Matematicamente.it

Carmelo Di Stefano

Dal problema al modello matematico

Volume terzo

Funzioni, Calcolo differenziale, Calcolo Integrale, Statistica

ISBN 9788896354537

Carmelo Di Stefano

Dal Problema al Modello matematico
Volume Terzo
Per il triennio

http://mathinterattiva.altervista.org/E-Book.htm

Edizione riveduta e corretta e arricchita di collegamenti multimediali
Agosto 2016

Matematicamente.it Editore

PRESENTAZIONE

Nel corso della lettura dei volumi troverai diverse cose, che di seguito ti spiego brevemente.

- All'inizio di alcune unità trovi un breve ripasso di argomenti svolti negli anni precedenti che ti risultano utili per affrontare serenamente la stessa unità. Vanno sotto il nome di **Richiamiamo le Conoscenze**. In alcune unità vi sono anche argomenti di approfondimento, denominati con il titolo ***Quelli che … vogliono sapere di più***
- Le definizioni, i teoremi, i corollari e simili enti matematici, sono contenuti all'interno di appositi box di un uguale colore (verde per le definizioni, celeste per i teoremi e così via)
- Ogni tanto troverai anche un box che ti spiega il significato di alcuni vocaboli, si intitola **Che cosa significa?**
- Poi ci sono tre diversi tipi di box con diverse informazioni storiche, precisamente ci sono quelli intitolati **I Protagonisti**, che contengono informazioni relativamente a famosi matematici citati nelle stesse pagine; invece ne **L'angolo storico** ci sono informazioni di varia natura, su quando per la prima volta si sono incontrate le nozioni di cui si sta parlando e simili informazioni; infine in quelli dal titolo **L'antologia** sono riportati e commentati passi di famose opere matematiche.
- Vi sono anche dei box chiamati **Intervallo matematico** o **Giochiamo alla matematica**, che si riferiscono, i primi ad applicazioni della matematica e gli altri alla cosiddetta matematica ricreativa.
- Alla fine di ogni argomento vi sono le relative verifiche. In esse sono presenti esercizi di tre livelli di difficoltà, opportunamente indicati. Il Livello 1 è relativo a esercizi che sono spesso semplice applicazione di quanto detto nella teoria; quelli di Livello 2 o contengono calcoli più complicati, o hanno bisogno di un impegno maggiore; infine quelli di Livello 3 riguardano quesiti che devono essere impostati usando la fantasia e non in modo ripetitivo. Questi ultimi sono riferiti ai più volenterosi. Per quelli a cui piace veramente ragionare e impegnarsi, alla fine di ogni unità sono presenti alcuni esercizi molto complessi, che vanno sotto il nome di **La sfida**. Invece per aiutarti all'inizio di ogni gruppo di esercizi di livello 1 o 2 vi sono alcuni esercizi simili svolti.
- Sono talvolta presenti box legati a importanti software matematici, quasi tutti di libero uso. In essi sono presenti dei link a delle applicazioni che descrivono come usare il software per comprendere meglio gli argomenti trattati o dei files che puoi usare solo se hai il software installato.
- Alla fine dell'unità sono presentati, quando possibile, esercizi tratti dagli esami di stato, soprattutto del Liceo Scientifico, riferiti ad anni passati.
- Sono anche presenti dei quesiti tratti da gare matematiche italiane ed internazionali, alcuni quesiti sono anche enunciati in lingua inglese.
- Alla fine di ogni unità vi sono le attività di recupero, formate essenzialmente da una serie di esercizi svolti, da completare e da svolgere interamente.
- Infine sono proposti dei test in formato multimediale, almeno 10 di numero, relativi ai più importanti argomenti dell'unità didattica, essi sono utilizzabili solo on line dal sito http://mathinterattiva.altervista.org.
- Un altro sito da cui puoi scaricare molto materiale didattico gratuito è http://matdidattica.altervista.org.
- Vi sono anche diversi collegamenti multimediali che ti portano a pagine web o a files di qualcuno dei software liberi che sono descritti nel libro, o ancora delle applicazioni che mostrano meglio come si fa una certa procedura o come si dimostra un teorema o altro ancora.

Buon lavoro da Carmelo Di Stefano

Indice

9. Successioni di numeri reali e funzioni reali di una variabile reale

9.1 Successioni infinite e serie numeriche

9.2 Caratteristiche delle funzioni

9.3 Continuità delle funzioni

10. Il calcolo differenziale

10.1 Le derivate

10.2 Rappresentazione grafica delle funzioni

11. Il calcolo integrale

11.1 Integrazione indefinita

11.2 Integrazione definita

12. Incertezza e realtà fisica

12.1 Il calcolo delle probabilità

12.2 Statistica inferenziale

9. Successioni di numeri reali e funzioni reali di una variabile reale

9.1 Successioni infinite e serie numeriche

Prerequisiti

- Numeri naturali
- Proprietà ed operazioni con i numeri naturali
- Insiemi numerabili

Obiettivi

- Riconoscere successioni numeriche e saperne studiare le proprietà
- Comprendere il concetto di limite di una successione
- Sapere calcolare semplici limiti di successioni
- Comprendere il concetto di serie numerica e sua regolarità
- Conoscere le principali serie geometriche
- Sapere determinare il carattere di semplici serie geometriche

Contenuti

- Richiamiamo le conoscenze: Disequazioni
- Proprietà delle successioni di numeri reali
- Successioni divergenti
- Successioni convergenti
- Operazioni aritmetiche con i limiti
- Successioni infinitesime e infinite
- Proprietà dei limiti di successione
- Le serie numeriche
- Serie a termini di segno costante

Parole Chiave

Carattere di una serie – Convergente – Divergente – Estremo inferiore e superiore – Infinitesimo – Infinito – Limite – Maggiorante – Minorante – Oscillante – Serie

Richiamiamo le conoscenze

Data la disequazione di II grado $ax^2 + bx + c >$ (≥; <; ≤) 0, in cui possiamo sempre supporre $a > 0$, diversamente cambiamo segno a tutti i coefficienti e verso alla disequazione, possono accadere i seguenti fatti.

- $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, in questo caso l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$ ha le soluzioni reali $x_1 < x_2$ e vale il seguente schema

$ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow$ $x < x_1 \vee x > x_2$	$ax^2 + bx + c \geq 0 \Leftrightarrow$ $x \leq x_1 \vee x \geq x_2$	$ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow$ $x_1 < x < x_2$	$ax^2 + bx + c \leq 0 \Leftrightarrow$ $x_1 \leq x \leq x_2$

- $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, in questo caso l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$ ha la soluzione reale doppia $x_1 = x_2$ e vale il seguente schema

$ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow$ $x \neq x_1$	$ax^2 + bx + c \geq 0 \Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$	$ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow$ $\varnothing$	$ax^2 + bx + c \leq 0 \Leftrightarrow$ $x = x_1$

- $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, in questo caso l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$ non ha soluzioni reali e vale il seguente schema

$ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$	$ax^2 + bx + c \geq 0 \Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$	$ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow$ $\varnothing$	$ax^2 + bx + c \leq 0 \Leftrightarrow$ $\varnothing$

Esempio A

- La disequazione $-x^2 - 5x + 6 > 0$, si riscrive nella forma $x^2 + 5x - 6 < 0$. L'equazione $x^2 + 5x - 6 = 0$, ha le soluzioni reali $x_1 = 2 < 3 = x_2$. Pertanto, per lo schema precedente, la disequazione data ha soluzioni $2 < x < 3$.
- La disequazione $x^2 + 5x - 6 > 0$, ha soluzioni $x < 2 \vee x > 3$.
- La disequazione $x^2 - 4x + 4 > 0$, dato che l'equazione $x^2 - 4x + 4 = 0$, ha $\Delta = 16 - 16 = 0$, e perciò ha l'unica soluzione reale $x_1 = 2$, per lo schema precedente, ha soluzioni $x \neq 2$.
- La disequazione $x^2 - 4x + 4 \geq 0$ ha ogni numero reale per soluzione.
- La disequazione $x^2 - 4x + 4 < 0$ non ha soluzioni reali.
- La disequazione $x^2 - 4x + 4 \leq 0$ ha l'unica soluzione $x = 2$.
- La disequazione $x^2 - 4x + 5 > 0$, dato che l'equazione $x^2 - 4x + 5 = 0$, ha $\Delta = 16 - 20 < 0$, per lo schema precedente, ha ogni numero reale per soluzione.
- La disequazione $x^2 - 4x + 5 < 0$ non ha soluzioni reali.

Dobbiamo fare particolare attenzione alle disequazioni parametriche.

Esempio B

La disequazione $(1 + h)\, x^2 - x + 1 > 0$, è parametrica di parametro h. La sua equazione associata è anch'essa parametrica, il cui $\Delta = 1 - 4 - 4h = -3 - 4h$. Quindi esso è positivo solo se è $-3 - 4h > 0 \Rightarrow h < -\frac{3}{4}$. Quindi per tali valori di h l'equazione ha le due soluzioni reali $x_1 = \frac{1-\sqrt{-3-4h}}{2\cdot(1+h)} < x_2 = \frac{1+\sqrt{-3-4h}}{2\cdot(1+h)}$. Possiamo dire allora che per $h < -\frac{3}{4}$, le soluzioni della disequazione sono $x < \frac{1-\sqrt{-3-4h}}{2\cdot(1+h)} \vee x > \frac{1+\sqrt{-3-4h}}{2\cdot(1+h)}$? No, perché ciò è vero se il coefficiente di x^2 è positivo, cioè se $1 + h > 0 \Rightarrow h > -1$. Pertanto possiamo dire che se si ha:$-1 < h < -\frac{3}{4}$, le soluzioni sono quelle scritte. Se invece è $h = -1$, la disequazione diventa di primo grado e non parametrica: $-x + 1 > 0 \Rightarrow x < 1$. Se poi è $h < -1$, il delta è ancora positivo ma il primo coefficiente è negativo, quindi le soluzioni sono: $\frac{1-\sqrt{-3-4h}}{2\cdot(1+h)} < x < \frac{1+\sqrt{-3-4h}}{2\cdot(1+h)}$. Se è $h = -\frac{3}{4}$, si ha $\Delta = 0$, la disequazione diviene $\frac{1}{4}x^2 - x + 1 > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x-1\right)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 2$. Infine se è $h > -\frac{3}{4}$, si ha $\Delta < 0$, la disequazione ha il primo coefficiente positivo e perciò ha per soluzione tutti i numeri reali.

Consideriamo brevemente le disequazioni in valore assoluto, limitatamente a quelle che ci serviranno nell'unità. Possiamo dire che, detta $f(x)$ un'espressione nell'incognita x e h numero reale, valgono le seguenti equivalenze.

$\lvert f(x)\rvert > h \Leftrightarrow f(x) > h \vee f(x) < -h$	$\lvert f(x)\rvert < h \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < h \\ f(x) > -h \end{cases}$

Esempio C

- La disequazione $\lvert x^2 - x\rvert > 2$, equivale alle disequazioni $x^2 - x > 2 \vee x^2 - x < -2$. La prima disequazione ha soluzioni $x < -1 \vee x > 2$; la seconda disequazione non ha soluzioni reali. Quindi la disequazione di partenza ha soluzioni $x < -1 \vee x > 2$.
- La disequazione $\lvert x^2 + 2x\rvert < 1$, equivale al sistema $\begin{cases} x^2+2x<1 \\ x^2+2x>-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+2x-1<0 \\ x^2+2x+1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1-\sqrt{2} < x < -1+\sqrt{2} \\ x \neq -1 \end{cases} \Rightarrow -1-\sqrt{2} < x < -1+\sqrt{2} \wedge x \neq -1$.

Verifiche

Risolvere le seguenti disequazioni al variare del parametro reale h

Livello 1

1. $(2 - h) \cdot x + 1 > 0$; $4x + 3h < 0$; $(1 - h) \cdot x - 2 \leq 0$; $(4 + 3h) \cdot x - h \geq 0$

$$\left[\begin{cases} x > \frac{1}{h-2} & h < 2 \\ \forall x \in \mathbb{R} & h = 2 \\ x < \frac{1}{h-2} & h > 2 \end{cases}; x < -\frac{3h}{4}; \begin{cases} x \leq \frac{2}{1-h} & h < 1 \\ \forall x \in \mathbb{R} & h = 1 \\ x \geq \frac{2}{1-h} & h > 1 \end{cases}; \begin{cases} x \leq \frac{h}{4+3h} & h < -\frac{3}{4} \\ \forall x \in \mathbb{R} & h = -\frac{3}{4} \\ x \leq \frac{h}{4+3h} & h > -\frac{3}{4} \end{cases}\right]$$

2. $(1 + h^2) \cdot x + 1 < 0$; $(1 - h^2) \cdot x - 1 < 0$; $hx + 2 - h \leq 0$; $(2 + h) \cdot x + h - 2 > 0$

$$[\varnothing]\left[\begin{cases} x < 1/\left(1-h^2\right) & -1 < h < 1 \\ \forall x \in \mathbb{R} & h = \pm 1 \\ x > 1/\left(1-h^2\right) & h < -1 \vee h > 1 \end{cases}\right]\left[\begin{cases} x \geq (h-2)/h & h < 0 \\ \varnothing & h = 0 \\ x \leq (h-2)/h & h > 0 \end{cases}\right] \quad \left[\begin{cases} x > (2-h)/(2+h) & h < -2 \\ \varnothing & h = -2 \\ x < (2-h)/(2+h) & h > -2 \end{cases}\right]$$

Risolvere le seguenti disequazioni al variare del parametro reale h

Livello 2

3. $(2 + h^2) \cdot x^2 + 2x - 3 > 0$; $hx^2 + x - 2 > 0$; $(1 + h) \cdot x^2 - x > 0$

$$\left[\left(x < \frac{-1-\sqrt{3h^2+7}}{h^2+2} \vee x > \frac{-1+\sqrt{3h^2+7}}{h^2+2}\right); \begin{cases} \varnothing & h \leq -\frac{1}{8} \\ \frac{-1-\sqrt{8h+1}}{2h} < x < \frac{-1+\sqrt{8h+1}}{2h} & -\frac{1}{8} < h < 0 \\ x > 2 & h = 0 \\ x < \frac{-1-\sqrt{8h+1}}{2h} \vee x > \frac{-1+\sqrt{8h+1}}{2h} & h > 0 \end{cases}; \begin{cases} \frac{1}{1+h} < x < 0 & h < -1 \\ x < 0 & h = -1 \\ x < 0 \vee x > \frac{1}{1+h} & h > -1 \end{cases}\right]$$

4. $(1 - 2h) \cdot x^2 - 1 \leq 0$; $x^2 + hx - h + 3 > 0$

$$\left[\begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{1-2h}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{1-2h}} & h < \frac{1}{2} \\ \forall x \in \mathbb{R} & h = \frac{1}{2} \\ \varnothing & h > \frac{1}{2} \end{cases}; \begin{cases} x < \frac{-h-\sqrt{h^2+4h-12}}{2} \vee x > \frac{-h+\sqrt{h^2+4h-12}}{2} & h < -6 \vee h > 2 \\ x \neq -3 & h = -6 \\ x \neq -1 & h = 2 \\ \varnothing & -6 < h < 2 \end{cases}\right]$$

5. $(1 + 3h) \cdot x^2 - x + h > 0$

$$\left[\begin{cases} \varnothing & h \leq -\frac{1}{2} \\ \frac{1-\sqrt{-12h^2-4h+1}}{2\cdot(3h+1)} < x < \frac{1+\sqrt{-12h^2-4h+1}}{2\cdot(3h+1)} & -\frac{1}{2} < h < -\frac{1}{3} \\ x < -\frac{1}{3} & h = -\frac{1}{3} \\ x < \frac{1-\sqrt{-12h^2-4h+1}}{2\cdot(3h+1)} \vee x > \frac{1+\sqrt{-12h^2-4h+1}}{2\cdot(3h+1)} & -\frac{1}{3} < h < \frac{1}{6} \\ x = -\frac{1}{3} & h = \frac{1}{6} \\ \forall x \in \mathbb{R} & h > \frac{1}{6} \end{cases}\right]$$

6. $(1 - h) \cdot x^2 - (1 + h) \cdot x - 2 \leq 0$ $\left[\begin{cases} x < -1 \vee x > \dfrac{2}{1-h} & h < 1 \\ x \geq -1 & h = 1 \\ \dfrac{2}{1-h} < x < 1 & h > 1 \wedge h \neq 3 \\ \forall x \in \mathbb{R} & h = 3 \end{cases}\right]$

Risolvere le seguenti disequazioni in valore assoluto

Livello 1

7. $|x + 1| > 1$; $|2x + 3| < 1$; $|-3x - 2| \leq 1$; $|3x + 1| > 2$; $|1 - 2x| < x$ $\left[(x < -2 \vee x > 0); -2 < x < -1; -1 \leq x \leq -\frac{1}{3}; \left(x < -1 \vee x > \frac{1}{3}\right); \frac{1}{3} < x < 1\right]$

8. $|4 - x| \leq 1 + 2x$; $|x^2 - 5x - 6| \leq 0$; $|x^2 + 1| > 0$; $|x^2 - 1| < 0$ $[x \geq 1; (x = -1 \vee x = 6) ; \forall x \in \mathbb{R} ; \varnothing]$

Livello 2

9. $|x^2 + 1| > 2$; $|4x^2 - 2x| < x^2 - 2$; $|x^2 - 4| < 2$ $\left[(x < -1 \vee x > 1); \varnothing; \left(-\sqrt{6} < x < -\sqrt{2} \vee \sqrt{2} < x < \sqrt{6}\right)\right]$

10. $|x^2 - x - 2| \leq 1$; $|x^2 + x + 1| > x$ $\left[\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2} \leq x \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right); \forall x \in \mathbb{R}\right]$

11. $|x^2 - 2x + 1| < 4x - 2$; $|x^2 + 5x - 6| \leq 6$ $\left[3-\sqrt{6} < x < 3+\sqrt{6}; \left(\frac{-5-\sqrt{73}}{2} \leq x \leq -5 \vee 0 \leq x \leq \frac{-5+\sqrt{73}}{2}\right)\right]$

12. $|2x^2 + x - 1| < 2x^2$; $|1 - x^2| \geq x^2 + x - 1$ $\left[\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{8} < x < \frac{-1+\sqrt{17}}{8} \vee x > 1\right); x \leq \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right]$

Proprietà delle successioni di numeri reali

Non vi è il più piccolo fra i piccoli né il più grande fra i grandi, ma qualcosa sempre di più piccolo e qualcosa di più grande. *Anassagora*

Il problema

Abbiamo visto che in genere le successioni di numeri naturali, tranne che siano formate da numeri scelti a caso, verificano delle semplici proprietà (numeri dispari, multipli di 5, quadrati perfetti, …). Quello che ci interessa sapere è se hanno un comportamento *regolare*. Per esempio abbiamo visto che le progressioni geometriche di ragione $\frac{1}{10}$ possono essere usate per rappresentare i numeri razionali periodici. Cioè la successione $\left\{1+\frac{1}{10^{n-1}}\right\}$ *rappresenta* il numero periodico semplice $1,\bar{1}$, vuol dire che non è un particolare elemento della successione a rappresentarlo, bensì la successione nella sua totalità. Vogliamo perciò stabilire per una generica successione se essa, nella sua totalità può rappresentare o no, un dato numero reale.

Per cercare di risolvere il precedente problema dobbiamo porre qualche definizione, dato che per esempio la successione dei quadrati perfetti difficilmente può rappresentare un numero reale, dato che i suoi elementi crescono senza alcuna limitazione. Quindi una prima proprietà che dobbiamo stabilire è il fatto che gli elementi della successione non possano crescere, o decrescere, in modo arbitrario. Si potrebbe erroneamente pensare che aumentando n anche il numero reale a esso associato aumenti, ciò non sempre è vero, come mostriamo nei successivi esempi.

Esempio 1

- Gli elementi della successione $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ sono tutti positivi, essendo i reciproci di numeri positivi e per lo stesso motivo sono anche tutti minori o uguali a 1.
- Per la successione $\left\{\frac{n+2}{n-5}, n \neq 5\right\}$, escludendo i primi 4 elementi che sono negativi, gli altri sono tutti maggiori di 1, dato che il numeratore è sempre maggiore del denominatore.
- Gli elementi di $\left\{\sqrt{5n-13}, n>2\right\}$, sono anch'essi tutti positivi, ma non è vero che sono tutti minori di un dato numero, dato che $\sqrt{5n-13}$ può assumere valori maggiori di qualsiasi numero fissato. Per esempio sono maggiori di 1000 se $\sqrt{5n-13} > 1000 \Rightarrow 5n - 13 > 10^6 \Rightarrow n > \frac{10^6+13}{5} \approx 200002$. Ma n è un naturale quindi dobbiamo prendere il primo naturale maggiore di 200002, quindi per tutti gli elementi a partire da quello di posto 200003 in poi. Verifichiamo quanto detto: Per n = 200002 si ha: $\sqrt{5 \cdot 200002 - 13} = \sqrt{99997} < \sqrt{10^6} = 1000$, per n = 200003: $\sqrt{5 \cdot 200003 - 13} = \sqrt{1000002} > \sqrt{10^6} = 1000$.
- La successione $\left\{(-1)^n \cdot n^2\right\}$, assume valori arbitrariamente grandi e arbitrariamente piccoli, così per esempio ci sono elementi maggiori di un miliardo, come $(-1)^{40000} \cdot 40000^2 = 1,6 \cdot 10^9 > 10^9$. Allo stesso modo ci sono per esempio elementi minori di -10^9, come $(-1)^{39999} \cdot 39999^2 = -159992001 < -10^9$.

Tenuto conto degli esempi precedenti, poniamo le seguenti definizioni.

Definizione 1

Una successione $\{a_n\}$ di numeri reali si dice **limitata superiormente** se esiste un numero reale S maggiore o uguale di tutti gli elementi della successione. In simboli: $a_n \leq S, \forall n \in \mathbb{N}$.

Definizione 2

Una successione $\{a_n\}$ di numeri reali si dice **limitata inferiormente** se esiste un numero reale I minore o uguale di tutti gli elementi della successione. In simboli: $a_n \geq I$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definizione 3

Una successione $\{a_n\}$ di numeri reali si dice **limitata**, se è limitata sia inferiormente che superiormente, cioè se esistono due numeri reali I e S per cui si ha: $I \leq a_n \leq S$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Consideriamo le successioni degli esempi precedenti, per vedere se ve ne sono di limitate.

Esempio 2

- La successione $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ è limitata dato che si ha: $0 < \frac{1}{n} \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- La successione $\left\{\frac{n+2}{n-5}, n \neq 5\right\}$ è limitata, essendo $-6 \leq \frac{n+2}{n-5} \leq 8, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{5\}$.
- La successione $\left\{\sqrt{5n-13}\right\}$, è limitata inferiormente da zero, ma non è limitata superiormente, come abbiamo notato nell'esempio precedente.
- La successione $\left\{(-1)^n \cdot n^2\right\}$, tenuto conto dell'esempio precedente, non è limitata né superiormente, né inferiormente, è cioè illimitata.

Se una successione è limitata ovviamente ha infiniti numeri maggiori dei suoi elementi e infiniti minori.

Definizione 4

- Data una successione limitata superiormente ogni numero M maggiore di tutti gli elementi della successione su chiama **maggiorante della successione**.
- Data una successione limitata inferiormente ogni numero m minore di tutti gli elementi della successione su chiama **minorante della successione**.

Esempio 3

Abbiamo già osservato che la successione $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ è limitata e che si ha: $0 < \frac{1}{n} \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Quindi ogni numero maggiore o uguale ad 1 è un suo maggiorante, ogni numero minore o uguale a 0 un suo minorante.

L'insieme dei maggioranti ha un elemento più piccolo, quello dei minoranti un elemento più grande.

Definizione 5

- Data una successione limitata superiormente il minimo dei suoi maggioranti si chiama **estremo superiore della successione**.
- Data una successione limitata inferiormente il massimo dei suoi minoranti si chiama **estremo inferiore della successione**.
- Se una successione è illimitata superiormente si dice che il suo estremo superiore è **più infinito**.
- Se una successione è illimitata inferiormente si dice che il suo estremo inferiore è **meno infinito**.

