DE GLI ELEMENTI DI EVCLIDE

LIBRO QVINTODECIMO ET DE SOLIDI QVINTO

Come giudicano alcuni.

MA SECONDO ALCVNI ALTRI DI HYPSICLE ALESSANDRINO DELLI CINQVE CORPI LIBRO II.

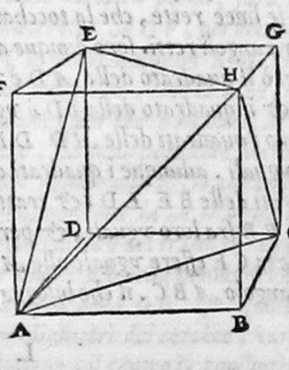
CON I SCHOLII ANTICHI ET COMMENTARII

Di Federico Commandino da Vrbino.

PROBLEMA I. PROPOSITIONE I.

DESCRIVERE la pyramide nel cubo dato.

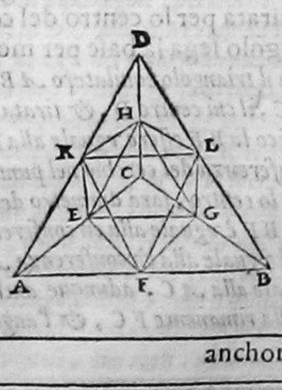
Sia il cubo dato A B C D E F G H, nel quale bisogni descriuere la pyramide. giunganſi AC AE CE AH EH HC. onde è manifeſto che i triangoli A E C A H E A H C C H E ſono equilateri. percioche ſono lati delli quadrati del diametro. la pyramide dunque è A E C H, & è deſcritta nel cubo dato.



PROBLEMA II. PROPOSITIO. II.

Deſcriuere l'ottaedro nella pyramide data.

Sia la pyramide data ABCD, i lati della quale ſi ſeghino per mezo ne punti E F G H K L, & giunganſi H K H L E F F G, & l'altre. perche dunque la A B è doppia dell'vna, & l'altra H K F G, ſarà la H K vguale & parallela alla G F. ſimilmente anchora la H G vguale & parallela al la F K. adunque H K F G è equilatero. Dico



anchora essere rettangolo, percioche se dalla K L si tirino le perpendiculari alli piani E F B G F C E G E F H G H K F G dimostreremo similmente quelli, che sono nel quadrato H K F G essere equilateri.

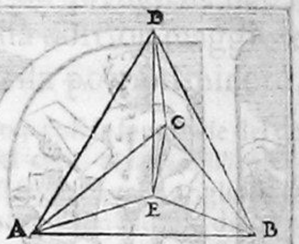
IL COMMANDINO.

A Perche dunque la A B è doppia dell'vna, & l'altra H K F G, sarà la H K vguale & parallela alla G F] *perciochè la H K è parallela alla A B, essendo come la D H alla H A, cosi la D K alla K B: & per la medesima ragione si dimostrerà la G F parallela alla A B. ma quelle, che sono parallele ad vna medesima, sono anchora fra loro parallele. adunque la H K*
9. dell'undeci. *è parallela alla G F. & i triangoli D A B D H K sono equiangoli, perche l'angolo D H K è*
29. del primo. *vguale all'angolo D A B, & l'angolo D K H vguale all'angolo D B A, & l'angolo B A D commune ad amendue. come dunque la A D alla D H, cosi è la A B alla H K; & la A D è*
4. del sesto. *doppia della D H. adunque anchor la A B è doppia della H K. & per la medesima ragione la*
9. del quinto. *A E sarà doppia della G F. onde la H K è vguale alla G F, & parallela, come si è dimostra*
32. del primo. *to. & quelle che congiungono le vguali, & parallele sono anchor loro vguali, & parallele: & però la H G è vguale, & parallela alla K F: & le H K K F sono fra loro vgulli, perche sono le metà delle vguali: adunque H K F G è equilatero.*

B Dico anchora essere rettangolo] *Accio che questo con facilità si dimostri. metteremo innanzi due lemmi.*

LEMMA I.

Se dalla cima della pyramide si tiri vna linea perpendicolare alla base, quella cadera nel centro del cerchio, che si descriue d'intorno al triangolo della base.



Sia la pyramide A B C D, la cui base sia il triangolo A B C, & la cima il punto D: & tirisi dal punto D alla base, la D E perpendiculare. Dico il punto E essere centro del cerchio descrit
3. diff. dell'undecimo. *to intorno al triangolo A B C. giunganfi A E B E C E, & per che la D E è perpendiculare al piano del triangolo A B C, con tutte le linee rette, che la tocchano, & sono nel medesimo piano farà angoli retti. sono dunque angoli retti D E A D E B D E C:*
47. del primo. *& però il quadrato della A D è vguale à quadrati delle A E E D, & il quadrato della B D è vguale à quadrati delle B E E D, & sono i quadrati delle A D D E vguali, perche le A D D B sono vguali. adunque i quadrati delle A E E D sono vguali à quadrati delle B E E D, & trattone il quadrato commune della E D, restano i quadrati delle A E E B fra loro vguali, & però le linee rette A E E B sono vguali. dimostreremo similmente la C E essere vguale alle A E E B. onde il punto E è centro del cerchio descritto intorno al triangolo A B C. il che bisognaua dimostrare.*

LEMMA II.

La linea retta che dall'angolo del triangolo equilatero e tirata per lo centro del cerchio descritto intorno al triangolo sega la base per mezo.

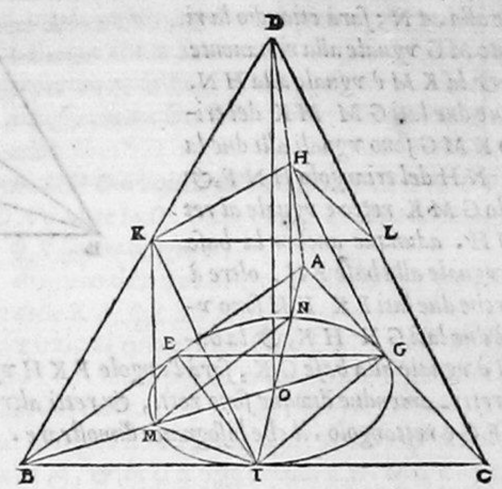
Sia il triangolo equilatero A B C, & d'intorno ad esso il cerchio A B C, il cui centro D, & tirata la A D seghi la base nel punto E. Dico la B E essere vguale alla E C. prolunghisi la A E sino alla circonferenza del cerchio nel punto F. perche dunque la A F passa per lo centro, sarà diametro del cerchio: & però la circonferen
28. del terzo. *za A B F è vguale alla circonferenza A C F, & la circonferenza A B è vguale alla circonferenza A C, perche la linea retta A B è vguale alla A C. adunque anchor la rimanente circonferenza*
27. del terzo. *B F alla rimanente F C, & l'angolo B A E sarà vguale all'ango-*

lo E A C, onde i due lati B A A E del triangolo ABE sono vguali alli due lati C A A E del triangolo A E C, & l'angolo B A E è vguale all'angolo E A C. adunque etiandio la base B E è vguale alla base E C. il che bisognaua dimostrare. 8. del primo.

