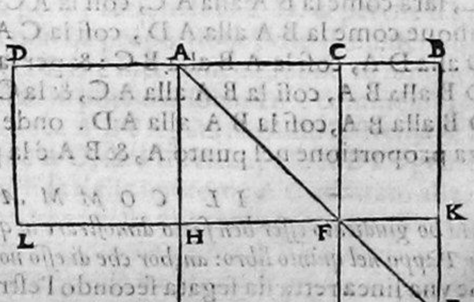
La linea retta A B sia segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto C, & la A C sia la portion maggiore. Dico i quadrati dalle A B B C essere tripli del quadrato della A C. percioche essendo i quadrati delle A B B C tripli del quadrato della A C; & i quadrati delle A B B C vguali al rettangolo, che due volte è contenuto dalle A B B C, insieme col quadrato della A C; sarà il rettangolo due volte contenuto dalle A B B C insieme col quadrato della A C, triplo del quadrato della A C, & diuidendosi quello, che due volte e contenuto dalle A B B C, sarà doppio del quadrato della A C. adunque quello, che e contenuto dalle A B B C una volta e vguale al quadrato della A C; il che è cosi. percioche la linea retta A B e segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto C.

Compositione.

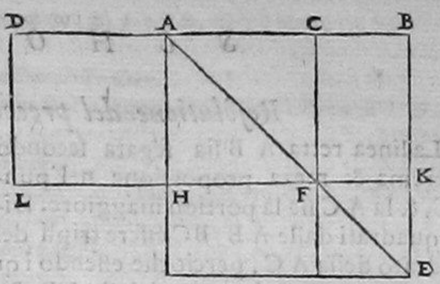
Perche dunque la A B e segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto C, & A C è la portion maggiore, sarà il rettangolo contenuto dalle A B B C vguale al quadrato della A C. quello dunque, che due volte e contenuto dalle A B B C e doppio del quadrato della A C; & componendosi quello, che due volte e contenuto dalle A B B C insieme col quadrato della A C e triplo del quadrato della A C, ma quello, che due volte e contenuto dalle A B B C insieme col quadrato della A C e vguale alli quadrati, che si fanno dalle A B B C. adunque i quadrati, che si fanno dalle A B B C sono tripli del quadrato della A C.

THEOREMA V. PROPOSITIONE V.

Se vna linea retta sia segata secondo l'estrema & meza proportione: & ci si aggiunga vna linea vguale alla portion magginre, sarà tutta la linea segata secondo l'estrema & meza proportione, & la portion maggiore sarà la linea retta posta da principio.



La linea retta A B sia segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto C, & la A C sia la portion maggiore: & pongasi la A D vguale alla C A. Dico la linea retta D B essere segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto A: & A B essere la portion maggiore, che si è posta da principio. descriuasi dalla A B il quadrato A E. & compiscasi la figura. perche dunque la A B è segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto C, sarà il il rettangolo contenuto dalle AB BC vguale al quadrato della AC: & il rettangolo contenuto dalle A B B C è C E, & il quadrato della AC è C H. adunque E C è vguale à C H. ma C E è vguale ad E H, & C H ad H D. onde anchor D H sarà vguale ad H E. pongasi HB commune. la onde tutto DK è vguale à tutto A E, & D K è contenuto dalle BD D A, percioche la A D è vguale alla D L, & il quadrato A E è quello, che si fa dalla A B. adunque quello, che è contenuto dalle BD



14. del sesto. D A è vguale al quadrato della A B: & però come la D B alla B A, così è la B A alla A D. ma la D B è maggior, che la B A. la B A dunque è maggiore, che la A D; & perciò la D B è segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto A. & la A B è la portion maggiore. il che bisognaua dimostrare.

S C H O L I O.

Resolutione del precedente theorema.

La linea retta A B sia segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto C, & sia A C la portion maggiore: & pongasi la A D vguale alla A C. Dico la D B essere segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto A: & B A essere la portion maggiore. percioche essendo la D B segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto A: & essendo la A B portion maggiore; sarà come la D B alla B A, così la B A alla A D, & la D A è vguale alla A C. come dunque la D B alla B A, così la B A alla A C. & per la conuersione della proportione, come la B D alla D A, così la A B alla B C. onde diuidendosi come la B A alla A D, così la A C alla C B. & è la D A vguale alla A C. come dunque la B A alla A C, così la A C alla C B. il che sta così, percioche la A B è segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto C.

Compositione.

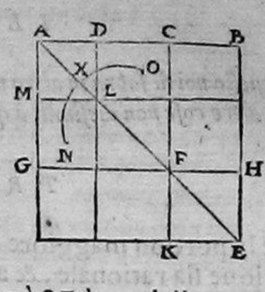
Perche dunque la A B è segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto C, sarà come la B A alla A C, così la A C alla C B: & la C A è vguale alla A D. adunque come la B A alla A D, così la C A alla C B: & componendosi come la B D alla D A, così la A B alla B C: & per la conuersione della proportione, come la D B alla B A, così la B A alla A C, & la C A è vguale alla A D. adunque come la D B alla B A, così la B A alla A D. onde la D B è segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto A, & B A è la portion maggiore.

IL COMMANDINO.

Ma ho giudicato esser ben fatto dimostrare in questo luogo vn'altro theorema, del quale si serue Pappo nel quinto libro: anchor che di esso non ponga dimostratione alcuna.

Se vna linea retta sia segata secondo l'estrema & meza proportione; & dalla portion maggiore, si tagli vna linea vguale alla minore; sarà anchor la detta linea segata secondo l'estrema & meza proportione. & la portion maggiore sarà la linea retta tagliata.

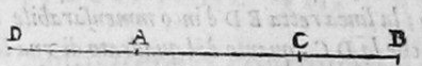
Sia la linea retta A B segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto C; & A C sia la portion maggiore; & dalla A C taglisi C D, che sia vguale alla CB. Dico la AC essere segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto D; & C D essere la portion maggiore. facciasi dalla A B il quadrato A E, & giunta A E tirinsi per C D le linee rette C F K D L parallele alla B E, che seghino il diametro A E ne punti F L, & per F L tirinsi le G F H M L parallele alla A B. perche dunque la A B è segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto C; il rettangolo contenuto dalle AB B C cioe il rettangolo C E è vguale al quadrato A F. ma à C E è vguale il rettangolo G E, percioche li supplementi C H G K sono vguali fra loro, & il quadrato F E è commune al l'vno & l'altro. onde il rettangolo G E è vguale al quadrato A F. se dunque dal rettangolo GE si tragga il quadrato F E, & dal quadrato A F si tragga il quadrato L F, che è vguale al quadrato F E, essendo le D E C B vguali: il rimanente rettangolo G K cioè il rettangolo M F, cioè D F, sarà vguale al gnomone N X O. da quali trattone il commune L C, sarà il rimanente rettangolo D G vguale al quadrato L F. ma il rettangolo D G è contenuto dalle C A A D: & il quadrato LC è quello, che si fa dalla D F. come dunque la A C alla CD, così la CD alla D A; 14. del sesto. *ma la AC è maggiore della CD. adunque la C D sarà maggiore della D A. & pero la linea retta A C è segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto D; & la portion maggiore è la CD. il che bisognaua dimostrare.*



THEOREMA VI. PROPOSITIONE VI.

Se vna linea retta rationale sia segata secondo l'estrema & meza proportione, l'vna & l'altra portione è irrationale, che si chiama apotome, ò vero residuo.

Sia la linea retta rationale AB: & seghisi secódo l'estrema & meza proportione nel punto C: & sia A C la portion maggiore. Dico l'vna & l'altra portione A C C B essere irrationale, che si chiama apotome. prolunghisi la B A nel punto D, & sia A D la metà della B A. perche dunque la linea retta AB è segata secondo l'estrema, & meza proportione nel punto C, & alla portion maggiore C A si aggiunge A D, che è la metà della A B; sarà il quadrato della C D quintuplo del quadrato della D A. onde il quadrato della C D al quadrato della D A ha la proportione, che ha il numero al numero: & però il quadrato della CD è commensurabile al quadrato della D A. & il quadrato della D A è rationale, percioche la D A è rationale, essendo la metà della rationale A B. adunque anchora il quadrato della C D è rationale: & però è rationale la C D. & perche il quadrato della C D al quadrato della D A non ha proportione, che il numero quadrato al numero quadrato, la linea retta C D è incommensurabile in lunghezza alla D A. onde le C D D A sono rationali in potenza solamente commensurabili, & la A C è apotome. oltre à ciò perche la A B è segata secondo l'estrema & meza proportione, & la portion maggiore è A C, sarà il rettangolo A B C vguale al quadrato della A C. quello dunque, che si fa dalla apotome A C adattato alla ratione A B fa la larghezza B C. ma il quadrato della apotome adattato alla rationale fa l'apotome prima. la B C dunque è apotome prima, & si è dimostrata apotome la A C. il perche se vna linea retta rationale sia segata secondo l'estrema & meza proportione, l'vna & l'altra portione è irrationale, che si chiama apotome ò vero residuo. & questo è quello, che bisognaua dimostrare.



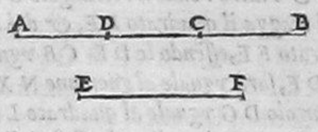
1. di questo.
6. del decimo.
6. diff. del 10.
9. del decimo.
74. del decimo

IL COMMANDINO.

Questo noi di sopra in altro modo anchora habbiamo dimostrato, ma dimostreremo etiandio dalle altre cose non dissimili à queste, che sono tali.

PROPOSITIONE I.

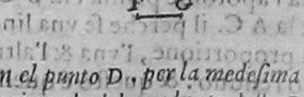
Se la portion maggiore d'vna linea retta segata secondo l'estrema & meza proportione sia rationale, & alla rationale proposta commensurabile in lunghezza, sarà la minor portione apotome quinta, ò vero residuo quinto: & tutta la linea sarà la quinta di due nomi, ò vero il quinto binomio.



Sia la linea retta A B segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto C: & sia la portion maggiore rationale A C, commensurabile in lunghezza alla proposta rationale. Dico la minor portione C B essere apotome quinta & tutta A B la quinta di due nomi. diuidasi la A C per mezo nel punto D. & perche la A B è segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto C: & alla portion minore B C si aggiunge la C D, che
3. di questo. 6. del decimo. *è la metà della portion maggiore, il quadrato della B D è quintuplo del quadrato della D C: & però hauerà ad esso la proportione, che ha il numero al numero: & saragli com-*
6 diff. del 10. *mensurabile. ma il quadrato della D C è rationale percioche si pone rationale la A C. adunque anchor il quadrato della B D è rationale, & rationale essa B D. non hauendo dunque il quadrato della B D al quadrato della D C la proportione, che il numero quadrato al numero*
9. del decimo. *quadrato; la linea retta B D sarà in lunghezza incommensurabile alla D C. onde le B D E C*
74 del decimo *sono rationali in potenza solamente commensurabili, & però la C B è apotome. Dico etiandio essere la quinta. sia il quadrato della E F l'eccesso nel quale il quadrato della B D auanza il quadrato della D C, hauerà il quadrato della B D al quadrato della E F, la medesima proportione, che ha 5 à 4. & non hauendo la proportione, che ha il numero quadrato al numero qua-*
9. del decimo. *drato; la linea retta B D è incommensarabile in lunghezza alla retta E F. onde la B D può più, che la D C, quanto è il quadrato di vna linea retta in lunghezza ad essa incommensurabile. & è la D C in lunghezza commensurabile alla proposta rationale A C, adunque la C B è*
5. diff, delle 3. *apotome quinta. oltre à ciò perche la A B è segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto C, & A C è la portion maggiore, sarà il rettangolo A B C vguale al quadrato della A C. adunque il quadrato della A C adattato alla C B, farà la larghezza A B. ma il quadrato della rationale adattato all'apotome fa la larghezza quella che è di due nomi, & del medesimo ordine, che essa apotome, per la 114 del decimo. onde la A B è la quinta di due nomi. se dunque la portion maggiore d'vna linea retta segata secondo l'estrema & meza proportione sia rationale & alla rationale proposta commensurabile in lunghezza; sarà la portion maggiore apotome quinta & tutta la linea sarà la quinta di due nomi. il che bisognaua dimostrare.*

PROPOSITIONE II.

Se la portion minore d'vna linea retta segata secõdo l'estrema & meza proportione sia rationale, & alla rationale proposta commensurabile il lunghezza; sarà la maggior portione la quinta di due nomi, & tutta sarà la prima di due nomi.