Notazione 1

- Infinito si indica con il simbolo ∞.
- L'estremo inferiore di una successione $\{a_n\}$ si indica con $inf(a_n)$.
- L'estremo superiore di una successione $\{a_n\}$ si indica con $sup(a_n)$.

L'angolo storico

Il simbolo ∞ per indicare la nozione di infinito, soprattutto nel calcolo fu usato per primo da John Wallis nella sua opera *De sectionibus conicis* del 1655. L'ipotesi più accreditata è che Wallis abbia "deformato" un simbolo che gli antichi romani usavano per indicare il numero 1000.

Esempio 4

Poiché 0 è un minorante di $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ e non ci sono numeri maggiori di 0 più piccoli di *tutti* gli elementi di $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, possiamo dire che 0 è l'estremo inferiore di $\left\{\frac{1}{n}\right\}$. E poiché 1 è un maggiorante di $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ e non ci sono numeri minori di 1 più grandi di *tutti* gli elementi di $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, possiamo dire che 1 è l'estremo superiore di $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

Per determinare in modo più *sicuro* l'estremo inferiore e quello superiore di una successione dimostriamo il seguente risultato.

Teorema 1

Data una successione limitata superiormente $\{a_n\}$, il suo estremo superiore S, verifica le seguenti proprietà

1. $a_n \leq S, \forall\, n \in \mathbb{N}$.
2. $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, h \in \mathbb{N} : a_h > S - \varepsilon$

Dimostrazione

La proprietà 1 discende dal fatto che l'estremo superiore è un maggiorante. La seconda proprietà dice che S è proprio il più piccolo dei maggioranti, tanto è vero che se gli togliamo una quantità positiva, non importa quanto piccola, $S - \varepsilon$ non è più un maggiorante.

In modo analogo si prova un risultato per l'estremo inferiore.

Teorema 2

Data una successione limitata inferiormente $\{a_n\}$, il suo estremo inferiore I, verifica le seguenti proprietà

1. $a_n \geq I, \forall\, n \in \mathbb{N}$.
2. $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, h \in \mathbb{N} : a_h < I + \varepsilon$

Dimostrazione per esercizio

Esempio 5

Proviamo che effettivamente $inf\left(\frac{1}{n}\right) = 0, sup\left(\frac{1}{n}\right) = 1$. Le prime due proprietà le abbiamo già provate.

- Per l'*inf*, dobbiamo provare che la disequazione $\frac{1}{n} < \varepsilon$, ha soluzioni infinite, e infatti si ha $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Quindi, comunque consideriamo un numero *leggermente* più grande di 0, questo non è più un minorante della successione, pertanto è proprio 0 il massimo dei minoranti, quindi l'*inf*.
- Analogamente la disequazione $\frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$, ha soluzione $n > \frac{1}{1-\varepsilon}$, quindi ogni numero *leggermente* inferiore a 1 non è un maggiorante, 1 è il *sup*.

A volte capita che l'estremo inferiore o quello superiore appartengano alla successione.

Definizione 6

- Se l'estremo superiore di una successione limitata superiormente appartiene alla successione, si chiama **massimo della successione**.
- Se l'estremo inferiore di una successione limitata inferiormente appartiene alla successione, si chiama **minimo della successione**.

Notazione 2

- Il minimo di una successione $\{a_n\}$ si indica con $min(a_n)$.
- Il massimo di una successione $\{a_n\}$ si indica con $max(a_n)$.

Esempio 6

0 è estremo inferiore di $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ma non è minimo, mentre 1 è massimo.

Chiudiamo con una definizione che ci sarà utile nel seguito.

Definizione 7

Diciamo che una successione **verifica definitivamente** una proprietà se la detta proprietà è vera per tutti gli elementi maggiori di un dato elemento, cioè se è vera $\forall\ n > h,\ h \in \mathbb{N}$.

Esempio 7

La successione $\left\{\frac{3-n}{n}\right\}$ è formata, escludendo i primi 3 elementi (2, $\frac{1}{2}$, 0) da elementi negativi, pertanto è una successione definitivamente negativa.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo stabilire se la successione $\left\{(-1)^n \cdot \dfrac{2n+3}{5n}\right\}$ è limitata inferiormente o superiormente. Osserviamo che i termini sono alternati, scriviamone alcuni: $\left\{-1, \dfrac{7}{10}, -\dfrac{3}{5}, \dfrac{11}{20}, -\dfrac{13}{25}, \dfrac{1}{2}, \ldots\right\}$. Per il momento lasciamo perdere il segno e consideriamo solo il valore assoluto: $\dfrac{2n+3}{5n} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{5n}$. Abbiamo scritto il generico elemento positivo in modo da fare vedere che ogni elemento è la somma fra $\dfrac{2}{5}$ e un numero positivo, quindi tutti i termini positivi sono maggiori di $\dfrac{2}{5}$. D'altro canto aumentando n la frazione $\dfrac{3}{5n}$ assume valori sempre più piccoli, quindi il suo massimo valore si ha per $n = 1$. Dato che i termini positivi si ottengono per valori pari di n, il più grande di essi è $\dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{10} = \dfrac{7}{10}$. Per i numeri negativi valgono considerazioni analoghe, nel senso che sono tutti maggiori o uguali di $-1 \cdot \left(\dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{5}\right) = -1$. Quindi in ogni caso la successione è limitata sia inferiormente che superiormente.

Determinare se le seguenti successioni sono limitate, superiormente e/o inferiormente

Livello 1

1. $\left\{\dfrac{n+3}{n}\right\}$; $\left\{\dfrac{n^2+1}{n}\right\}$; $\left\{\dfrac{n}{n^2+1}\right\}$; $\left\{\dfrac{2-n}{n+1}\right\}$ [Limitata ; Lim. Inf. ; Limitata ; Limitata]
2. $\left\{\dfrac{3-n^2}{n+2}\right\}$; $\left\{\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right\}$; $\left\{\dfrac{n^2+3}{n^3-1}\right\}$; $\left\{\dfrac{n^4+1}{1000n^3}\right\}$; $\left\{log\left(\dfrac{n}{n+1}\right)\right\}$ [Lim. Sup. ; Limitata ; Limitata ; Lim. Inf. ; Limitata]

Livello 2

3. $\left\{(-1)^n \cdot \left(n+\dfrac{1}{n}\right)\right\}$; $\left\{(-1)^n \cdot \dfrac{n-1}{n^2}\right\}$; $\{(-1)^n \cdot cos(n)\}$ [Ilimitata ; Limitata ; Limitata]
4. $(-1)^n \cdot tan(n)\}$; $\left\{\dfrac{n^2+(-1)^n \cdot n^2}{n}\right\}$; $\left\{\dfrac{n}{sin(n)}\right\}$ [Illimitata ; Lim. Inf. ; Illimitata]

Lavoriamo insieme

- Vogliamo determinare *inf* e *sup* della successione $\left\{(-1)^n \cdot \dfrac{2n+3}{5n}\right\}$, che abbiamo già visto essere limitata. Abbiamo già osservato che tutti i termini positivi sono minori o uguali a $\dfrac{7}{10}$, che è perciò il massimo della successione, quindi anche il *sup*. Analogamente i numeri negativi sono tutti maggiori o uguali di -1, che è perciò il minimo quindi anche l'*inf*.

- La successione $\left\{\frac{n+3}{n^2}\right\}$ è anch'essa limitata, poiché $\frac{n+3}{n^2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $\frac{n+3}{n^2} \le \frac{1+3}{1^2} = 4$. E 4 è appunto il massimo, mentre 0 è l'*inf* ma non il minimo. Infatti $0 \notin \left\{\frac{n+3}{n^2}\right\}$ e nello stesso tempo $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N} : \frac{n+3}{n^2} > -\varepsilon, \forall n > k$, in cui $k = 1$.

Determinare inf e sup delle seguenti successioni dicendo se essi sono anche min o max

Livello 1

5. $\left\{\frac{2n+3}{n+2}\right\}$; $\left\{\frac{n^2-1}{n}\right\}$; $\left\{\frac{3n}{n^2+1}\right\}$ $\left[\left(\min = \frac{5}{3}, \sup = 2\right); (\min = 1, \sup = +\infty); \left(\inf = 0; \max = \frac{3}{2}\right)\right]$

6. $\left\{\frac{2+n}{n^2+1}\right\}$; $\{ln(n)\}$; $\{sin(n)\}$ $\left[\left(\inf = 0, \max = \frac{3}{2}\right); (\min = 0, \sup = +\infty); (\inf = -1; \sup = 1)\right]$

7. $\left\{\sqrt{\frac{n^2+3}{n^2+1}}\right\}$; $\{2^n\}$; $\{2^{-n}\}$ $\left[\left(\inf = 1, \sup = \sqrt{2}\right); (\min = 1, \sup = +\infty); \left(\inf = 0; \max = \frac{1}{2}\right)\right]$

Livello 2

8. $\left\{(-1)^n \cdot \left(n + \frac{1}{n}\right)\right\}$; $\{(-1)^n \cdot sin(n)\}$; $\{sin(n) + cos(n)\}$

$\left[\left(\min = \frac{3}{2}, \max = \frac{5}{2}\right); (\inf = -1, \sup = 1); \left(\inf = 1 - \sqrt{2}; \sup = \sqrt{2}\right)\right]$

9. $\left\{\frac{n^2 + (-1)^n \cdot n^2}{n}\right\}$; $\left\{\frac{\sqrt{n}+1}{n+\sqrt{n}}\right\}$; $\left\{\frac{n+(-1)^n \cdot n}{ln(n)}\right\}$

[(min = 0, sup = +∞) ; (inf = 0, max = 1) ; (min = 0, sup = +∞)]

Successioni divergenti

Non c'è alcun numero "infinito": un'equazione del tipo n = ∞ è priva di significato; un numero non può essere uguale ad infinito, perché "uguale ad infinito" significa niente. Così il simbolo ∞ non ha alcun significato, tranne che nella frase "tende a ∞". *Godfrey H. Hardy*, *A course of pure mathematics*, 1908

Se consideriamo una successione illimitata solo superiormente o solo inferiormente questo fatto ci fa pensare che l'*andamento* della successione consista proprio nel tendere verso uno dei due tipi di infinito. Ma è proprio così? E che significa che l'*andamento* è di tendere verso l'infinito?

Esempio 8

Abbiamo visto che entrambe le successioni $\left\{\sqrt{5n-13}\right\}$ e $\{(-1)^n \cdot n^2\}$, sono illimitate superiormente, ma la seconda è illimitata anche inferiormente, quindi crediamo che le due successioni abbiano un comportamento diverso all'aumentare della posizione dei loro termini. Cioè aumentando n, mentre nella prima successione otteniamo valori sempre più grandi senza alcuna limitazione superiore, lo stesso non succede per la seconda successione, dato che in essa i valori sono alternativamente positivi e negativi.

Tenuto conto del precedente esempio possiamo dire che la successione $\left\{\sqrt{5n-13}\right\}$ tende a più infinito, mentre la seconda successione non ha un andamento ben preciso. In ragione di ciò poniamo la seguente definizione.

Definizione 8

Una successione $\{a_n\}$ per la quale, comunque si fissi un numero positivo M, esiste un elemento a_k tale che tutti i numeri che lo seguono sono maggiori di M, si dice **divergente positivamente**. Simbolicamente

$$\forall M > 0, \exists k \in \mathbb{N} : n > k \Rightarrow a_n > M.$$

Notazione 3

Una successione divergente positivamente si indica con la scritta $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, e si legge *limite per n che tende a più infinito di a_n è più infinito*.

Esempio 9

Proviamo che effettivamente si ha: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{5n-13} = +\infty$. Dobbiamo vedere quindi se, fissato un qualsiasi numero positivo M, si ha $\sqrt{5n-13} > M, \forall n > h$, con h un certo numero naturale che rappresenta la posizione del primo elemento della successione per il quale *tutti quelli che lo seguono* sono maggiori di M. Dobbiamo quindi risolvere la disequazione, che equivale a $5n-13 > M^2$, perché stiamo lavorando nei numeri positivi. Si ha: $n > \frac{M^2+13}{5}$, quindi, detto h il primo numero naturale $h \geq \frac{M^2+13}{5}$ abbiamo provato quanto detto. così per esempio se avessimo fissato M = 100, avremmo avuto $h = \left\lfloor \frac{100^2+13}{5} \right\rfloor = 2002$, in cui il simbolo racchiuso fra $\lfloor\ \rfloor$, è il cosiddetto *massimo intero contenuto nel numero*. Quindi possiamo dire che a partire da quello di posto 2003, tutti gli elementi della successione sono maggiori di 100. Infatti per n = 2002 abbiamo: $\sqrt{5\cdot 2002-13} = \sqrt{9997} < \sqrt{10000} = 100$, mentre $\sqrt{5\cdot 2003-13} = \sqrt{10002} > \sqrt{10000} = 100$.

Dobbiamo fare attenzione a distinguere le successioni divergenti da quelle che invece contengono numeri *molto grandi*.

Esempio 10

Consideriamo la successione $\left\{\frac{10^{50}n+1}{n-1}\right\}$, i suoi elementi sono tutti dell'ordine di 10^{50}, quindi numeri *molto grandi*, ma la successione non è illimitata, infatti

$$\frac{10^{50}n+1}{n-1}=\frac{10^{50}n-10^{50}+10^{50}+1}{n-1}=\frac{10^{50}\cdot(n-1)+10^{50}+1}{n-1}=10^{50}+\frac{10^{50}+1}{n-1}\le 2\cdot 10^{50}+1$$

Ovviamente una successione limitata superiormente non può essere divergente. Se volessimo verificarlo potremmo risolvere la disequazione $\frac{10^{50}n+1}{n-1}>M\Rightarrow 10^{50}n+1>Mn-M\Rightarrow\left(10^{50}-M\right)\cdot n>-1-M$, se adesso operiamo senza considerare il segno di $10^{50}-M$, otterremo $n>\frac{-1-M}{10^{50}-M}=\frac{1+M}{M-10^{50}}$, che dovrebbe significare che il limite è infinito. Se però teniamo conto che quanto scritto è vero solo se $10^{50}-M>0$, cioè se scegliamo $M<10^{50}$, allora tutti gli elementi della successione a partire da quello di posto $\left\lfloor\frac{1+M}{M-10^{50}}\right\rfloor+1$, sono maggiori di M, che significa tutti perché $M<10^{50}\Rightarrow\frac{1+M}{M-10^{50}}<0$. Ma se scegliessimo $M=10^{50}+1$, allora la disequazione diventerebbe $(10^{50}-10^{50}-1)\cdot n>-1-10^{50}+1\Rightarrow -n>-10^{50}\Rightarrow n<10^{50}$, cioè *solo* i termini della successione precedenti a quello di posto 10^{50} sono maggiori di $10^{50}+1$, gli altri no. Per esempio $\frac{10^{50}\cdot 10^{50}+1}{10^{50}-1}=\frac{10^{100}+1}{10^{50}-1}=\frac{10^{50}-1+2}{10^{50}-1}=\frac{\left(10^{50}-1\right)\cdot\left(10^{50}+1\right)+3}{10^{50}-1}=10^{50}+\frac{3}{10^{50}-1}<10^{50}+1$.

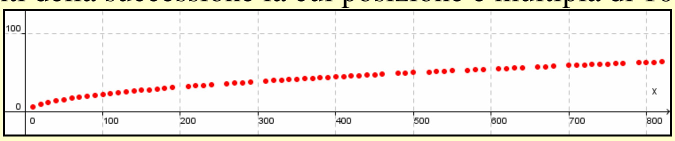
L'angolo storico

Il simbolo lim è stato usato per primo da Simon Lhuilier in una sua opera del 1786. Lhuilier scriveva semplicemente lim. q:Q. Il simbolo attuale si stabilizzò solo molti anni dopo. In particolare Weierstrass nel 1854 scriveva $\lim\limits_{n=\infty}p_n=\infty$.

Possiamo anche interpretare graficamente la divergenza di una successione.

Esempio 11

Tenuto conto di quanto detto negli esempi precedenti, scriveremo $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{5n-13}=+\infty$. Rappresentiamo graficamente tutti gli elementi della successione la cui posizione è multipla di 10, fino a 800.



Osserviamo che effettivamente all'aumentare di n gli elementi della successione assumono valori sempre maggiori, apparentemente senza alcun limite.

Tenuto conto della divergenza positiva, facilmente poniamo il concetto di divergenza negativa.

Definizione 9

Una successione $\{a_n\}$ per la quale, comunque si fissi un numero negativo M, esiste un elemento a_k tale che tutti i numeri che lo seguono sono minori di M, si dice **divergente negativamente**. Simbolicamente

$$\forall M>0,\ \exists k\in\mathbb{N}: n>k\Rightarrow a_n<-M$$

Notazione 4

Una successione divergente negativamente si indica con la scritta $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=-\infty$, e si legge *limite per n che tende a più infinito di a_n è meno infinito*.

Esempio 12

Per fornire un esempio di successione divergente negativamente, basta cambiare il segno a tutti i termini di una successione divergente positivamente. Così avremo: $\lim_{n \to +\infty} \left(-\sqrt{5n-13}\right) = -\infty$.

Non tutte le successioni non limitate né superiormente né inferiormente sono divergenti. Vale la seguente immediata proprietà:

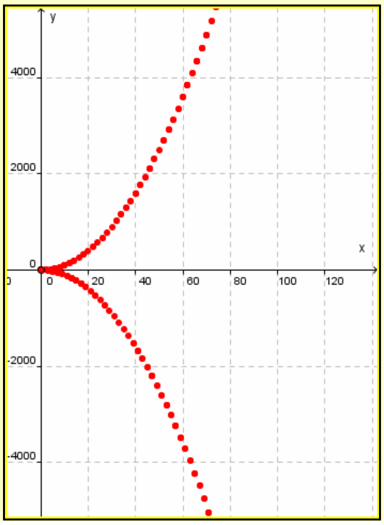
Teorema 3

Condizione necessaria affinché una successione sia divergente positivamente è che essa non sia limitata superiormente. Condizione necessaria affinché una successione sia divergente negativamente è che essa non sia limitata inferiormente.

La condizione non è certamente sufficiente.

Esempio 13

Abbiamo già detto che la successione $\{(-1)^n \cdot n^2\}$ è illimitata, eppure non è divergente né positivamente né negativamente, come può osservarsi anche dal grafico di alcuni suoi termini, tutti quelli la cui posizione è un multiplo di 5, fino a 790. Usiamo un sistema dimetrico, vista la notevole differenza di grandezza fra ascisse e ordinate. La successione ha un andamento continuamente oscillante.



Verifiche

Lavoriamo insieme

Sapendo che $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+3}{n+1}=+\infty$, determinare il primo numero naturale p per cui tutti gli elementi successivi sono maggiori di 12345.

Dobbiamo risolvere la disequazione $\frac{n^2+3}{n+1}>12345 \Rightarrow n^2+3>12345n+12345 \Rightarrow n^2-12345n-12341>0$

Abbiamo potuto eliminare il denominatore poiché n è un numero naturale e quindi $n + 1$ è sempre positivo.

La soluzione della disequazione è $n<\frac{12345-\sqrt{152448389}}{2}<0 \vee n>\frac{12345+\sqrt{152448389}}{2}\approx 12345,9$

Sempre tenendo conto che n è un numero naturale, la prima disequazione non è soluzione accettabile, la seconda deve essere riportata al primo numero naturale successivo a 12345,9 cioè a 12346. Quindi il numero p cercato è proprio 12346. Infatti avremo: $\frac{12345^2+3}{12345+1}\approx 12344<12345; \frac{12346^2+3}{12346+1}\approx 12345,0003>12345$

Tenuto conto del limite indicato determinare il primo numero naturale p a partire dal quale tutti gli elementi della successione verificano la richiesta

Livello 1

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-2n^2}{n+2}=-\infty \Rightarrow \frac{1-2n^2}{n+2}<-5412$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4n^2+3}{3n-1}=+\infty \Rightarrow \frac{4n^2+3}{3n-1}>7812$ [2708 ; 5857]
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n^2-1}{5n-3}=+\infty \Rightarrow \frac{3n^2-1}{5n-3}>47589$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+n}{n-1}=+\infty \Rightarrow \frac{n^2+n}{n-1}>57948$ [76315 ; 57946]
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4n^2+n+5}{3n-2}=+\infty \Rightarrow \frac{4n^2+n+5}{3n-2}>4578$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2-n^2}{5+2n}=-\infty \Rightarrow \frac{2-n^2}{5+2n}<-9876$ [3433 ; 19755]
4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2-3n^2+n}{5n-1}=-\infty \Rightarrow \frac{2-3n^2+n}{5n-1}<-5479$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2+n+1\right)=+\infty \Rightarrow n^2+n+1>2014$ [9132 ; 45]

Verificare la validità dei seguenti limiti

Livello 1

5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^3+1}{n+1}=+\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} ln\left(n^2\right)=+\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} log_2\left(\frac{1}{n}\right)=-\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n+1}}=+\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-2n^2}{n+2}=-\infty$
6. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4n^2+3}{3n-1}=+\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n^2-1}{5n-3}=+\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{n-1}=+\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2-3n^2+n}{5n-1}=-\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}=+\infty$

Verificare la NON validità dei seguenti limiti

Livello 2

7. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{n^3+1}=+\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1000n^2+1}{n^2}=+\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2-10^5}{n}=-\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} sin\left(n^{2014}\right)=+\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} tan\left(\frac{n+1}{n-1}\right)=+\infty$

Giustificare la risposta ai seguenti quesiti

Livello 2

8. Se $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$, vuol dire che $a_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$? [No]
9. Se $\{a_n\}$ ha un milione di elementi negativi, è possibile che $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$? [Sì]
10. Se $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$, vuol dire che $\exists p\in\mathbb{N}: a_n > 1000, \forall n > p$. Possiamo concludere che si ha anche $a_n\le 1000$, per $n\in\{1, 2, \ldots, p\}$? [No]
11. Determinare una condizione su $\{a_n\}$, affinché quanto affermato nell'esercizio precedente sia vero. [$a_{n+1}\ge a_n, \forall n\in\mathbb{N}$]

12. Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, vuol dire che $\exists p\in \mathbb{N}: a_n < -1000, \forall n > p$. Possiamo concludere che si ha anche $a_n \geq -1000$, per $n \in \{1, 2, \ldots, p\}$? [No]

13. Determinare una condizione su $\{a_n\}$, affinché quanto affermato nell'esercizio precedente sia vero. [$a_{n+1} \leq a_n, \forall n\in \mathbb{N}$]

Livello 3

14. Se $\{a_n\}$ ha infiniti elementi negativi, è possibile che $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$? È sicuro che $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$? [No; No]

15. Se $\lim_{n\to+\infty} (a_n)^2 = +\infty$ possiamo dire che $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$? [No]

16. Se $\lim_{n\to+\infty} (a_n)^3 = -\infty$ possiamo dire che $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$? [Sì]

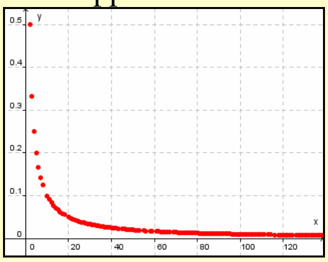
Successioni convergenti

Una grandezza è detta essere il limite di un'altra grandezza, quando la seconda può avvicinare la prima entro una qualsiasi grandezza, comunque piccola, sebbene la seconda non possa mai superare la grandezza a cui si avvicina.
Jean Baptiste Le Rond D'Alembert,
Voce *Limite* nell'*Encyclopédie* del 1754

Passiamo adesso a considerare le successioni limitate, che ovviamente non possono essere divergenti.

Esempio 14

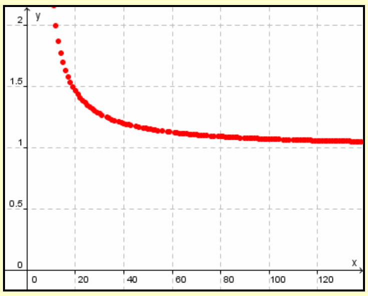
- Considerando gli elementi della successione $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, osserviamo che i suoi termini si avvicinano sempre più al numero 0, pur senza mai raggiungerlo. Per esempio $\frac{1}{1000} = 0,001 < \frac{1}{100} = 0,01$. Il grafico di alcuni valori ci conforta nell'ipotesi. Per ragioni di opportunità l'unità di misura sulle ordinate è diversa da quella sulle ascisse.