Si può questo prouare anchora per la terza del sesto libro, essendo la B A vguala alla A C.

COROLLARIO.

Dalle qual cose, & dalla terza del terzo libro appare la linee retta tirata dal angolo del triangolo equilatero per lo centro del cerchio, descritto d'intorno al triangolo, essere perpendicolare alla base.



Dimostrate queste cose tirisi dalla cima della pyramide A B C D al piano della base la perpendicolare D O. sarà il punto O centro del cerchio descritto intorno al triangolo ABC, per lo primo lemma di quelli, che noi habbiamo posti qui innanzi. onde per BD lato della pyramide, & per la D O tirisi vn piano, che seghi la pyramide. quello sarà retto, òuer perpendicolare al piano della base A B C, & sarà la B O il segamento commune di essa, & del triangolo A B C. la qual prolungata caderà nel punto G per lo secondo lemma, & sarà perpendicolare alla A C. per la medesima ragione se per A D lato della pyramide, & per la D O se intenda tirato vn'altro piano, sarà perpendiculare alla base, & il commune segamento loro sarà la linea retta A O F, perpendiculare alla B C. tirinsi dalli punti K H, al piano del triangolo A B C le perpendiculari K M H N. caderanno queste nelli communi segamenti de piani per la 38 del vndecimo, cioè la K M caderà nella B O, & la H N nella A O: & le B O A O si diuideranno per mezo ne punti M N. percioche essendo le D O K M perpendiculari al medesimo piano, saranno parallele fra loro. onde come la B K alla K D, così è la B M alla M O. ma la B K è vguale alla K D. adunque anchora la B M sarà vguale alla M O. per la medesima ragione si dimostrerà la A N vguale alla N O. & perche la perpendiculare tirata dal centro del cerchio al lato del triangolo equilatero, è la metà del semidiametro del cerchio, come habbiamo dimostrato nella prima del decimo quarto libro, la O F sarà la metà della O A, & la O G la metà della O B. & essendo le F O O G vguali, perche sono vguali anchora le A O O B semidiametri del cerchio, tutte le A N N O O F B M M O O G saranno vguali fra loro. adunque dal centro O con l'interual lo di vna di esse F O O G descriuendosi vn cerchio passera anchora per li punti M N. descriuasi, & giungansi N M M F. & essendo i triangoli B D O B K M equiangoli, percioche la linea K M è parallela alla D O, sarà come la D B alla B K, così la D O alla K M. & la D B è doppia della B K. adunque anchor la D O sarà doppia della K M. & nel medesimo modo si dimostrerà la D O doppia della H N. onde le K M H N sono fra loro vguali, & sono parallele, essendo perpendiculari al medesimo piano. ma quelle che congiongono le vguali & parallele, anchor esse sono vguali, & parallele. la M N dunque è vguale, & parallela alla K H. & la F G si è dimostrata vguale, & parallela alla medesima K H. adunque le M N F G sono vguali & parallele, & l'angolo N M K è retto, & retto similmente N M F, che è nel mezo cerchio. onde soprastando la N M alle due linee rette K M M F, che insieme si segano nel segamento loro commune ad angoli retti, sarà anchora ad angoli retti sopra il piano, che passa per le dette linee. adunque la N M è perpendiculare al piano del triangolo K M F. ma si è dimostrata la F G parallela alla M N. onde etiandio la F G sarà perpendiculare al medesimo piano, & però l'angolo G F K è retto. & sono gli angoli G F K F G H vguali à due retti. adunque an-

18. dell'undeci.
6. dell'undeci.
2. del sesto.
4. del sesto.
9. del quinto.
6. dell'undeci.
33. del primo.
4. dell'undeci.
8. dell'undeci-
29. del primo.

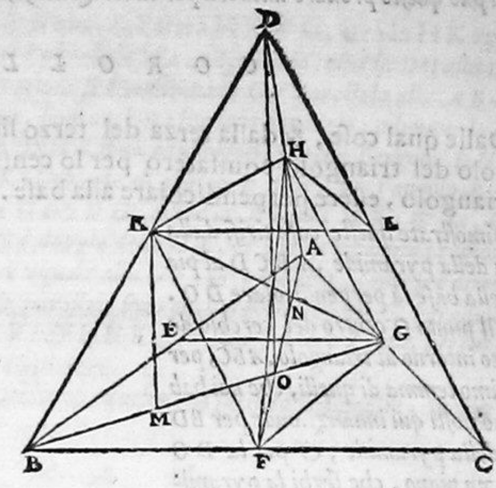
chor

34. del primo. *chor F G H è retto, & similmente retti quelle, che segli oppongono. dalle qual cose seguita, che H K F G sia equilatero, & rettangolo. il che bisognaua dimostrare.*

IN ALTRO MODO, Tirate le K M H N perpendiculari come nella figura precedente, giunganse le H F K G. & perche la perpendicolare B G è vguale alla A F, conciosiacosa che la A B all'una, & all'altra di esse sia come 4 à 3, il che noi habbiamo dimostrato nella 12 del 13 libro, ma anchor la B M è vguale alla A N; sarà etiandio la rimanente M G vguale alla rimanente N F, & la K M è vguale alla H N. adunque due lati G M M K del triangolo K M G sono vguali alli due lati F N N H del triangolo H N F, & l'angolo G M K retto è vguale al retto F N H. adunque anchor la base K G è vguale alla base F H. oltre à ciò perche due lati F K K H sono vguali à due lati G H H K, & la base F H è vguale alla base G K, sarà l'angolo F K H vguale all'angolo G H K, & sono vguali à due retti. amendue dunque sono retti, & retti altresì quelli, che se gli appongono. adunque H K F G è rettangolo. il che bisognaua dimostrare.

4. del primo.

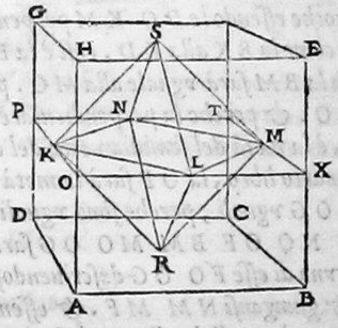
8. del primo.



PROBLEMA III. PROPOSITIONE III.

Descriuere l'ottaedro nel cubo dato.

A Sia il cubo dato A B C D E F G H & piglinsi i centri de quadrati insistenti K L M N.
B Dico K L M N esser quadrato. tirinsi per K L
C M N le parallele P O O X X T T P. perche dunque la P O è doppia della O K, & la X O
D doppia della O L, & le P O O X sono vguali; saranno anchora le K O O L vguali fra loro.
E adunque il quadrato della K L è doppio del quadrato della O L. & per la medesima ragione il quadrato della M L è doppio del quadra
F to della L X. & percio il quadrato della K L è vguale al quadrato della L M. adunque K L
G M N è equilatero; & è manifesto anchora essere rettangolo. piglinsi i due quadrati B D E G, & i centri loro R S: & giunganfi R K R L R M R N S K S L S M
H S N. appare chiaramente i triangoli, che fanno l'ottaedro, essere equilateri. il che dimostreremo con la medesima ragione.