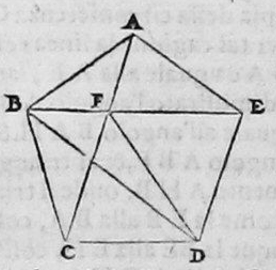


Sia la linea retta A B segata nel punto C secondo l'estrema & meza proportione. & sia la portion minore C B rationale, & in lunghezza commensurabile alla proposta rationale. Dico la maggior portione A C essere la quinta di due nomi: & tutta A B la prima di due nomi. seghisi la A C per mezo nel punto D, per la medesima ragione che di sopra, si dimostrerà il quadrato della B D essere quintuplo del quadrato della D C. se

ghisi dunque la D C nel punto E, di modo, che la D E alla E C habbia la medesima proportione, che la B D alla D C. sarà il quadrato della D E quintuplo del quadrato della E C: & commensurabile ad esso. & perche è come tutta la B D à tutta la D C, cosi la parte D E alla parte EC, sarà anchor la rimanente B E alla rimanente E D, come la B D alla D C, cioè come la D E alla (19. del quinto)
E C. adunque essendo tre linee rette proportionali B E E D E C la B E alla E C sarà come il quadrato della B E al quadrato della E D. ma il quadrato della B E è quintuplo del quadrato (Cor. della 20. del sesto.)
della E D, percioche la B E alla E D è come la B D alla D C. onde la B E è quintupla della EC: & però la B C è quadrupla della C E, & è la B C rationale. adunque anchor la C E è rationale, & in lunghezza commensurabile alla C B. (6 diff. del decimo.) & perche il quadrato della DE è commensurabile al quadrato della EC, & il quadrato della E C è rationale, sarà etiandio il quadrato della D E rationale, (9 diff. del decimo.) & essa D E rationale, & non hauendo il quadrato della D E al quadrato della E C la proportione che ha il numero quadrato al numero quadrato, sarà la D E in lunghezza incommensurabile alla EC. (9. del decimo.) sono dunque le D E E C rationali & fra loro in potenza solamente commensurabili: & però la D C è di due nomi, il cui nome maggiore è D E. (37. del decimo) Dico anchora essere la quinta. sia il quadrato della F G quello nel quale il quadrato della D E auanza il quadrato della EC. hauerà il quadrato della D E al quadrato della F G la medesima proportione, che hà 5 à 4. adunque la F G è in lunghezza incommensurabile alla D E. (9. del decimo.) & perche la D E può più, che la EC quanto è il quadrato della linea retta in lunghezza incommensurabile ad essa, & la E C è commensurabile in lunghezza alla proposta rationale CB, sarà DC la quinta di due nomi, & la AC è doppia della CD. (3. diff. delle 2.) adunque anchor la A E è la quinta di due nomi, percioche la linea retta che è commensurabile à quella di due nomi, anchor essa è di due nomi, & del medesimo ordine per la 67 del decimo libro. & essendo il quadrato della A C vguale al rettangolo A B C se si adatti alla rationale BC farà la larghezza A B. adunque A B è la prima di due nomi; percioche il quadrato di quella che è di due nomi, adattato alla rationale fa la larghezza la prima di due nomi per la 48 del decimo. se dunque la portion minore di una linea retta segata secondo l'estrema & meza proportione sia rationale, & commensurabile in lunghezza alla rationale proposta, sarà la maggior portione la quinta di due nomi & tutta sarà la prima di due nomi. il che bisognaua dimostrare.

THEOREMA VII. PROPOSITIONE VII.

Se tre angoli del pentagono equilatero ò continuati ò non continuati siano vguali, sarà il pentagono equiangolo.

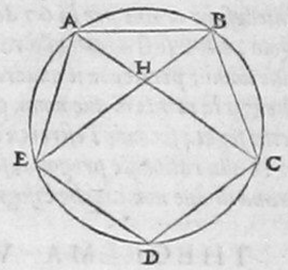


Tre angoli del pentagono equilatero ABCDE prima continuati ne punti ABC, siano fra loro uguali. Dico il pentagono ABCDE essere equiangolo. giungansi le A C B E F D. & perche le due CB B A sono vguali alle due B A AE, l'vna all'altra: & l'angolo C B A è vguale all'angolo BAE, sarà la base A C vguale alla base B E, (4. del primo) & il triangolo A B C vguale al triangolo A B E: & gli altri angoli vguali à gli altri angoli à quali sono sottoposti i lati vguali, cioè l'angolo BCA all'angolo BEA, & l'angolo ABE all'angolo CAB. onde anchor il lato AF è vguale al lato F B, & si è dimostrata tutta la A C vguale à tutta la BE. adunque etiandio la rimanente F C è vguale alla rimanente F E, & la C D è vguale alla D E. il perche le due F C C D sono vguali alle due F E E D, & la loro base F D è commune. (8. del primo.) onde l'angolo F C D è vguale all'angolo FED, & si è dimostrato l'angolo B C A vguale all'angolo A E B. tutto dunque B C D è vguale à tutto A E D. ma l'angolo B C D, è posto vguale à gli angoli A B. adunque anchor l'angolo A E D sarà vguale à gli angoli A B. similmente dimostreremo l'angolo C D E à gli angoli A B essere vguale. per la qual cosa il pentagono A B C D E è equiangolo. ma non siano gli angoli continuati fra loro vguali, ma

quelli, che sono ne punti A C D. Dico altresì il pētagono ABCDE essere equiangolo. giungasi B D, & perche le due B A A E sono vguali alle due B C C D, &
4. del primo. contengono angoli vguali, sarà la base B E vguale alla base B D: & il triangolo A B E al triangolo B C D, & gli altri angoli, vguali à gli altri angoli, à quali sono sottoposti gli vgual lati. è dunque l'angolo A E B vguale all'angolo C D B, & l'angolo BED all'angolo BDE, perche anchor il lato BE è vguale al lato BD. adunque tutto l'angolo A E D è vguale à tutto CDE. ma l'angolo C D E si pone vguale a gli angoli A C. onde etiandio l'angolo A E D è vguale à gli angoli A C, & per la medesima ragione l'angolo A B C è vguale à gli angoli A C D. il pentagono dunque ABCDE è equiangolo. il che bisognaua dimostrare.

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE VIII.

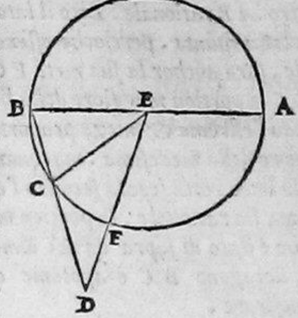
Se nel pentagono equilatero & equiangolo à due angoli continuati si sottopongano linee rette, quelle si segheranno fra loro secondo l'estrema & meza proportione: & le portion maggiori di esse saranno vguali al lato del pentagono.



Nel pentagono equilatero & equiangolo A B C D E à due angoli continuati A B sottopongāsi le rette linee A C B E, che si seghino nel punto H. Dico amendue essere segate secondo l'estrema & meza proportione nel punto H: & le loro portion maggiori essere vguali al lato del pentagono. descriuasi d'intorno al pentagono A B C D E il cerchio A B C D E. & perche le due linee rette E A A B sono vguali alle due A B BC, & conten-
4. del primo. gono angoli vguali, sarà la base BE anchora vguale alla base AC: & il triangolo ABE vguale al triangolo ABC, & gli altri angoli vguali à gli altri angoli, l'vno all'altro, a quali sono sottoposti i lati vguali. adunqne l'angolo BAC è vguale all'angolo A B E. & però
32. del primo. l'angolo AHE è doppio dell'angolo BAH, percioche è fuori del triangolo ABH,
ult. del sesto. & l'angolo EAC è doppio dell'angolo BAC, essendo anchor la circōferenza EDC doppia della circonferenza CB. adūque l'angolo HAE è vguale all'angolo AHE,
6. del primo. & per tal cagione la linea retta HE è vguale alla retta E A, cioe alla AB. & perche la B A è vguale alla A E, sarà anchor l'angolo ABE vguale all'angolo A E B. ma si è dimostrato l'angolo A B E vguale all'angolo B A H. adunque l'angolo B E A è vguale all'angolo B A H. & l'angolo A B E è commune à due triangoli, cioe al triangolo A B E, & al triangolo ABH. il rimanente dunque B A E è vguale al rimanente A H B. onde il triangolo A B E è equiangolo al triangolo ABH. & però come la E B alla B A, così è la A B alla B H. & la B A è vguale alla E H. come dunque la BE alla E H, così la E H alla H B. ma la B E è maggiore della EH. adunque etiandio la E H è maggiore, che la H B. per la qual cosa la linea retta B E è segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto H: & la portion maggiore H E è vguale al lato del pentagono. similmente dimostreremo anchor la A C essere segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto H: & la sua portion maggiore C H essere vguale al lato del pentagono. il che bisognaua dimostrare.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE IX.

Se i lati del heſſagono & del decagono deſcritti nel cerchio ſiano compoſti, ſarà tutta la linea ſegata ſecondo l'eſtrema, & meza proportione: & la portion maggiore ſarà il lato del-l'heſſagono.



Sia il cerchio A B C: & deſcritte le figure nel detto cerchio, ſia il lato del decano B C, & dell'heſſagono C D; & conſtituiſcanſi per diritto fra loro. Dico tutta la linea retta B D eſſere ſegata ſecondo l'eſtrema & meza proportione nel punto C, & la ſua portion maggiore eſſere CD. pigliſi il centro del cerchio che ſia E, & giunganſi E B E C E D, & la BE prolunghiſi nel punto A. perche dunque B C è lato del decagono equilatero, ſarà la circonferenza ACB quintupla della circonferenza B C, & però la circonferenza A C è quadrupla della circonferenza C B. ma come la circonferenza A C alla circõferenza CB, coſi è l'angolo A E C all'angolo C E B. adunque l'angolo A E C è quadruplo dell'angolo C E B. & perche l'angolo E B C è vguale all'angolo E C B, ſarà l'angolo A E C doppio dell'angolo E C B: & la linea retta E C è vguale alla C D, percioche l'vna & l'altra è vguale al lato dell'heſſagono deſcritto nel cerchio A B C. adunque l'angolo CED è vguale all'angolo C D E. & perciò l'angolo E C B è doppio dell'angolo E D C, ma etiandio l'angolo A E C ſi è dimoſtrato doppio dell'angolo E C B. onde l'angolo A E C è quadruplo dell'angolo E D C: & ſi è dimoſtrato l'angolo AEC quadruplo dell'angolo B E C. adunque l'angolo E D C ſarà vguale all'angolo BEC; & l'angolo E B D è commune à due triangoli B E C B E D. onde etiandio il rimanente B E D è vguale al rimanente E C B, & pero il triangolo E B D è equiangolo al triangolo E B C. adunque come la D B alla B E, coſi la E B alla B C: & la E B è vguale alla C D. come dunque la B D alla D C, coſi la D C alla C B. & la B D è maggiore che la D C. onde anchor D C è maggiore che la C B, & per tal cagione la linea retta B D è ſegata ſecondo l'eſtrema & meza proportione nel punto C: & la portion maggiore di eſſa è la C D. il che biſognaua dimoſtrare.

ult. del ſeſto. 5. del primo. 32 del primo. 5. del primo: 32. del primo. 32. del primo. 4. del ſeſto.

IL COMMANDINO.

Dalle coſe gia dimoſtrate ſi poſſono dimoſtrare altre coſe, come queſte.

PROPOSITIONE I.

Se il lato dell'heſſagono ſia ſegato ſecondo l'eſtrema & meza proportione, ſarà la portion maggiore il lato del decagono.

Sia la linea retta A B, ſegata nel punto C dimodo, che A C ſia lato del heſſagono, & C B lato del decagono deſcritto nel medeſimo cerchio. adunque la A B è ſegata ſecondo l'eſtrema, & meza proportione nel punto C, & è A C la portion maggiore. tagliſi dalla A C la linea C D, vguale alla C B. ſarà anchor la A C ſegata ſecondo l'eſtrema & meza proportione nel punto D, & ſarà C D la portion maggiore, per le coſe da noi dimoſtrate alla quinta di queſto.

per l'antecedente.

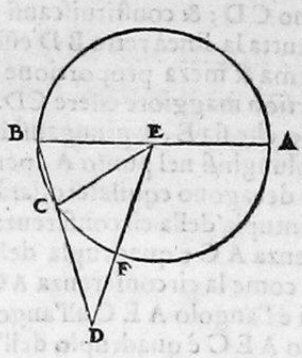
& è

& è A C lato dell'hessagono, & C D lato del decagono. se dunque il lato dell'hessagono sia segato secondo l'estrema et meza proportione, sarà la portion maggiore il lato del decagono. il che bisognaua dimostrare.