- Gli elementi della successione $\left\{\frac{n+2}{n-5}, n \neq 5\right\}$, si avvicinano sempre di più a 1, come si vede nella tabella.

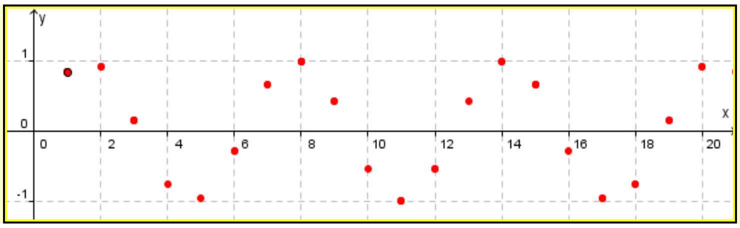
n	12	145	289
$\frac{n+2}{n-5}$	$\frac{12+2}{12-5} = \frac{14}{7} = 2$	$\frac{145+2}{145-5} = \frac{147}{140} = 1,05$	$\approx 1,02$
1145	2378	5426	15378
$\approx 1,006$	$\approx 1,003$	$\approx 1,001$	$\approx 1,0004$

Non è difficile capire che la differenza fra il numeratore e il denominatore rimane sempre costante: $n + 2 - (n - 5) = 7$, ma il rapporto di due numeri che differiscono di 7, all'aumentare dei numeri si avvicina sempre più a 1. Infatti, crescendo i numeri, la differenza relativa tende ad essere considerata zero. Spieghiamoci meglio, quando $n = 5426$, la differenza 7 rappresenta, in percentuale, $\frac{7}{5426} \approx 0,12\%$, se $n = 123456789$, invece il valore percentuale diventa $\frac{7}{123456789} \approx 5,6 \cdot 10^{-6}\ \%$, che può considerarsi praticamente zero. Naturalmente aumentando ancora di più n, la differenza percentuale diminuisce ancora di più. Possiamo perciò dire che la successione si *avvicina* a 1. Come conferma il grafico a lato.



- Invece la successione $\{sin(n)\}$, non si avvicina a nessun numero particolare, pur essendo limitata. Abbiamo per esempio: Il grafico della sinusoide ci conferma che non vi è alcun andamento di avvicinamento.

n	$Sin(n)$
1	$Sin(1) \approx 0{,}8414709848$
2	$Sin(2) \approx 0{,}9092974268$
3	$Sin(3) \approx 0{,}1411200080$
4	$Sin(4) \approx -0{,}7568024953$
5	$Sin(5) \approx -0{,}9589242746$



Abbiamo visto che anche per le successioni limitate possiamo distinguere quelle che hanno una "regolarità", dato che i loro elementi si "avvicinano" a un dato numero e quelle che invece hanno un andamento "oscillante". Dobbiamo però chiarire cosa intendiamo per "avvicinamento".

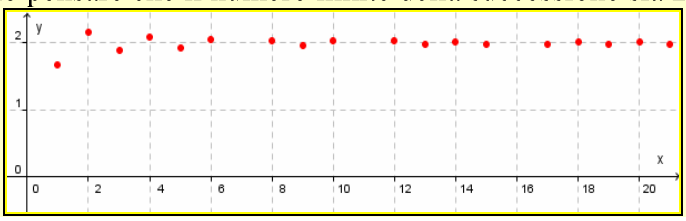
Esempio 15

Abbiamo detto che gli elementi della successione $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, al crescere di n si avvicinano a zero, in effetti però potrebbero avvicinarsi a un numero positivo molto piccolo, come per esempio 10^{-28}, o ancora un altro numero. Come facciamo allora a stabilire qual è il numero "limite"? Dobbiamo prima chiarire cosa intendiamo con questa locuzione. Ogni elemento della data successione è maggiore di zero, mentre ci sono elementi che sono minori di 10^{-28} e in generale di qualsiasi numero positivo. Anzi, come nel caso delle successioni divergenti, una volta che troviamo un elemento minore di un numero fissato, tutti quelli che lo seguono sono minori di esso. Così per esempio: $\frac{1}{n} < 10^{-28} \Rightarrow n > 10^{28}$. Quindi tutti i numeri che occupano una posizione successiva a quella di posto 10^{28}, sono minori di 10^{-28}.

Prima di definire cosa intendiamo per limite di una successione limitata, consideriamo un altro esempio, dato che il precedente ci potrebbe fare pensare, erroneamente, che l'avvicinamento a un certo numero da parte degli elementi di una successione avvenga sempre passando da elementi più piccoli ad altri più grandi.

Esempio 16

Consideriamo la successione $\left\{\frac{6n+(-1)^n}{3n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ che è formata da elementi alternativamente maggiori e minori di 2: $\left\{\frac{6\cdot 1+(-1)^1}{3\cdot 1},\frac{6\cdot 2+(-1)^2}{3\cdot 2},\frac{6\cdot 3+(-1)^3}{3\cdot 3},\frac{6\cdot 4+(-1)^4}{3\cdot 4},\ldots\right\}=\left\{\frac{5}{3},\frac{13}{6},\frac{17}{9},\frac{25}{12},\ldots\right\}$, come ci suggerisce anche il grafico seguente, possiamo pensare che il numero limite della successione sia 2.



Quindi in effetti dire che il limite di una successione è un certo numero ℓ, vuol dire che comunque togliamo o aggiungiamo una quantità positiva ε a ℓ, troviamo un elemento della successione, tale che tutti quelli che lo seguono sono più vicini a ℓ, di quanto lo possano essere sia $\ell + \varepsilon$ che $\ell - \varepsilon$. Poniamo allora la seguente definizione.

Definizione 10

Una successione $\{a_n\}$ per la quale, comunque si fissi un numero positivo ε, esiste un numero reale ℓ e un suo elemento a_k, tale che tutti i numeri che seguono a_k siano minori di $\ell + \varepsilon$ e maggiori di $\ell - \varepsilon$, si dice **convergente al numero ℓ**. Simbolicamente scriviamo: $\forall \varepsilon > 0, \exists\ k \in \mathbb{N} : n > k \Rightarrow \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$, l'ultima disuguaglianza può anche scriversi nella seguente forma compatta: $|a_n - \ell| < \varepsilon$.

Definizione 11

- Una successione convergente o divergente si dice **successione regolare**.
- Una successione non regolare si dice **oscillante** o anche **indeterminata**.

Notazione 5

Una successione convergente si indica con la scritta $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$, e si legge *limite per n che tende a più infinito di a_n è il numero reale* ℓ.

Esempio 17

Vogliamo provare che $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n+3}=\frac{1}{2}$, cioè che ∀ε > 0, ∃$k$∈ ℕ : $n > k \Rightarrow \frac{1}{2}-\varepsilon<\frac{n+1}{2n+3}\frac{1}{2}+\varepsilon$. Risolviamo la disequazione come fosse un sistema: $\begin{cases}\frac{n+1}{2n+3}>\frac{1}{2}-\varepsilon\\ \frac{n+1}{2n+3}<\frac{1}{2}+\varepsilon\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cancel{2n}+2>\cancel{2n}+3-4n\varepsilon-6\varepsilon\\ \cancel{2n}+2<\cancel{2n}+3+4n\varepsilon+6\varepsilon\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4n\varepsilon>1-6\varepsilon\\ 4n\varepsilon>-1-6\varepsilon\end{cases}$, la seconda disequazione è sempre verificata, quindi deve essere $n>\frac{1-6\varepsilon}{4\varepsilon}$. Così per esempio se scegliessimo ε = 0,01 avremo: $\frac{1}{2}$ – 0,01 < $\frac{n+1}{2n+3}$ < $\frac{1}{2}$ + 0,01 ⇒ 0,49 < $\frac{n+1}{2n+3}$ < 0,51, per $n>\frac{1-0,06}{0,04}=23,5$, cioè per tutti gli elementi dal 24-mo in poi.

Possiamo dare un significato fisico al concetto matematico di limite. In fisica la scritta 2,14 ± 0,13 indica che la misurazione effettuata ha un errore assoluto di 0,13, cioè il valore misurato è compreso tra 2,14 – 0,13 = 2,01 e 2,14 + 0,13 = 2,27. In pratica è come voler verificare che abbiamo una successione di limite 2,14 in cui l'ε fissato è 0,13. Quindi dire che una successione ha un certo limite è come dire che abbiamo una strumentazione che è in grado di ridurre a zero l'errore.
Anche per le successioni convergenti enunciamo un'ovvia condizione necessaria.

Teorema 4

Condizione necessaria affinché una successione sia convergente è che essa sia limitata.
Dimostrazione per esercizio

Come già notato con la successione $\{sin(n)\}$, che è una successione limitata ma oscillante, la condizione non è sufficiente.
Abbiamo detto più volte che la condizione di convergenza da un punto di vista intuitivo equivale a dire che all'aumentare di n i termini, in valore assoluto, sono sempre più simili fra loro, cioè la loro differenza in valore assoluto è sempre più vicina a zero. Questo fatto intuitivo è confermato dal seguente teorema.

Teorema 5 (Criterio di Cauchy)

Si ha: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-a_n\right)=0$.
Dimostrazione per esercizio

Esempio 18

Abbiamo parlato di valore assoluto della differenza di termini consecutivi perché non è detto che l'avvicinamento al limite sia sempre nello stesso verso. Per esempio la successione $\left\{\frac{6n+(-1)^n}{3n}\right\}$ che abbiamo visto convergere a 2, ma con elementi alternativamente maggiori e minori di 2, avrà la successione delle differenze formata alternativamente da numeri positivi e negativi, ma sempre più prossimi a zero.

Da ogni successione se ne possono ottenere infinite altre, semplicemente considerandone alcuni suoi sottoinsiemi infiniti.

Definizione 12

Ogni sottoinsieme ordinato e infinito di una successione $\{a_n\}$, si chiama sua **successione estratta**.

Con la dicitura sottoinsieme ordinato, intendiamo che il reciproco ordine fra gli elementi viene conservato. Così per esempio se estraiamo due elementi: a_n, a_m con $n < m$ (attenzione! ciò non significa per forza che sia $a_n < a_m$), se essi nella successione estratta saranno rispettivamente gli elementi a'_k, a'_h, si avrà $k < h$.

Esempio 19

Data la successione $\left\{\frac{6n+(-1)^n}{3n}\right\}$, possiamo considerare la successione estratta da essa semplicemente eliminando i primi 10 termini, cioè

$$\left\{\frac{6n+(-1)^n}{3n}\right\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1,2,\ldots,10\}}=\left\{\frac{6\cdot 11+(-1)^{11}}{3\cdot 11},\frac{6\cdot 12+(-1)^{12}}{3\cdot 12},\frac{6\cdot 13+(-1)^{13}}{3\cdot 13},\frac{6\cdot 14+(-1)^{14}}{3\cdot 14},\ldots\right\}$$

Oppure considerando solo i termini di posto pari:

$$\left\{\frac{6n+(-1)^n}{3n}\right\}_{n\in\mathbb{N}_p}=\left\{\frac{6\cdot 2+(-1)^{2}}{3\cdot 2},\frac{6\cdot 4+(-1)^{4}}{3\cdot 4},\frac{6\cdot 6+(-1)^{6}}{3\cdot 6},\frac{6\cdot 8+(-1)^{8}}{3\cdot 8},\ldots\right\}$$

e infinite altre.

La prima questione che vogliamo risolvere è: che rapporto vi è fra il limite di una successione regolare e quello di una sua estratta? La risposta appare abbastanza ovvia ed è enunciata di seguito.

Teorema 6

Ogni successione estratta da una successione regolare ha il suo stesso limite.

Dimostrazione

Supponiamo che la successione sia divergente positivamente, allora ogni suo sottoinsieme infinito continuerà a essere illimitato superiormente. Inoltre, dire che la successione diverge positivamente vuol dire che fissato un certo numero M vi è un numero k tale che si abbia $a_n > M$, $\forall\ n > k$. Ma di elementi a_n con $n > k$ nella successione estratta ce ne sono infiniti e sono posti nello stesso ordine, quindi avremo anche $a'_n > M$, $\forall\ n > k'$, in cui abbiamo indicato con a'_n gli elementi della successione estratta e con k' un numero naturale, non minore di k, per il quale vale la detta proprietà. Ciò vuol dire che anche $\lim\limits_{n\to\infty} a_n' = +\infty$.

Dimostrazioni simili possono effettuarsi per convergenza e divergenza negativa della successione e li lasciamo per esercizio.

Chiariamo quanto detto con un esempio.

Esempio 20

Abbiamo già visto che la successione $\left\{\sqrt{5n-13}\right\}$ è divergente positivamente e che per M = 1000, si ha: $\sqrt{5n-13}>1000 \Rightarrow n>200002$, cioè k = 200003. Se adesso consideriamo la successione estratta considerando tutti i termini il cui indice è un multiplo di 4 (4, 8, 12, 16, …), avremo che $\begin{cases}\sqrt{5n-13}>1000\\ n=4,8,12,16,\ldots\end{cases} \Rightarrow n \geq 200004$, dato che l'elemento di posto 200003 della successione di partenza non è stato estratto, il primo estratto che verifica la proprietà di essere maggiore di 1000 è perciò quello di posto 200004.

Non è vero però, in generale, che se una successione ha una o più sue estratte che hanno lo stesso limite allora la successione ha lo stesso limite.

Esempio 21

Dalla successione oscillante $\{(-1)^n \cdot n^2\}$ possiamo estrarre infinite successioni divergenti positivamente, basta scegliere un sottoinsieme infinito i cui elementi sono tutti positivi. Del resto possiamo anche estrarre infinite successioni divergenti negativamente.

Vale però la seguente proprietà.

Teorema 7

Se da una successione $\{a_n\}$ possiamo estrarre due o più successioni regolari aventi lo stesso limite, tali che la loro unione sia uguale ad $\{a_n\}$ o differisca da essa solo per un numero finito di termini, allora anche $\{a_n\}$ ha lo stesso limite delle estratte.

Esempio 22

Consideriamo la successione $\{a_n\} = \left\{12, -4, 31, 45, 1, \frac{5}{3}, 1, \frac{9}{7}, 1, \frac{13}{11}, \ldots\right\}$, i cui elementi di posto dispari a partire dalla quinta posizione sono tutti uguali a 1, mentre quelli di posto pari a partire dalla sesta posizione, sono frazioni del tipo $\frac{k+1}{k-1}$. Possiamo estrarre da questa la successione formata tutta da 1 e la successione delle frazioni $\left\{\frac{5}{3}, \frac{9}{7}, \frac{13}{11}, \ldots\right\}$, che converge a 1 (come ci convinciamo facilmente). Dato che l'unione delle due successioni fornisce tutta la successione di partenza tranne i suoi primi 4 elementi, possiamo dire che anche $\{a_n\}$ converge a 1.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Sapendo che $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+3}{n+1}=1$, determinare il primo numero naturale *p* per cui tutti gli elementi successivi sono compresi tra 1 e 1,0001. Dobbiamo risolvere la disequazione: $1<\frac{n+3}{n+1}<1{,}0001$. Poiché *n* + 3 > *n* + 1, la disuguaglianza sinistra è sempre vera. Risolviamo l'altra: *n* + 3 < 1,0001*n* + 1,0001 ⇒ 0,0001*n* > 1,9999 ⇒ *n* > 19999. Quindi tenendo conto che *n* è un numero naturale, il primo valore è 20000. Infatti avremo:

$$\frac{19999+3}{19999+1}=1{,}0001;\frac{20000+3}{20000+1}\approx 1{,}000099995<1{,}0001$$

Tenuto conto del limite indicato determinare il primo numero naturale p a partire dal quale tutti gli elementi della successione verificano la richiesta

Livello **1**

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n}{n+2}=2\Rightarrow 1{,}999<\frac{2n}{n+2}<2$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4n+1}{4n+2}=1\Rightarrow 0{,}999<\frac{4n+1}{4n+2}<1$ [3999; 250]
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{4n-3}=\frac{1}{2}\Rightarrow 0{,}5<\frac{2n-1}{4n-3}<0{,}501$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+n}{n^2-1}=1\Rightarrow 1<\frac{n^2+n}{n^2-1}<1{,}0001$ [126; 57946]
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n^2}{n^2-2}=2\Rightarrow 2<\frac{2n^2}{n^2-2}<2{,}001$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2+1}=0\Rightarrow 0<\frac{n}{n^2+1}<0{,}00001$ [64; 100001]
4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{1-n^2}=0\Rightarrow -0{,}00001<\frac{n}{1-n^2}<0$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2-1}{3n^2-2n-1}=\frac{1}{3}\Rightarrow 0{,}33<\frac{n}{n^2+1}<0{,}34$ [100001; 34]

Livello **2**

5. Provare che non esiste alcun numero naturale *p* per il quale siano vere le seguenti disequazioni, per ogni $n\geq p$: $\frac{3n+1}{2n-1}>2{,}001$; $\frac{2n+1}{n}<1{,}999$; $\frac{n^2+1}{n-1}<100000$; $\frac{2n}{n+2}<2{,}001$; $\frac{2n-1}{4n-3}<0{,}499$

Lavoriamo insieme

Vogliamo provare che $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+3}{n+1}=1$, cioè che comunque consideriamo ε > 0, esiste un numero naturale *h*, per cui si ha: $1-\varepsilon<\frac{n+3}{n+1}<1+\varepsilon$, per tutti gli *n* > *h*. Risolviamo la disequazione sotto forma di sistema:

$$\begin{cases}\frac{n+3}{n+1}>1-\varepsilon\\ \frac{n+3}{n+1}<1+\varepsilon\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n+3>n+1-n\varepsilon-\varepsilon\\ n+3<n+1+n\varepsilon+\varepsilon\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n\varepsilon>-2-\varepsilon\\ n\varepsilon>2-\varepsilon\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}\\ n>\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\end{cases}\Rightarrow n>\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}$$

Che è quanto volevamo provare, così se scegliessimo ε = 0,001, *h* sarebbe $\left\lfloor\frac{2-0{,}001}{0{,}001}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{1{,}999}{0{,}001}\right\rfloor=1999$, quindi tutti gli elementi successivi al 1999° stanno nell'intervallo [0,009; 1,001]

Verificare la validità dei seguenti limiti

Livello **1**

6. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n+1}{n+2}=3$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{4n}{n+5}}=2$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}=1$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n^2+1}=0$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}=0$
7. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=0$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+2}=1$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n+1}{4n+2}=\frac{3}{4}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n}{4n-5}=\frac{1}{2}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n^2+n}{n^2-1}=2$

8. $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2-1}=1$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{5n}{n^2+1}=0$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{1-n^2}=0$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2+n+5}{n+2n^2-2}=2$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$

Livello 2

9. $\lim_{n\to+\infty} sin\left(\frac{1}{n+1}\right)=0$; $\lim_{n\to+\infty} sin^{-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{\pi}{2}$; $\lim_{n\to+\infty} tan^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)=\frac{\pi}{4}$; $\lim_{n\to+\infty} e^{-n}=0$; $\lim_{n\to+\infty} cos\left(\frac{1}{n}\right)=1$

10. Provare che $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{n^2-1}\neq 0$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n+1}{2n}\neq 1,49999$; $\lim_{n\to+\infty} sin\left(\frac{\pi n-1}{6n}\right)\neq 1,5001$

Giustificare la risposta ai seguenti quesiti

11. Se $\{a_n\}$ ha un miliardo di elementi maggiori di 100, è possibile che $\lim_{n\to+\infty} a_n=-5$? [Sì]
12. Se $\lim_{n\to+\infty} a_n=1$ è possibile che sia $a_n > 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$? [Sì]
13. Se $\lim_{n\to+\infty} a_n=0$ è possibile che a_n abbia infiniti elementi positivi e infiniti negativi? [Sì]
14. Se $\lim_{n\to+\infty} a_n=2$ è possibile che a_n abbia infiniti elementi negativi? [No]
15. Se a_n ha infiniti elementi negativi è possibile che sia $\lim_{n\to+\infty} a_n=2$? [No]
16. Se a_n ha infiniti elementi negativi è possibile che sia $\lim_{n\to+\infty} a_n=0$? [Sì]

Livello 3

17. Consideriamo una funzione periodica, come $sin(x)$, $cos(x)$ e così via. Cosa possiamo dire della successione che si ottiene calcolando la funzione periodica solo per valori naturali, cioè $sin(n)$, $cos(n)$, …? [Sono tutte successioni oscillanti]
18. Quanto detto nell'esercizio precedente, è valido anche se una successione *contiene* nella sua definizione una funzione periodica, come per esempio $\left\{\frac{sin(n)}{n}\right\}$? [No, in questo caso possiamo ottenere successioni convergenti, divergenti o oscillanti]
19. Se $\{a_n\}$ ha tutti gli elementi maggiori di 2, è possibile che $\lim_{n\to+\infty} a_n=2$? Che $\lim_{n\to+\infty} a_n=1,99$ [Sì; No]
20. Una successione illimitata può essere convergente? Può essere divergente? [No, sempre oscillante]
21. Una successione oscillante è sempre illimitata? [No]

Operazioni aritmetiche con i limiti

Problema

Se conosciamo il limite di due successioni, possiamo calcolare il limite della ulteriore successione che si ottiene mediante operazioni aritmetiche sulle due? E se la risposta è affermativa, il risultato del limite della nuova successione può essere ottenuto anche senza conoscere nei dettagli le successioni?

Finora abbiamo solo enunciato il concetto di limite e verificato che un certo limite avesse un dato valore, non lo abbiamo calcolato. Adesso vogliamo imparare a calcolare i limiti. Per fare ciò dobbiamo stabilire anche come possiamo sfruttare risultati già noti, per esempio se sappiamo che una certa successione converge a 2 e un'altra a 3, la successione che otteniamo sommando le due successioni che comportamento ha? Procediamo con ordine, enunciando dei risultati apparentemente banali.

Teorema 8

Una successione costante $\{a\}$ converge al valore costante. Simbolicamente $\lim\limits_{n\to+\infty} a = a$.

Dimostrazione

Dobbiamo provare che comunque scegliamo $\varepsilon > 0$, si ha $|a - a| < \varepsilon$, il che è certamente vero per ogni numero naturale.

Passiamo adesso alle operazioni con i limiti. Prima spieghiamo che significa sommare, moltiplicare e così via, due successioni. Significa semplicemente costruire una successione i cui termini si ottengono sommando, moltiplicando eccetera i termini delle due successioni che occupano le stesse posizioni.

Esempio 23

Consideriamo le successioni $\left\{\dfrac{3n+2}{5n-3}\right\}$ e $\{2n - 1\}$, sommarle significa costruire la successione di termine generale $\left\{\dfrac{3n+2}{5n-3}+2n-1\right\}=\left\{\dfrac{3n+2+10n^2-5n-6n+3}{5n-3}\right\}=\left\{\dfrac{10n^2-8n+3}{5n-3}\right\}$.

Iniziamo a cercare di capire cosa accade sommando algebricamente due successioni regolari.

Teorema 9

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to+\infty} b_n = b \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(a_n \pm b_n\right) = a+b;\ \lim_{n\to+\infty}\left(a_n \cdot b_n\right) = a\cdot b;\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{a}{b}, b\neq 0;\ \lim_{n\to+\infty}\left(a_n\right)^{b_n} = a^b, a>0$$

Dimostrazione

Proviamo solo il risultato sulla somma, lasciando gli altri per esercizio. Prima però osserviamo che per la divisione dobbiamo imporre che sia $b \neq 0$, perché il simbolo $\dfrac{a}{0}$ non ha significato, allo stesso modo per la potenza dobbiamo evitare di ottenere scritte prive di senso come $(-1)^{\frac{1}{2}}$.

Dire che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ equivale a dire che $\forall\varepsilon > 0, \exists\ h \in \mathbb{N} : n > h \Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ (1) e dire che $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$ è lo stesso che dire $\forall\varepsilon > 0, \exists\ k \in \mathbb{N} : n > k \Rightarrow b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon$ (2). Noi vogliamo invece provare che vale la seguente scritta: $\forall\varepsilon > 0, \exists\ p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow a + b - \varepsilon < a_n + b_n < a + b + \varepsilon$. Diciamo p il più grande fra i numeri h e k che discendono dalle ipotesi. Così facendo entrambe le scritte (1) e (2) sono entrambe vere, per lo stesso ε. Quindi sommandole termine a termine si ottiene

$$a - \varepsilon + b - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon + b + \varepsilon \Leftrightarrow a + b - 2\varepsilon < a_n < a + b + 2\varepsilon$$

Ma questa è la tesi perché fissare un generico ε è lo stesso che fissare il suo doppio.