IL COMMANDINO.

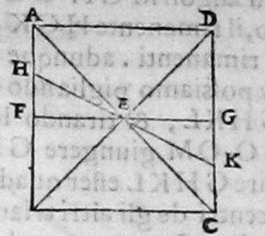
A Et piglinsi i centri de quadrati insistenti] *cioè delli quadrati C A A E E C C G, & i centri de quadrati chiama i centri de cerchi, che si descriuono d'intorno à quadrati.*

B Tirinsi per K L M N le parallele P O O X X T T P] *cioè tirisi la P O parallela ad* *vna di esse D A G H, & la O X parallela ad vna delle A B H E, & cosi nell'altre.*

Perche dunque la P O è doppia della O K, & la X O doppia della O L] *percioche il centro le sega per mezo, come si mostrerà.*

Sia il quadrato A B C D, & tirinsi i diametri A C B D, che concorrano insieme nel punto E, & per E tirisi la F G parallela ad vna di esse A D B C. Dico la F E esser vguale alla E G.

Perche l'angolo F A E è vguale all'angolo G C E, & l'angolo A E F all'angolo C E G, essendo alla cima; sarà il rimanente vguale al rimanente, & il triangolo simile al triangolo. onde come la A E alla E F, cosi è la C E alla E G, & permutandosi come la A E alla E C, cosi la F E alla E G, & la A E è vguale alla E C, perche la A E è diametro del cerchio, & il puntu E è centro del cerchio medesimo. adunque la F E sarà vguale alla E G. & il centro non solo sega per mezo la F G, ma anchor tutte l'altre che nel quadrato per esso centro si tirano. il che dimostraremo nel medesimo modo.



Et le P O O X sono vguali] *percioche la P O è vguale alla D A, & la O X alla A B per la 34 del primo. la onde la P O alla O X è come la D A alla A B, & sono le D A A B vguali fra loro. adunque anchor le P O O X saranno vguali.* D

Adunque il quadrato della K L è doppio del quadrato della O L] *percioche il quadrato della K L è vguale alli quadrati delle K O O L per la 47 del primo.* E

Et percio il quadrato della K L è vguale al quadrato della L M] *onde ne segue, che anchor la linea retta K L sia vguale alla L M. ma lo possiamo dimostrare altrimenti. percioche essendo i due lati K O O L vguali alli due lati L X X M, & l'angolo O retto, vguale al retto X; sarà anchor la base K L vguale alla base L M, per la 4 del primo. & nel medesimo modo si dimostrerà la L M vguale alla M N, & la O K vguale alla K N. onde è necessario che tutte siano fra loro vguali.* F C

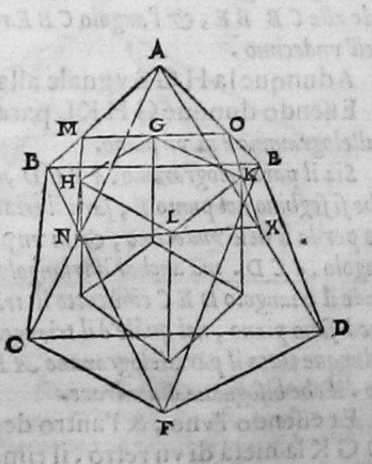
Et è manifesto anchor essere rettangolo] *perche la K O è vguale alla O L, & l'angolo K O L è retto, sarà l'angolo K L O la metà di vn retto. & per la medesima ragione l'angolo M L X è la metà di vn retto. adunque il rimanente K L M è retto; percioche li tre angoli sono vguali à due retti, & per la medesima ragione ciascuno de gli altri angoli L M N M N K N K L si dimostrerà retto.* G

Appare chiaramente i triangoli che fanno l'ottaedro essere equilateri. il che dimostreremo con la medesima ragione] *percioche con li medesimi argumenti prouueremo K S M R N S L R essere equilateri, & i lati loro essere vguali alli K L M N.* H

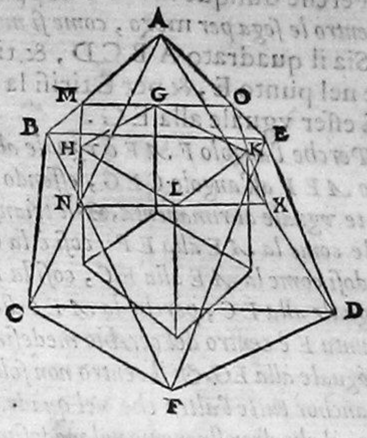
PROBLEMA IIII. PROPOSITIONE IIII.

Descriuere il cubo nel ottaedro dato.

Piglinsi li centri de cerchi, che sono d'intorno alli triangoli A B E A B C A C D A D E, quali siano G H K L, & giunganſi G H G K L K L H. Dico G H K L esser quadrato. tirinsi per li punti G H K L le linee O M M N N X X O parallele alle E B B C C D D E. perche dunque il triangolo A B C e equilatero, la linea retta, che si tira dal punto A ad H centro del cerchio descritto d'intorno al triangolo A B C, sega per mezo l'angolo del triangolo, che e al punto A. onde la M H e vguale al la H N, & per la medesima ragione la M G e vguale alla G O. & perche la M N e vguale al- A B



la M O, & la M O alla O X, sarà anchor la H M vguale alla M G, & la G O alla O K. & gli an-
C D goli H M G G O K sono retti. adunque la H G è vguale alla G K. & per la medesima ra gione saranno vguali anchor le rimanenti.
E essendo dunque G H K L parallelogrammo,
F sarà in vn piano: & essendo l'vno & l'altro de gli angoli M G H O G K la metà di vn retto, il rimanente H G K sarà retto, & altresi li rimanenti. adunque G H K L è quadrato. & possiamo pigliando da principio i centri G H K L, & tirando le parallele M N N X X O O M giungere G H H L L K K G, & dire G H K L esser quadrato. & se pigliando i centri de gli altri triangoli, gli giungiamo, si dimostreranno anchor li rimanenti esser quadrati, & haueremo descritto il cubo nel ottaedro dato, il che bisognaua fare.



IL COMMANDINO.