PROPOSITIONE II.

Se in vn cerchio c'habbia il diametro rationale sia descritto il decagono equilatero, sarà il lato del decagono apotome quinta.

Siano poste le medesime cose che disopra: & sia il diametro A B rationale. Dico il lato del decagono B C essere apotome quinta. percioche essendo il diametro A B rationale, sarà anchor la sua metà E C, cioè C D rationale: & è D C la portion maggiore della linea retta D B segata secondo l'estrema & meza proportione, & C B la portion minore della medesima. ma quando la portion maggiore della linea retta segata secondo l'estrema & meza proportione, sia rationale, la portion minore è apotome quinta.
alla 6. di quest *il che è stato di sopra da noi dimostrato. adunque il lato del decagono B C è apotome quinta. il che bisognaua dimostrare.*



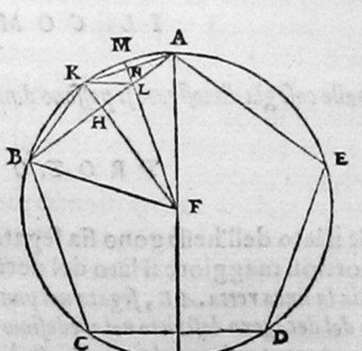
PROPOSITIONE III.

Se il lato del decagono equilatero descritto nel cerchio sia rationale, sarà il diametro del cerchio la quinta di due nomi, ò vero binomio quinto.

Stando le medesime cose, sia il lato del decagono B C rationale. Dico il diametro A B essere la quinta di due nomi. percioche essendo B C, cioè la portion minore della linea retta segata secondo l'estrema & meza proportione, rationale; sarà la portion maggiore C D la quinta di due
alla 6. di quest *nomi. il che etiandio è stato da noi dimostrato, & la A B è doppia della C D. ma la linea retta, che è di lunghezza commensurabile à quella di due nomi anchor essa è di due nomi, & del medesimo ordine per la 67 del decimo libro. adunque anchor A B è la quinta di due nomi. il che bisognaua dimostrare.*

THEOREMA X. PROPOSITIONE X.

Se nel cerchio si descriua il pentagono equilatero, il lato del pentagono può il lato dell'hessagono & del decagono, descritti nel medesimo cerchio.

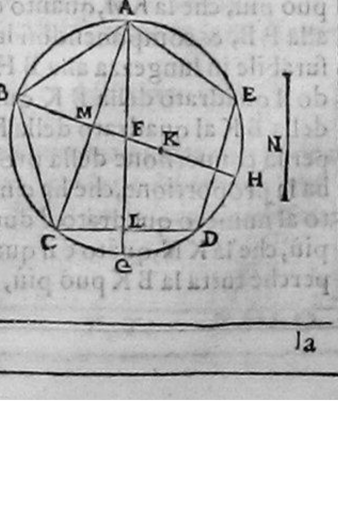


Sia il cerchio A B C D E, & descriuasi in esso il pentagono equilatero A B C D E. Dico che il lato del pentagono A B C D E può il lato dell'hessagono & del decagono descritti nel medesimo cerchio. piglisi il centro del cerchio F. & giunta A F prolunghisi nel punto G; & giungasi F B. poi dal punto F alla A B tirisi la F H perpendicolare: & prolunghisi nel punto K: & giungasi

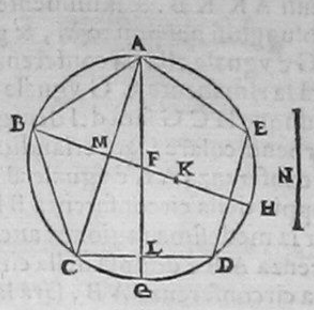
ganſi A K K B. & ſimilmente dal punto F alla A K tiriſi la perpendicolare F B: & prolunghiſi nel punto M, & giungaſi K N. perche dunque la circonferenza A B C G è vguale alla circonferenza AEDG; delle quali la A B C è vguale alla AED: ſarà la rimanente C G vguale alla rimanente G D. ma la C D è del pentagono. adunque la C G ſarà del decagono. & eſſendo la A F vguale alla F B, & la F H perpendicolare; ſarà etiandio l'angolo A F K vguale all'angolo K F B. onde la circonferenza A K è vguale alla circonferenza KB. è dunque la circonferenza A B doppia della circonferenza B K: & però la linea retta A K è lato del decagono, 8. del primo.
per la medeſima ragione, anchor la A K è doppia della KM. & perche la circon- 26 del terzo.
ferenza A B è doppia della circonferenza B K, & la circonferenza C D è vguale alla circonferenza A B, ſarà la circonferenza C D doppia della circũferenza BK. & è la D C doppia della C G. adunque la C G è vguale alla B K. ma la B K è doppia della K M, perche anchor la A K. adunque etiandio la C G ſarà doppia della K M. & è la circonferenza C B doppia della circonferenza B K, eſſendo la C B v-
guale alla B A. onde tutta la G B e doppia della B M, & l'angolo G F B e dop- 12. del quinto.
pio dell'angolo B F M. ma anchor l'angolo G F B e doppio dell'angolo F A B, per ult del ſeſto.
che l'angolo F A B e vguale all'angolo A B F. adunque etiandio l'angolo B F N e 32. del primo.
vguale all'angolo F A B. & è l'angolo K B F commune alli due triangoli A B F ò uero la 20
B F N. il rimanente dunque A F B è vguale al rimanente B N F, & il triangolo del ſterzo.
A B F è equiangolo al triangolo B F N. onde come la A B alla B F, coſi la F B al
la B N. per la qual coſa il rettangolo A B N è vguale al quadrato della F B. oltre 4. del ſeſto:
à ciò perche A L è vguale alla L K, & la L N commune, & ad angoli retti; ſarà la 17. del ſeſto.
baſe K N vguale alla baſe N A. adunque etiandio l'angolo L K N è vguale all'an- 4. del primo:
golo L A N. ma l'angolo L A N è vguale all'angolo K B N. onde anchor l'ango- 5. del primo.
lo L K N è vguale all'angolo K B N, & l'angolo N A K è commune alli due triangoli A K B & A K N. adunque il rimanente A K B e vguale al rimanente K N A,
& il triangolo K A B e equiangolo al triangolo K N A. come dunque la B A alla 4. del ſeſto.
A K, coſi la K A alla A N: & però il rettangolo B A N e vguale al quadrato della 17. del ſeſto.
A K, & ſi e dimoſtrato il rettangolo A B N vguale al quadrato della BF. il rettangolo dunque A B N inſieme col rettangolo B A N, che e il quadrato della A B, e
vguale al quadrato della B F inſieme col quadrato della A K, & e A B lato del pen 2. del ſecondo.
tagono, & B F lato dell'heſſagono, & A K del decagono. adunque il lato del pentagono può il lato dell'heſſagono, & del decagono deſcritti nel medeſimo cerchio. il che biſognaua dimoſtrare.

THEOREMA XI. PROPOSITIONE XI.

Se nel cerchio che ha il diametro rationale, ſia deſcritto vn pentagono equilatero, il lato del pentagono è vna linea irrationale, che ſi chiama minore.



Nel cerchio A B C D E, che habbia il diametro rationale, deſcriuaſi il pentagono equilatero A B C D E. Dico il lato del pentagono A B C D E eſſere vna linea irrationale, che ſi chiama minore. pigliſi il centro del cerchio F; & giunte le A F B F prolũghinſi ne punti G H: & giungaſi A C: & pongaſi F K, la quarta parte della A F: & la A F e rationale. adunque etiandio la F K e rationale. ma e anchor rationale la B F. adunque tutta la B K ſarà rationale. & per
che la circonferenza A C G e vguale alla circon 6. diff. del 10.
ferenza A D G, delle quali la A B C e vguale al



la A E D ; sarà la rimanente C G vguale alla ri-
A manente G D . & se giungiamo A G , si faranno gli angoli al punto L retti : & la D C doppia della C L. per la medesima ragione gli angoli , che sono al punto M sono retti , & la A C doppia della C M . perche dunque l'angolo A L C e vguale all'angolo A M F , & l'angolo L A C e commune alli due triangoli A L C & A M F ; il rimanente A C L , sarà vguale al rimanente M F A ; & però il triangolo A C L e
4. del sesto. equiangolo al triangolo A M F . adunque co-
B me la L C alla C A , cosi la M F alla F A , & le doppie delle antecedenti . onde come la doppia della L C alla C A, cosi la doppia della M F alla F A . ma come la doppia della M F alla F A , cosi è la M F alla metà della F A. come dunque la doppia della L C alla C A, cosi la M F alla metà della F A . & la metà de conseguenti . onde come la doppia della L C alla metà della C A , cosi la M F alla quarta parte della F A. & è la C D doppia della L C : & della C A la metà C M , & F K la quarta parte della F A. come dunque la D C alla C M , cosi è la M F alla F K: & componendosi come
C l'vna & l'altra D C M alla C M, cosi la M K alla K F. & però come il quadrato fatto dall'vna & l'altra D C M al quadrato della C M, cosi il quadrato della M K, al quadrato che si fa dalla K F. & perche segata la linea retta , che è sottoposta à due lati del pẽtagono, come la A C, secõdo l'estrema & meza proportione, la portiõ mag-
D giore è vguale al lato del pentagono cioè à D C ; & la portion maggiore piglian-
E do la metà di tutta può il quintuplo di quello , che si fa dalla metà di tutta; & è la C M la metà di tutta la A C: sarà il quadrato fatto da D C M, come da vna sola linea, quintuplo di quello, che si fa dalla C M. & come il quadrato di D C M, come di vna sola linea al quadrato della C M , cosi habbiamo dimostrato essere il quadrato della M K al quadrato della K F . è dunque il quadrato della M K quintuplo del quadrato della K F. & è il quadrato della K F rationale, essendo rationale il dia-
F metro . adunque etiandio è rationale il quadrato della M K : & essa M K è rationa-
G le ; percioche il quadrato della M K al quadrato della K F ha la proportione , che hà il numero al numero. & perche la B F è quadrupla della F K, sarà la B K quintu-
H pla della K F. & il quadrato della B K ventiquintuplo del quadrato della K F. ma
K il quadrato della M K è quintuplo del quadrato della K F . adunque il quadrato della B K è quintuplo del quadrato della K M : & però à quello non ha la pro-
L portione, che ha il numero quadrato al numero quadrato. è dunque la B K in lunghezza incommensurabile alla K M: & amendue sono rationali. onde le B K K M
M sono rationali in potenza solamente commensurabili. ma se dalla rationale si tragga vna rationale in potenza solamente commensurabile à tutta , la rimanente è irrationale, che si chiama apotome . onde la M B è apotome , & ad essa si aggiunge la M K. Dico anchora esser la quarta. sia il quadrato della N vguale à quello, nel quale il quadrato della B K auanza il quadrato della K M . adunque la B K
N può più, che la K M, quanto è il quadrato della N. & perche la K F è cõmensurabile
O alla F B, & componendosi la K B cõmensurabile alla B F; ma anche la B F è comen-
P surabile in lungezza alla B H: sarà etiandio la K B cõmensurabile alla B H. & essen-
Q do il quadrato della B K quintuplo del quadrato della K M , hauerà il quadrato della B K al quadrato della K M la proportione , che ha cinque ad vno . adunque per la conuersione della proportione il quadrato della B K al quadrato della N ha la proportione, che ha cinque à quattro, & non quella, che ha il numero quadra-
9. del decimo. to al numero quadrato. è dunque la B K incõmensurabile alla N: & però la B K può più, che la K N, quãto è il quadrato della linea retta incõmensurabile ad essa. onde perche tutta la B K può più, che l'aggiunta M K , quanto è il quadrato della linea

retta

retta incommensurabile ad essa, & tutta la B K è commensurabile alla proposta rationale B H: sarà la M B apotome quarta. & il rettangolo contenuto dalla rationale & dalla apotome quarta è irrationale, & la linea, che lo può è irrationale chiamata minore. ma la A B può quello, che è contenuto dalle H B B M, per cioche giunta la A H, il triangolo A B H è equiangolo al triangolo A B M: & è come la H B alla B A, cosi la A B alla B M. adunque A B lato del pentagono è linea irrationale, che si chiama minore. il che bisognaua dimostrare. R S T

IL COMMANDINO.