Esempio 24

Sapendo che $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{5n-3}=\frac{3}{5}$ e $\lim_{n\to\infty}\frac{11n^2-4n+3}{2-8n^2}=-\frac{11}{8}$, possiamo dire che si ha:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{5n-3}+\frac{11n^2-4n+3}{2-8n^2}\right)=\frac{3}{5}-\frac{11}{8}=-\frac{31}{40};\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{5n-3}-\frac{11n^2-4n+3}{2-8n^2}\right)=\frac{3}{5}-\frac{-11}{8}=\frac{79}{40};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{5n-3}\cdot\frac{11n^2-4n+3}{2-8n^2}\right)=\frac{3}{5}\cdot\frac{-11}{8}=-\frac{33}{40};\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{3n+2}{5n-3}}{\frac{11n^2-4n+3}{2-8n^2}}\right)=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{-11}{8}}=-\frac{24}{55};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{5n-3}\right)^{\frac{11n^2-4n+3}{2-8n^2}}=\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{-11}{8}}=\sqrt[8]{\left(\frac{5}{3}\right)^{11}}$$. Non ha invece senso $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{11n^2-4n+3}{2-8n^2}\right)^{\frac{3n+2}{5n-3}}$.

Nel Teorema 9 rimane irrisolto il caso $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ con $b = 0$. Prima però dobbiamo fare una precisazione. Una successione può convergere a zero essenzialmente in tre modi diversi.

Esempio 25

Abbiamo $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0;\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{n}=0;\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$, come facilmente può dimostrarsi perché nel primo caso si ha $\frac{1}{n}<\varepsilon\Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$; nel secondo caso $-\frac{1}{n}>-\varepsilon\Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$; e nel terzo caso $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{1}{n}<\varepsilon$. La differenza fra i tre limiti è il modo di avvicinarsi a 0, nel primo caso ci avviciniamo per valori positivi, nel secondo per valori negativi e nel terzo per valori alternativamente positivi e negativi.

Tenuto conto dell'esempio precedente possiamo enunciare il seguente risultato.

Teorema 10

$\lim_{n\to\infty}a_n=0, a_n\ge 0, \forall n>p\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=+\infty;\lim_{n\to\infty}a_n=0, a_n\le 0, \forall n>p\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=-\infty$

Dimostrazione

Proviamo solo il primo caso. L'ipotesi equivale a $\forall\varepsilon > 0, \exists\, h\in\mathbb{N} : n > h \Rightarrow -\varepsilon < a_n < \varepsilon$. Provare la tesi invece equivale a provare che $\forall M > 0, \exists\, k \in \mathbb{N} : n > k \Rightarrow \frac{1}{a_n}>M$. Per dimostrarlo basta scegliere $\varepsilon=\frac{1}{M}$, in questo caso possiamo scrivere $-\frac{1}{M}<a_n<\frac{1}{M}$, $\forall n > h$. Poiché $a_n > 0$, $\forall n > p$, considerato il maggiore fra p e h, che possiamo chiamare simbolicamente k, avremo $a_n<\frac{1}{M}\Rightarrow\frac{1}{a_n}>M$, $\forall n > k$, che è proprio la tesi.

Corollario 1

S $\lim_{n\to+\infty}a_n=a\neq 0, \lim_{n\to+\infty}b_n=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\infty$.

A questo punto possiamo dire che nell'algebra dei limiti $\frac{a}{0}=\pm\infty, a\neq 0$, in cui il segno dell'infinito dipende dal segno di a e dal modo in cui il denominatore si avvicina a zero.
Rimane in ogni caso irrisolto il caso in cui anche a_n converge a zero.

Esempio 26

Sappiamo che $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0; \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0$, facilmente possiamo scrivere: $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot 2n=\lim_{n\to\infty}2=2$, ma ugualmente possiamo scrivere $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}=\frac{1}{2n}\cdot n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Il precedente esempio ci ha mostrato un fatto finora mai visto, ossia che il risultato di una stessa espressione (in questo caso priva di senso) può avere due risultati diversi. Dobbiamo allora porre una nuova definizione.

Definizione 13

Date due successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ entrambi regolari, sia $\{c_n\}$ una successione ottenuta da esse mediante operazioni algebriche. Se $\lim_{n\to\infty}c_n$ dipende dalle singole successioni e non solo dai loro limiti, diremo che $\lim_{n\to\infty}c_n$ rappresenta una **forma indeterminata**.

Quindi possiamo dire che $\frac{0}{0}$ è una forma indeterminata, il che non significa che non possiamo determinarla, ma solo che non possiamo dire il risultato se non conosciamo chi sono le successioni che l'hanno generata. Saranno forme indeterminate espressioni che algebricamente non hanno significato, come appunto $\frac{0}{0}$, ma non tutte le espressioni di questo tipo, perché abbiamo visto invece che $\frac{a}{0}=\pm\infty, a\neq 0$.

Passiamo adesso a considerare il caso in cui una successione converge e l'altra diverge.

Teorema 11

Se $\lim_{n\to+\infty}a_n=a$ e $\lim_{n\to+\infty}b_n=\pm\infty$, allora

$$\lim_{n\to+\infty}\left(a_n\pm b_n\right)=\mp\infty; \lim_{n\to+\infty}\left(a_n\cdot b_n\right)=\begin{cases}\pm\infty & se\, a>0\\ \mp\infty & se\, a<0\end{cases}; \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=0; \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)=\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(a_n\right)^{b_n}=\begin{cases}+\infty & se\left(a>1\wedge b_n\to+\infty\right)\vee\left(0<a<1\wedge b_n\to-\infty\right)\\ 0 & se\left(a>1\wedge b_n\to-\infty\right)\vee\left(0<a<1\wedge b_n\to+\infty\right)\end{cases}; \lim_{n\to+\infty}\left(b_n\right)^{a_n}=\begin{cases}+\infty & se\left(a>0\wedge b_n\to+\infty\right)\\ 0 & se\left(a<0\wedge b_n\to-\infty\right)\end{cases}$$

Dimostrazione Per esercizio.

Esempio 27

- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{2n-5}+n\right)=+\infty$, perché la seconda successione è divergente positivamente.
- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{2n-5}\cdot n\right)=+\infty$, mentre $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-3}{4}\cdot n\right)=-\infty$
- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{2n-5}\right)^n=+\infty$ mentre $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{2n-5}\right)^{-n}=0$ e $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

Dal precedente teorema vengono fuori altre forme indeterminate: $0\cdot\infty$, 1^∞, ∞^0, non sono indeterminate $\frac{0}{\infty}=0$ e $\frac{\infty}{0}=\infty$, tranne che per la determinazione del segno.

Esempio 28

Sono forme indeterminate $0 \cdot \infty$

- $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0; \lim_{n\to\infty} n=+\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot n=\lim_{n\to\infty}1=1$. In questo caso $0 \cdot \infty = 1$.
- $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0; \lim_{n\to\infty} n^2=+\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot n^2=\lim_{n\to\infty}n=+\infty$. In questo caso $0 \cdot \infty = +\infty$.

Non sono invece forme indeterminate

- $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0; \lim_{n\to\infty} n^2=+\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=0$. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0; \lim_{n\to\infty} n^2=+\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}n^3=+\infty$.

Rimane adesso da considerare il caso in cui entrambe le successioni siano divergenti.

Teorema 12

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n=\pm\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n=\pm\infty$, allora

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=\pm\infty; \lim_{n\to+\infty}(a_n\cdot b_n)=\infty; \lim_{n\to+\infty}(a_n)^{b_n}=\begin{cases}+\infty & se\left(a_n\to+\infty\wedge b_n\to+\infty\right)\\ 0 & se\left(a_n\to+\infty\wedge b_n\to-\infty\right)\end{cases}$$

Dimostrazione Per esercizio.

Abbiamo un'altra forma indeterminata: $+\infty - \infty$, non è invece indeterminata la forma $+\infty^{\pm\infty}$.

Esempio 29

Abbiamo $\lim_{n\to\infty}\left(n^3-2+\sqrt{n^2-n+1}\right)=+\infty$. Invece $\lim_{n\to\infty}\left(n^3-n^3\right)=0$ e $\lim_{n\to\infty}\left[n^3-\left(n^3-1\right)\right]=1$, che conferma il fatto che $+\infty - \infty$ è una forma indeterminata.

Successioni infinitesime e infinite

Se una quantità non negativa fosse così piccola di qualsiasi altra data quantità, allora certamente non potrebbe essere altri che zero. A quelli che chiedono cosa sia una quantità infinitamente piccola in matematica, rispondiamo che è effettivamente zero. Quindi non ci sono così tanti misteri nascosti in questo concetto, come si è soliti credere. Questi supposti misteri hanno reso il calcolo dell'infinitamente piccolo sospetto a molte persone. Quei dubbi che rimangono li rimuoveremo profondamente nelle pagine seguenti, in cui spiegheremo questo calcolo. *Leonhard Euler, Introductio in analysin infinitorum*, 1748

Per migliorare le nostre capacità di calcolare i limiti delle successioni, soprattutto delle forme indeterminate, confrontiamo fra loro due successioni divergenti o entrambe convergenti a zero.
Per comodità poniamo le seguenti definizioni.

Definizione 14

- Una successione convergente al numero zero si dice **successione infinitesima**.
- Una successione divergente si dice **successione infinita**.

Una conseguenza immediata della definizione di successione infinitesima è la seguente.

Corollario 2

Se si ha $|\ell| < \varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$ allora $\ell = 0$.

Cioè se un numero in valore assoluto è più piccolo di un qualsiasi numero positivo, allora il dato numero è zero.
Non tutte le successioni infinite divergono allo stesso modo, così come non tutte le successioni infinitesime convergono a zero allo stesso modo.

Esempio 30

Non è difficile convincersi che entrambe le successioni $\{n^2\}$, $\{n^5\}$ sono divergenti positivamente. Altrettanto facilmente ci convinciamo però che la seconda successione cresce più rapidamente della prima, per esempio il millesimo elemento della prima successione è $(10^3)^2 = 10^6$, mentre quello della seconda è $(10^3)^5 = 10^{15} >> 10^6$ (il simbolo >> si legge *molto maggiore di*). Ciò significa che se sottraiamo termine a termine ciascun elemento della prima successione dal corrispondente della seconda otterremo una successione divergente negativamente: $\{1 - 1, 4 - 32, 9 - 243, 16 - 1024, \ldots, n^2 - n^5, \ldots\} = \{0, -28, -234, -1008, \ldots, n^2 - n^5, \ldots\}$
La loro somma sarà chiaramente ancora una successione divergente positivamente, ma con un "tasso di crescita" molto più rapido della prima successione e "simile" a quello della seconda.

$$\{1 + 1, 4 + 32, 9 + 243, 16 + 1024, \ldots, n^2 + n^5, \ldots\} = \{2, 36, 252, 1040, \ldots, n^2 + n^5, \ldots\}$$

Moltiplicando invece le due successioni termine a termine, avremo una successione divergente positivamente molto più rapidamente di entrambe le successioni:

$$\{1 \cdot 1, 4 \cdot 32, 9 \cdot 243, 16 \cdot 1024, \ldots, n^2 \cdot n^5, \ldots\} = \{1, 128, 2187, 16384, \ldots, n^7, \ldots\}$$

Infine la successione rapporto sarà una successione infinitesima se la prima successione sarà il numeratore:

$$\left\{\frac{1}{1}, \frac{4}{32}, \frac{9}{243}, \frac{16}{1024}, \ldots, \frac{n^2}{n^5}, \ldots\right\} = \left\{1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}, \ldots, \frac{1}{n^3}, \ldots\right\}$$

e infinita se sarà il denominatore: $\left\{\frac{1}{1}, \frac{32}{4}, \frac{243}{9}, \frac{1024}{16}, \ldots, \frac{n^5}{n^2}, \ldots\right\} = \{1, 8, 27, 64, \ldots, n^3, \ldots\}$.

In vista dei precedenti esempi poniamo le seguenti definizioni.

Definizione 15

Date due successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, entrambi divergenti, se

- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, diciamo che **$\{a_n\}$ è un infinito di ordine inferiore a $\{b_n\}$** e **$\{b_n\}$ è un infinito di ordine superiore ad $\{a_n\}$**.

- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\ell\neq 0$, diciamo che $\{a_n\}$ **e** $\{b_n\}$ **sono infiniti dello stesso ordine**. In particolare se $\ell = 1$ $\{a_n\}$ **e** $\{b_n\}$ **sono asintoticamente uguali**.
- non esiste $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$, diciamo che $\{a_n\}$ **e** $\{b_n\}$ **sono infiniti non confrontabili**.

Date due successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, entrambe infinitesime, se

- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$, diciamo che $\{a_n\}$ **è un infinitesimo di ordine superiore a** $\{b_n\}$ e $\{b_n\}$ **è un infinitesimo di ordine inferiore ad** $\{a_n\}$.
- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\ell\neq 0$, diciamo che $\{a_n\}$ **e** $\{b_n\}$ **sono infinitesimi dello stesso ordine**. In particolare se $\ell = 1$ $\{a_n\}$ **e** $\{b_n\}$ **sono asintoticamente uguali**.
- non esiste $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$, diciamo che $\{a_n\}$ **e** $\{b_n\}$ **sono infinitesimi non confrontabili**.

Esempio 31

Le successioni $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ e $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ sono entrambe infinitesime, ma non sono confrontabili perché $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n/n}{1/n}=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$, che non esiste.

Il seguente risultato è di immediata comprensione e altrettanto immediata dimostrazione.

Teorema 13

Se n^k, n^h, con h e k numeri reali positivi, sono entrambi infiniti (o infinitesimi) allora fra i due è infinito (infinitesimo) superiore quello con l'esponente maggiore.

Dimostrazione per esercizio

Lo stabilire che un infinito è maggiore di un altro ci permette di calcolare più facilmente il limite della loro somma algebrica. Infatti, tenuto conto dell'esempio precedente, possiamo enunciare il seguente risultato.

Teorema 14 (Principio di sostituzione degli infiniti)

Il limite della somma algebrica di due o più successioni divergenti è uguale al limite degli infiniti di ordine superiore presenti nella somma.

Dimostrazione

Supponiamo di voler calcolare $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ con $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$ e $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$, cioè a_n infinito di ordine superiore a b_n. Possiamo anche scrivere: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}+\frac{b_n}{b_n}\right)\cdot b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}+1\right)\cdot b_n$

Dato che $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}+1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$, avremo che anche $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}+1\right)\cdot b_n=+\infty$, che è quanto volevamo provare.

Il precedente risultato risolve molte delle forme indeterminate $+\infty-\infty$.

Esempio 32

- Vogliamo calcolare il seguente limite $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^3-2n^4+n-1\right)$, che è la somma algebrica di tre successioni divergenti e una convergente (la successione costante –1). Dato che si ha:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^{\cancel{4}}}{\cancel{n^3}}=\lim_{n\to\infty}-2n=-\infty;\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^{\cancel{4}3}}{\cancel{n}}=\lim_{n\to\infty}-2n^3=-\infty$$

il secondo infinito è superiore agli altri due, possiamo quindi sostituire alla loro somma solo esso. Evidentemente la presenza dell'addendo –1 è del tutto influente, possiamo quindi dire che si ha:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^3-2n^4+n-1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-2n^3\right)=-\infty$$

- Calcolare $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2-3n}{4-5n^3+2n^2}$. Possiamo applicare il principio di sostituzione degli infiniti sia al numeratore che al denominatore $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2-3n}{4-5n^3+2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^3}}{-5\cancel{n^3}}=-\frac{1}{5}$.

- Calcolare $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5n^3}+\sqrt[3]{4n^5}-n}{7\sqrt[7]{2n^2}-n+\sqrt[3]{3n^4}}$. Per applicare il principio di sostituzione degli infiniti, dobbiamo valutare gli esponenti dei singoli termini, scrivendo i radicali in notazione esponenziale
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5}\cdot n^{\frac{3}{2}}+\sqrt[3]{4}\cdot n^{\frac{5}{3}}-n}{7\sqrt[7]{2}\cdot n^{\frac{2}{7}}-n+\sqrt[3]{3}\cdot n^{\frac{4}{3}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{4}\cdot n^{\frac{5}{3}}}{\sqrt[3]{3}\cdot n^{\frac{4}{3}}}=+\infty$$

- Calcolare $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n+1}-\sqrt{4n^3+2}\right)$. Applichiamo il principio di sostituzione degli infiniti ai radicandi: $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2-n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2}=\lim_{n\to\infty}n=+\infty$ e $\lim_{n\to\infty}\left(-\sqrt{4n^3+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-\sqrt{4n^3}\right)=-\infty$. Ma dato che $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-n+1}}{\sqrt{4n^3+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{4n^3}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2}{4n^3}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{4n}}=0$, vuol dire che il secondo infinito è maggiore del primo, pertanto possiamo scrivere: $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n+1}-\sqrt{4n^3+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-\sqrt{4n^3+2}\right)=-\infty$.

Facciamo attenzione ad applicare il principio di sostituzione degli infiniti in modo corretto.

Esempio 33

Calcolare $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n+5}}$, in questo caso l'applicazione del principio di sostituzione degli infiniti non ci aiuta perché otteniamo una forma indeterminata $\frac{0}{0}$: $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n}}{\sqrt{2n}-\sqrt{2n}}$. Quindi effettuiamo un altro procedimento, ossia razionalizziamo sia il numeratore che il denominatore:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n+5}\right)\cdot\left(\sqrt{2n+2}+\sqrt{2n+5}\right)}\cdot\frac{\sqrt{2n+2}+\sqrt{2n+5}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{2n+2-2n-5}\cdot\frac{\sqrt{2n}+\sqrt{2n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}$$

Come si vede adesso il secondo fattore trattato con il principio di sostituzione degli infiniti non provoca più una forma indeterminata, e il primo fattore si semplifica facilmente: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{-3}\cdot\frac{\cancel{2}\cdot\sqrt{2\cancel{n}}}{\cancel{2}\cdot\cancel{\sqrt{n}}}=\frac{-\sqrt{2}}{3}$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{2n}+\sqrt{3n}-1}{1+\sqrt{5n}-\sqrt[4]{n}}$. Possiamo applicare il principio di sostituzione degli infiniti, ma per fare ciò dobbiamo esprimere i radicali in forma esponenziale: $\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)^{\frac{1}{3}}+(3n)^{\frac{1}{2}}-1}{1+(5n)^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{4}}}$. A questo punto si tratta di valutare solo gli esponenti, scegliendo i maggiori, in tal modo il limite è equivalente a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(3n)^{\frac{1}{2}}}{(5n)^{\frac{1}{2}}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3\cancel{n}}{5\cancel{n}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Usando il principio di sostituzione degli infiniti calcolare i seguenti limiti di successioni

Livello 1

1. $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+1}{3n-1}$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{4n+1}{5-n}$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{7n^2-1+n^3}{5n^2+2n+1}$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2+n-1}{7n-3n^2}$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2-3}$ $\left[+\infty;-4;+\infty;-\frac{4}{3};0\right]$

2. $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-n}{n^2+n}$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{4n+\sqrt{2n}}{\sqrt{2n^3}-n}$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{4n}+\sqrt[3]{2n}}{n}$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{\sqrt{5n}+2}$; $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{8n^2-n}{5n-1+3n^2}\right)^4$ $\left[1;0;0;+\infty;\left(\frac{8}{3}\right)^4\right]$

3. $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5n^2-1}{7n^3-n}\right)^3$; $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5n^2-7}{8n^2-3n+1}\right)^4$; $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n^2-1+2n}{4n-5}\right)^3$; $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n^2+n^4}{4n^4-5}\right)^5$ $\left[0;\left(\frac{5}{8}\right)^4;+\infty;\frac{1}{4^5}\right]$

4. $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}n^2-1}{n^2+n-2}\right)^7$; $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[5]{\frac{4n^4+n^2-3}{1+n^2-3n^5}}$; $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[7]{\frac{4n^2+n-1}{n^2-n^3+2}}$; $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{4n^5+n-3}{n^3-2n^5+n}}$ $\left[8\cdot\sqrt{2};0;0;\sqrt[3]{-2}\right]$

5. $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[4]{\frac{5n^2+2}{n+4n^2+3}}$; $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[5]{\frac{n^3+2n-1}{4n-3n^3+1}}$; $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[5]{\frac{2n^4-n-1}{n^5-3n^3+1}}$ $\left[\sqrt[4]{\frac{5}{4}};\sqrt[5]{-\frac{1}{3}};0\right]$

Livello 2

6. $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{3n}-\sqrt{n}}{n+\sqrt{4n}-3\cdot\sqrt[3]{n}}$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt{n}+5}{4-\sqrt{2n}+\sqrt[6]{3n^4}}$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{4n^3}+\sqrt{2n}}{3-\sqrt{7n}-\sqrt[4]{n^3}}$ $\left[0;\sqrt[6]{\frac{1}{3}};0\right]$

7. $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[6]{n}+\sqrt{5n}+7}{n-\sqrt{4n}-\sqrt[4]{3n}}$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{n^3}-\sqrt{2n^5}-n}{n+\sqrt{2n^3}+\sqrt[4]{3n^{10}}}$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{n}+\sqrt{5n^3}-2}{-3n+\sqrt{n}-\sqrt[4]{n}}$ $\left[0;-\sqrt[4]{\frac{4}{3}};-\infty\right]$

8. $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{3n^2+n}-5n}$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{3n+7}+\sqrt{4+5n}}{\sqrt{5n+2}+\sqrt{n+1}}$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n+7}+\sqrt{1+3n}}{\sqrt{4n-3}+\sqrt{2n-1}}$ $\left[0;\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1};\frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}\right]$

Livello 3

9. $\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{1-(-1)^n\cdot n}$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{1-(-1)^n\cdot n}$; $\lim_{n\to+\infty}sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)$; $\lim_{n\to+\infty}sin(\pi\cdot n)$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{sin(n)}{n}$

[0 ; Oscillante ; ∞ ; Oscillante ; 0 ; 0]

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{2n^2+n-1}\right)$. Se applichiamo il principio di sostituzione degli infiniti avremo: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2}-\sqrt{2n^2}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-\sqrt{2}\cdot n\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\sqrt{2}\right)\cdot n=-\infty$.

Oppure avremmo potuto razionalizzare:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{2n^2+n-1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{2n^2+n-1}\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{2n^2+n-1}\right)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{2n^2+n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+1-\left(2n^2+n-1\right)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{2n^2+n-1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-n^2-n+2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{2n^2+n-1}}$$

E sempre con il principio di sostituzione degli infiniti:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-n^2}{\sqrt{n^2}+\sqrt{2n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-n^2}{\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-n}{1+\sqrt{2}}=-\infty$$

Calcolare i seguenti limiti di successioni

Livello 1

10. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{3n^2+n+1}-\sqrt{n^2+2n-1}\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+7}\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{3n^2+n}-\sqrt{4n^2-1}\right)$ [+∞ ; 0 ; –∞]

11. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{4n^2+3}-\sqrt{n^2+2n}\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2\cdot\sqrt{n^2+1}-3\cdot\sqrt{n^2-1}\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{5n^2+sin(n)}-\sqrt{n^2+2}\right)$ [+∞; –∞ ;+∞]

12. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+1}-\sqrt{n^2+3}\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{5n^2+3}-\sqrt{5n^2-2n+1}\right)$ $\left[1;\frac{\sqrt{5}}{5}\right]$

13. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^3+n^2+1}-\sqrt{n^3-4n}\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{3n^2+2}-\sqrt{3n^2+7n-2}\right)$ $\left[+\infty;-\frac{7\sqrt{3}}{6}\right]$

Livello 2

14. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2n^2+1}-2n}{\sqrt{3n^2+1}+n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2n^2+3n+1}-4n}{\sqrt{n^2+3}+5n}$ $\left[\frac{\sqrt{6}-2\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2}+2}{2};\frac{\sqrt{2}-4}{6}\right]$

15. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{3n+2}-\sqrt{5+n}}{\sqrt{6n-1}-\sqrt{7n}}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{2+n}}{\sqrt{3n+5}-\sqrt{4n+8}}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}-4n}{\sqrt{n^2+n-1}+n}$ $\left[\sqrt{7}+\sqrt{6}-\sqrt{21}-3\cdot\sqrt{2};-\infty;-\frac{3}{2}\right]$

16. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}-4n}{\sqrt{n^2+n-1}-n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+4n}{\sqrt{n^2+n-1}+n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+4n}{\sqrt{n^2+n-1}-n}$ $\left[-\infty;\frac{5}{2};+\infty\right]$

Livello 3

17. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+1}-n}{\sqrt{n^2-2}-n}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{4n^2+3}-2n}{\sqrt{n^2+5n}-n}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{9n^2+7n+2}-3n-5}{\sqrt{4n^2-n}-2n-1}$ $\left[-\infty;\frac{46}{15};0\right]$

18. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n-8}-n}{\sqrt{2n^2+11}-\sqrt{2}n}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{25n^2+4n}-5n}{\sqrt{7n^2-3n}-\sqrt{7}n+2}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3-n-1}-n}{\sqrt[3]{8n^3-4n+1}-2n}$ $\left[+\infty;\frac{12\sqrt{7}+112}{515};1\right]$

19. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3+2}}{\sqrt{n^2-5n+1}-\sqrt{n^2+2n-3}}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{2n^2+n}}{\sqrt{n^4-n^3}-\sqrt{n^4+n^2}}$ [0 ; 0]

Lavoriamo insieme

Determinare il valore del parametro k per il quale si ha $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^3+4n-1}{2n-k\cdot n^3+2}=\frac{4}{3}$.