A Perche dunque il triangolo A B C è equilatero, la linea retta, che è tirata dal punto A ad H centro del cerchio descritto intorno al triangolo A B C sega per mezo l'angolo del triangolo, che è al punto A. onde la M H è vguale alla H N] *Percioche di sopra si è dimostrato, la linea retta tirata dall'angolo del triangolo equilatero per lo centro del cerchio, che si descriue intorno al triangolo segare per mezo la base, & questo anchora segue dalle cose dimostrate nella decima del primo libro, & se per lo centro H si tiri la M N parallele alla B C, per la medesima ragione si dimostrerà la M H essere vguale alla H N, essendo la M A vguale alla A N, percioche si fanno i triangoli B A C M A N fra loro simili.*

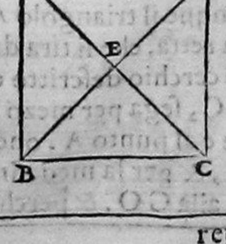
B Et perche la N M è vguale alla M O, & la M O alla O X, sarà anchor la H M vguale alla M G, & la G O alla O K] *Perche le linee rette N M M O sono parallele alle C B B E, sarà il triangolo A M N simile al triangolo A B C, & il triangolo A M O simile al triangolo A B E. adunque come la C B alla B A così è la N M alla M A. & come la A B alla B E, così la A M alla M O. onde per l'vgual proportione come la C B alla B E, così la N M alla M O. ma la C B è vguale alla B E, percioche B C D E si pone quadrato. adunque la M N è vguale al la M O. & per la medesima ragione la M O si dimostrerà vguale alla O X, & la H M è la metà della M N, & la M G la metà della M O. onde seguita che la H M sia vguale alla M G, & così la G O alla O K.*

C Et gli angoli H M G G O K sono retti] *percioche essendo le linee rette N M M O parallele alle C B B E, & l'angolo C B E retto, sarà etiandio l'angolo N M O retto per la decima dell'vndecimo.*

D Adunque la H G è vguale alla G K] *per la 4 del primo.*

E Essendo dunque G H K L parallelogrammo sarà in vn piano] *percioche ogni parallelogrammo è in vn piano.*

Sia il parallelogrammo A B C D, & giunganſi A C B D che si seghino nel punto E, sarà il triangolo A B C in vn piano per la 2 dell'vndecimo, & in vn piano parimente il triangolo A C D. ma anchor il triangolo B C D è in vn piano, onde il triangolo D E C cioè tutto il triangolo A C D è nel medesimo piano, nel quale è il triangolo B E C, cioè A B C. adunque tutto il parallelogrammo A B C D, sarà in vn piano. il che bisognaua dimostrare.



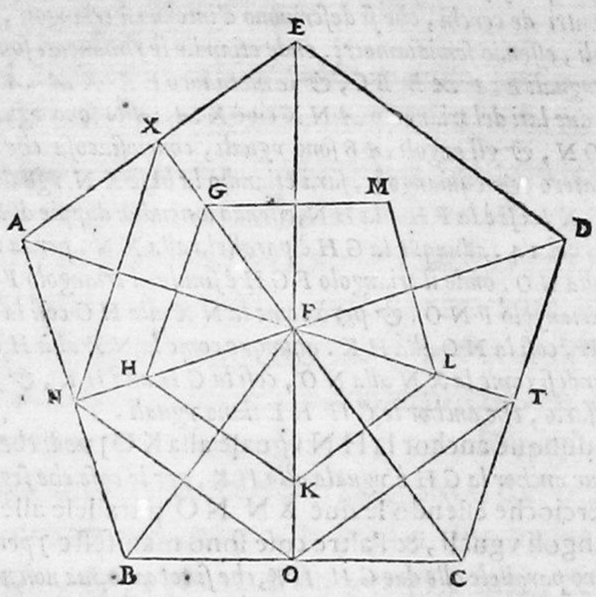
F Et essendo l'vno, & l'antro degli angoli M G H O G K la metà di vn retto, il rimanente H G K sarà retto] *percioche i triangoli H M G G O K sono equicruri, & gli angoli alli punti M, & O sono retti come si è gia dimostrato.*

Dalle cose gia dimostrate appare in che modo nell'ottaedro dato si descriua la pyramide.

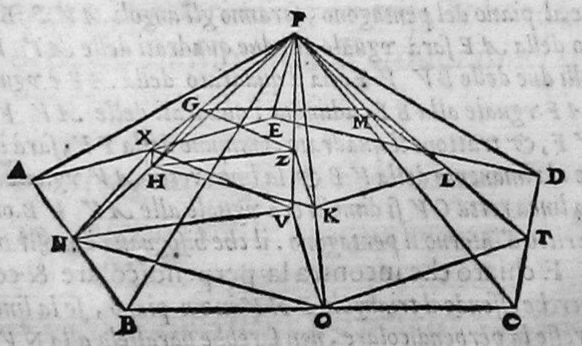
Percioche se nel dato ottaedro descriuiamo vn cubo, & similmente nel cubo la pyramide, etiandio la pyramide sarà descritta nel'ottaedro dato.

PROBLEMA V. PROPOSITIONE V.

Descriuere il dodecaedro nell'icosaedro dato.



Propongasi il pentagono dell'icosaedro A B C D E, & piglinsi li centri de cerchi, che sono d'intorno à triangoli AFE AFB BFC CFD DFE cioè GH K L M, & giunganši G H HK KL LM M G; & similmente giunte le F G F H F K prolunghinsi ne punti X N O, le quali segheranno per mezo le linee rette E A AB B C ne punti X N O, & sarà come la X N alla N O, così la G H al la H K. è dunque anchor la H N vguale al la K O, & parimente dimostreremo li rimanenti lati del pentagono G H K L M essere vguali. Dico etiandio essere equiangolo. percioche essendo le due X N N O parallele alle due G H HK contengono gli angoli vguali, & le altre cose sono manifeste. intendasi dal punto F tirata vna perpendiculare al piano del pentagono A B C D E, la quale cadera nel centro del cerchio descritto d'intorno al pentagono. a dunque se dal punto N tiriamo vna linea retta al punto, nel quale cade la detta perpēdiculare, & per H tiriamo vna parallela ad essa, è chiaro, che incontra la perpendiculare, & con essa contiene l'angolo retto. oltre à ciò se da punti X O giungiamo le linee rette al centro del cerchio descritto d'intorno al pentagono, & dal punto, nel quale la linea retta, che passa per H incontra la perpēdiculare, tiriamo le linee rette à in G K, è manifesto, che esse con la medesima perpendiculare contengono angoli retti. dal che si vede chiaramente, che il pentagono G H K L M è in vn piano.



IL COMMANDINO.