Et se giungiamo A G si faranno gli angoli al punto L retti, & la D C doppia della C L] *giunte A C A L G, se si intenda giunta anche la A D, perche la circonferenza CG è vguale alla circonferenza G D, sarà l'angolo C A G vguale all'angolo G A D, & le due C A A L sono vguali alle due D A A L, & l'angolo C A L è vguale all'angolo D A L. adunque anchor la base C L è vguale alla base L D, & gli altri angoli vguali à gli altri angoli à quali si sottopongono i lati vguali. l'angolo dunque A L C è vguale all'angolo A L D, & però amendue sono retti. & essendo la C L vguale alla L D, sarà la D C doppia della C L.* A 27. del terzo. 4. del primo. 10. diff. del I.

Et le doppie delle antecedenti] *percioche essendo come la L C alla C A, cosi la M F alla F A, & come la doppia della LC alla LC, cosi la doppia della MF alla MF: sarà per l'vgual proportione come la doppia della L C alla C A, cosi la doppia della M F alla F A.* B

Et però come il quadrato fatto dall'vna & l'altra D C M al quadrato della C M] *per la 22 del sesto libro.* C

La portion maggiore e vguale al lato del pentagono, cioe è D C] *per la 8 di questo.* D

Et la portion maggiore pigliando la metà di tutta può il quintuplo di quella, che fà si dalla metà di tutta] *per la prima di questo.* E

Adunque etiandio e rationale il quadrato della M K] *percioche quello, che è commensurabile al rationale, esso anchora è rationale, per la nona diffinitione del 10 libro.* F

Et essa M K e rationale] *per l'ottaua diffinitione del medesimo libro.* G

Et il quadrato della B K ventiquintuplo del quadrato della K F] *per la 20 del sesto libro. percioche 25 à 5 è come à 5 ad 1. onde 25 ad 1 ha doppia proportione di quella, che ha 5 ad 1 per la 10 diffinitione del quinto libro.* H

Adunque il quadrato della B K e quintuplo del quadrato della K M] *perche essendo il quadrato della B K al quadrato della K F, come 25 ad 1; & il quadrato della M K al medesimo quadrato della K F, come 5 ad 1, sarà il quadrato della BK al quadrato della MK, come 25 à 5, cioè come 5 ad 1.* K

E dunque la B K in lunghezza incommensurabile alla K M] *per la nona del decimo libro.* L

Ma se dalla rationale si tragga vna rationale in potenza solamente, commensurabile à tutta la rimanente e irrationale, che si chiama apotome] *per la 74 del decimo libro.* M

Et perche la K F e commensurabile alla F B] *intendi commensurabile in lunghezza, come di sotto, percioche K F è posta la quarta parte della F A, cioè della F B.* N

Et componendosi la K B, commensurabile alla B F] *per la 16 del decimo.* O

Ma anche la B F e commensurabile in lunghezza alla B H] *percioche la BF è la metà della B H.* P

Sarà etiandio la K B commensurabile alla B H] *per la 12 del decimo.* Q

Sarà la M B apotome quarta] *per la quarta delle terze diff.* R

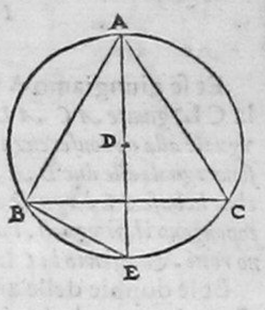
Et il rettangolo contenuto dalla rationale & dalla apotoma quarta e irrationale, & quella, che lo può e irrationale chiamata minore] *per la 95 del decimo.* S

Ma la A B può quello, che e contenuto dalle H B B M] *per lo Corollario dell'ottaua del sesto: & per la 17 del medesimo.* T

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XII.

Se nel cerchio ſia deſcritto il triangolo equilatero, il lato del triangolo è in potenza triplo del ſemidiametro del cerchio.

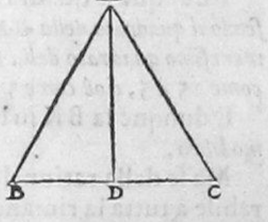
Sia il cerchio A B C, & deſcriuaſi in eſſo il triangolo equilatero A B C. Dico il lato del triangolo A B C eſſere triplo in potenza del ſemidiametro del cerchio A B C. pigliſi il centro del cerchio D, & giunta la A D prolunghiſi nel punto E, & giungaſi B E. perche dunque il triangolo A B C è equilatero, ſarà la circonferenza B E C, la terza parte della circonferenza del cerchio A B C. onde la circonferenza B E è la ſeſta parte della circonferenza del cerchio, & però la linea retta B E è lato dell'heſſagono, & vguale alla D E, che è ſemidiametro del cerchio. (Cor. della 15. del quarto.) & perche la A E è doppia della E D, ſarà il quadrato della A E quadruplo del quadrato della E D, cioe del quadrato della E B: (20. del ſeſto.) & il quadrato della A E è vguale alli quadrati delle A B B E. (47. del primo.) adunque i quadrati delle A B B E ſono quadrupli del quadrato della B E; & diuidendoſi il quadrato della A B triplo del quadrato della B E, & la B E è vguale alla E D. il quadrato dunque della A B è triplo del quadrato della D E. onde il lato del triangolo è in potenza triplo del ſemidiametro del cerchio. il che biſognaua dimoſtrare.



IL COMMANDINO.

Appare anchora il lato del triangolo equilatero alla linea retta, che è tirata dall'angolo perpendicolare alla baſe, hauere in potenza la proportione che ha 4 à 3.

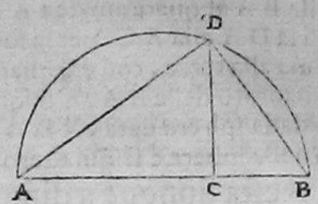
Sia il triangolo equilatero A B C, la cui baſe B C ſia ſegata per mezo nel punto D: & giungaſi A D. ſarà la A D perpendicolare alla A C, percioche due lati A D D B ſono vguali à due lati A D D C, & la baſe A B è vguale alla baſe A C. adunque l'angolo A D B è vguale all'angolo A D C: & però amendue ſono retti, & la A D è perpendicolare alla B C. Dico il quadrato della B A al quadrato della A D hauere la medeſima proportione, che ha 4 à 3. percioche eſſendo la A B doppia della B D, ſarà il quadrato della A B quadruplo dal quadrato della BD: (20. del ſeſto.) *& il quadrato della A B è vguale alli quadrati delle A D D B.* (47. del primo.) *adunque il quadrato della B A al quadrato della A D, ha la medeſima proportione, che 4 à 3. il che biſognaua dimoſtrare.*



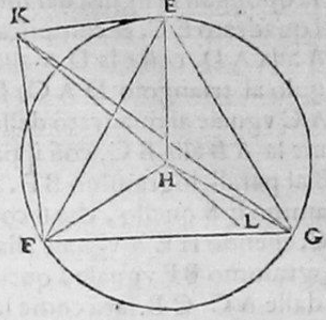
PROBLEMA I. PROPOSITIONE XIII.

Conſtituire la pyramide, & comprenderla nella data ſphera, & dimoſtrare che'l diametro della ſphera è in potenza ſeſquialtero del lato di eſſa pyramide.

Propongaſi il diametro della ſphera data A B, & ſeghiſi nel punto C, di modo, che la A C ſia doppia della C B, & deſcriuaſi nella A B il mezo cerchio A D B: &

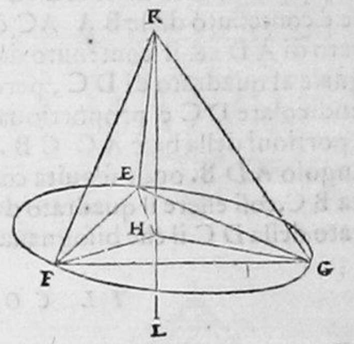


dal punto C tirisi la C D perpendicolare al la A B; & giungasi D A. oltre à ciò propongasi il cerchio E F G, che habbia il semidiametro vguale alla D C, nel quale si descriua il triangolo equilatero E F G; & piglisi il centro del cerchio H, & giunganſi EH HF HG, & dal punto H drizzisi la H K, perpendicolare al piano del cerchio E F G, dimodo che la H K ſia vguale alla A C, & giunganſi K E K F K G. perche dunque la H K è perpendicolare al piano del cerchio E F G, ſarà etiandio gli angoli retti con tutte quelle linee che essendo nel medesimo piano del cerchio la toccano. ma la tocca ciascuna di queste linee HE HF H G. adunque la H K è perpendicolare à ciascuna di esse H E H F H G. & perche la A C è vguale alla H K, & la C D alla H E, & contengono angoli retti, sarà la base D A vguale alla base K E: & per la medesima ragione amendue K F K G sono vguali alla D A. onde le tre K E K F K G sono fra loro vguali. & essendo la A C doppia della C B, sarà la A B tripla della B C: & come la A B alla B C, cosi è il quadrato della A D al quadrato della D C, il che si dimostrerà di sotto. il quadrato dūque della A D è triplo del quadrato della D C: & è il quadrato della FE triplo del quadrato della E H: & la D C è vguale alla E H. adunque anchor la A D è vguale alla E F. ma la A D si è dimostrata vguale à ciascuna di esse K E K F K G. onde etiandio ciascuna delle EF FG G E è vguale à ciascuna delle K E K F K G. & però li quattro triangoli E F G K E F K F G K G E sono equilateri. adunque la pyramide è constituita da quattro triangoli vguali & equilateri, la cui base è il triangolo E F G, & la cima il punto K. la onde bisogna comprendere essa pyramide nella data sphera, & dimostrare il diametro della sphera essere in potenza sesquialtero del lato della pyramide. prolunghisi la linea retta H L per diritto alla H K, & pongasi la H L vguale alla B C. & perche come la A C alla C D, cosi e la D C alla C B, & la A C e vguale alla K H, & la C D alla H E & la C B alla H L; sarà come la K H alla H E, cosi la E H alla H L. il rettangolo dunque K H L e vguale al quadrato della E H: & amendue gli angoli K H E E H L sono retti. adunque il mezo cerchio descritto nella K L passerà etiandio per lo punto E, perche se congiungiamo E L, l'angolo L E K sarà retto, essendo il triangolo E L K equiangolo à ciascuno de tri angoli E L H E K H. se dunque stando ferma la K L il mezo cerchio si aggiri sin tanto che ritorni nel medesimo luogo, donde cominciò à mouersi, passera anchora per li punti F G, giunte le F L L G, & fatti similmente gli angoli retti alli punti F G: & sara la pyramide compresa nella sphera data, percioche il diametro della sphera K L e vguale al diametro della sphera data A B, ponendosi la K H vguale alla A C, & la H L alla C B. Dico dunque il diametro della sphera essere in potenza sesquialtero del lato della pyramide. percioche essendo la A C doppia della C B, sara la A B tripla della B C. adunque per la conuersione della proportio



3 diff del undecimo.

4. del primo.



A

B

C

17. del sesto

8 del sesto

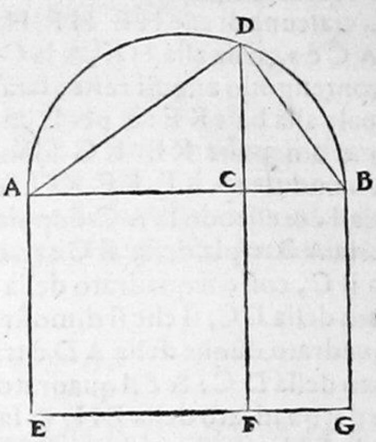
ne, la B A e sesquialtera della A C . ma come la B A alla A C, cosi e il quadrato della B A al quadrato de a A D . percioche giunta B D e come la B A alla A D, cosi la D A alla A C. per la somiglianza de triangoli D A B D A C, & come la prima alla terza, cosi e il quadrato della prima al quadrato della seconda. onde il quadrato della B A, e sesquialtero del quadrato della A D, & la B A e diametro dalla sphera data. & la A D vguale al lato della pyramide, & però il diametro della sphera e sesquialtero del lato della pyramide. il che bisognaua dimost.

Cor. 8. del 6. Cor. 10. del 6.

Resta dunque à dimostrare, come la A B alla B C cosi essere il quadrato della A D al quadrato della D C.

Propongasi la figura del mezo cerchio, & giungasi D B, & dalla A C descriuasi il quadrato E C, & compiscasi il parallelogrammo F B. perche dunque come la B A alla A D, cosi è la D A alla A C, conciosiacosa che il triangolo D A B sia equi angolo al triangolo D A C; sarà il rettangolo B A C vguale al quadrato della A D. & perche come la A B alla B C, cosi il parallelogrammo E B al parallelogrammo B F. & è il parallelogrammo E B quello, che si contiene dalle B A A C, essendo la E A vguale alla A C; & il parallelogrammo B F vguale à quello, che si contiene dalle A C C B: sarà come la A B alla BC cosi il rettangolo contenuto dalle BA AC à quello, che è contenuto dalle AC CB. ma quello, che è contenuto dalle B A AC è vguale al quadrato di A D: & il contenuto dalle A C C B è vguale al quadrato di D C, percioche la perpendicolare D C è proportionale di mezo fra le portioni della base A C C B. essendo retto l'angolo A D B. onde seguita come la A B alla alla B C, cosi essere il quadrato della AD al quadrato della D C. il che bisognaua dimostrare.