Poiché $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^3+4n-1}{2n-k\cdot n^3+2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^3}{-k\cdot n^3}=-\frac{3}{k}$, deve essere $-\frac{3}{k}=\frac{4}{3}\Rightarrow k=-\frac{9}{4}$.

Determinare l'eventuale valore del parametro reale k per il quale si ha la validità delle uguaglianze seguenti

Livello 1

20. $\lim_{n\to+\infty}\frac{k\cdot n^4+n-3}{5n^4-n^2+1}=-\frac{1}{4}$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{5n^2+2n-2}{k\cdot n^2+3n-2}=\frac{2}{3}$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{k\cdot n^4+2n-1}{3n+k\cdot n^4+1}=\frac{5}{2}$ $\left[-\frac{5}{4};\frac{15}{2};\varnothing\right]$

21.

22. $\lim_{n\to+\infty}\frac{-k\cdot n^3+n}{3n+5n^3+1}=\frac{7}{4}$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^5+n^2-3}{5n^4-k\cdot n^5+n}=\frac{5}{3}$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{k\cdot n^3+2n^4-1}{2kn+3n^4}=\frac{2}{3}$ $\left[-\frac{35}{4};-\frac{9}{5};\forall k\in\mathbb{R}\right]$

23. $\lim_{n\to+\infty}\frac{(2k+1)\cdot n^2+3}{(3k-2)n^2+1}=\frac{5}{3}$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{(k^2-1)\cdot n^2+2}{(2k^2+1)\cdot n^2+3}=\frac{1}{4}$ $\left[\frac{13}{9};\pm\frac{\sqrt{10}}{2}\right]$

24. $\lim_{n\to+\infty}\frac{(k^2+k-1)\cdot n^3+n}{(k^2-k+1)\cdot n^3-n^2}=2$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{(k^2+k-1)\cdot n^3+n}{(k^2-k+1)\cdot n^3-n^2}=1$ [∅ ; 1]

Studiare i seguenti limiti al valore del parametro reale k

Livello 2

25. $\lim_{n\to+\infty}\frac{(k+1)\cdot n^3+n^2}{(2k-1)\cdot n^4-1}$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{(2k-5)\cdot n^2+n-1}{(3k-1)\cdot n^2+n}$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{(3k+1)\cdot n^2+1}{(2k-1)\cdot n^2+n+1}$

$$\left[\begin{cases}0 & k\neq\frac{1}{2}\\ -\infty & k=\frac{1}{2}\end{cases};\begin{cases}\frac{2k-5}{3k-1} & k\neq\frac{1}{3}\\ -\infty & k=\frac{1}{3}\end{cases};\begin{cases}\frac{3k+1}{2k-1} & k\neq\frac{1}{2}\\ +\infty & k=\frac{1}{2}\end{cases}\right]$$

26. $\lim_{n\to+\infty}\frac{(k-1)\cdot n^2+n}{(k+1)\cdot n^2+2}$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{(k^2-1)\cdot n^3+n^2}{(k+1)\cdot n^3-n^2}$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{(k+2)\cdot n^3+k\cdot n^2}{(k-3)\cdot n^3+2n^2}$

$$\left[\begin{cases}\frac{k-1}{k+1} & k\neq-1\\ -\infty & k=-1\end{cases};\begin{cases}k-1 & k\neq-1\\ -1 & k=-1\end{cases};\begin{cases}\frac{k+2}{k-3} & k\neq3\\ +\infty & k=3\end{cases}\right]$$

Livello 3

27. $\lim_{n\to+\infty}\frac{(k-2)\cdot n^2+2n}{(k^2-4)\cdot n^2+3n-1}$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{(k-1)\cdot n^3+k\cdot n^2-1}{(k+1)\cdot n^2-n}$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{(k+1)\cdot n^4+k\cdot n^3+n^2}{(2k+1)\cdot n^3-(k-1)\cdot n^2+n}$

$$\left[\begin{cases}\frac{2}{3} & k=2\\ -\infty & k=-2\\ \frac{1}{k+2} & k\neq\pm2\end{cases};\begin{cases}+\infty & k\leq-1\vee k>1\\ \frac{1}{2} & k=1\\ -\infty & -1<k<1\end{cases};\begin{cases}+\infty & k<-1\vee k\geq-\frac{1}{2}\\ 1 & k=-1\\ -\infty & -1<k<-\frac{1}{2}\end{cases}\right]$$

Determinare per quali valori del parametro reale a le seguenti uguaglianze risultano vere

28. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(k-1)\cdot n^3+1}{(k+2)\cdot n^3-n^2}=a$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(3k-4)\cdot n^2}{(2k+1)\cdot n^2+1}=a$ $\left[a\neq 1; a\neq \frac{3}{2}\right]$

29. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(3k-2)\cdot n^2+2n-2}{(5k+2)\cdot n^2}=a$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(k^2+1)\cdot n^2+1}{(k-1)\cdot n^2+3n-4}=a$ $\left[a\neq \frac{3}{5};\left(a\leq 2-2\sqrt{2}\vee a\geq 2+2\sqrt{2}\right)\right]$

Proprietà dei limiti di successione

Così i naturalisti osservano, una pulce ha pulci più piccole su di esse; e queste ne hanno di ancora più piccole che le mordono; e così procedendo ad infinitum.
Jonathan Swift, *Poetry a Rhapsody*

Adesso vogliamo considerare alcuni teoremi che ci risulteranno utili nello studio delle successioni. Il primo di essi appare banale, ma è invece di fondamentale importanza. Abbiamo bisogno di premettere un altro risultato.

Teorema 15 (Disuguaglianza triangolare)

Si ha $|x+y| \le |x|+|y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione

Se x e y hanno lo stesso segno si ha: $|x + y| = |x| + |y|$, mentre se hanno segno diverso $|x + y| < |x| + |y|$, come facilmente si vede anche con degli esempi: $|-2 - 3| = |-2| + |-3| = 5$, $|-2 + 3| = 1 < |-2| + |3| = 5$.

Teorema 16 (di unicità del limite)

Una successione regolare non può ammettere due limiti distinti.

Dimostrazione.

Dato che una successione convergente è limitata, mentre una divergente non lo è, è ovvio che se una successione converge non diverge e viceversa. Allo stesso modo se una successione diverge positivamente non può divergere negativamente e viceversa, sempre per il fatto che le due divergenze implicano illimitatezze della successione di diverso genere. Rimane quindi da provare solo il fatto che una successione convergente non può avere due distinti limiti. Supponiamo allora che si abbia: $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell, \lim_{n\to\infty} a_n = m$, con $\ell \neq m$. Ciò significa che, fissato un certo numero positivo ε, si avrà $|a_n - \ell| < \varepsilon, \forall n > h$ e $|a_n - m| < \varepsilon, \forall n > k$, con h e k numeri naturali anche distinti. Se tali numeri sono diversi uno dei due sarà il maggiore, supponiamo sia h. Ciò significa allora che per $n > h$, è $|a_n - \ell| < \varepsilon$ e $|a_n - m| < \varepsilon$, cioè $|a_n - \ell| + |a_n - m| < 2\varepsilon$. Ma possiamo anche scrivere: $|\ell - m| = |\ell - a_n + a_n - m| \le |a_n - \ell| + |a_n - m| < 2\varepsilon$. Dato che 2ε è un numero qualsiasi, per il Corollario 2, è $|\ell - m| = 0$, cioè $\ell = m$, che è proprio ciò che volevamo provare.

Enunciamo un altro risultato intuitivo.

Teorema 17 (di permanenza del segno)

- Se una successione $\{a_n\}$ è divergente positivamente o convergente a un numero positivo, allora esiste un numero naturale h per cui si ha: $a_n > 0, \forall\, n > h$.
- Se una successione $\{a_n\}$ è divergente negativamente o convergente a un numero negativo, allora esiste un numero naturale h per cui si ha: $a_n < 0, \forall\, n > h$.

Dimostrazione per esercizio.

Nei teoremi sulle operazioni con i limiti non abbiamo considerato il caso in cui una delle due successioni o entrambe siano oscillanti. Vi sono alcuni casi in cui possiamo calcolarne i limiti.

Esempio 34

- La successione $\{sin(n)\}$ è oscillante. Se la sommiamo a una successione infinita il risultato sarà ancora una successione infinita, dato che $\{sin(n)\}$ è limitata.
- Ciò non è vero se la moltiplichiamo per una successione infinita, dato che essa cambia segno infinite volte. Per esempio la successione $\{n^2 \cdot sin(n)\}$ è ancora oscillante, come si comprende considerando già i suoi primi dieci termini: {0,8414709848; 3,637189707; 1,270080072; –12,10883992; –23,97310686; –10,05895793; 32,19234333; 63,31892778; 33,38159730; –54,40211108}
- Se sommiamo invece una successione convergente e una oscillante ancora una volta non possiamo dire niente in generale, potendo avere una successione ancora oscillante, come per esempio per

$\left\{(-1)^n + \frac{5n+1}{3n-2}\right\}$. Lo stesso può dirsi per il prodotto.

In effetti c'è un teorema che risolve alcuni casi di prodotti fra successioni, una delle quali infinitesima, ed è il seguente.

Teorema 18

Il prodotto di una successione infinitesima per una successione limitata è una successione infinitesima.

Dimostrazione

Per ipotesi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ed $\exists\, L > 0$: $|b_n| < L$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Vogliamo dimostrare che si ha:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0, \text{ cioè } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow |a_n \cdot b_n| < \varepsilon$$

Ora dire che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ equivale a dire che $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, t \in \mathbb{N} : n > t \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$.

Ma allora per ogni $n > t$ abbiamo $|a_n \cdot b_n| < L \cdot \varepsilon$, vista l'arbitrarietà di ε, questa disuguaglianza equivale alla tesi.

Negli esempi precedenti abbiamo considerato successioni che assumevano valori via via più grandi, o più piccoli, ma anche successioni che avevano un andamento di tipo oscillante. Studiamo quelle dei primi due tipi.

Definizione 16

Una successione $\{a_n\}$, per la quale si ha

- $a_{n+1} > a_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ si dice **successione crescente;**
- $a_{n+1} < a_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ si dice **successione decrescente**;
- $a_{n+1} \geq a_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ si dice **successione non decrescente;**
- $a_{n+1} \leq a_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ si dice **successione non crescente;**
- Una successione di uno dei quattro tipi precedenti si chiama **successione monotòna.**

Esempio 35

- $\{n + 1\}$ è crescente, dato che naturalmente $n + 1 > n$ per ogni numero naturale.
- $\{1 - n^2\}$ è banalmente decrescente.
- {1; 1; 1; 1; 2; 3; 4; 5; …} è non decrescente.
- {10; 8; 8; 3; 1; 1; 0; 0; –1; –1; –2; –2; …} è non crescente.
- $\{n \cdot tan(n)\}$ non è monotòna, come si capisce facilmente calcolandone alcuni termini: {1,557407724; –2,185039863; –0,1425465430; 1,157821282; –3,380515006;–0,2910061913; 0,8714479827; –6,799711455; –0,4523156594; 0,6483608274},
- $\{7; 4; 1; -2; 5; 1; 4; 9; 16; 25; \ldots; n^2; \ldots\}$ è definitivamente crescente.

Le successioni monotòne sono importanti perché hanno un comportamento particolare.
Vale infatti il seguente teorema.

Teorema 19

Una successione definitivamente monotona è sempre regolare. In particolare

- Una successione definitivamente crescente o non decrescente limitata converge al suo *sup*;
- Una successione definitivamente decrescente o non crescente limitata converge al suo *inf*;
- Una successione definitivamente monotona illimitata superiormente diverge positivamente;
- Una successione definitivamente monotona illimitata inferiormente diverge negativamente.

Non dimostriamo il teorema, ma mediante esso studiamo un'importante successione.

Esempio 36

Abbiamo già trattato la capitalizzazione composta (nelle unità sugli esponenziali e sulle progressioni geometriche), in cui la cedola non viene liquidata, ma viene integrata nel capitale C che così aumenta quindi l'anno successivo la cedola sarà maggiore. Abbiamo visto che in generale essa dà luogo alla successione, nel caso di generico tasso t, $(1 + t)^n \cdot C$.

Considerando la capitalizzazione composta a tasso variabile $t = \frac{1}{n}$ e $C = 1$, otteniamo la seguente successione: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, per la quale vale il seguente importante risultato.

Teorema 20

La successione $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ è crescente e limitata quindi è convergente. Il suo limite è un numero che si indica con il simbolo e, le cui prime cifre decimali sono 2,718281.

Dimostrazione Omessa

Il limite precedente è della forma 1^∞, che abbiamo visto essere una forma indeterminata. Applicandolo alla legge di capitalizzazione composta con tasso variabile notiamo un fatto a prima vista sorprendente, il guadagno così ottenuto, per una durata infinita del prestito, non è infinito, come può pensarsi, ma ha un limite superiore, che è appunto il numero e. In effetti il teorema si può enunciare in forma più generale.

Teorema 21

Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ allora: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$.

Esempio 37

Vogliamo calcolare il seguente limite $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{3n^2+1}$. Per potere sfruttare il teorema precedente dobbiamo trasformare la successione limite: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{3n^2+1}{n^2}}$, adesso calcoliamo il limite all'interno delle parentesi quadre con il teorema precedente: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{3n^2+1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{3n^2+1}{n^2}} = e^3$.

Vi è anche un'altra interessante successione da studiare con l'ausilio del teorema sulle successioni monotone.

Esempio 38

- Consideriamo la successione $\{2^n\}$, questa è certamente illimitata superiormente, ma è anche crescente. Difatti facilmente si ha che $2^{n+1} = 2^n \cdot 2 > 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Ciò significa, per il Teorema 19 che: $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = +\infty$.
- Sia la successione $\left\{\frac{1}{3^n}\right\}$ questa è ovviamente limitata, inferiormente dallo zero e superiormente da 1 poiché una potenza di una frazione propria è sempre una frazione propria, quindi è un numero minore di 1. Tale successione è anche decrescente. Abbiamo infatti: $3^{n+1} = 3^n \cdot 3 > 3^n \Rightarrow \frac{1}{3^{n+1}} < \frac{1}{3^n}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Quindi, sempre per il Teorema 19, abbiamo: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$. In effetti potevamo dire molto più semplicemente che la data successione è reciproca di una successione infinita, pertanto è infinitesima.

- La successione $\{(-5)^n\}$ è invece ovviamente oscillante, assumendo infiniti valori maggiori di un qualsiasi numero positivo e infiniti valori minori un qualsiasi numero negativo.
- Infine la successione $\left\{\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right\}$, potendosi scrivere come prodotto delle successioni $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$, $\{(-1)^n\}$, la prima delle quali infinitesima (per quanto detto prima) e la seconda limitata, per il Teorema 18 è una successione infinitesima.

In effetti i quattro casi visti in precedenza possono essere generalizzati dal seguente risultato.

Teorema 22

Si ha: $\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ 0 & \text{se } |q| < 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Calcolare $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{2n^4-n+1}\right)^{3n-2}$. Operiamo alcuni artifici, per ridurla nella forma a cui possiamo applicare il teorema 21:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n^4-n+1}{-5}}\right)^{3n-2}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2n^4-n+1}{-5}}\right)^{\frac{2n^4-n+1}{-5}}\right]^{(3n-2)\cdot\frac{-5}{2n^4-n+1}}=\lim_{n\to\infty}e^{(3n-2)\cdot\frac{-5}{2n^4-n+1}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{-15n}{2n^4}}=e^0=1$$

Usando, laddove necessario, il limite notevole $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$***, calcolare i limiti***

Livello 1

1. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$; $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)^{\frac{1}{n}}$; $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$; $\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n-3}\right)^{n+2}$; $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{n}$ $\left[e;1;e;+\infty;\sqrt{e}\right]$

2. $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}$; $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}$; $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$; $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}$; $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2+1}{2n^2-1}}$ $\left[\frac{1}{e};e^2;e^2;1;1\right]$

3. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n-1}$; $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3n+1}{4n-1}\right)^{5n}$; $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$; $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n}$ [e ; 0 ; $+\infty$; e^2]

4. $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{4n}\right)^{5n}$; $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{5n+1}\right)^{\frac{3}{2}n-1}$; $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n^2+1}\right)^{n^2-1}$; $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{n-2}\right)^{\sqrt{2}n}$ $\left[e^{-\frac{15}{4}};e^{\frac{3}{5}};e^{-5};e^2\right]$

Livello 2

5. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n}$; $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+n-1}{5n+3n^2-2}\right)^{4n+3}$; $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4+3n}{3n-7}\right)^{n+3}$; $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2}n^2+\sqrt{3}}{n+\sqrt{2}n^2}\right)^{\sqrt{5}n}$ $\left[e^2;e^{-\frac{16}{3}};e^{\frac{11}{3}};e^{\sqrt{\frac{15}{2}}}\right]$

6. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+n}{5-n^2}\right)^{4n+3}$; $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-3}{2n+n^2}\right)^{5n+1}$; $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n-3}{2n+2n^2}\right)^{5n+1}$; $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2-1}{4n^2-5n+2}\right)^{3n-1}$; $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3+n^2-1}\right)^{3n+1}$
$\left[\text{Oscillante};+\infty;e^{-\frac{5}{2}};e^{\frac{15}{4}};e^{-3}\right]$

Le Serie numeriche

Se tralasciamo i casi più semplici, non c'è in tutta la matematica una singola serie infinita la cui somma sia stata rigorosamente determinata. In altre parole le parti più importanti della matematica sono prive di fondamenta.
Niels Abel (1802 – 1829)

Il problema

Uno dei paradossi più celebri della storia è dovuto al filosofo Zenone di Elea (489 a.C. – 431 a.C.) ed è quello detto di Achille e la tartaruga, che in termini moderni è così enunciato: *Achille e la tartaruga fanno una gara di corsa, dato lo strapotere di Achille, detto piè veloce, questi lascia un certo margine di vantaggio alla tartaruga*. Zenone afferma che così facendo egli non raggiungerà mai la tartaruga, poiché detta x la distanza iniziale che li separa, quando Achille avrà percorso questo x, la tartaruga avrà percorso un certo tratto y, non importa quanto piccolo. Quando Achille percorre il tratto y la tartaruga avrà percorso un tratto z e così via all'infinito. Quindi non appena Achille raggiunge il precedente punto toccato dalla tartaruga questa sarà sempre un tratto più avanti, perciò taglierà il traguardo prima di Achille, non importa quanto sia il vantaggio che essa ha rispetto ad Achille in partenza. Possiamo risolvere matematicamente questo paradosso?

Per cercare di risolvere il paradosso di Zenone dobbiamo richiamare un risultato sulla somma della progressione geometrica di ragione q diversa da 1: $1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}$.

Esempio 39

Per evitare inutili complicazioni supponiamo che il tratto da percorrere sia pari a 200 m e che la velocità di Achille sia 10 volte quella della tartaruga, mentre il vantaggio iniziale della tartaruga sia di 100 m. Supponiamo anche, senza che ciò modifichi il ragionamento, che in un secondo Achille percorra 10m e la tartaruga 1m. Nella tabella seguente confrontiamo lo spazio percorso da Achille e quello della tartaruga, in intervalli di tempo che aumentano ogni volta di un decimo rispetto al precedente:

Tempo in s	0	10	11	11,1	11,11
Spazio percorso da Achille in m	0	100	110	111	111,1
Spazio percorso dalla Tartaruga in m	100	110	111	111,1	111,11

Diciamo che un semplice calcolo ci fa capire che già prima del dodicesimo secondo Achille ha raggiunto la tartaruga, poiché ha percorso (12 · 10) m = 120 m contro i (100 + 12 · 1) m = 112 m della tartaruga. Vediamo di trovare allora l'errore nel ragionamento di Zenone. Lo spazio percorso dalla tartaruga è dato dalla seguente somma: $100 + 10 + 1 + 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + \ldots + 10^{-n}$, in cui n è il numero di suddivisioni del tempo. Ma la precedente somma può anche scriversi:

$$100+10+\sum_{k=0}^{n}10^{-k}=100+10+\frac{1-10^{-n-1}}{1-10^{-1}}=110+\left(\frac{1-\frac{1}{10^{n+1}}}{1-\frac{1}{10}}\right)=110+\left(\frac{1-\frac{1}{10^{n+1}}}{\frac{9}{10}}\right)=110+\frac{10}{9}\cdot\left(1-\frac{1}{10^{n+1}}\right)$$

Se facciamo tendere all'infinito la suddivisione del tempo, cioè n, ovviamente la frazione in parentesi tende a zero e perciò la somma tende a $\left(110+\frac{10}{9}\right)m$, che naturalmente è uno spazio finito.

Quindi effettivamente il pensare, come fa Zenone, che sommando infiniti termini debba ottenersi una quantità infinita non è corretto. Tenuto conto di quanto visto finora generalizziamo il concetto di somma infinita.

Definizione 17

- Diciamo **serie numerica** il limite della successione $\{a_1 + a_2 + \ldots + a_n\}$, che si chiama **successione dei resti parziali della serie**.
- Diremo **carattere** di una serie numerica il fatto che essa converga, diverga o oscilli.
- Se una serie converge il suo limite lo chiameremo **somma della serie**.

Notazione 6

Una serie numerica si indica con il simbolo $\sum_{n \in N} a_n$, in cui N è un sottoinsieme infinito dell'insieme dei numeri naturali. In particolare se N è formato da tutti i numeri naturali esclusi al più i primi k di essi, indicheremo la serie con il simbolo $\sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n$.

Vediamo qualche esempio di serie numerica, cercando di vedere se e come possiamo calcolarne la somma.

Esempio 40

- Consideriamo la serie 2 + 4 + 6 + 8 + 12 + 14 + 16 + 18 + 22 + ..., formata dalla somma di tutti i numeri pari non divisibili per 10, indicando con N l'insieme {1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, ...} di tutti i numeri naturali non multipli di 5, la serie si indicherà con $\sum_{n \in N} 2n$ non potrà indicarsi con $\sum_{n=1}^{+\infty} 2n$ perché in questa forma sono contenuti anche i multipli di 5.
- La serie 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + ..., formata da tutti i numeri dispari salvo i primi 5, la indicheremo con il simbolo: $\sum_{n=6}^{+\infty} (2n-1)$, ma anche con $\sum_{n=5}^{+\infty} (2n+1)$ e con altri simili.

Dato che abbiamo ricondotto tutto alle successioni, per le serie valgono le stesse terminologie, parleremo così di serie convergenti, divergenti, oscillanti.
In generale non è semplice stabilire se una serie converge e soprattutto quanto vale la sua somma, abbiamo già visto però che ciò può farsi per un caso particolare.

Definizione 18

Chiamiamo **serie geometrica di ragione *q***, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$.

Come conseguenza di ciò che abbiamo detto finora possiamo enunciare il seguente risultato.