A Propongasi il pentagono dell'icosaedro A B C D E] *cioè il pentagono descritto nel cerchio, dal quale ha principio l'icosaedro, come nella 16 del terzodecimo.*

B Le quali segheranno per mezo le linee rette EA AB BC ne punti X N O] *per le cose che noi habbiamo dimostrato nella precedente.*

C Et sarà come la X N alla N O, così la G H alla H K] *percioche essendo i triangoli A F E A F B B F C equilateri, & vguali, saranno le perpendiculari che si tirano dall'angolo F alla base, cioè le F K F N F O vguali fra loro, conciosiacosa, che il lato del triangolo equilatero alla perpendiculare, che è tirata dall'angolo alla base habbia quella proportione che ha 4 à 3, come dimostrammo alla 12 del terzo decimo. oltre à ciò perche G H K sono centri de cerchi, che si descriuono d'intorno à triangoli, saranno anchor esse F G F H F K vguali, essendo semidiametri. onde etiandio le rimanenti sono vguali, cioè G X H N K O, & sono vguali E A A B B C, & le metà loro E X X A A N N B B O O C. perche dunque i due lati del triangolo A N X cioè X A A N sono vguali à due lati N B B O del triangolo B O N, & gli angoli A B sono vguali, conciosiacosa che il pentagono A B C D E si ponga equilatero, & equiangolo, sarà etiandio la base X N vguale alla base N O. ma come la F G alla G X, così è la F H alla H N, essendo amendue doppie di amendue, come si è dimostrato alla prima del 14. adunque la G H è parallela alla X N. per la medesima ragione la H K è parallela alla N O. onde il triangolo F G H è simile al triangolo F X N, & il triangolo F H K simile al triangolo F N O. & però come la N X alla H G così la N F alla F H, & come la N F al la F H, così la N O alla H K. adunque come la N X alla H G, così la N O alla H K, & permutandosi come la X N alla N O, così la G H alla H K, & sono le X N N O vguali. onde è necessario, che anchor le G H H K siano vguali.*

D E dunque anchor la H N vguale alla K O] *vedi che piu presto non bisogni leggere. adunque anchor la G H è vguale alla H K, per le cose che seguono.*

E Percioche essendo le due X N N O parallele alle due G H H K contengono
gli angoli vguali, & l'altre cose sono manifeste] *perche le due X N N O, che si tocca*
no, sono parallele alle due G H H K, che si toccano, ma non nel medesimo piano, conterranno an
10. dell'undeci. *goli vguali. adunque l'angolo G H K è vguale all'angolo X N O, & parimente segata la C D*
per mezo nel punto T, & giunta la O T, sarà l'angolo H K L vguale all'angolo N O T. ma gli
angoli X N O N O T sono vguali; come si mostrerà. adunque anchor gli angoli G H K H K L
saranno vguali, & i rimanenti altresì. percioche essendo i triangoli A X N B O N C T O
equicruri simili, & vguali, saranno gli angoli A X N A N X B N O B O N C O T vguali
fra loro: onde il rimanente delli due retti X N O è uguale al rimanente N O T. & gli altri si-
milmente si mostreranno vguali.

F La quale caderà nel centro del cerchio descritto d'intorno al pentagono] *caggia nel punto V, & intendansi giunte le A V B V C V. perche dunque la F V è perpendicola*
3. diff. dell und. *re al piano del pentagono, saranno gli angoli A V F B V F C V F retti: & però il quadra-*
47. del primo. *to della A F sarà vguale alli due quadrati delle A V V F, & il quadrato della B F vguale*
alli due delle B V V F. ma il quadrato della A F è vguale al quadrato della B F, essendo la
A F vguale alla B F. adunque i quadrati delle A V V F sono vguali à quadrati delle B V
V F, & trattone il quadrato commune della F V, sarà il rimanente quadrato della A V vgua
le al rimanente della V B & la linea retta A V vguale alla V B. & per la medesima ragione
9. del terzo. *la linea retta C V si dimostrerà vguale alle A V V B. onde il punto V è centro del cerchio de-*
scritto d'intorno il pentagono. il che bisognaua dimostrare.

G E chiaro che incontra la perpendicolare & con essa contiene l'angolo retto]
2. dell'undec. *perche essendo il triangolo F N V in vn piano, se la linea retta tirata dal punto H non incon-*
trasse la perpendicolare, non sarebbe parallela alla N V. il che non si pone, conciosiacosa che
le parallele siano nel medesimo piano, per la diffinitione 35 del primo libro. incontri dunque la
perpendicolare nel punto Z. & essendo l'angolo N V F retto per la terza diff. dell'vndecimo, sa
rà per la 29 del primo anchor H Z F retto.

E manifesto che esse con la medesima perpendiculare contẽgono angoli retti] *perche la H Z è parallela alla N V, sarà come la F Z alla Z V, cosi la F H alla H N. ma come la F H alla H N, cosi la F G alla G X. adunque come la F Z alla Z V, cosi la F G alla GX, & pero G Z è parallela alla X V. & l'angolo G Z F è retto, cioe vguale al retto X V F. & per la medesima ragione l'angolo K Z F sarà retto. & giunte le L Z M Z si dimostreranno similmente gli angoli L Z F M Z E essere retti.* H 2. del sesto. 11. del quinto.

Dal che si vede chiaramente, che il pentagono G H K L M è in vn piano] *per la quinta dell'undecimo. perche la linea retta F Z sta ad angoli retti sopra le tre linee, che insieme si toccano L G Z H Z K. adunque se nel medesimo modo descriueremo i pentagoni sotto gli angoli rimanenti dell'icosaedro, sarà il dodecaedro descritto nell'icosaedro dato.* K

De lati & angoli delle cinque figure.

E da sapere, che se alcuno ci addimandi quanti lati habbia l'icosaedro, douemo rispondere in questo modo. egli è chiaro, che l'icosaedro è contenuto da uenti triangoli, & ciascun triãgo lo si fa da tre linee rette. adũque moltiplicheremo venti triãgoli per lo numero de lati del triangolo, saranno sessanta, la cui metà è 30. & tãti lati hauerà l'icosaedro. similmente anchora nel dodecaedro. perche dodici pentagoni contengono il dodecaedro, & ciascuno pentagono hà cinque linee rette, moltiplicheremo cinque dodici volte, & saranno 60, la cui metà è 30, & piglieremo la metà, perche ciascun lato o sia del triangolo ò del pentagono ò del quadrato, come nel cubo, si piglia due volte, & usando la medesima via, & ragione troueremo i lati, & nel cubo, & nella pyramide & nell'ottaedro. ma se haremo à trouare gli angoli di ciascuna delle cinque figure, facendo le medesime cose, partiremo per lo numero de piani, che contengo vn'angolo del solido, come perche cinque triangoli contengono l'angolo dell'icosaedro, partiremo per cinque, & saranno dodici gli angoli nell'icosaedro. & perche tre pentagoni contengono l'angolo del dodecaedro, partiremo per tre, & haremo venti angoli nel dodecaedro. & similmente si troueranno gli angoli nell'altre figure.

Della inclinatione de piani che contengono ciascuna delle cinque figure.

E stato ricercato come in ciascuna delle cinque figure solide dato ciascun piano di quelli, che la contengono, si troui l'inclinatione. il che, come diceua il grande Isidoro maestro nostro, ĩuestigheremo in questo modo. Nel cubo è manifesto i piani che lo contengono inclinarsi ad angoli retti fra loro. Ma nella pyramide proposto vn triangolo, da i termini d'un lato come da cen

L'inclinatione de piani nel cubo.

L'inclinatione de piani nella pyramide.