Cor. ottauo del sesto. 17. del sesto. 1. del sesto: 17. del sesto: Cor. dell'ottaua del sesto.



IL COMMANDINO.

A Et come la A B alla B C cosi il quadrato della AD al quadrato della D C, il che si dimostrerà di sotto] *cioè alla fine di questo. ma nel scholio si dimostra in altro modo, cosi.*

B Percioche essendo come la B A alla A C, cosi il quadrato della D A al quadrato della A C, sarà per la conuersione della proportione, come la A B alla BC, cosi il quadrato della A D al quadrato della D C] *perche le tre linee rette D A A D A C sono continuatamente proportionali per lo corollario della ottaua del sesto, & il quadrato della A D auanza il quadrato della A C, quanto è il quadrato della D C, per la 47 del primo.*

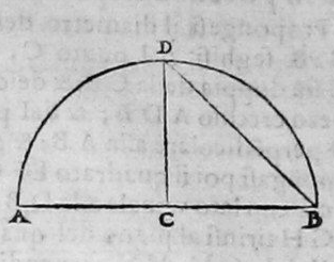
C Et è il quadrato della F E triplo del quadrato della E H] *per la precedente.*

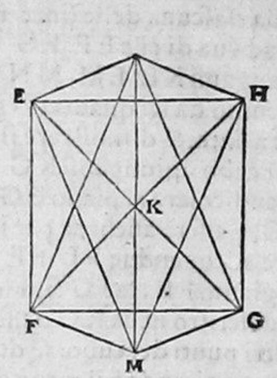
D Adunque anchor la D A è vguale alla E F] *percioche essendo il quadrato della A D triplo del quadrato della D C, & il quadrato della F E triplo del quadrato della E H, & il quadrato della D C vguale al quadrato della E H, conciosiacosa che la DC sia vguale alla E H; sarà il quadrato della A D vguale al quadrato della E F: & però la A D è vguale alla EF.*

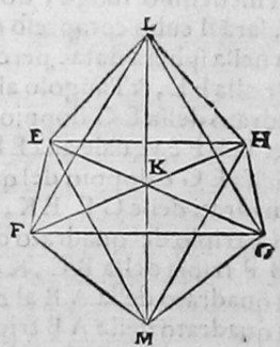
PROBLEMA II. PROPOSITIONE XIIII.

Constituire l'ottaedro & comprenderlo nella medesima sphera, che la pyramide, & dimostrare, che'l diametro della sphera è doppio in potenza del lato dell'ottaedro.

Propongasi il diametro della sphera data A B : & seghisi per mezo nel punto
C. & descriuasi nella A B il mezo cerchio A D B : & dal punto C tirisi la C D per
pendicolare alla A B : & giungasi D B. propongasi oltre à ciò il quadrato EFGH,
che habbia ciascun lato vguale alla B D; & giunte H F EG drizzisi dal punto K la
K L perpendicolare al piano del quadrato E F G H . & prolunghisi dall'altra par-
te del piano, come K M, & traggasi da amendue le linee rette K L K M l'vna & l'al
tra K L K M vguale ad vna di esse K E K F K G K H, & giunganasi L E L F L G
L H M E M F M G M H. perche dunque
la K E è vguale alla K H, & l'angolo E K H è
retto; sarà il quadrato della H E doppio
del quadrato della E K. similmente perche
la L K è v vguale alla KE, & l'angolo L K E
è retto, sarà il quadrato della E L doppio 47. del primo.
del quadrato della E K. & si è dimostrato
anchora il quadrato della H E doppio del
quadrato della E K. adunque il quadrato
della L E è vguale al quadrato della E H. &
la L E è vguale alla EH. per la medesima ra
gione, anchor la L H è vguale alla H E: & il
triangolo LEH è equilatero. similmente di
mostreremo etiandio ciascuno de gli altri
triangoli, le cui basi sono i lati del quadra-
to E F G H, & le cime i punti L M, essere e-
quilatero. si è dunque fatto vn'ottaedro,
che è contenuto da otto triangoli equilate
ri. la onde bisogna anche comprenderlo
nella sphera data, & dimostrare il diametro
della sphera, essere in potenza doppio del
lato dell'ottaedro, percioche essendo le tre
linee rette LK KM KE vguali fra loro, il
mezo cerchio descritto nella LM, passerà
anchora per lo punto E. & per la medesima
cagione, se stando ferma la L M & aggi-
randosi il mezo cerchio, ritorni al medesi-
mo luogo, donde cominciò à mouersi, pas-
serà etiadio per li punti FGH, & l'ottaedro
sarà compreso nella sphera. Dico anchora
essere compreso nella sphera data. perche
la L K è uguale alla KM, & la KE è comune,
& contengono gli angoli vguali, sarà la ba 4. del primo.
se L E vguale alla base E M, & perche l'ango
lo L E M è retto. essendo nel mezo cerchio,
sara il quadrato della LM doppio del qua- 47. del primo.
drato della L E. oltre à ciò perche la A C e





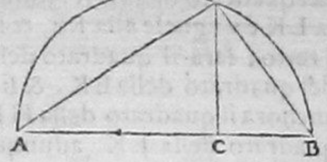


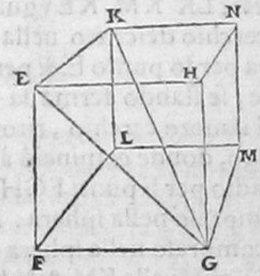
vguale alla C B, sarà la A B doppia della B C, & come la A B alla BC cosi il qua Corr. 8. & 20.
drato della A B al quadrato della B D. adunque il quadrato della A B e doppio del sesto.
del quadrato della B D &. si e dimostrato, il quadrato della L M doppio del qua-
drato della L E, & il quadrato della B D e vguale al quadrato della LE, percioche
E H si e posta vguale alla D B. adunque il quadrato della A B e vguale al quadra-
to della L M: & però la A B e vguale alla L M, & la A B e diametro della sphera
data. onde la LM e vguale al diametro della sphera data. adunque l'ottaedro si e
compreso nella sphera data. & insieme si e dimostrato il diametro della sphera es
sere in potenza doppio del lato dell'ottaedro.

PROBLEMA III. PROPOSITIONE XV.

Constituire il cubo, & comprenderlo nella medesima sphera, che le precedenti figure, & dimostrare che'l diametro della sphera è in potenza triplo del lato del cubo.

Propongasi il diametro della data sphera A B: & seghisi nel punto C, dimodo che la A C sia doppia della C B; & descriuasi nella A B il mezo cerchio A D B; & dal punto C tirisi la C D perpēdicolare alla A B; & giungasi la D B. propongasi poi il quadrato E F G H, che habbia ciascun lato vguale alla D B; & dalli punti E F G H tirinsi al piano del quadrato E F G H le E K F L G M H N perpendicolari: & traggasi da ciascuna delle linee rette E K F L G M H N ad vna di esse E F F G G H H E, vguale ciascuna delle E K F L G M H N; & giunganſi K L L M M N N K. si è dunque constituito il cubo F N, il quale è contenuto da sei quadrati vguali. la onde etiandio bisogna comprenderlo nella sphera data, & dimostrare il diametro della sphera essere in potenza triplo del lato del cubo. giunganſi K G E G, & perche l'angolo KEG è retto, essendo la KE perpendicolare al piano E G, & alla linea retta E G, il mezo cerchio descritto nella K G, passerà anchora per il punto E. oltre à questo perche la F G è perpendicolare ad amendue F L F E, sarà etiandio perpendicolare al piano F K. onde se giungiamo F K, la F G sarà perpendicolare anchora alla F K, & però il mezo cerchio descritto nella K G passerà per lo punto F. similmente anchora passerà per gli altri punti del cubo. se dunque stando ferma la K G & aggirandosi il mezo cerchio ritorni di nuouo nel medesimo luogo, donde cominciò à mouersi, sarà il cubo compreso nella sphera. Dico anchora nella sphera data. percioche essendo la G F vguale alla F E, & l'angolo al punto F retto, sarà il quadrato della E G doppio del quadrato della E F. & la E F è vguale alla E K. il quadrato dunque della E G è doppio del quadrato della E K. onde i quadrati delle G E E K, cioè il quadrato della G K è triplo del quadrato della K E. & perche la A B è tripla della B C, & come la A B alla B C cosi il quadrato della A B al quadrato della B D, sarà il quadrato della A B triplo del quadrato della B D. & si è dimostrato anchora il quadrato della G K triplo del quadrato della K E, & si è posta la K E vguale alla B D. adunque etiandio la K G è vguale alla A B, & la A B è diametro della sphera data. onde anchor la K G sarà vguale al diametro della sphera data. il cubo dunque è compreso nella data sphera, & insieme si è dimostrato il diametro della sphera essere in potenza triplo del lato del cubo. il che bisognaua dimost.





3. diff. dell'undecimo.

4. dell'undeci.

47. del primo. Cor. 20. del 6.

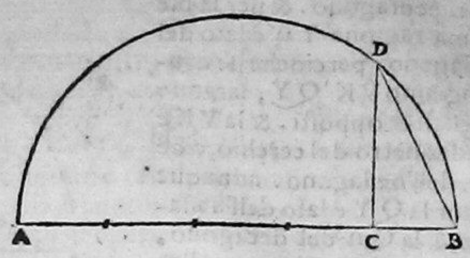
PROBLEMA IIII. PROPOSITIONE XVI.

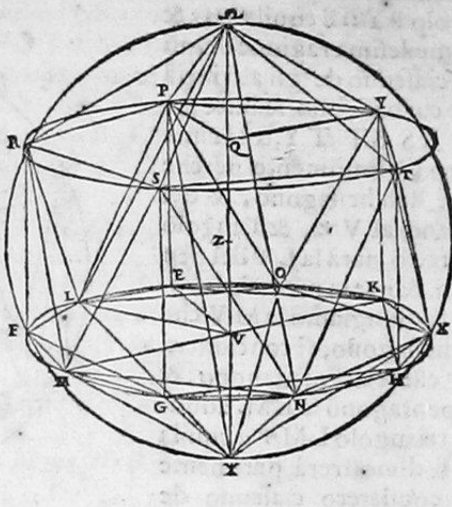
Constituire l'icosaedro & comprenderlo nella medesima sphera, che l'altre figure, & dimostrare che'l lato dell'icosaedro

dro

dro è vna linea irrationale, che ſi chiama minore.