Teorema 23

Una serie geometrica di ragione q ha per somma $\frac{1}{1-q}$ se è $|q| < 1$; diverge positivamente se è $q \geq 1$; è indeterminata altrimenti.
Dimostrazione Segue dalla definizione 18 e dal Teorema 22.

Usando il precedente risultato possiamo determinare le note relazioni per trasformare un numero periodico in frazione.

Esempio 41

Consideriamo il numero $1,23\overline{456}$, per trasformarlo in frazione ci hanno insegnato la seguente regola: $1,23\overline{456} = \frac{123456-123}{99900}$ in cui i nove sono tanti quante le cifre del periodo e gli zeri tanti quante quelle dell'antiperiodo. Perché vale questa regola? Cerchiamo di capire. Il dato numero può anche scriversi in questa forma: $1,23\overline{456} = 1 + 0,23 + 0,00456 + 0,00000456 + 0,00000000456 + \ldots$ che, trasformando i numeri decimali limitati in frazioni diviene:

$$1,23\overline{456} = 1 + \frac{23}{100} + \frac{456}{10000} + \frac{456}{10000000} + \frac{456}{10\,000\,000\,000} + \ldots = 1 + \frac{23}{10^2} + \frac{456}{10^5} + \frac{456}{10^8} + \frac{456}{10^{11}} + \ldots$$

possiamo riscrivere la precedente espressione: $1,23\overline{456}=1+\frac{23}{10^2}+\frac{456}{10^5}\cdot\left(1+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^6}+\ldots\right)$. Così facendo all'interno delle parentesi abbiamo la somma infinita di una progressione geometrica di ragione $\frac{1}{10^3}$, che per quanto detto al tendere all'infinito del numero di termini tende a $\frac{1}{1-\frac{1}{10^3}}=\frac{1}{\frac{10^3-1}{10^3}}=\frac{10^3}{10^3-1}$. Quindi avremo:

$$1,23\overline{456}=1+\frac{23}{10^2}+\frac{456}{10^{\cancel{5}\,2}}\cdot\frac{\cancel{10^3}}{10^3-1}=1+\frac{23}{10^2}+\frac{456}{10^2\cdot\left(10^3-1\right)}=\frac{10^2\cdot\left(10^3-1\right)+23\cdot\left(10^3-1\right)+456}{10^2\cdot\left(10^3-1\right)}=$$

$$=\frac{10^5-10^2+23\cdot10^3-23+456}{100\cdot999}=\frac{(100000+23000+456)-(100+23)}{100\cdot999}=\frac{123456-123}{100\cdot999}$$

Come si vede abbiamo trovato la formula nota.

Vediamo un altro esempio di serie per la quale facilmente si può trovare la somma.

Esempio 42

Vogliamo trovare la somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)}$. Dobbiamo calcolare il limite della successione delle somme parziali, cioè $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right)$, ovviamente non possiamo applicare nessuna delle tecniche note per il calcolo dei limiti di successione. Osserviamo però che possiamo scrivere:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-1}{1\cdot2}+\frac{3-2}{2\cdot3}+\frac{4-3}{3\cdot4}+\ldots+\frac{n+1-n}{n\cdot(n+1)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{2}}{1\cdot\cancel{2}}-\frac{1}{1\cdot2}+\frac{\cancel{3}}{2\cdot\cancel{3}}-\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot3}+\frac{\cancel{4}}{3\cdot\cancel{4}}-\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot4}+\ldots+\frac{\cancel{n+1}}{n\cdot\cancel{(n+1)}}-\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\cdot(n+1)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\ldots+\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

quindi la predetta serie, detta di Mengoli, è convergente ed ha per somma 1.

Cominciamo a considerare qualche risultato valido per le serie numeriche.

Teorema 24

Eliminando o modificando un numero finito di elementi di una serie, il carattere di una serie non cambia.

Dimostrazione

Eliminare o comunque modificare un numero finito di termini di una serie modifica la successione delle somme parziali $\{a_1 + a_2 + \ldots + a_n\}$, ma non la sua convergenza o divergenza, tranne il fatto che se la successione convergeva a un dato numero adesso potrà converge a un altro numero.

Esempio 43

- Consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ che ha per somma $\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$. Eliminiamo i suoi primi 5 termini, la serie $\sum_{n=4}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$, continua a convergere ma non più a 3, bensì a 3 diminuito degli elementi che abbiamo eliminato, cioè a: $3-\left(1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}\right)=3-\frac{81+54+36+24+16}{81}=3-\frac{211}{81}=\frac{243-211}{81}=\frac{32}{81}$.

- Nella serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty}2^n$ sostituiamo i termini dal trentesimo al settantanovesimo con 0, la serie risultante è ancora divergente positivamente.
- Nella serie geometrica oscillante: $\sum_{n=0}^{+\infty}(-3)^n$, sostituiamo tutti i termini di posto dispari con il loro valore assoluto, la serie così ottenuta sarà $\sum_{n=0}^{+\infty}3^n$ che diverge positivamente. Come si vede quindi il Teorema 24 non è più valido se modifichiamo infiniti termini.

In generale non è facile determinare il carattere di una serie, e nell'ipotesi in cui si riesca a provare che una serie converge, non sempre si riesce a determinarne la somma. Vale però un teorema che alcune volte facilita la determinazione del carattere di una serie.

Teorema 25

Condizione necessaria affinché $\sum_{n\in N}a_n$ converga è che $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$.

Dimostrazione

Se la serie $\sum_{n\in N}a_n$ converge a un certo numero ℓ, vuol dire che si ha: $\lim_{n\to\infty}\left(a_1+a_2+a_3+..+a_n\right)=\ell$, ma per il criterio di Cauchy sulle successioni, ciò significa che si ha:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(a_1+a_2+a_3+..+a_n+a_{n+1}\right)-\left(a_1+a_2+a_3+..+a_n\right)\right]=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

che è quanto volevamo provare.

Il precedente teorema non è una condizione sufficiente.

Esempio 44

Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, nota come **serie armonica**. Questa serie verifica l'ipotesi del teorema precedente, perché $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, eppure non converge. Infatti abbiamo:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+...>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+...=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...$$

la successione delle somme parziali non è limitata superiormente, non può quindi convergere.

Stiamo vedendo come risulta difficile stabilire il carattere di una serie.
Nel prossimo paragrafo considereremo particolari serie per le quali questo problema risulta meno ostico.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo determinare la seguente somma $\sum_{k=5}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^k$, che è parte di quella della serie geometrica $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^k=\frac{1}{1-\frac{3}{5}}=\frac{1}{\frac{2}{5}}=\frac{5}{2}$. Abbiamo perciò $\sum_{k=5}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^k=\frac{5}{2}-\sum_{k=0}^{4}\left(\frac{3}{5}\right)^k=\frac{243}{1250}$.

Determinare le seguenti somme

Livello 1

1. $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^k$; $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k$; $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^k$; $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{4}{3}\right)^k$; $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^k$; $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^k$; $\sum_{k=4}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k$ $\left[+\infty;4;\frac{4}{7};\varnothing;6;\frac{3}{5};\frac{16}{27}\right]$

2. $\sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{9}\right)^k$; $\sum_{k=3}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$; $\sum_{k=11}^{+\infty}\left(\frac{7}{3}\right)^k$; $\sum_{k=2}^{+\infty}\left(-\frac{1}{9}\right)^k$; $\sum_{k=2}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^k$; $\sum_{k=4}^{+\infty}\left(\frac{5}{8}\right)^k$; $\sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{8}{9}\right)^k$; $\sum_{k=23}^{+\infty}\left(-\frac{8}{3}\right)^k$
$\left[-\frac{1}{10};-\frac{1}{36};+\infty;\frac{1}{90};\frac{1}{20};\frac{625}{1536};-\frac{8}{17};\varnothing\right]$

Usando le serie geometriche costruire la frazione generatrice dei seguenti numeri periodici

3. $5,67\overline{89}$; $5,6\overline{789}$; $5,\overline{6789}$; $0,03\overline{33}$; $0,0\overline{333}$; $0,\overline{0333}$ $\left[\frac{28111}{4950};\frac{18911}{333};\frac{18928}{333};\frac{1}{30};\frac{1}{30};\frac{1}{30}\right]$

Utilizzando la serie di Mengoli $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n\cdot(n+1)}=1$***, calcolare le seguenti somme***

4. $\sum_{n=5}^{+\infty}\frac{3}{2n\cdot(n+1)}$; $\sum_{n=4}^{+\infty}\frac{5}{8n\cdot(n+1)}$; $\sum_{n=7}^{+\infty}\frac{4}{7n\cdot(n+1)}$; $\sum_{n=8}^{+\infty}\frac{-7}{4n\cdot(n+1)}$; $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{8}{15n\cdot(n+1)}$; $\sum_{n=5}^{+\infty}\frac{-2}{3n\cdot(n+1)}$
$\left[\frac{3}{10};\frac{5}{32};\frac{4}{49};-\frac{7}{32};\frac{8}{45};-\frac{2}{15}\right]$

Livello 2

Determinare le seguenti somme

5. $\sum_{n=0}^{+\infty}sin^n(x)$; $\sum_{n=0}^{+\infty}cos^n(x)$; $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n sin^n(x)$; $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot cos^n(x)$ $\left[\frac{1}{1-sin(x)};\frac{1}{2\cdot sin^2\left(\frac{x}{2}\right)};\frac{1}{1+sin(x)};\frac{1}{2\cdot cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo sommare $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$. Dobbiamo calcolare: $\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\right]$ vediamo se riusciamo a operare su questa serie come abbiamo fatto con quella di Mengoli, dato che anche in questo caso ciascun denominatore ha in comune un fattore con quello che lo segue. Lavoriamo sulla frazione generica:

$$\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2n+1-(2n-1)}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\cancel{2n+1}}{(2n-1)\cdot\cancel{(2n+1)}}-\frac{\cancel{2n-1}}{\cancel{(2n-1)}\cdot(2n+1)}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

Quindi: $\frac{1}{2}\cdot\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+...+\frac{1}{2}\cdot\left(\cancel{\frac{1}{2n-1}}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+1}$. Quindi la somma della serie sarà uguale a $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$.

Determinare le seguenti somme

Livello 2

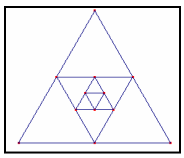
6. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4+\sqrt{2}}{4^{n+1}};\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3+(-1)^{n+1}}{2\cdot 7^n};\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n};\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^{n+2}}{3^n};\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n-2^n}{4^n};\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n-2^n}{8^n}$ $\left[\frac{4+\sqrt{2}}{3};\frac{21}{16};\frac{25}{6};\frac{12}{5};+\infty;\frac{2}{3}\right]$
7. $\sum_{n=1}^{+\infty}ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$; $\sum_{n=1}^{+\infty}sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$; $\sum_{n=1}^{+\infty}cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$; $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{n\cdot(n+3)}$; $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5}{n\cdot(n+5)}$ $\left[+\infty;\varnothing;0;\frac{11}{6};\frac{137}{60}\right]$
8. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)}$; $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+5)\cdot(n+6)}$; $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{8}{n\cdot(n+8)}$; $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(n+7)\cdot(n+8)}$ $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{6};\frac{761}{280};\frac{1}{4}\right]$
9. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-3)\cdot(2n+1)};\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\cdot(3n+2)}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)\cdot(4n+3)}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(6n-1)\cdot(6n+5)}$ $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{6};\frac{1}{12};\frac{1}{30}\right]$
10. $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}-\frac{1}{128}-...$ $\left[\frac{2}{7}\right]$
11. Consideriamo una successione di cerchi i cui raggi sono gli elementi della successione $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},...,\frac{1}{2^n},...\right\}$. Determinare la somma delle aree degli infiniti cerchi. $\left[\frac{4\pi}{3}\right]$

Livello 3

12. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$; $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}$ $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{18}\right]$

Determinare il minimo valore di k per cui si ha la validità delle seguenti disuguaglianze

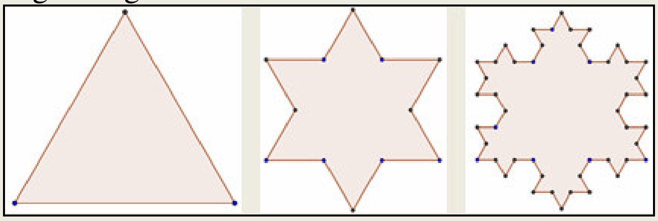
13. $\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{5}{13}\right)^n<\frac{1}{256}$; $\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{7}{12}\right)^n<\frac{1}{320}$; $\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n<\frac{1}{128}$; $\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^n<\frac{1}{426};\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{10}{13}\right)^n<\frac{1}{356};\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n<\frac{1}{512}$
[7 ; 13 ; 6 ; 31 ; 28 ; 9]
14. In figura ciascun triangolo è equilatero e ha i vertici nei punti medi del triangolo in cui è inscritto. Se il lato del triangolo maggiore è 1, e continuiamo questo processo all'infinito, determinare la somma



dei perimetri degli infiniti triangoli così ottenuti. [6]
15. Con riferimento al precedente problema determinare la misura del lato del triangolo maggiore se la somma è rispettivamente 24, 100, $\sqrt{17}$. $\left[4,\frac{50}{3},\frac{\sqrt{17}}{3}\right]$
16. Data una serie geometrica di ragione *r*, consideriamo la serie ottenuta innalzando a una potenza intera *m*, possiamo dire che quest'ultima serie è anch'essa geometrica? Se la risposta è affermativa, qual è la ragione? [Sì, r^m]
17. Una serie geometrica di ragione *r*, con $r^2 < 1$, ha somma 2, la serie i cui termini sono i cubi di quelli della precedente ha somma 24. Determinare il primo termine della serie di partenza. [3]
18. Sommare $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}$. *Suggerimento* associare in modo opportuno gli addendi della serie. $\left[\frac{10}{81}\right]$

Intervallo Matematico

Alla fine del XIX secolo vennero messe in discussione diverse conoscenze matematiche, una di queste fu il concetto intuitivo di curva. Diversi matematici fornirono così esempi di curve che non rientravano all'interno della cosiddetta intuizione e che, proprio per questo motivo risultavano paradossali. Il primo esempio fu fornito dallo svedese Helge von Koch, con la sua curva detta *fiocco di neve*, di cui abbiamo già parlato nell'Unità 5.2. In particolare a noi interessa una sua generalizzazione che viene costruita in modo iterativo come mostrato nelle figure seguenti.



Continuiamo all'infinito questa costruzione, consistente nel dividere ciascun segmento in 3 parti uguali, eliminare la parte centrale e sostituirla con due segmenti uguali per costruire un triangolo equilatero. La curva limite la chiamiamo *Isola di Koch*. Questa curva ovviamente racchiude un'area finita, che possiamo anche calcolare. Cominciamo ad osservare che ad ogni passo la nuova curva avrà un perimetro che sarà pari a $\frac{4}{3}$ di quello del passo precedente, dato che ogni lato è stato diviso in tre ed uno di questi tre pezzetti è stato sostituito da 2 pezzetti uguali. Quindi il perimetro della curva limite, detta 1 la lunghezza del lato del triangolo iniziale, sarà dato da $3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n$, che tende all'infinito perché limite di progressione geometrica di ragione maggiore di 1. Eppure l'area racchiusa è ovviamente finita. Ricordiamo che l'area di un triangolo equilatero di lato ℓ è $\frac{1}{2}\cdot\ell\cdot\ell\cdot sin(60°)=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\ell^2$, quindi in questo caso all'inizio l'area è $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Ad ogni passo noi aggiungiamo all'area del precedente poligono di *n* lati, quella di *n* triangoli equilateri di lato $\frac{1}{3}$ del precedente. Quindi ogni volta aggiungiamo $n\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Perciò otteniamo una serie geometrica, ma di ragione minore di 1 e perciò convergente.

Serie a termini di segno costante

Le serie divergenti sono invenzione del diavolo, ed è una vergogna basare su esse una dimostrazione qualunque. Usandole possiamo trarre qualsiasi conclusione vogliamo, ecco perché queste serie hanno prodotto così tanti errori e così tanti paradossi... *Niels Abel* (1802 – 1829)

Il problema della determinazione del carattere di una serie risulta facilitato per particolari serie.

Definizione 19

- Una serie i cui termini sono tutti positivi (negativi) si chiama **serie a termini positivi** (**negativi**).
- Una serie a termini positivi o negativi si dice **serie a termini di segno costante**.

Definizione 20

- Una serie i cui termini, escluso al più un numero finito di essi, sono tutti positivi (negativi) si chiama **serie a termini definitivamente positivi (negativi)**.
- Una serie a termini definitivamente positivi o negativi si dice **serie definitivamente a termini di segno costante**.

Per queste serie vale il seguente fondamentale teorema.

Teorema 26

Una serie a termini definitivamente di segno costante è regolare.

Dimostrazione.

Consideriamo il caso di una serie a termini definitivamente positivi, per cui si ha: $\exists k \in \mathbb{N} : a_n > 0, \forall n > k$. Ma allora la successione delle somme parziali sarà definitivamente crescente, infatti

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} > a_1 + a_2 + \ldots + a_k$$

dato che $a_{k+1} > 0$. Quindi per il Teorema 19 la detta successione, quindi anche la serie, è regolare.

Il precedente teorema permette talvolta di stabilire se una serie a termini di segno costante è divergente.

Esempio 45

- Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n}$, che è a termini positivi, quindi regolare. Essa però non verifica la condizione necessaria per la convergenza, infatti $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, quindi la detta serie diverge positivamente.
- Abbiamo visto nell'esempio 44 che la serie armonica non converge, dato che è a termini positivi, per il Teorema precedente possiamo dire che diverge.

Possiamo perciò enunciare il seguente risultato.

Teorema 27

Condizione necessaria e sufficiente affinché una serie a termini definitivamente dello stesso segno $\sum_{n \in N} a_n$ sia divergente è che la successione $\{a_n\}$ non sia infinitesima.

Un'altra proprietà importante per le serie a termini definitivamente dello stesso segno, consiste nel fatto che possiamo sfruttare la conoscenza del carattere di una di esse per stabilire quello di altre.

Esempio 46

- Sappiamo che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ è convergente. Consideriamo adesso una serie a termini positivi $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$, per cui si ha: $a_n \le \left(\frac{1}{3}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Possiamo dire che anche questa seconda serie deve convergere, poiché se divergesse avremmo l'assurdità che la successione delle somme $\{a_1 + a_2 + \ldots + a_n\}$ che è illimitata superiormente, avrebbe i termini tutti non superiori ai corrispondenti termini della successione $\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$, che è invece limitata. In effetti è sufficiente che sia $a_n \le \left(\frac{1}{3}\right)^n, \forall n > k$.
- Abbiamo detto che la serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=+\infty$, se allora consideriamo una serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$, per cui si ha: $a_n \ge \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$, possiamo dire che anche questa è divergente. Infatti dato che $\left\{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right\}$ è illimitata superiormente, anche $\{a_1 + a_2 + \ldots + a_n\}$ che ha elementi non inferiori alla precedente deve essere illimitata superiormente. Anche in questo caso basta che si abbia $a_n \ge \frac{1}{n}, \forall n > k$.

Tenuto conto del precedente esempio possiamo enunciare un importante risultato.

Teorema 28 (criterio del confronto)

Date due serie a termini di segno definitivamente costante, per le quali si abbia $a_n \le b_n$, $\forall n \ge m$, allora

- Se $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ diverge anche $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ diverge
- Se $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ converge anche $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge

Dimostrazione Sulla falsariga dell'esempio 46.

Esempio 47

- Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, abbastanza facilmente si osserva che si ha $n > \sqrt{n}, \forall n > 1$, quindi, essendo entrambe le espressioni positive avremo anche $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}, \forall n > 1$. Perciò dato che $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=+\infty$, possiamo dire che si ha anche $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=+\infty$.
- Consideriamo adesso $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, abbiamo $n^2 > n, \forall n > 1 \Rightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}, \forall n > 1$, stavolta non possiamo dedurre alcunché, poiché è la serie maggiorante a essere divergente.

Abbiamo visto nell'esempio precedente che non sempre è facile operare con le disuguaglianze, enunciamo quindi un risultato equivalente al Teorema 28, ma di più semplice applicazione.

Teorema 29

Date due serie a termini di segno definitivamente costante allora

- se $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\ell\neq 0$, allora $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ hanno lo stesso carattere.
- se $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$, allora se $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ converge anche $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ converge; se $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ diverge anche $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ diverge.

Dimostrazione

- Dire che $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\ell\neq 0$ significa che le successioni sono asintoticamente equivalenti, pertanto anche le successioni delle loro somme parziali avranno un comportamento simile all'infinito.
- Dire che $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$ significa che $\forall\varepsilon > 0$, $\exists k\in\mathbb{N}: \frac{a_n}{b_n}<\varepsilon$, $\forall n \geq k$. Scegliamo $\varepsilon = 1$: $a_n < b_n, \forall n \geq k$, quindi siamo nelle ipotesi del Teorema 28 e perciò vale la tesi cercata.

Esempio 48

Riconsideriamo la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$. Abbiamo visto che per la serie di Mengoli si ha: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)}=1$. Del resto si ha: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\cdot(n+1)}}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n\cdot(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}=1$, quindi per il teorema 29 possiamo dire che $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ ha lo stesso carattere della serie di Mengoli e quindi converge. Ovviamente non è detto che le due serie abbiamo la stessa somma. Del resto se sommiamo i primi 1000 addendi di $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ con un software otteniamo circa 1,64 che è maggiore di 1. In effetti si può dimostrare, ma è abbastanza complicato, che $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Per usare il criterio del confronto dobbiamo conoscere delle serie regolari, fino adesso conosciamo solo la serie geometrica, quella di Mengoli e la serie armonica. A partire da quest'ultima consideriamo un'intera famiglia di serie regolari.

Definizione 21

La serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha},\alpha\in\mathbb{R}$ si chiama **serie armonica generalizzata**.

Il carattere della serie armonica generalizzata dipende dal suo esponente.

Teorema 30

La serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha},\alpha\in\mathbb{R}$ è divergente per $0 < \alpha \leq 1$ e convergente per $\alpha > 1$.

Dimostrazione

Se $\alpha \leq 1$ si ha anche $\frac{1}{n^\alpha}>\frac{1}{n},\forall n>1$ e quindi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=+\infty\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}=+\infty$, per il teorema 29.

Se $\alpha > 1$, invece possiamo tenere conto del fatto che si ha:

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\ldots=1+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}\right)+\frac{1}{8^\alpha}+\ldots>$$

$$>1+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}\right)+\ldots>1+2\cdot\frac{1}{2^\alpha}+4\cdot\frac{1}{4^\alpha}+8\cdot\frac{1}{8^\alpha}+\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\frac{1}{4^{\alpha-1}}+\frac{1}{8^{\alpha-1}}+\ldots=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^3+\ldots$$

In questo modo abbiamo maggiorato la serie di partenza con una serie geometrica di ragione $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n$, che è convergente perché $\alpha > 1 \Rightarrow \alpha - 1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{2^{\alpha-1}}<1$. Quindi converge anche $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}, \alpha>1$.

Per le serie a termini di segno definitivamente costante vi è anche un altro criterio che può essere talvolta usato.

Teorema 31 (criterio del rapporto)

Sia una serie a termini di segno definitivamente positivo, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ allora se

- $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ell>1$ la serie diverge;
- $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ell<1$ la serie converge;
- $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ nulla può dirsi sul carattere della serie.

Vediamo qualche applicazione del precedente criterio.

Esempio 49

- Applichiamo il criterio del rapporto alla serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$: $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n\cdot n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\cancel{2^n}\cdot\cancel{(n+1)}\cdot\cancel{n!}}{(n+1)^n\cdot\cancel{(n+1)}}\cdot\frac{n^n}{\cancel{2^n}\cdot\cancel{n!}}=$ $\lim_{n\to\infty}2\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}2\cdot\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}2\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}}=2\cdot e^{-1}<1$. Quindi la serie converge.
- Se applichiamo il criterio del rapporto alla serie armonica otteniamo $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$ e quindi nulla possiamo dire.
- Lo stesso accade se lo applichiamo alla serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$: $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$, confermando così che quando il limite è 1 nulla può dirsi, dato che a serie armonica è divergente mentre questa è convergente.