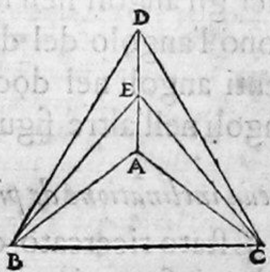
tri, con l'interuallo della linea retta perpendicolare, che dalla cima del triãgolo si tira alla base, descritte le circonferenze de cerchi seghinsi insieme, & dal punto, nel quale elle si segano tirate le linee rette sino à centri conterranno la inclinatione de piani, che comprendono la pyramide. ma nell'ottaedro dal lato del triangolo descritto il quadrato, & da termini del diametro come da centri con l'interuallo similmente della perpendiculare, che è tirata dalla cima del triangolo alla base, descriuansi le circonferenze, & nel medesimo modo le linee rette, che dal punto nel quale le circonferenze si segano, siano tirate sino à centri conterranno l'angolo, che è il rimanente di due retti della inclinatione de piani, quale noi cerchiamo. nell'icosaedro dal lato del triangolo descritto il pentagono, giungasi la linea retta, che è sottoposta à due lati. & dalli termini di essa come da centri con l'interuallo della perpendiculare del triangolo descritte le circonferenze le linee rette, che dal punto, nel quale le circonferenze si segano; sono tirate sino à centri, conterranno l'angolo, che è il rimanente di due retti della inclinatione de piani dell'icosaedro. alla fine nel dodecaedro, proposto vn pentagono, & giunta la linea retta, che è sottoposta à due lati, dalli termini di essa, come da centri con l'interuallo della perpendiculare tirata dal segamento per mezo sopra il lato del pentagono parallelo ad esso, descriuansi le circonferenze, & dal punto, nel quale dette circonferenze si segano, le linee rette tirate sino à centri similmente conterranno l'angolo, che è il rimanente di due retti della inclinatione de piani del dodecaedro.

Inclinatione de piani nell'ottaedro.

Inclinatione de piani nell'icosaedro.

Inclinatione de piani nel dodecaedro.

Cosi fatto ragionamento hebbe quell'homo clarissimo delle predette cose, parendogli la dimostratione di esse manifesta. ma accioche la contemplatione demostratiua chiaramente appaia, spieghero il ragionamento di ciascuna, & prima della pyramide.

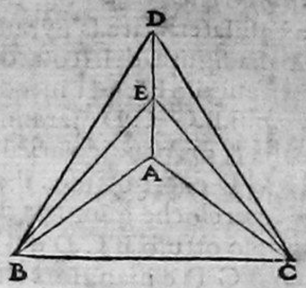


A Intendasi la pyramide contenuta da quattro triangoli equilateri A B C D, la cui base A B C, & la cima il punto D: & segato il lato A D per mezo nel punto E, giungansi B E E C. & perche i triangoli A D B A D C sono equilateri, & la A D è segata per mezo, saranno le B E E C perpendiculari alla A D. Dico l'angolo B E C esser acuto, perche essendo la A C doppia della A E, sarà il quadrato della A C quadruplo del quadrato della A E. ma il quadrato della A C è vguale alli quadrati delle A E E C, de quali il quadrato della A C al quadrato della C E, ha la proportione, che ha 4 à 3, & la C E è vguale alla E B. adunque il quadrato della B C è minore, che li quadrati delle B E E C. & però l'angolo B E C è acuto. & perche la A D è commune segamento

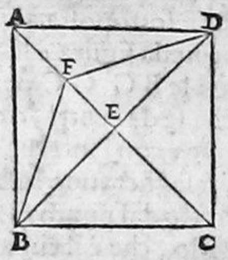
47. del primo. B

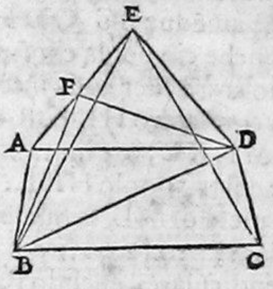
C

delli due piani A B D A D C, & s'incontrano in esso ad angoli retti in ciascuno de piani le linee rette B E E C, le quali contengono l'angolo acuto; sarà l'angolo B E C inclinatione de piani. & è data, dandosi la D B C, che è lato del triangolo, & l'vna, & l'altra di esse B E E C è perpendiculare del triangolo equilatero. E adunque da centri B C, cioè da i termini d'vn lato con l'interuallo della perpendiculare del triangolo descritte le circonferenze, seghinsi insieme nel punto E; & da esso à B C tirate le linee rette, conterranno la inclinatione de piani, & questo è che si diceua, & quello (da centri B C con l'interuallo della perpendiculare del triangolo descritte le circonferenze de cerchi seghinsi insieme) è chiaro, perche l'vna, & l'altra B E E C è maggiore, che la metà di B C, & da centri B C con l'interuallo della metà di B C i cerchi descritti si toccano, & se sia minore non si toccano, ne si segano. ma se sia maggiore si segano. & così il ragionamento della pyramide appare manifesto, & conueniente alle demostrationi.

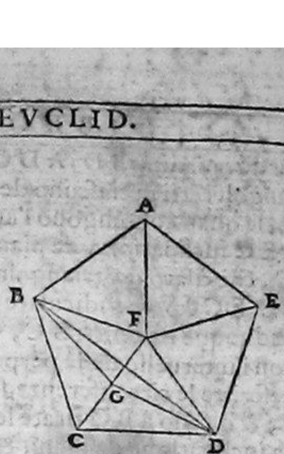


Intendasi similmente nel quudrato A B C D la pyramide, la cui cima sia il pũto E, & i triãgoli equilateri, che oltra la base la contengono. sarà la pyramide A B C D E la metà dello ottaedro. seghisi il lato di vn triangolo A E per mezo nel punto F, & giunganfi B F F D. adunque le B F F D sono fra loro vguali, & perpendiculari ad A E. Dico l'angolo B F D essere ottuso. giungansi B D. & perche A C è quadrato il cui diametro è BD, sarà il quadrato della B D doppio del quadrato della D A. & il quadrato della D A al quadrato della D F, come poco fa si è detto, ha la proportione, che 4 à 3. adunque il quadrato della B D al quadrato della D F hauerà la proportione, che ha 8 à 3. & la D F è vguale alla F B. onde il quadrato della B D è maggiore, che F li quadrati delle B F F D. & però l'angolo B F D è ottuso. & perche la A E è commune segamento delli due piani A B E A D E, che si segano insieme; & alla A E sono tirate nell'vno, & l'altro piano ad angoli retti le B F F D, le quali contengono l'angolo ottuso; sarà G l'angolo B F D il rimanente di due retti, della inclinatione de piani A B E A D E. adunque se l'angolo B F D sia dato, anchora la detta inclinatione sarà data. perche dunque è dato il triangolo dell'ottaedro, & vn suo lato è A D, dal quale si descriue il quadrato A C, è dato anchora B D, che è diametro del quadrato. ma sono date le B F F D perpendico H lari del triangolo. adunque sarà dato etiandio l'angolo B F E. onde descritto il quadrato dal lato del triangolo come A C, & giunto il diametro B D, se da centri B D, con l'interuallo della perpendiculare del triangolo, descriuiamo i cerchi, si segheranno insieme nel punto F, & le linee rette dal punto F tirate à centri, conterranno l'inclinatione B F D, la quale è la rimanente di due retti della inclinatione de piani, come si è detto. & in questo luogo appare l'vna, & laltra B F F D esser maggiore, che la metà di B D. & però nella construttione instrumentale è necessario, che i cerchi insieme si seghino. appare anchora per la dimostratione la B D in potenza alla D F hauere la proportione, che ha 8 à 3, & essere quadrupla in potenza della sua metà. adunque l'una, & l'altra di esse B F F D è maggiore, che la metà di B D. & queste cose siano dette dell'ottaedro.