Propongaſi il diametro della data ſphera A B: & ſeghiſi nel punto C di modo, che la A C ſia quadrupla della C B: & nella A B deſcritto il mezo cerchio A D B, tiriſi dal punto C la linea retta CD perpendicolare alla A B. & giungaſi D B. fatto queſto propógaſi il cerchio E F G H K, il cui ſemidiametro ſia vguale alla D B, & deſcriuaſi nel cerchio E F G H K il pētagono equilatero & equiangolo E F G H K. & le circonferenze EF FG GH HK KE ſiano ſegate per mezo ne punti L M N X O, & giunganſi EL LF FM MG GN NH HX XK KO OE. & ſimilmente LM MN NX XO OL. il pētagono dunque LMNXO è equilatero, & la linea retta EO è lato del decagono. poi da punti E F G H K tirinſi le EP FR GS HT KY perpendicolari al piano del cerchio, che ſiano vguali al ſemidiametro del cerchio E F G H K. & giunganſi PR RS ST TY YP PL LR RM MS SN NT TX

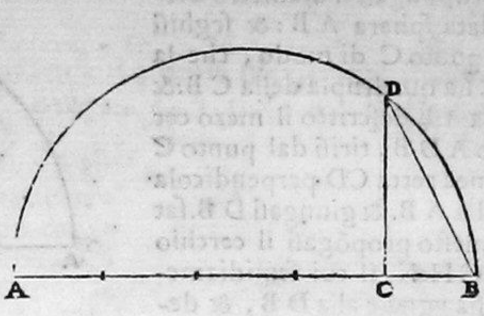


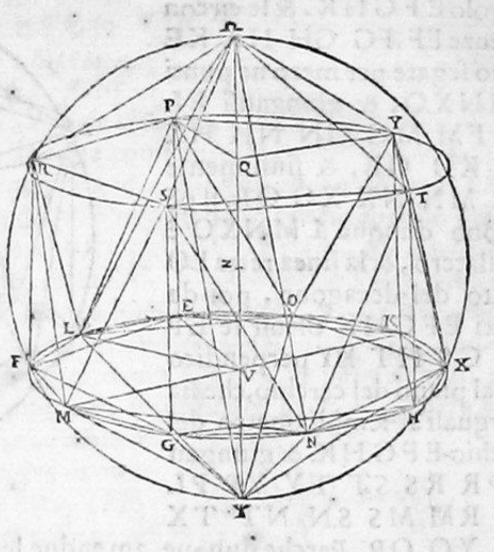


XY YO OP. Perche dunque amendue le E P K Y ſono perpendicolari al medeſimo piano, ſarà la E P parallela alla K Y, & è vguale ad eſſa. ma quelle linee rette, che congiungono le vguali & parallele dalla medeſima parte, anchor loro ſono vguali & parallele. adunque la P Y è vguale & parallela alla E K. ma la E K è lato del pentagono equilatero. onde anchor la P Y è lato del pentagono equilatero, deſcritto nel cerchio E F G H K. per la medeſima ragione ciaſcuna di eſſe P R R S S T T Y è lato del pentagono equilatero, deſcritto nel medeſimo cerchio. il pentagono dunque P R S T Y è equilatero. & perche il lato dell'heſſagono è P E, del decagono E O, & l'angolo P E O è retto, ſarà la P O lato del pentagono, conciosiacoſa che il lato del pentagono poſſa il lato dell'heſſagono, & del decagono, deſcritto nel medeſimo cerchio. & per la medeſima ragione la OY è lato del del pentagono. ma etiandio la P Y è lato del pentagono. è dunque il triangolo P O Y equilatero, & ſimilmente ciaſcuno de triangoli P L R R M S S N T T X Y è equilatero. & perche ſi è dimoſtrata l'vna & l'altra di eſſe P L P O lato del pentagono, & è del pentagono L O, ſarà P L O triangolo equilatero. & per la medeſima ragione ciaſcuno de triangoli L R M M S N N T X X Y O è equilatero. pigliſi il centro del cerchio E F G H K, che ſia il punto V, & dal punto V drizziſi la V Ω perpendicolare al piano del cerchio: & prolunghiſi dall'altra banda, come la V ♆, & traggaſi il lato dell'heſſano V Q. & del decagono l'vna & l'altra di eſſe V ♆ Q Ω. & giunganſi P Ω P Q Y Ω E V L V L ♆ ♆ M. & perche amendue le V Q P E ſono perpendicolari al piano del cerchio, ſarà la V Q parallela alla P E, & ſono vguali. adunque le E V P Q ſono & vguali & parallele. & la E V è la-

A 33. del primo. — B — 6 dell'undec.

to dell'hessagono. adunque etiandio la P Q è dell'hessagono. & essendo lato del-
10. di questo. l'hessagono la P Q & del decagono la Q Ω, & l'angolo P Q Ω retto, sarà P Ω la to del pentagono. & per la medesima ragione Y Ω è lato del pentagono, percioche se congiungiamo V K Q Y, saranno & vguali & opposti. & la V K è semidiametro del cerchio, cioè lato dell'hessagono. adunque anchor la Q Y è lato dell'hessagono, & la Q Ω del decagono, & l'angolo Y Q Ω è retto. adunque la Y Ω è del pentagono, & è del pentagono la P Y. onde il triangolo P Y Ω è equilatero. & per la medesima ragione è equilatero ciascuno de gli altri triãgoli, le cui basi sono le linee rette P R R S S T T Y, & la cima il punto Ω. similmente perche la V L è dell'hessagono, & del decagono al V Ψ, & l'angolo L V Ψ retto, sarà la L Ψ del pentagono. & per la medesima ragione se giungiamo la M V che è dell'hessagono, si concluderà la M Ψ essere del pentagono. & è del pentagono la L M. adunque il triangolo L M Ψ è equilatero. si dimostrerà parimente essere equilatero ciascuno de gli altri triangoli, le cui basi sono M N N X X O O L, & la cima il punto Ψ. si è dunque costituito l'icosaedro, che si contiene da venti triangoli equilateri. onde bisogna comprenderlo nella data sphera, & dimostrare il lato dell'icosaedro essere linea irrationale, che è chiamata





C minore. percioche essendo la V Q dell'hessagono, & del decagono la Q Ω, la linea retta V Ω è segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto Q. & la V Q è portion maggiore. è dunque come la Ω V alla V Q, così la V Q alla Q Ω: & è
D la V Q vguale alla V L: & la Q Ω alla V Ψ. onde come la Ω V alla V L, così la L V alla V Ψ: & sono gli angoli Ω V L L V Ψ retti. & però se giungiamo la linea retta
6. del sesto. L Ω, sarà l'angolo Ψ L Ω retto, per la somiglianza de triangoli Ψ L Ω V L Ω. adunque il mezo cerchio descritto nella Ψ Ω passerà anchora per lo punto L. per la medesima ragione perche come la Ω V alla V Q, così e la V Q alla Q Ω, & la Ω V e vguale alla Ψ Q, & la V Q alla Q P; sarà come la Ψ Q alla Q P, così la P Q alla Q Ω: & se giungiamo altresì la P Ψ, sarà l'angolo P retto. adunque il mezo cerchio descritto nella Ψ Ω passerà anchora per lo punto P. & se stando ferma Ψ Ω & aggirandosi il mezo cerchio, ritorni di nuouo nel medesimo luogo, donde cominciò à mouersi, passerà etiandio per P, & per gli altri punti dell'icosaedro: & sarà l'icosaedro compreso nella sphera. Dico anche nella sphera data. seghisi la V Q per mezo nel punto Z. & perche la linea retta V Ω e segata secondo l'estrema
E & meza proportione nel punto Q. & Ω Q e la minor sua portione, essa Ω Q pigliando la metà della portion maggiore cioe, la Q Z, potrà il quintuplo di quel quadrato, che si fà dalla metà della portion maggiore. il quadrato dunque della

ΩZ è quintuplo del quadrato della ZQ, & la ΩΨ è doppia della ZΩ, & della A Q, è doppia la QV. adunque il quadrato della ΩΨ, è quintuplo del quadrato della VQ. & perche la A C è quadrupla della C B, ſarà la A B quintupla della B C. & come la A B alla B C, coſi il quadrato della A B al quadrato della B D. adunque il quadrato della A B è quintuplo del quadrato della B D. & ſi è dimoſtrato il quadrato della ΩΨ quintuplo del quadrato della VQ, & la D B vguale alla VQ, percioche amendue ſono vguali al ſemidiametro del cerchio E F G H K. onde anchor la A B è vguale alla ΨΩ: & la A B è diametro della ſphera data. adunque etiandio ΨΩ ſarà diametro della detta ſphera. l'icoſaedro dunque è cõpreſo nella ſphera data. Dico il lato dell'icoſaedro eſſere una linea irrationale, che è chiamata minore. percioche eſſendo il diametro della ſphera rationale, & in potenza quintuplo del ſemidiametro del cerchio E F G H K, ſarà anchor il ſemidiametro del cerchio E F G H K rationale. onde etiandio ſarà rationale il ſuo diametro. & ſe nel cerchio, che habbia il diametro rationale ſi deſcriua il pentagono equilatero, ſarà il lato del pentagono vna linea irrationale, che è chiamata minore. ma il lato del pentagono E F G H K è dell'icoſaedro. adunque il lato dell'icoſaedro è vna linea irrationale chiamata minore.

F G H K L

COROLLARIO.

Da queſto è chiaro il diametro della ſphera eſſere in potenza quintuplo del ſemidiametro del cerchio, dal quale è deſcritto l'icoſaedro: & il diametro della ſphera eſſere compoſto del lato dell'heſſagono, & de due lati del decagono, che ſi deſcriuono nel medeſimo cerchio.

IL COMMANDINO.

Perche dunque amendue le E P K Y ſono perpendicolari al medeſimo piano, ſarà la E P parallela alla K Y] *per la 6 dell'vndecimo.* A

Sarà la P O lato del pentagono] *per la 10. di queſto.* B

Percioche eſſendo la V Q lato dell'heſſagono, & del decagono la QΩ, la linea retta VΩ è ſegata ſecondo l'eſtrema & meza proportione nel punto Q] *per la 9. di queſto.* C

Onde come la ΩV alla VL, coſi la LV alla VΨ, & ſono gli angoli ΩVL LVΨ retti, & pero ſe giungiamo la linea retta LΩ, ſarà l'angolo ΨLΩ retto, per la ſomiglianza de triangoli ΨLΩ VLΩ] *percioche eſſendo come la ΩV alla VL, coſi la LV alla VΨ, ſarà come la ΩV alla VΨ, cioè come la prima alla terza, coſi il quadrato della prima ΩV al quadrato della ſeconda VL, & componendoſi come la ΩΨ alla ΨV, coſi li quadrati delle ΩV VL, cioè il quadrato della ΩL al quadrato della LV: & per la conuerſione della proportione come la ΨΩ alla ΩV, coſi il quadrato della LΩ al quadrato della ΩV. onde la LΩ è proportionale di mezo fra le ΨΩ ΩV. il che moſtraremo di ſotto. come dunque la ΨΩ alla ΩL, coſi la LΩ alla ΩV: & è l'angolo LΩΨ commune all'vno & l'altro. adunque il triangolo ΨΩL è ſimile al triangolo LΩV; & l'angolo LVΩ retto, è vguale all'angolo ΨLΩ. per la qual coſa l'angolo ΨLΩ ſarà retto. ma la LΩ eſſere proportionale di mezo fra le ΨΩ ΩV ſi conoſcera da queſto.* D

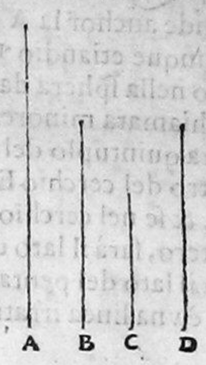
Se ſiano tre linee rette & ſia come la prima alla terza, coſi il quadrato della ſeconda al quadrato della terza le dette linee ſarãno cõtinuatamẽte proportionali.

Siano tre linee rette A B C, & ſia come la A alla C, coſi il quadrato della B al quadrato della C. Dico le A B C eſſere continuatamente proportionali. pigliſi fra le A C la proportionale di mezo D. ſarà come la A alla C coſi il quadrato della A al quadrato della D, cioè il qua-

drato della D al quadrato della C. ma come la A alla C, così è posta il quadrato della B al quadrato della C. adunque il quadrato della D è vguale al quadrato della B: & però la D è vguale alla B. le tre linee dunque A B C sono continuatamente proportionali.

Ma si può più chiaramente dimostrare, che l'angolo Ψ L Ω sia retto in questo modo.

Perche come la Ω V alla V L, così è la L V alla V Ψ & sono gli angoli Ω V L L V Ψ retti, sarà il triangolo Ω V L simile al triangolo L V Ψ: & l'angolo L Ω V vguale all'angolo V L Ψ. ma gli angoli V L Ω L Ω V sono vguali ad vn retto, essendo retto L V Ω. adunque anchor gli angoli Ω L V V L Ψ sono vguali ad vn retto, & però l'angolo Ψ L Ω è retto. il che bisognaua dimostrare.



E Essa Ω Q pigliando la metà della portion maggiore cioè la Q Z, potrà il quintuplo di quel quadrato, che si fa dalla metà della portion maggiore] *per la 3 di questo.*

F Adunque il quadrato della Ω Ψ è quintuplo del quadrato della V Q] *per la 15. del quinto.*

G Et come la A B alla B C, così il quadrato della A B al quadrato della B D] *per lo corollario 20 del sesto, percioche è come la A B alla B D, così la D B alla B C per la 8 del medesimo.*

H Sarà anchora il semidiametro del cerchio E F G H K rationale. onde etiandio

6. del decimo. sarà rationale il suo diametro] *percioche essendo il diametro della sphera in potenza quintuplo del semidiametro del cerchio, hauerai l quadrato del diametro della sphera al quadrato del semidiametro, la proportione, che ha il numero al numero. & però sarà commensurabile ad esso. ma il quadrato del diametro della sphera è rationale, essendo ella rationale. adunque anchor il quadrato del semidiametro del cerchio è rationale: & per tal cagione sarà ra-*

6.diff.del 10. *tionale il semidiametro del cerchio, & il suo diametro, perche quella linea, che è commensurabile alla rationale, anchor essa è rationale.*

K Et se nel cerchio che habbia il diametro rationale si descriua il pētagono equilatero, sarà il lato del pentagono vna linea irrationale, che si chiama minore] *per la 11 di questo.*

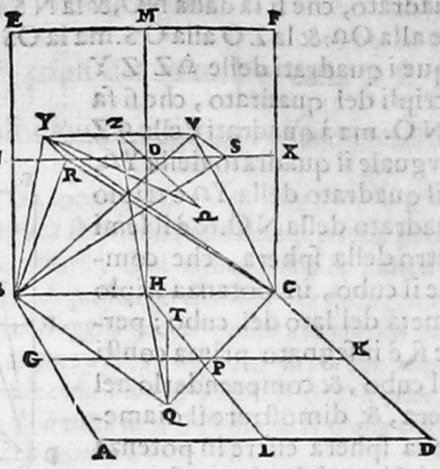
L Ma il lato del pentagono E F G H K e dell'icosaedro] *& questo manifestissimamente appare per le cose gia dette.*

PROBLEMA VI. PROPOSITIONE XVII.