In generale possiamo dire che il criterio del rapporto è utile per serie il cui termine generale contiene potenze a esponente dipendente da *n* o fattoriali, non è utile per frazioni algebriche, poiché in quest'ultimo caso il limite verrà sempre uno.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo stabilire il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4n^2-n+1}$. La serie è a termini positivi, quindi o converge o diverge a più infinito, ma poiché $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4n^2-n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4n^2}=\frac{1}{4}\neq 0$, non è verificata la condizione necessaria per la convergenza, pertanto la serie diverge.

Fra le seguenti serie stabilire quali certamente divergono (nelle risposte NP = Non può dirsi)

***Livello* 1**

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+n-1}{n^3-n+1}$; $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2-1}$; $\sum_{n=1}^{\infty}sin^2(n)$; $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\ln(n^2)}$ [NP ; +∞; NP ; +∞; NP]
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin^2(n)}{n}$; $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^3+(-1)^n}{n^4-(1)^n}$; $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^n}{n}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2+n+1}}$ [NP ; NP; +∞ ; +∞]

Lavoriamo insieme

Vogliamo stabilire il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3n^3-1}$. La serie è a termini positivi, e verifica la condizione necessaria per la convergenza: $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3}=0$, pertanto non possiamo dire se converge o diverge. Però abbiamo anche che $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^3+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3}\cdot n=1$, quindi possiamo applicare il criterio del confronto e affermare che $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3n^3-1}$ ha lo stesso carattere della serie armonica, pertanto diverge a più infinito.

Mediante il criterio del confronto determinare il carattere delle seguenti serie (nelle risposte S significa convergente)

***Livello* 1**

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n\cdot\sqrt{n}+2}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt[3]{n}+n+1}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{n+3}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2+n}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^3-1}$ [+∞; S ; +∞; S ; S]
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n-1}{3n^4-2n+1}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2^n}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n+1}$ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log(n)}$ [S ; S ; S ; +∞]

***Livello* 2**

5. $\sum_{n=1}^{\infty}sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^n}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln(n)+1}{n^2+n-1}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ [S ; S ; S ; +∞]

Lavoriamo insieme

Vogliamo stabilire il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$. Vista la presenza di una potenza conviene usare il criterio del rapporto: $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\cancel{3^n}}{(n+1)\cdot\cancel{n!}}\cdot\frac{\cancel{n!}}{\cancel{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1}=0<1$, pertanto la detta serie converge.

Mediante il criterio del rapporto determinare il carattere delle seguenti serie

Livello 2

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+2}}{n^n}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{n!}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 4^{2n-1}}{(2n)!}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{n+1}}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot(n-1)!}{(n+1)^n}$ [S ; +∞ ; S ; S ; S]
7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+2}}{(2n+1)!}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{3^n}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+(-1)^n}{4^n}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+(-1)^n}{(n+1)!}$ [S; S ; S; S]

L'angolo di Derive

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%208/8-5-1.exe trovi un'applicazione che mostra come Derive calcola limiti di successioni e serie numeriche. Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%208/8-5-1.dfw scarichi il relativo file.

L'angolo di Microsoft Mathematics

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%208/8-5-2.exe trovi un'applicazione che mostra come Microsoft Mathematics calcola limiti di successioni e serie numeriche.

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%208/8-5-2.rar scarichi il relativo file.

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

1. Data la successione $a_n=\begin{cases}k & se \quad n=1\\ -\frac{1}{a_n+1} & se \quad n>1\end{cases}$, verificare che essa è formata dalla generazione ciclica di 4 termini. $\left[a_n=\begin{cases}k & se \quad n=3h+1\\ -\frac{1}{k+1} & se \quad n=3h+2\\ -\frac{k+1}{k} & se \quad n=3h\end{cases}\right]$
2. Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{bn}\right)^{cn}$, al variare dei parametri in $\mathbb{R}$. $\left[e^{\frac{ac}{b}}\right]$

3. Determinare per quali valori reali di m vale la seguente uguaglianza per qualche valore reale di k: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(k^2-1)\cdot n+1}{(2k^2-3)\cdot n+5}=m$. $\left[m\le\dfrac{1}{3}\vee m>\dfrac{1}{2}\right]$

4. Provare che se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ converge anche $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ converge.

5. Provare che se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n, a_n\ge 0, \forall n\in\mathbb{N}$ converge anche $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n^2$ converge.

6. Sommare $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot...\cdot(n+k-1)}$. $\left[\dfrac{1}{(k-1)!\cdot(k-1)}\right]$

7. Sommare $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(k\cdot n-1)\cdot(k\cdot n+k-1)}$. $\left[\dfrac{1}{k\cdot(k-1)}\right]$

8. Sommare $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{k}{n\cdot(n+k)}, k>0$ $\left[\sum\limits_{h=1}^{k}\dfrac{1}{h}\right]$

9. Lanciamo un dado regolare a forma di cubo per n volte, con quale probabilità la prima volta che otteniamo 6 è in un lancio multiplo di 3? *Suggerimento*: si ottiene una serie geometrica infinita. $\left[\dfrac{25}{91}\right]$

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi
I temi completi dei Licei Scientifici per gli ultimi anni sono scaricabili, con soluzione, dal sito
http://matdidattica.altervista.org/esamidistato.htm

1. (Istituto magistrale PNI 1994/95) Su una semiretta di origine A_0 è dato il segmento $A_0\,A_1$ di lunghezza 2. Si considerino i segmenti adiacenti A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{n-1}\,A_n$ tali che il rapporto tra ogni segmento e il precedente sia k. Il candidato: a) dimostri che le aree dei cerchi aventi per diametro i suddetti segmenti sono i termini di una progressione geometrica e calcoli l'area S_n della parte di piano delimitata dalla successione delle prime n circonferenze; b) determini il limite di S_n al tendere di n all'infinito quando $k = \dfrac{1}{2}$; c) determini, in generale, il limite di S_n al tendere di n all'infinito, distinguendo i casi: 1) $k < 1$ 2) $k \ge 1$. $\left[\text{a) } \pi\cdot\dfrac{k^n-1}{k-1}\text{; b) } \lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\dfrac{4}{3}\pi\text{; c) 1) } S(k)=\dfrac{\pi}{1-k^2}\text{, 2) }+\infty\right]$

2. (Liceo scientifico PNI 1994/95) In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy è dato il punto $A_0 \equiv (1, 0)$. Si costruisca il triangolo rettangolo OA_0A_1 avente il vertice A_1 sull'asse delle ordinate e sia α l'angolo $O\hat{A}_0A_1$. Si conduca per A_1 la perpendicolare alla retta A_0A_1 che incontra l'asse delle ascisse in A_2; si conduca per A_2 la perpendicolare alla retta A_1A_2 che incontra l'asse delle ordinate in A_3 e così via, ottenendo una spezzata $A_0A_1A_2A_3$ ... $A_{n-1}A_n$ i cui vertici di indice dispari appartengono all'asse delle ordinate e quelli di indice pari all'asse delle ascisse. Il candidato: a) dimostri che le lunghezze dei lati della spezzata sono in progressione geometrica e calcoli la lunghezza l_n della spezzata; b) determini il limite di l_n al tendere di n all'infinito, distinguendo i casi: 1) $\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ 2) $\alpha\ge\dfrac{\pi}{4}$.
$\left[\text{a) } l_n=\dfrac{1-[tan(\alpha)]^n}{cos(\alpha)-sin(\alpha)}\text{; b) 1) }\dfrac{1}{cos(\alpha)-sin(\alpha)}\text{, 2) }+\infty\right]$

3. (Liceo scientifico PNI 2001/2002) Calcolare $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3^n}{n!}$ [0]

4. (Liceo scientifico 2006/2007) Si denoti con S_n l'area del poligono regolare di n lati inscritto in un cerchio C. a) Si dimostri che $S_n = \frac{n}{2} r^2 sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ e si trovi un'analoga espressione per l'area del poligono regolare di n lati circoscritto a C. b) Si calcoli il limite di S_n per $n \to \infty$. $\left[\text{a) } nr^2 \cdot tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\text{; b) } \pi r^2\right]$

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
AMRL = American Regions Math League
AK = Arkansas State University
HCC = Houston Calculus Contest
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest
RICE = Rice University Mathematics Tournament.
V = Vermont High School Prize Examination

Lavoriamo insieme

Il seguente quesito fu assegnato ai giochi matematici della Rice University nel 2009. *Calcolare* $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

Osserviamo che se moltiplichiamo tutti gli elementi della serie per $\frac{1}{5}$ otteniamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{5^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1-1}{5^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{5^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} - \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} - \frac{1}{4}$$

Ma ovviamente $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$, quindi indicando con S la somma della serie avremo:

$$\frac{S}{5} = S - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{4S}{5} = \frac{1}{4} \Rightarrow S = \frac{5}{16}$$

1. (AHSME 1952) Sapendo che $\sum_{n=1}^{\infty} a^n = 6, a_1 + a_2 = \frac{9}{2}$, determinare a_1. [3 oppure 9]
2. (AHSME 1964) Data la successione $a_n = \frac{5+3\cdot\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-3\cdot\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ dimostrare che si ha: $a_n = a_{n+1} - a_{n-1}$.
3. (AHSME 1970) Una serie geometrica di ragione r ha somma 15, la serie i cui termini sono i quadrati di quelli della precedente, ha somma 45. Determinare il primo termine della serie di partenza. [5]
4. (AHSME 1975) Consideriamo l'insieme $A = \{1, 3, 2, \ldots\}$, in cui $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$, per $n \ge 3$. determinare la somma dei primi 100 elementi di A. [5]
5. (AHSME 1975) Il primo termine di una serie geometrica è un numero naturale, la ragione è il reciproco di un numero naturale e la somma è 3. Determinare la somma dei primi 2 termini. $\left[\frac{8}{3}\right]$
6. (AHSME 1980) Un punto parte dall'origine con una traiettoria rettilinea, raggiungendo il punto (1; 0), poi ruota di 90° in senso antiorario raggiungendo $\left(1; \frac{1}{2}\right)$, qui ruota di nuovo di 90° in senso antiorario e percorrendo metà del precedente tratto. Se continua questo percorso all'infinito, quale punto raggiungerà? $\left[\left(\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)\right]$
7. (AHSME 1984) La successione a_n è definita dalla legge: $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = a_n + 2n$ ($n > 1$). Calcolare a_{100}. [9902]

8. (AHSME 1992) a_n è una successione crescente di numeri interi positivi che verificano la seguente proprietà: $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, sapendo che $a_7 = 120$, determinare a_8. [194]
9. (AHSME 1996) La successione 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, . . . è formata da 1 separati da blocchi di 2 con n 2 nell'n–esimo blocco. La somma dei primi 1234 termini di questa successione è (A) 1996 (B) 2419 (C) 2429 (D) 2439 (E) 2449 [B]
10. (AHSME 1999) Sia $a_1 = 1$, $(a_{n+1})^3 = 99 \cdot (a_n)^3$, $\forall n\in \mathbb{N}$, una successione di numeri reali. Determinare a_{100}. [99^{33}]
11. (AHSME 1999) La successione $a_1, a_2, a_3, \ldots$ è tale che $a_1 = 19$, $a_9 = 99$ e per ogni $n \geq 3$, a_n, è la media aritmetica dei precedenti $n - 1$ termini. Quanto vale a_2? [179]
12. (Rice 2006) Calcolare $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot\sqrt{k+2}+(k+2)\cdot\sqrt{k}}$. $\left[\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right]$
13. (Rice 2006) Calcolare $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{a^{k-1}}, |a|>1$. $\left[\left(\frac{a}{a-1}\right)^2\right]$
14. (HSMC 2007) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $1 + 2x + 4x^2 + \ldots + (2x)^n + \ldots = 3{,}4 - 1{,}2 \cdot x$, con $|x| < 0{,}5$. $\left[\frac{1}{3}\right]$
15. (ARML 2008) Per $k > 1$, S_k denota la somma di k numeri interi consecutivi a partire da k . Calcolare il più piccolo valore di k per cui S_k è un quadrato perfetto. [81]
16. (Rice 2008) Sapendo che si ha: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, determinare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+8n+16}$. $\left[\frac{\pi^2}{6}-\frac{205}{144}\right]$
17. (Rice 2008) Calcolare $\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty} \frac{1}{2^{x+y-|x-y|}}$. Sugg. Calcolare la somma in 3 casi: $x = y$, $x > y$ e $x < y$; quindi confrontare i risultati. $\left[\frac{20}{9}\right]$
18. (Rice 2008) Calcolare $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{5^k}$. *Suggerimento* moltiplicare per 5 tutti i termini. $\left[\frac{5}{16}\right]$
19. (HCC 2012) Quale delle seguenti serie converge a 2? I $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ II $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2+1}$ III $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n}$

    a) Solo I b) Solo II c) Solo III d) I e III e) II e III [d)]

Questions in English

Working together

This is a question assigned in 2002 at HSMC. *A sequence is defined by* $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n}, \ n>1 \end{cases}$. *Find* x_{10000}.

We can write: $\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1+x_n}{x_n} = \frac{1}{x_n}+1$. Thus we have the following chain:

$$\frac{1}{x_2}=\frac{1+x_1}{x_1}=\frac{1}{x_1}+1=\frac{1}{2}+1;\frac{1}{x_3}=\frac{1+x_2}{x_2}=\frac{1}{x_2}+1=\left(\frac{1}{2}+1\right)+1=2+\frac{1}{2};\frac{1}{x_4}=\frac{1+x_3}{x_3}=\frac{1}{x_3}+1=\left(2+\frac{1}{2}\right)+1=3+\frac{1}{2};\ldots$$

It is easy to understand that in general we have: $\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{2}+n \Rightarrow x_{n+1}=\frac{2}{2n+1} \Rightarrow x_{10000}=\frac{2}{2\cdot 999+1}=\frac{2}{19999}$.

20. (V 2003) Define $a_0 = 2$, $a_1 = 8$ and $a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}, n \geq 2$. Find a_{2003}. $\left[\frac{1}{4}\right]$

21. (V 2003) A circle C1 is inscribed in an equilateral triangle with side length 1 unit. Construct a circle C2 that is tangent to C1 and two sides of the triangle. Then construct a circle C3 that is tangent to C2 and two sides of the triangle. Continue constructing such circles indefinitely. Find the sum of the areas of this infinite sequence of circles. $\left[\frac{3\pi}{32}\right]$

22. (V 2004) Let C1 a circle of radius 1, square S1 is inscribed in C1, circle C2 is inscribed in S1 and square S2 is inscribed in C2. This process continues indefinitely, alternating circles and squares. For $n \geq 1$, let An be the area of the region inside circle Cn and outside square Sn . Find $\sum_{n=1}^{\infty} An$. [2π – 4]

23. (HSMC 2004) Suppose that $F(n)$ is a real–valued function whose domain is the set of positive integers and that $F(n)$ satisfies the following two properties: $F(1) = 23$; $F(n + 1) = 8 + 3 \cdot F(n)$, for $n \geq 1$. It follows that there are constants p; q and r such that $F(n) = pqn - r$ for $n \geq 1$. Find the value of $p + q + r$. [16]

24. (HSMC 2008) Suppose that $f(n + 1) = f(n) + f(n - 1)$ for $n = 2, 3, \ldots$. Given that $f(6) = 2$ and $f(4) = 8$, what is $f(1) + f(3)$? [–50]

25. (HSMC 2005)The function f is given by the table

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	3	5	1	2

. If $u_0 = 3$, and $u_{n+1} = f(u_n)$ for $n \geq 0$, what is the value of u_{2005}? [5]

26. (HSMC 2007) Let $\{a_n\}$ be a sequence of integers such that $a_1 = 1$ and $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$ for $m, n = 1, 2, \ldots$. Find a_{15}. [120]

27. (AK 2009) Compute $\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2^{199} + 3^{199} + \ldots + n^{199}}{n^{200}}$. $\left[\frac{1}{200}\right]$

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Corso di laurea in Informatica, Udine 2009) Costruiamo due successioni $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, nel modo seguente: $x_1 = y_1 = 1$ e per $n > 1$: $x_{n+1} = x_n + y_n$, $y_{n+1} = x_n \cdot y_n$. Si calcoli y_5. A) 6 B) 11 C) 17 D) 30

2. (Facoltà scientifiche CISIA 2010) Data la sequenza di numeri: $\begin{cases} x_0 = x_1 = 1 \\ x_i = x_{i-1} + 2 \cdot x_{i-2} \quad i \geq 2 \end{cases}$, x_6 è uguale a
A) 43 B) 85 C) 32 D) 61 E) 21

3. (Veterinaria 1998) Indicato con $x(n)$ il termine ennesimo di una successione di numeri, e data la legge: $x(n + 1) = x(n - 1) + x(n)$, quale delle seguenti successioni numeriche rispetta la legge?
A1) 1,1,1,1,1,1,1,... B) 1,2,3,5,8,13,21,... C) 1,2,3,4,5,6,7,...
D) 1,2,4,8,16,32,64,... E) 1,–1,1,–1,1,–1,1,...

4. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza) Data la funzione $f(x) = x^2 - 1$, si consideri la successione così definita: $a_1 = 0$, $a_2 = f(a_1)$, …, $a_{n+1} = f(a_n)$. Quanto vale a_{64}? A) –64 B) –1 C) 0 D) 63

5. (Scuola Superiore di Catania) Una successione di numeri è costruita nel modo seguente:
$x_0 = 5, x_1 = 16, x_2 = 11, x_3 = -5, \ldots, x_{n+1} = x_{n-1} - x_n, \ldots$
A che cosa è uguale x_{2005}? Quanti sono i diversi valori che assumono gli elementi della successione?

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_5_9.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	2	3	4	5
D	A	B	B	[–16; 6]

9. Successioni di numeri reali e funzioni reali di una variabile reale

9.2 Caratteristiche delle funzioni

Prerequisiti
- Sistema di riferimento cartesiano ortogonale
- Rappresentazione grafica ed equazioni delle rette
- Concetto di dominio e codominio di una funzione
- Funzioni polinomiali
- Funzioni logaritmiche ed esponenziali
- Funzioni goniometriche

Obiettivi
- Comprendere il concetto di funzione
- Comprendere il concetto di rappresentazione grafica di una funzione
- Sapere determinare dominio e codominio di una generica funzione
- Sapere determinare se una funzione è invertibile e in caso affermativo sapere calcolare l'inversa
- Sapere determinare la composizione di due o più funzioni

Contenuti
- Intervalli di numeri reali
- Definizione di funzione secondo Dirichlet
- Classificazione delle funzioni
- Dominio e codominio delle funzioni
- Iniettività e suriettività di una funzione. Funzioni invertibili
- Particolari simmetrie delle funzioni
- Invertibilità di una funzione
- Composizione di due o più funzioni

Parole chiave
Biiettività – Codominio – Dominio – Iniettività – Insieme di esistenza – Intervallo – Invertibilità
Monotonia – Suriettività – Trascendente

Richiamiamo le conoscenze...

Insiemi di numeri reali

Risolvendo equazioni o disequazioni le soluzioni possono scriversi in diversi modi.
Per esempio le soluzioni della disequazione $x - 2 > 0$, possono scriversi: $x > 2$ o $(2; +\infty)$.
Le soluzioni della disequazione $x-2\geq 0$ possono scriversi: $x \geq 2$ o $[2; +\infty)$.
Le soluzioni della disequazione $x-2<0$ possono scriversi: $x < 2$ o $(-\infty; 2)$.
Le soluzioni della disequazione $x-2\leq 0$ possono scriversi: $x \leq 2$ o $(-\infty; 2]$.
Le soluzioni della disequazione $x^2 - 4 \geq 0$ possono scriversi: $x \geq 2 \vee x \leq 2$ o $(-\infty; 2)] \cup [2; +\infty)$.
Le soluzioni della disequazione $(x - 2)^2 > 0$ possono scriversi: $x \neq 2$ o $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

La funzione valore assoluto

A volte è utile considerare solo valori positivi, per esempio nel caso di misure fisiche di lunghezza, massa e simili. Non ha certo senso parlare di una stanza di $-5\ m^2$ o di una pietra di massa $-3\ Kg$. Per ovviare a tali inconvenienti si usa perciò una funzione che del numero considera solo la sua parte priva del segno, quella che in genere si chiama **valore assoluto**, ma che è chiamato, in diversi contesti, anche **modulo**, **ampiezza** o con simili terminologie.

Definizione A

Dato un numero reale x, diciamo suo **valore assoluto** l'espressione: $|x| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$.

Esempio A

Avremo $|2| = 2, |0| = 0, |-4| = 4$.

Vale il seguente importante risultato, che abbiamo già visto nell'unità 8.5 del secondo volume.

Teorema A (Disuguaglianza triangolare)

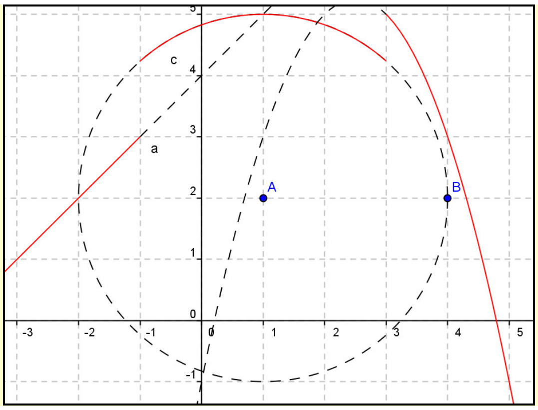
Si ha $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Rappresentazione grafica di semplici funzioni razionali

Sappiamo già rappresentare semplici funzioni, quelle rettilinee, paraboliche, logaritmiche, goniometriche, esponenziali. Sappiamo perciò rappresentare alcune funzioni che si ottengono sommando o sottraendo alcune di queste.

Esempio B

Vogliamo rappresentare la funzione $f(x) = \begin{cases} x+4 & x<-1 \\ \sqrt{9-(x-1)^2}+2 & -1 \leq x \leq 3 \\ -x^2+5x-1 & x>3 \end{cases}$. Osserviamo che $y = x + 4$ è una retta, quindi disegnarla solo per $x < -1$, equivale a tracciare una semiretta. $y = \sqrt{9-(x-1)^2}+2$, la possiamo pensare ottenuta da $(y-2)^2 = 9-(x-1)^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$, cioè dalla circonferenza di centro (1; 2) e raggio 3. Pertanto dovremmo tracciare solo il suo arco i cui punti hanno ascissa che vanno da –1 a 3. Infine $y = -x^2+5x-1$ è una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate. Pertanto dobbiamo tracciare il suo arco che si ottiene per $x > 3$. Infine la funzione è quella che vediamo di seguito, in cui la funzione è quella in rosso, mentre i tratteggi mostrano le funzioni da cui abbiamo "prelevato" alcuni pezzi.



Risoluzione di disequazioni irrazionali

Valgono le seguenti regole.

Teorema B

- La disequazione $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ equivale ai due sistemi $\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq [g(x)]^2 \end{cases}$.
- La disequazione $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ equivale al sistema $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq [g(x)]^2 \end{cases}$.

Esempio B

- Risolviamo la disequazione $\sqrt{3x+1} > 4x-2$, per il risultato precedente essa equivale alla risoluzione dei due sistemi: $\begin{cases} 4x-2<0 \\ 3x+1 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 4x-2 \geq 0 \\ 3x+1 > (4x-2)^2 \end{cases}$. La motivazione è semplice, se il radicando è non negativo l'espressione a primo membro non è negativa, quindi se quella a secondo membro è negativa, la diseguaglianza è verificata. Se il invece il secondo membro è non negativo, possiamo innalzare tutto al quadrato. Risolviamo: $\begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x \geq -\frac{1}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 3x+1 > 16x^2 - 16x + 4 \end{cases}$. Il primo sistema ha soluzione $-\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2}$, il secondo sistema diviene: $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 16x^2 - 19x + 3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ \frac{3}{16} < x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ \frac{3}{16} < x < 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1$, quindi unendo le due soluzioni otteniamo: $-\frac{1}{3} \leq x < 1$.
- La disequazione $\sqrt{3x+1} < 4x-2$, invece equivale al sistema: $\begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 4x-2 \geq 0 \\ 3x+1 < (4x-2)^2 \end{cases}$. La giustificazione stavolta consiste nel fatto che ancora una volta il radicando deve essere non negativo e perciò il secondo membro per essere maggiore del primo deve essere anch'esso non negativo. Infine si innalza il tutto al

quadrato. $\begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x \geq \frac{1}{2} \\ 16x^2 - 19x + 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x \geq \frac{1}{2} \\ x < \frac{3}{16} \vee x > 1 \end{cases} \Rightarrow x > 1$.