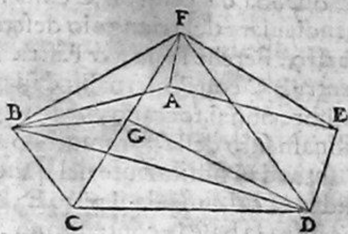


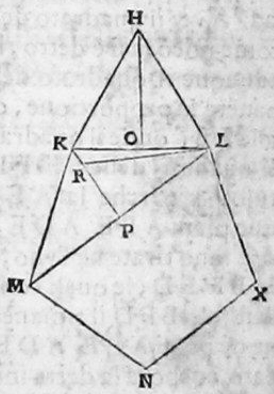


Ma nell'icosaedro intendasi il pentagono equilatero A B C D E, & in questo

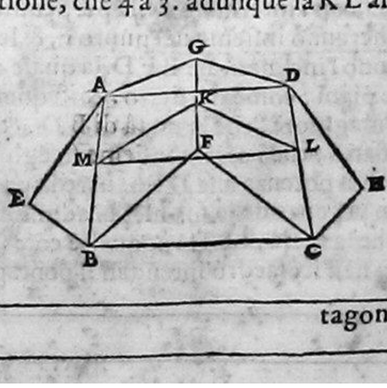


la pyramide, che habbia nella cima il punto F, dimodo che i triangoli, che la contengono sia no equilateri. sarà la pyramide A B C D E par te della figura dell'icosaedro. seghisi il lato di vn triangolo F C per mezo nel punto G, & giunganse B G G D. saranno le B G G D & vguali, & perpendiculari alla F C. Dico l'ango lo B G D essere ottuso. il che da se è chiarissi-
K mo. percioche giunta la B D è sottoposta al-
L l'angolo ottuso B C D del pentagono, & l'angolo B G D è maggiore di questo, cócio siaco sa, che le B G G D siano minori delle B C C D. similmente per quelle cose, che poco fa si sono dette è manifesto, che l'angolo B G D è il rima nente di due retti della inclinatione de trian- goli B F C C F D, & dato questo si darà anchora la inclinatione de piani dell'icosaedro. percioche dal lato del triangolo dell'icosaedro descritto il pentagono, & data la linea ret ta, che è sottoposta alli due lati del pentagono, come nella figura è la B D data, & date similmente le B G G C perpendiculari de triangoli, si darà anchor l'angolo B G D. perche se da centri, cioè da termini della B D, che è sottoposta à due lati del pen tagono, con l'interuallo delle perpendiculari del triangolo, descriuiamo i cerchi, si segheranno insieme, come nel punto G, & le linee rette dal punto G tirate alli centri B D conterranno l'angolo, che è il rimanente di due retti della inclinatio ne de piani, & in questo luogo è manifesto per la figura, che amēdue B G G D sono maggiori della metà di B D, benche cio per la construttione instrumentale, si può di mostrare esser così. intendasi separatamente il triango- lo equilatero H K L, & dalla K L descriuasi il pentagono K M N X L, & giunta la M L tirisi la H O perpendicola- re del triangolo H K L. Dico la H O esser maggiore del la metà di M L, la quale è sottoposta alla inclinatione de piani, percioche tirata dal punto K alla M L la K P per-





M pendiculare, essendo l'angolo K L P maggiore della ter za parte del retto, cioè maggiore dell'angolo K H O, con stituiscasi l'angolo P L R vguale all'angolo K H O. adun que la P L è perpendiculare del triangolo equilatero, il cui lato è R L. & però il quadrato della R L al quadrato
N della L P ha la proportione, che ha 4 à 3. ma la K L è maggiore della L R. adun que il quadrato della K L al quadrato della L P ha maggior proportione, che 4 à 3, & al quadrato della H O, ha la proportione, che 4 à 3. adunque la K L alla L P ha proportione maggiore, che alla
O H O. & però la H O è maggiore della L P.



P Ma nel dodecaedro in questo modo. intendasi vn quadrato del cubo, dal quale si descriue il dodecaedro A B C D, & due piani del dodecaedro A E B F G G D H C F. Dico etiandio così essere data la inclinatione de due pentagoni. seghisi la F G per mezo nel punto K, & dal punto K ad angoli retti sopra la FG, tirinsi in ciascuno de piani le K L KM, & giungasi M L. Dico prima l'ango lo M K L essere ottuso. percioche si è dimostrato nel terzo decimo libro degli elementi, nella construttione del dodecaedro, che la linea retta, la quale dal punto K è tirata perpendicolare al quadrato A B C D è la metà dellato del pentagono. onde è minore, che la meta della M L, & però l'angolo M K L è ottuso: & insieme si è dimostrato nel medesimo theorema, che il quadrato della K L è vguale al quadrato della metà del lato del cubo, & al quadrato della metà del lato del pentagono, dimodo che le K L & K M fra loro vguali siano maggiori, che la metà della M L. dato dunque l'angolo M K L, il rimanente di due retti cioè la inclinatione de piani sarà data. onde perche il lato del quadrato A B C D è sottoposto à due lati del pentagono, & il pentagono è dato, sarà data anchor la M L. & è data l'una, & l'altra di esse M K K L, conciosia cosa che siano perpēdicolari dal punto, che sega per mezo la linea retta A B, che è sottoposta à due lati, al lato del pentogono parallelo ad esso, come ad F G. adunque l'angolo L K M è dato, cioè il rimanente di due retti di quella inclinatione, che noi cerchiamo. adunque ha ben detto nella instrumentale construttione, che bisogna dato il pentagono tirare la linea retta, sottoposta à due lati, la quale è vguale al lato del cubo, & da centri cioè dalli termini di essa con l'interuallo della perpendicolare, che dal segamento per mezo è tirata al lato del pentagono parallelo, come sono nella figura K L K M descriuere le circonferenze, & dal punto, nel quale si segano, tirare à centri le linee rette, che contengono l'angolo rimanente di due retti della inclinatione de piani. ma gia si è detto la perpendicolare K M essere maggiore della metà di M L, come insieme negli elementi si è dimostrato.

IL COMMANDINO.