Constituire il dodecaedro, & comprenderlo nella medesima sphera, che tutte l'altre, & dimostrare, il lato del dodecaedro essere vna linea irrationale, che si chiama apotome, ò vero residuo, ò reciso.

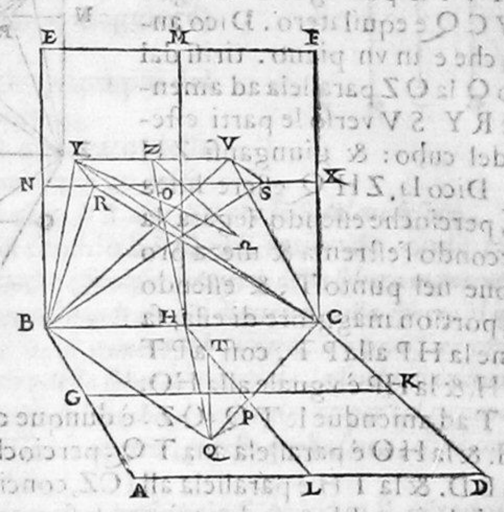
Propongansi del predetto cubo due piani ad angoli retti fra loro A B C D C B E F: & seghisi ciascuno de suoi lati A B B C C D D A E F E B F C, per mezo ne punti G H K L M N X, & giunganſi G K H L M H N X. poi seghinsi le linee rette N O O X H P secondo l'estrema & meza proportione ne punti R S T: & siano le portioni loro maggiori R O O S T P: & dalli punti R S T drizzinsi le R Ψ S V T Q ad angoli retti sopra i piani del cubo, verso la parti esteriori di esso, che sian poste vguali alle R O O S T P: & giunganſi Y B B Q Q C C V V Y. Dico il pentagono Y B Q C V essere equilatero, & in vn piano: & oltre à ciò equiangolo. giunganſi R B S B V B. & perche la linea retta N O è segata secondo

l'eſtrema & meza proportione nel punto R, & la O R è la portion maggiore di
eſſa; ſaranno i quadrati delle O N N R tripli del quadrato della O R. & la O N è
vguale alla N B, & la O R alla R Y. adunque i quadrati delle B N N R ſono tri- A
pli del quadrato della R Y. ma à quadrati delle B N N R è vguale il quadrato
della B R. onde il quadrato della B R è triplo del quadrato della R Y; & però i 47. del primo.
quadrati delle B R R Y ſono quadrupli del quadrato della R Y, & à quadrati del
le B R R Y è vguale il quadrato della B Y. adunque il quadrato della B Y è qua
druplo del quadrato della Y R, & per tal cagione la B Y è doppia della Y R. & è 20. del ſeſto.
la V Y doppia della Y R, perche e-
tiandio la R S, è doppia della R O,
cioè della R Y. adunque la B Y è
vguale alla Y V. ſi dimoſtrerà ſimil
mente, che ciaſcuna di eſſe B Q
Q C C V è vguale ad amendue le
B Y Y V. il pentagono dunque
B Y V C Q è equilatero. Dico an-
chora che è in vn piano. tiriſi dal
punto O la O Z parallela ad amen-
due le R Y S V verſo le parti eſte-
riori del cubo: & giunganſi Z H
H Q. Dico la Z H Q eſſere linea
retta, percioche eſſendo ſegata la
H P ſecondo l'eſtrema & meza pro
portione nel punto T, & eſſendo
P T la portion maggiore di eſſa; ſa
rà come la H P alla P T, coſi la P T
alla T H. & la H P è vguale alla H O,



& la P T ad amendue le T Q O Z. è dunque come la H O alla O Z, coſi la Q T al
la T H. & la H O è parallela alla T Q. percioche ſono amendue perpendicolari al
piano B D. & la T H è parallela alla O Z, conciosiacoſa che amendue ſiano perpen B
dicolari al piano B F. & ſe due triangoli ſono compoſti ad vn'angolo, come Z O H
H T Q, che habbiano due lati proportionali à due lati, di modo che anchor i la-
ti loro riſpondenti ſiano paralleli; gli altri lati ſaranno poſti per diritto fra loro.
adunque la Z H è per diritto alla H Q; & ogni linea retta, è in un piano. in un C
piano dunque è il pentagono Y B Q C V. Dico anchora eſſere equiangolo. per-
cioche eſſendo la linea retta N O ſegata ſecondo l'eſtrema & meza proportione
nel punto R; & O R la portion maggiore; ſarà come l'vna & l'altra N O O R al- D
la O N, coſi la N O alla O R: & la R O è vguale alla O S. onde come la S N alla N O,
coſi la N O alla O S. & però la N S è ſegata ſecondo l'eſtrema & proportione nel
punto O, & N O è la portion maggiore. adunque i quadrati delle N S S O ſono
tripli del quadrato della O N, & la O N è vguale alla N B: & la O S alla S V. i qua E
drati dunque delle N S S V ſono tripli del quadrato della N B: & però i quadra-
ti delle N S S V N B ſono quadrupli del quadrato della N B. ma alli quadrati
delle S N N B è vguale il quadrato della B S. onde i quadrati delle B S S V, cioè 47. del primo.
il quadrato della V B, conciosiacoſa che l'angolo V S B ſia retto, è quadruplo del
quadrato della N B: & però la V B è doppia della B N: & la B C è doppia della 20. del terzo.
B N. adunque la V B è vguale alla B C. & perche le due B Y Y V ſono vguali alle
due B Q Q C, & la baſe V B vguale alla baſe B C, ſarà l'angolo B Y V vguale al-
l'angolo B Q C. ſimilmente dimoſtreremo anchor l'angolo Y V C eſſere vguale 8. del primo.
all'angolo B Q C. i tre angoli dunque B Q C B Y V Y V C ſono fra loro vgua-
li. & ſe ſiano tre angoli del pengono equilatero vguali, il pentagono ſarà equian-
golo. onde il pentagono B Y V C Q è equiangolo. & ſi è dimoſtrato etiandio e- F
quilatero. adunque il pentagono B Y V C Q è equilatero & equiangolo, & è in

un lato del cubo B C. ſe dunque in ciaſcuno de dodici lati del cubo, facciamo le medeſime coſe, ſi formarà vna figura ſolida contenuta da dodici pentagoni equi lateri & equiangoli. onde biſogna comprenderlo nella ſphera data, & dimoſtrare, che il lato del dodecaedro è vna linea irrationale chiamata apotome. prolunghiſi la Z O: & ſia la Z Ω. adunque la Z Ω s'incontra nel diametro del cubo, & ſi ſegano inſieme per mezo; percioche queſto ſi è dimoſtrato nel penultimo theo rema dell'vndecimo libro. ſeghinſi in Ω. adunque il punto Ω è centro della ſphera, che comprende il cubo, & O Ω è la metà del lato di eſſo cubo. giunghiſi Y Ω. & perche la linea retta N S è ſegata ſecondo l'eſtrema & meza proportione nel punto O, & NO è la ſua portion maggiore; ſaranno i quadrati delle NS SO tripli del quadrato, che ſi fa dalla NO, & la N S vguale alla Z Ω, perche anchora la N O è vguale alla OΩ: & la Z O alla O S. ma la OS è vguale alla Z Y, perche ancho la RO. adunque i quadrati delle Ω Z Z Y ſono tripli del quadrato, che ſi fa dalla N O. ma à quadrati delle Ω Z Z Y è vguale il quadrato della YΩ. onde il quadrato della YΩ e triplo del quadrato della N O. & è il ſemi diametro della ſphera, che comprende il cubo, in potenza triplo della metà del lato del cubo; percioche ſi è inſegnato prima conſti tuire il cubo, & comprenderlo nel la ſphera, & dimoſtrare il diametro della ſphera eſſere in potenza triplo del lato del cubo. & ſe tutto è di tutto, etiandio la meta ſarà della meta, & la N O è la metà del lato del cubo. adunque la Y Ω e vguale al ſemidiametro della ſphera, che comprende il cubo: & il pũ to Ω è centro della medeſima ſphe ra. onde il punto Y e nella ſuperficie della ſphera. ſimilmente dimoſtreremo ciaſcuno delli rimanenti angoli del dodecaedro eſſer nella ſuperficie della ſphera. il dodecaedro dunque e compreſo nella ſphera data. Dico il lato del dodecaedro eſſere vna linea irrationale, che è chiamata apotome. perche la linea retta N O e ſegata ſecondo l'eſtrema & meza proportione, & la maggior portione di eſſa e la R O; ſarà tutta la N X ſegata ſecondo l'eſtrema & meza proportione: & la portion maggiore ſarà R S, percioche eſſendo come la N O alla O R, coſi la O R alla R N, & le doppie di eſſe, conciosiacoſa che le parti delle moltiplici nel medeſimo modo habbiano la medeſima proportione, ſarà come la N X alla R S, coſi la R S al l'vna & l'altra N R S X; & la N X e maggiore della R S, adunque anchor la R S e maggiore dell'vna & l'altra N R S X. onde la N X e ſegata ſecondo l'eſtrema & meza proportione: & R S e la ſua portion maggiore. ma la R S e vguale alla YV. adunque la N X e ſegata ſecondo l'eſtrema & meza proportione, & la portion maggiore e Y V. & perche il diametro della ſphera e irrationale, & in potenza triplo del lato del cubo; ſarà la NX rationale, che e lato del cubo. ma ſe la retta linea rationale ſia ſegata ſecondo l'eſtrema & meza proportione, amendue le portioni ſono irrationali, che ſi chiamano apotomi. adunque la Y V, che e lato del dodecaedro, e irrationale, che e chiamata apotome.



7. del primo.

o. del ſeſto.

G

15. del quinto.

15. del quinto.

7. del primo.

del terzo

H

K

del primo.

COROLLARIO.

Da questo appare, che se il lato del cubo sia segato secondo l'estrema & meza proporrione, la portion maggiore essere lato del dodecaedro.

IL COMMANDINO.

Saranno i quadrati delle O N N R tripli del quadrato della O R] *per la 4 di questo.* A

Et la H O è parallela alla T Q, percioche sono amendue perpendicolari al piano B D] *per la 6 dell'vndecimo.* B

Gli altri lati saranno posti per diritto fra loro] *per la 32 del sesto.* C

Percioche essendo la linea retta N O segata secondo l'estrema & meza proportione nel punto R, & O R la portion maggiore, sarà come l'vna & l'altra N O O R alla O N, cosi la N O alla O R] *per la 5 di questo. percioche se vna linea retta sia segata secondo l'estrema & meza proportione & ci si aggiunga vna vguale alla portion maggiore, sarà tutta la linea segata secondo l'estrema & meza proportione; & la portion maggiore sarà la linea retta, che fu posta da principio. onde come l'una & l'altra N O O R, cioè come tutta la N O insieme con la maggior portione O R; à tutta la N O, cosi è la N O alla O R, perche tutta la N O si fa maggior portione. & la O R minore.* D

Adunque i quadrati delle N S S O sono tripli del quadrato della O N] *per la 4 di questo.* E

Et se siano tre angoli del pentagono equilatero vguali, il pentagono sarà equiangolo] *per la 7 di questo.* F

Percioche si è insegnato prima constituire il cubo & comprenderlo nella sphera] *nella 15 di questo.* G

Sarà la N X rationale, che è lato del cubo] *perche essendo il diametro della sphera in potenza triplo del lato del cubo, hauerà ad esso la proportione, che ha il numero al numero, & gli sarà commensurabile. & quelle, che sono commensurabili alla rationale, ò in lunghezza & potenza, ò in potenza solamente. sono rationali per la 6 diffinitione, del decimo libro.* H

Ma se la linea retta rationale sia segata secondo l'estrema & meza proportione amēdue le portioni sono irrationali, che si chiamano apotomi] *per la 6 di questo.* K

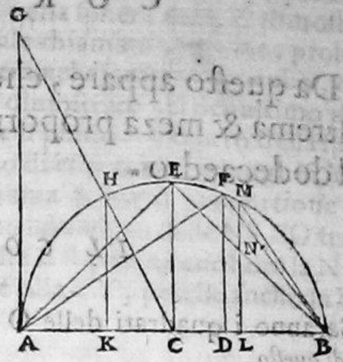
ROBLEMA VI. PROPOSITIONE XVIII.

Trouare i lati delle cinque figure & far cōparatione fra loro.

Propongasi il diametro della sphera data A B: & seghisi nel punto C, dimodo che la A C sia vguale alla C B; & nel punto D, si che la A D sia doppia della D B: & descriuasi nella A B il mezo cerchio A E B: & da punti C D tirinsi le C E D F perpendicolari alla A D, & giungansi A F F B E B. perche dunque la A D e doppia della D B, sarà la A B tripla della B D; & per la conuersione della ragione, la B A sesquialtera della A D; & come la B A alla A D, cosi il quadrato della B A al quadrato della A F, conciosiacosa che il triangolo A F B sia equiangolo al triangolo AFD. onde il quadrato della B A e sesquialtero del quadrato della AF, & il diametro della sphera e in potenza sesquialtero del lato della pyramide: & la A B e diametro della sphera. adunque la AF uguale al lato della pyramide. similmente perche la A D e doppia della D B, sarà la A B tripla della B D. ma come la A B alla B D, cosi il quadrato della A B al quadrato della F.B.

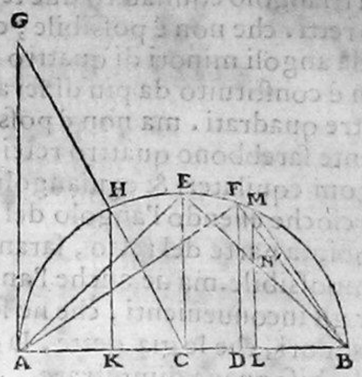
8. del sesto:

13. di questo.



adunque il quadrato della A B è triplo del
15. del quinto. quadrato della B F. & è il diametro della sphe
ra in potenza triplo del lato del cubo; & la A B
è diametro della sphera. onde la B F è lato del
cubo. & perche la A C è vguale alla C B, sarà
la A B doppia della B C. ma come la A B alla
B C, così il quadrato della A B al quadrato
della B E. il quadrato dunque della A B è dop
14. di questo. pio del quadrato della B E. & il diametro del
la sphera è in potenza doppio del lato dell'ot-
taedro; & la A B è il diametro della sphera da
ta. onde B E è lato dell'ottaedro. tirisi dal pũ
to A la A G perpendicolare alla A B: & pon-
gasi la A G vguale alla A B: & giunta la G C
dal punto H tirisi la H K perpendicolare alla
A B. perche dunque la A G è doppia della A C, essendo la G A vguale alla A B,
4. del sesto. & come la G A alla A C, così la H K alla K C; sarà la H K doppia della K C, & pe
20. del sesto. rò il quadrato della H K è quadruplo del quadrato della K C. adunque i quadra-
ti delle H K K C, cioè il quadrato della H C è quintuplo del quadrato della K C:
& la H C è vguale alla C B. onde il quadrato della B C è quintuplo del quadrato
della C K. & perche la A B è doppia della B C, delle quali la A D è doppia del-
19 del quinto. la D B; sarà la rimanente B D doppia della D C: & però la B C è tripla della C D.
20. del sesto. il quadrato dunque della B C è nonuplo del quadrato della C D. ma il quadrato
della B C è quintuplo del quadrato della C K. adunque il quadrato della K C, è
maggiore del quadrato della C D, & la K C è maggiore della C D. pongasi la
C L vguale alla K C: & dal punto L tirisi la L M perpendicolare alla A B: & giun
gasi la M B. & perche il quadrato della B C è quintuplo del quadrato della K C: &
15. del quinto. è la B A doppia della C B, & della C K è doppia la K L; sarà il quadrato della A B
Cor. 16. di questo. quintuplo del quadrato della K L. ma il diametro della sphera è in potenza quin
tuplo del semidiametro del cerchio, dal quale si descriue l'icosaedro, & la A B è
diametro della sphera. adunque la K L è lato dell'hessagono di detto cerchio. ol-
tre à ciò perche il diametro della sphera è composto del lato dell'hessagono, &
di due lati del decagono, descritti nel medesimo cerchio; & è A B diametro della
sphera, & K L lato del decagono, & la A K è vguale alla L B: sarà l'vna & l'altra
di esse A K L B lato del decagono descritto nel medesimo cerchio, dal quale si
descriue l'icosaedro. & perche L B è del decagono, M L dell'hessagono, che è
14. del terzo. vguale alla K L, essendo vguale alla H K, cociosiacosa, che siano vgualmente di-
stanti dal centro; & amendue H K K L sono doppie della H C: sarà M B lato
10. di questo. del pentagono. ma quello, che è del pentagono il medesimo è dell'icosaedro. adũ
16. di questo. que M B è lato dell'icosaedro. & perche F B è lato del cubo, seghisi secondo l'e-
strema & meza proportione nel punto N, & B N sia la portion maggiore: sarà
per lo cor. della precedente. N B lato del dodecaedro. & essendosi dimostrato il diametro della sphera in po-
tenza sesquialtero del lato della pyramide A F, & in potenza doppio del lato del-
l'ottaedro B E, & in potenza triplo del lato del cubo F B: di qual parti il diametro
della sphera in potenza è sei, delle medesime il lato della pyramide sarà quattro,
dell'otteadro tre, & del cubo due. adunque il lato della pyramide è in potenza
sesquiterzo del lato dell'ottaedro, & in potenza doppio del lato del cubo: & il la-
to dell'ottaedro è in potenza sesquialtero del lato del cubo. adunque i lati gia det
ti delle tre figure, cioe della pyramide dell'ottaedro, & del cubo, sono fra loro, in
proportioni rationali, & gli altri due, dico dell'icosaedro & dodecaedro non so-
no in proportioni rationali, ne fra loro ne con le già dette, cioe la minore & l'a-
potome.

Ma che il lato M B dell'icoſaedro ſia maggiore del lato B N del dodecaedro, lo dimoſtraremo, coſi.



Percioche eſſendo il triongolo F D B equi angolo al triangolo F A B, ſarà come la D B alla B F, coſi la F B alla B A, & eſſendo tre li nee rette proportionali, come la prima alla terza, coſi ſarà il quadrato della prima al quadrato della ſeconda. adunque come la D B alla B A, coſi il quadrato della D B al quadrato della B F; & conuertendoſi come la A B alla B D, coſi il quadrato dela F B al quadrato della B D, & la A B è tripla della BD. il quadrato dunque della F B è triplo del quadrato della B D, & il quadrato della A D è quadruplo del quadrato della D B, percioche la A D è doppia della B D. adunque il quadrato della A D è maggiore del quadraro della F B, conciosiacoſa che la A D ſia maggiore della F B. la A L dunque è molto maggiore della F B, & ſegata la A L ſecondo l'eſtrema & meza proportione, la portion maggiore è la LK, perche la K L è lato dell'heſſagono, & la K A del decagono: & ſegata la F B ſecondo l'eſtrema & meza proportione, la portion maggiore è la B N. è dunque la KL maggiore della B N, & la K L è vguale alla L M. onde la L M è maggiore della B N, ma la B M è maggiore della M L: & però la M B che è lato dell'icoſaedro, ſarà maggiore della B N, lato del dodecaedro.

8. del ſeſto.
Cor. 20. del 6.
20. del ſeſto.
9. di queſto.
19. del primo.

IN ALTRO MODO. Perche la A D è doppia della BD, ſarà la A B tripla della B D. & come la A B alla BD, coſi il quadrato della AB al quadrato della BF, eſſendo il triangolo F A B equiangolo al triangolo F B D. il quadrato dunque della A B è triplo del quadrato della B F. & ſi è dimoſtrato il quadrato della A B quintuplo del quadrato della K L. adunque i cinque quadrati della K L ſono vguali alli tre quadrati delle F B. ma li tre della F B ſono maggiori delli ſei, che ſi fanno della BN, & però li cinque della K L ſono maggiori, che li ſei della B N. onde etiandio vno della K L e maggiore di vno della B N. il perche la K L e maggiore della BN. ma la KL e vguale alla L M. e dunque la L M maggiore della BN. & però la M B e molto maggiore della B N. il che biſognaua dimoſtrare.

Cor. 20. del 6.
8. del ſeſto.

Ma li tre del'a F B eſſere maggiori, che li ſei della B N, dimoſtreremo in queſto modo.

Percioche eſſendo la B N maggiore della NF, ſarà il rettangolo contenuto dalle F B B N, maggiore di quello, che e contenuto dalle B F F N. quello dunque che e contenuto dalle F B B N inſieme con quello, che e contenuto dalle BF FN e maggiore, che il doppio di quello, che e contenuto dalle B F F N. ma quello, che e contenuto dalle F B B N, inſieme con quello, che e contenuto nelle BF FN e il quadrato della F B: & il contenuto nelle B F F N e vguale al quadrato della B N, perche la F B e ſegata ſecondo l'eſtrema & meza proportione nel punto N, & il rettangolo contenuto dall'eſtreme e vguale al rettangolo, che ſi fa da quella di mezo. il quadrato dunque della F B e maggiore chel doppio del quadrato della B N. la onde vno della F B e maggiore, che due della B N: & però li tre della F B ſono maggiori, che ſei della B N. il che biſognaua dimoſtrare.

2. del ſecondo.
17. del ſeſto.

Dico fuor che le gia dette cinque figure non conſtituirſi alcun'altra figura che ſia contenuta da equilateri & equiangoli fra loro vguali.

Percioche da due triangoli, & da due altri piani non ſi conſtituirà l'angolo ſolido,

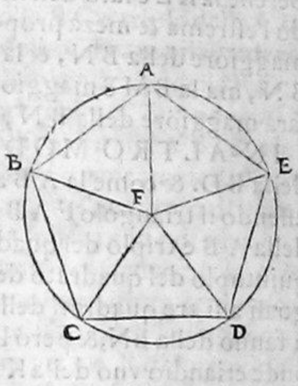
lido,

lido, & da tre triangoli è constituito l'angolo della pyramide, da quattro l'angolo dell'ottaedro, da cinque dell'icosaedro. ma l'angolo solido non si fa da sei triangoli equilateri & equiangoli constituiti ad vn punto, perche essendo l'angolo del triangolo equilatero due terze di vn retto, saranno li sei angoli vguali à quattro retti. che non è possibile, conciosiacosa che ogni angolo solido sia contenuto da angoli minori di quattro retti. & per la medesima ragione l'angolo solido non è constituito da piu di sei angoli piani. onde l'angolo del cubo è contenuto da tre quadrati. ma non è possibila che sia contenuto da quattro, perche similmente sarebbono quattro retti. & l'angolo del dodecaedro è contenuto da tre pẽtagoni equilateri & equiangoli. ma non è possibile che sia contenuto da quattro; percioche essendo l'angolo del pentagono equilatero composto del retto, & della quinta parte del retto, saranno quattro angoli maggiori di quattro retti: che è impossibile. ma ne anche l'angolo solido si constituirà da altre figure polygone per gli inconuenienti, che ne seguono. non si constituirà dunque altra figura solida fuori, che le gia dette, la quale sia contenuta da equilateri & equiangoli. il che bisognaua dimostrare.

21: dell'unaecimo:

Ma che l'angolo del pentagono equilatero & equiangolo si componga del retto & della quinta parte del retto, dimostreremo in questo modo.

Sia il pentagono equilatero & equiangolo A B C D E: & intorno ad esso si descriua il cerchio ABCD E: & piglisi il suo centro, che sia F: & giunganfi F A F B F C F D F E, che segheranno per mezo gli angoli del pentagono A B C D E. & perche cinque angoli, che sono al punto F sono vguali à quattro retti, & sono fra loro vguali; sarà vno di essi come A F B di vn retto, trattane la quinta parte del retto. adunque gli altri F A B A B F sono di vn retto, & della quinta parte, & l'angolo F B A è vguale all'angolo F B C. tutto l'angolo dunque del pentagono A B C è composto di vn retto & della quinta parte del retto. il che bisognaua dimostrare.



IL FINE DEL LIBRO DECIMO TERZO.

∴ ∴ ∴ ∴