Et perche i triangoli A D B A D C sono equilateri, & la A D è segata per mezo, saranno le B E E C perpendicolari alla A E] *per le cose che noi habbiamo dimostrato alla 12 del 13 libro.* A

De quali il quadrato della A C al quadrato della C E, ha la proportione, che ha 4 à 3] *per le cose nel medesimo luogo dimostrate* B

Adunque il quadrato della B C è minore, che li quadrati delle B E E C] *percioche il quadrato della B C è alli quadrati delle B E E C coma 4 à 6.* C

Sarà l'angolo B E C inclinatione de piani] *per la 6 diffinitione dell'vndecimo libro.* D

Et l'vna & l'altra di esse B E E C è perpendicolare del triangolo equilatero] *dato il lato del triangolo equilatero, si darà ancho la perpendicolare per la 2 del libro delli dati, percioche il lato del triangolo equilatero alla perpendicolare è come 4 à 3.* E

Onde il quadrato della B D è maggiore, che li quadrati delle B F F D] *percioche il quadrato della B D à quadrati delle B F F D è come 8 à 6.* F

Sarà l'angolo B F D il rimanente di due retti della inclinatione de piani A B E A D E] *percioche la inclinatione del piano è l'angolo acuto, che si contiene da linee rette, le quali sono tirate perpendicolari al segamento commune de piani ad vn punto di esso in ciascuno piano. onde tratto l'angolo ottuso B F D da due retti, resterà l'angolo acuto, il quale è della inclinatione de piani A B E A D E, & perche si da l'angolo B F D è necessario, che sia data anchor la inclinatione de piani per la 4 del libro de dati.* G

E dato anchora B D, che è diametro del quadrato] *per la 26 del libro delli dati.* H

Percioche giunta la B D è sottoposta all'angolo ottuso B C D del pentagono] *conciosiacosa che l'angolo del pentagono sia composto dal retto & dalla quarta parte del retto.* K

Et l'angolo B G D è maggiore di questo, conciosiacosa che le B G G D siano minori delle B C C D] *per la 21 de primo, percioche le B G G D sono minori, ma contengono l'angolo maggiore.* L

Essendo l'angolo K L P maggiore della terza parre del retto] *perche l'angolo del pentagono M K L contiene il retto, & la quinta del retto, come si è detto. adunque gli an-* M *goli K M L K L M sono quattro quinte del retto, & K L M due quinte, & le due quinte alla terza del retto hanno la proportione, che ha 6 à 5.*

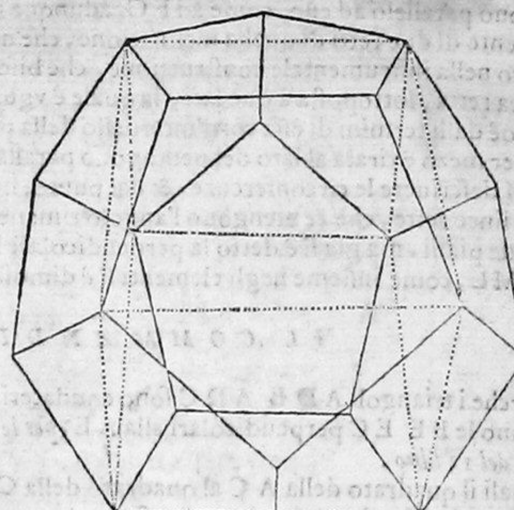
N Ma la K L è maggiore della L R] *perciochegiunta M R saranno le due M K K L maggiori delle M R R L per la 21 del primo. adunque anchor la metà di K L sarà maggiore della metà di L R.*

O Et però la H O è maggiore della L P] *per la 10 del quinto.*

P Intendasi vn quadrato del cubo dal quale è descritto il dodecaedro] *percioche alla construttione del dodecaedro si serue delli quadrati del cubo, come appare nella 17 del terzo decimo.*

Dalle cose che poco fa si sono dette, & dimostrate nella 17 del terzodecimo appare come si descriua il cubo nel dodecaedro dato.

Perche nella construttione del dodecaedro vsiamo i piani del cubo: & in ciascun lato di esso descriuiamo ciascun pentagono del dodecaedro, se nel dodecaedro gia fatto acconciamente tiriamo le linee rette, che si sottopongono à due lati di ciascun pentagono, esso cubo sarà descritto, come nella figura seguente si puo vedere.



Dalle qual cose è chiaro come nel dato dodecaedro si descriua, & la pyramide, & l'ottaedro.

Perche se nel dodecaedro descriuiamo il cubo, & similmẽte nel cubo la pyramide ò uero l'ottaedro, è necessario, che etiandio la pyramide, & l'ottaedro siano descritti nel dodecaedro dato.

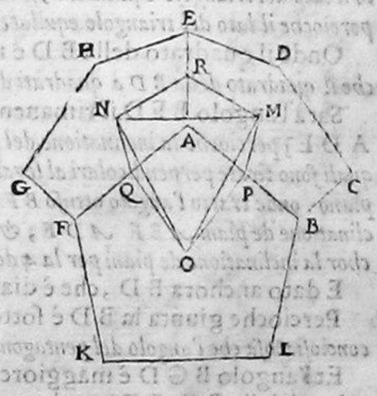
Descriuere il cubo nell'icosaedro dato.

Prima descriueremo nell'icosaedro il dodecaedro, come si è detto nella 5 di questo: & poi nel dodecaedro il cubo, & cosi nel dato icosaedro sarà descritto il cubo.

Nell'icosaedro dato descriuere la pyramide.

Se per l'antecedente descriueremo nell'icosaedro il cubo, & nel cubo la pyramide per la prima di questo, sarà anchorà la pyramide descritta nell'icosaedro.

Nel dodecaedro dato descriuere l'icosaedro.



Propongasi l'angolo del dodecaedro A contenuto da tre pentagoni A B C D E A F G H E A F K L B: & piglinsi li centri de cerchi, che sono descritti d'intorno alli pentagoni M N O, & da essi alli lati de pentagoni, tirinsi le perpendiculari M P O P N Q O Q M R N R, & giunganʃi M N N O O M. sarãno per le cose gia dimostrate M P O O Q N N R M angoli della inclinatione de piani del dodecaedro, & pero vguali fra loro; &

vguali

vguali anchora le perpendicolari. Onde i due lati M P P O del triangolo M P O, sono vguali à due lati M R R N del triangolo M R N: & l'angolo M P O è vguale all'angolo M R N. adunque la base O M è vguale alla base M N, & cosi si dimostrerà la base O N vguale alla base N M. dalle qual cose appare, che il triangolo M N O è equiangolo. onde se i triangoli equilateri siano nel medesimo modo sottoposti à gli altri angoli del dodecaedro, sarà descritto l'icosaedro, perciochè tutti gli angoli del dodecaedro sono venti, quanti sono i triangoli dell'icosaedro. adunque nel dato dodecaedro si è descritto l'icosaedro. il che bisognaua fare.

IL FINE DEL QVINTODECIMO ET VLTIMO LIBRO DEGLI ELEMENTI DI EVCLIDE.

IN VRBINO IN CASA DI FEDERICO COMMANDINO, CON LICENTIA DE' SVPERIORI.
M D LXXV.

Don bruno Scardo co[illegible] duc. 5.2-0