Verifiche

Livello 1

Calcolare

1. $|3 + |4 - 5| - 2|$; $|1 - |2 - |3 - 4|| - 5|$; $||1 - 2| - |3 - 4| - 5|$; $|1 - 2 - |3 - |4 - 5||$ [2; 5; 5; 1]
2. $\dfrac{|1-2|-3}{1-|2-3|}$; $\dfrac{|1-2-|3-4||}{|1-|2-3|-4|}$; $\dfrac{|1-|2-|3-4|||}{|1-2-|3-4||}$; $\dfrac{|1-|2-3-|-4|||}{1-2-|3-4|}$ [$\varnothing$; 0 ; 0 ; – 2]

Livello 2

3. $|x + 1| - (x + 1)$; $|x^2| - x^2$; $|x + 1| + x + 1$ $\left[\begin{cases} -2x-1 & x<-1 \\ 0 & x \geq -1 \end{cases};0;\begin{cases} 0 & x<-1 \\ 2x+2 & x \geq -1 \end{cases}\right]$
4. $||x| - 1| - |x - 1|$; $\dfrac{|x-2|-|x+2|}{|x-2|+|x+2|}$ $\left[\begin{cases} -2 & x<-1 \\ -2x & -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & x>0 \end{cases};\begin{cases} -\frac{2}{x} & x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ -\frac{x}{2} & -2<x<2 \end{cases}\right]$
5. Semplificare $\dfrac{a}{|a|}+\dfrac{b}{|b|}+\dfrac{c}{|c|}+\dfrac{abc}{|abc|}$, $a, b, c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\left[\begin{cases} 4 & a,b,c \in \mathbb{R}^+\setminus\{0\} \\ -4 & a,b,c \in \mathbb{R}^-\setminus\{0\} \\ 0 & abc=0 \end{cases}\right]$
6. Dimostrare che $|x - y| = \max(x, y) - \min(x, y)$.
7. Determinare minimo e massimo dell'espressione $|x - 2| + |x - 4| - |2x - 6|$, con $2 \leq x \leq 8$. [0; 8]

Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni

8. $|x - |2x + 1|| = 3$; $|x - 1| + |x + 1| = 2$; $(1 - |x|) \cdot (1 + x) > 0$ $\left[\left(x=-\frac{4}{3} \vee x=2\right);-1 \leq x \leq 1;(x<1, x \neq -1)\right]$
9. $|x - 1| + |x + 2| < 5$; $1 \leq |x - 2| \leq 7$; $\dfrac{|x-|x||}{x} > 0$ [$-3 < x < 2$; $-5 \leq x \leq 1 \vee 3 \leq x \leq 9$; $\varnothing$]
10. Trovare i valori del parametro reale m per i quali l'equazione $|||x| - 2| - m| = 5$ ha esattamente 5 soluzioni. [$m = 7$]

Disegnare il grafico delle seguenti funzioni

11. $f(x)=\begin{cases} x+1 & x>0 \\ 2x-1 & x \leq 0 \end{cases}$; $f(x)=\begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ 2x-1 & x>0 \end{cases}$; $f(x)=\begin{cases} x^2-x+1 & x>1 \\ -x^2+x-1 & x \leq 1 \end{cases}$; $f(x)=\begin{cases} 4x-1 & x>2 \\ x^2-5x+6 & x \leq 2 \end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases} 3x & x>1 \\ \sqrt{1-(x-1)^2}-1 & x\le 0 \end{cases}$; $f(x)=\begin{cases} 2-3x & x<1 \\ \sqrt{4-(x-2)^2}+1 & 1\le x\le 4 \\ x^2-12x+5 & x>4 \end{cases}$; $f(x)=\sqrt{\left|(1+x)\cdot(1-|x|)\right|}$

13. $f(x)=\begin{cases} 6x+1 & x<-2 \\ \sqrt{16-(x-2)^2}+3 & -2\le x\le 4 \\ x^2-14x+3 & x>4 \end{cases}$; $f(x)=\begin{cases} 4-5x & x<-4 \\ \sqrt{25-(x-3)^2}+2 & -4\le x\le 0 \\ x^2-2x+3 & x>0 \end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases} 5x+2 & x<0 \\ \sqrt{9-(x-3)^2}+1 & 0\le x\le 5 \\ -x^2-18x-2 & x>5 \end{cases}$; $f(x)=\begin{cases} 1+5x & x<-2 \\ \sqrt{16-(x+1)^2}+3 & -2\le x\le 1 \\ x^2-4x-6 & x>1 \end{cases}$

Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali

15. $x+1>\sqrt{x+1}$; $x+1\le\sqrt{x-1}$; $x+1>\sqrt{x^2+1}$; $x-1<\sqrt{x^2+x}$ $\quad [x>0; \varnothing; x>0; \varnothing]$

16. $2x-3>\sqrt{2x^2-x-1}$; $4x+1>\sqrt{2x-1}$; $x^2\le\sqrt{2x^2+1}$ $\quad \left[x>\dfrac{11+\sqrt{41}}{4}; x>0; -\sqrt{1+\sqrt{2}}\le x\le\sqrt{1+\sqrt{2}}\right]$

17. $x^2\le\sqrt{x^2-2}$; $x>\sqrt{x^2+x-1}$; $x^2+2>\sqrt{x^2-4}$; $1-x^2\le\sqrt{x^2+1}$

$$\left[\varnothing; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\le x<1; (x\le 2\vee x\ge 2); x=0\right]$$

18. $5x+3\le\sqrt{x^2+1}$; $7x-2>\sqrt{3x-4}$; $x^2+1\ge\sqrt{1-x^2}$; $x^2-1>\sqrt{x^2+1}$

$$\left[x\le\frac{-15+\sqrt{33}}{24}; x\ge\frac{4}{3}; -1\le x\le 1; \left(x<-\sqrt{3}\vee x>\sqrt{3}\right)\right]$$

Intervalli di numeri reali

Abbiamo già considerato l'insieme dei numeri naturali. Vogliamo adesso conoscere meglio l'insieme dei numeri reali.

Esempio 1

L'insieme dei numeri interi ha una proprietà che serve per ordinare e classificare gli insiemi numerici finiti. Cioè il fatto che ogni numero intero ha un precedente e un successivo. Per esempio il precedente del numero intero 3 è 2, il successivo 4. Ecco perché possiamo parlare di primo, secondo, terzo elemento e così via. Lo stesso non accade invece per i numeri razionali. Qual è il successivo del numero razionale 1,2? 1,3 no, perché per esempio 1,21 è più grande di 1,2 e più piccolo di 1,3; ma fra 1,2 e 1,21 c'è anche 1,203 oppure 1,20004 o ancora 1,20000007 e così via.

Quanto visto nell'esempio precedente merita una definizione.

Definizione 1

Un insieme numerico A si dice insieme **discreto**, se tra due qualunque dei suoi elementi vi sono sempre un numero finito di altri elementi di A.

Nella definizione precedente un numero finito significa anche zero.

Esempio 2

Nell'insieme dei numeri naturali, presi i numeri 4 e 21, l'insieme $\{x \in \mathbb{N} : 4 < x < 21\}$ contiene 16 elementi: $\{5, 6, 7, \ldots, 19, 20\}$. Fra i numeri 45 e 46 esistono 0 numeri interi.

Ovviamente ogni insieme finito è un insieme discreto. Vale il seguente banale risultato.

Teorema 1

Se A è un insieme discreto ogni suo sottoinsieme è anch'esso discreto.

Esempio 3

L'insieme dei soli numeri pari è discreto in quanto sottoinsieme dell'insieme discreto di tutti i numeri interi.

Per semplificare poniamo qualche definizione.

Definizione 2

Dati due numeri a e b con $a < b$, l'insieme

- $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ si chiama **intervallo aperto**
- $\{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$ si chiama **intervallo semiaperto a destra**
- $\{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$ si chiama **intervallo semiaperto a sinistra**
- $\{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$ si chiama **intervallo chiuso**

Dato un numero reale a l'insieme

- $\{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ si chiama **intervallo infinito aperto a sinistra**
- $\{x \in \mathbb{R} : x \ge a\}$ si chiama **intervallo infinito chiuso a sinistra**.
- $\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ si chiama **intervallo infinito aperto a destra**
- $\{x \in \mathbb{R} : x \le a\}$ si chiama **intervallo infinito chiuso a destra**

Notazione 1

Dati i numeri a e b, con $a < b$, indichiamo con
- $(a; b)$ l'intervallo aperto;
- $[a; b)$ l' intervallo semiaperto a destra;
- $(a; b]$ l'intervallo semiaperto a sinistra;
- $[a; b]$ l'intervallo chiuso;
- $(a; +\infty)$ l'intervallo infinito aperto a sinistra;
- $[a; +\infty)$ l' intervallo infinito chiuso a sinistra;
- $(-\infty; a)$ l'intervallo infinito aperto a destra;
- $(-\infty; a]$ l'intervallo infinito chiuso a destra.

L'angolo storico

Il simbolo ∞ è usato per la prima volta da John Wallis in *De sectionibus conicis* del 1655, si pensa che abbia modificato un simbolo che all'epoca della tarda romanità veniva considerato un numero *grande*, cioè mille.

Definizione 3

Un insieme numerico A si dice **denso**, se comunque si considerano due suoi elementi, fra di essi vi è almeno un altro elemento di A.

Esempio 4

L'insieme dei numeri razionali è un insieme denso, per quanto visto nell'esempio 1. Anche i numeri reali sono un insieme denso, così come un intervallo, aperto o chiuso, di numeri reali. Non è denso invece l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : x \le 1 \vee x \ge 2\}$, perché scelti i suoi elementi 1 e 2, fra di essi non vi è alcun elemento di A.

Vale ovviamente il seguente risultato.

Teorema 2

Se A è un insieme denso ogni insieme che contiene A è anch'esso denso.

I numeri reali verificano però una proprietà che li rende più densi dei razionali.

Esempio 5

Abbiamo già osservato che, per esempio, fra i numeri razionali 1,2 e 1,3 esistono infiniti altri numeri razionali. Ma esistono anche infiniti numeri che non sono razionali. Dato che $1{,}2^2 = 1{,}44$ e $1{,}3^2 = 1{,}69$ fra i numeri del tipo $\sqrt{x}; 1{,}21 < x < 1{,}69; x^2 \notin \mathbb{Q}$, ve ne sono infiniti che sono compresi tra 1,2 e 1,3 e non sono numeri razionali.

Quindi, a differenza dei numeri razionali che al loro interno hanno dei "buchi", i numeri reali invece non ne hanno, fra due numeri reali ci sono solo numeri reali. I numeri complessi di cui abbiamo parlato nel volume 2, non sono *fra* i numeri reali.

Definizione 4

Un insieme numerico A si dice **continuo**, se comunque consideriamo due suoi elementi, fra di essi ci sono solo elementi di A.

Esempio 6

Un sottoinsieme di un insieme continuo non è detto che sia continuo. $A = \{x \in \mathbb{R} : x \le 2 \vee x > 3\}$ non è continuo, dato che scelti i suoi elementi 2 e 4, fra di essi non vi sono solo elementi di A.

Approfondiremo questi concetti nella successiva unità.

Verifiche

Lavoriamo insieme

L'insieme $X = \left\{ \frac{n+2}{n-2} : n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \right\}$ è discreto o denso? Cominciamo a scrivere qualcuno dei suoi elementi: $X = \left\{ 5, 3, \frac{7}{3}, 2, \frac{9}{5}, \frac{5}{3}, \frac{11}{7}, \frac{3}{2}, \ldots \right\}$. Non è difficile osservare che abbiamo ottenuto numeri man mano sempre più piccoli, e questo fatto vale sempre, cioè ogni numero che otteniamo è più piccolo del precedente. Quindi l'insieme è discreto, dato che fra due elementi consecutivi non ci sono elementi dell'insieme.

Stabilire quali dei seguenti insiemi sono discreti, quali densi, quali continui e quali con nessuna delle precedenti proprietà (NP)

Livello 1

1. Insieme dei numeri pari ; $\{q \in \mathbb{Q} : q < 4\}$; $\{z \in \mathbb{Z} : z < 32\}$ [Discreto ; Denso ; Discreto]
2. Insieme dei multipli di 4 ; $\{r \in \mathbb{R} : r^2 < 2\}$; $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ [Discreto ; Continuo ; Discreto]
3. $\{q \in \mathbb{Q} : q < 1 \vee q > 2\}$; $\{q \in \mathbb{Q} : 0 < q < 1\}$; $\left\{ \frac{1}{z} : z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$ [NP ; Denso ; Discreto]
4. $\{q \in \mathbb{Q} : -2 \leq q \leq 1 \vee q > 2\}$; $\{r \in \mathbb{R} : r < 1\}$; $\left\{ \frac{1}{r} : r \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$ [NP ; Continuo ; Continuo]
5. $\{r \in \mathbb{R} : r^2 \in \mathbb{Z}\}$; $\{n \in \mathbb{N} : 7 \leq n \leq 12 \vee n > 24\}$; $\{r \in \mathbb{R} : \sqrt{2} \leq r \leq \sqrt{3}\}$ [Discreto ; Discreto ; Continuo]

Livello 2

6. $X = \left\{ \frac{z+2}{z+3} : z \in \mathbb{Z} \right\}$; $X = \left\{ \frac{z+2}{z+3} : z \in \mathbb{Q} \right\}$; $X = \left\{ \frac{r+2}{r+3} : r \in \mathbb{R} \right\}$; $X = \left\{ \frac{q+2}{q+3} : q \geq 1 \vee q \leq -1 \right\}$
[Discreto ; Denso ; Continuo; NP]
7. L'unione di due insiemi discreti è un insieme discreto? [Sì]
8. L'unione di due insiemi densi è sempre un insieme denso? [No]
9. L'unione di due insiemi continui è sempre un insieme continuo? [No]
10. L'intersezione di due insiemi discreti è sempre un insieme discreto? [Sì]
11. L'intersezione di due insiemi densi è sempre un insieme denso? [Sì]
12. L'intersezione di due insiemi continui è sempre un insieme continuo? [Sì]

Livello 3

13. L'unione di un insieme discreto con un insieme denso, che tipo di insieme è? [NP]
14. L'unione di un insieme discreto con un insieme continuo, che tipo di insieme è? [NP]
15. L'unione di un insieme denso con un insieme continuo, che tipo di insieme è? [NP]
16. L'intersezione di un insieme discreto con un insieme denso, che tipo di insieme è? [Discreto]
17. L'intersezione di un insieme discreto con uno continuo, che tipo di insieme è? [Discreto]
18. L'intersezione di un insieme denso con un insieme continuo, che tipo di insieme è? [Denso]

Definizione di funzione secondo Dirichlet

Il problema

Soprattutto nelle scienze fisiche si va alla ricerca di una relazione che leghi una certa grandezza a una o più altre grandezze. Per esempio, per descrivere il movimento di una particella si cerca una relazione che leghi lo spazio percorso al trascorrere del tempo. Si ottengono diverse relazioni a seconda delle ipotesi sul movimento (con velocità costante, accelerazione costante,…). Dal punto di vista matematico ciò cosa significa?

La ricerca della relazione fra una grandezza e una o più altre è una delle caratteristiche delle scienze matematiche. Abbiamo già visto diverse di queste relazioni, per esempio quelle che legano fra di loro i punti di una retta o di una conica. La differenza fondamentale è che, nel caso della retta siamo sempre in grado di esprimere una delle due incognite mediante l'altra in un solo modo, ovviamente se sono entrambe presenti.

Esempio 7

L'equazione della retta $3x - 2y + 1 = 0$, può scriversi nella cosiddetta forma esplicita: $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$, ma anche esprimendo x mediante y: $x = \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}$. In genere si preferisce la prima forma.

Quanto visto in precedenza non è invece sempre possibile per l'equazione di una generica conica.

Esempio 8

- L'equazione di una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate esprime la relazione fra le ordinate e le ascisse dei punti della parabola: $y = ax^2 + bx + c$. Se volessimo esprimere l'equazione precedente mediante la variabile x, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a \cdot (c - y)}}{2a}$ otteniamo due diverse relazioni.
- Nell'equazione dell'iperbole equilatera $xy = 1$, possiamo esprimere ciascuna delle due incognite mediante l'altra: $y = \frac{1}{x} \vee x = \frac{1}{y}$.
- Non vi è una relazione univoca che mette in relazione una delle due incognite mediante l'altra nel caso dell'equazione di una generica circonferenza, ellisse o iperbole, anche se in forma canonica.

Alla luce di quanto visto, poniamo la seguente definizione.

Definizione 5

Una legge di natura qualsiasi che a ogni elemento di un insieme A, associa al più un elemento di un insieme B si chiama **funzione definita in *A* e a valori in *B***. Il generico elemento si chiama **variabile indipendente**, il suo corrispondente si chiama **variabile dipendente**.

Notazione 2

- Per indicare che vi è una funzione f, definita in A ed a valori in B, si scrive: $f : A \to B$.
- Il corrispondente di un elemento a in una funzione f, se esiste, si indica con il simbolo $f(a)$ e si legge **effe di a**.

La precedente definizione è detta anche di Dirichlet, in essa al più un corrispondente significa zero od un corrispondente.

I protagonisti

**Lejeune Dirichlet** nacque il 13 Febbraio 1805 a Düren, che allora faceva parte dell'impero francese. Ad appena 20 anni dimostrò un caso particolare del famoso ultimo teorema di Fermat, che è stato dimostrato nella sua completezza solo alla fine degli anni '90 del secolo scorso. Verso la fine della sua vita accettò di insegnare presso la allora prestigiosissima università Göttingen, in questa città morì il 5 Maggio 1859. Dirichlet, ha avuto il merito di trovare una "buona" definizione, soprattutto con la dicitura "legge di natura qualsiasi", che fa sì che si possano considerare anche leggi non numeriche.

L'angolo storico

Il termine **funzione** è dovuto al grande filosofo e matematico tedesco del '600 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), che coniò anche il termine **funzione di**. Invece il simbolo $f(x)$ per indicare l'elemento corrispondente di x mediante la funzione f, è stato introdotto nel 1734 da un altro grande matematico, lo svizzero Leonhard Euler (1707–1783).

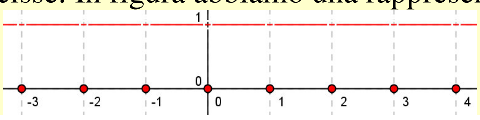
Esempio 9

- La legge che a ogni macchina associa una targa è una funzione, dato che ogni macchina ha una sola targa.
- Non è invece una funzione la legge che associa il numero civico di una strada a un'abitazione, poiché è vero che ad ogni porta è associato un solo numero civico, ma un appartamento può avere più numeri civici ad esso associati.
- Un altro esempio di funzione è quella che a ogni spettatore di uno spettacolo associa il posto sul quale sedersi.
- Non è una funzione quella che associa 10 lanci di un dado ai primi 10 numeri interi, perché il risultato non è sempre lo stesso, quindi non possiamo avere una funzione il cui valore dipenda da situazioni esterne.

Se gli insiemi su cui opera la funzione sono numerici, anche la funzione si dice numerica, in particolare se essi sono sottoinsiemi di numeri reali, la funzione si chiama **reale di variabile reale**.
Abbiamo già dato esempi di funzioni a cui sono associate delle rappresentazioni grafiche nel piano cartesiano, per esempio le funzioni lineari (cioè polinomi di primo grado in due variabili) rappresentano rette, quelle quadratiche ((cioè polinomi di secondo grado in due variabili, con la y presente solo al primo grado) sono parabole e così via. Questo ci porta a pensare che qualsiasi funzione numerica $y = f(x)$, possa rappresentarsi. Ciò non è vero come dimostrò per primo il citato Dirichlet. Consideriamo prima una funzione che, seppure con una "strana" definizione, si può rappresentare.

Esempio 10

Vogliamo rappresentare la funzione così definita: $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$. Cioè se l'ascissa è un numero intero allora l'ordinata vale 0, se invece l'ascissa non è intera l'ordinata è 1. La rappresentazione grafica è la retta $y = 1$, che ha infiniti "buchi" in corrispondenza delle ascisse intere. In corrispondenza di questi valori abbiamo dei punti sull'asse delle ascisse. In figura abbiamo una rappresentazione della funzione



Adesso vogliamo rappresentare una funzione apparentemente simile alla precedente.

Esempio 11

Consideriamo la cosiddetta funzione di Dirichlet così definita: $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Stavolta se l'ascissa è un numero razionale allora l'ordinata vale 0, se invece l'ascissa è irrazionale l'ordinata è 1. La definizione è coerente e riusciamo sempre a conoscere il corrispondente di un dato numero, per esempio $f(1,23) = 0, f\left(\sqrt{2}\right) = 1$. Però stavolta non riusciamo a rappresentare la funzione, perché l'insieme dei numeri reali è *denso*, cioè, a differenza dei numeri naturali per i quali fra due numeri ci sono solo un numero finito di numeri naturali, fra due numeri razionali esistono infiniti numeri razionali. Ma anche l'insieme dei numeri irrazionali è denso, pertanto mentre fra il numero naturale 1 e il numero naturale 2 non ci sono numeri naturali, fra il numero razionale 1 e il numero razionale 2 ci sono infiniti numeri razionali e infiniti irrazionali. Quindi la funzione dovrebbe essere la retta $y = 1$ con infiniti buchi in corrispondenza di ogni ascissa razionale e la retta $y = 0$ con infiniti buchi in corrispondenza di ogni ascissa irrazionale, che ovviamente è impossibile da rappresentare.

Considereremo soprattutto funzioni numeriche, quindi vediamo come possiamo classificarle.

Definizione 6

Una funzione reale di una variabile reale si dice **algebrica** se le operazioni che coinvolgono la variabile indipendente sono solo le 4 operazioni aritmetiche elementari e l'elevamento a potenza di esponente reale.

Esempio 12

- La funzione $f(x) = (1 + x)^x$ è una funzione algebrica.
- La funzione $f(x)=\sqrt{x^2+x-1}+ln(2)$ è una funzione algebrica, poiché il logaritmo ha per argomento un numero e non un'espressione dipendente da x.
- Invece la funzione $f(x) = ln(x)$ non lo è, poiché la x è argomento del logaritmo naturale.

Definizione 7

Una funzione reale di una variabile reale si dice **razionale** se le operazioni che coinvolgono la variabile indipendente sono solo le 4 operazioni aritmetiche elementari.

Esempio 13

- La funzione $f(x)=\dfrac{x+ln(3)}{2x^2-sin(1)}$ è una funzione razionale, poiché le funzioni non razionali logaritmo naturale e seno, non sono applicate alla variabile x, ma a dei numeri, pertanto non sono valori generici, bensì valori numerici determinati.
- Invece la funzione $f(x) = (1 + x)^x$, non è una funzione razionale, poiché la x è presente come esponente.

Definizione 8

Una funzione reale di una variabile reale non algebrica si dice **trascendente**.

Esempio 14

- La funzione $f(x) = (1 + x)^{sin(x)}$ è una funzione trascendente.
- Invece la funzione $f(x) = (x^2 - 1)^{ln(\pi/3)}$ è una funzione algebrica, addirittura razionale.

Verifiche

Lavoriamo insieme

La legge $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x>1 \\ x^2+1 & x<2 \end{cases}$ non definisce una funzione, perché ogni x: $1 < x < 2$, ha due diversi corrispondenti.

Stabilire quale delle seguenti leggi definiscono funzioni

Livello **1**

1. Associamo i libri di una biblioteca allo scaffale nel quale sono riposti. [Sì]
2. Associamo le automobili al proprio proprietario. [No]
3. Associamo i figli ai loro padri. [Sì]
4. Associamo i padri ai loro figli. [No]
5. Associamo a ogni cittadino italiano il proprio codice fiscale. [Sì]
6. Associamo a un gruppo di degenti di un ospedale la loro temperatura corporea rilevata a un dato orario di un certo giorno. [Sì]
7. Associamo a ogni numero naturale il proprio doppio. [Sì]
8. Associamo a ogni materia il professore che la insegna. [No]
9. Associamo a ogni numero intero il proprio successivo. [Sì]
10. Associamo a ogni numero intero la somma delle proprie cifre. [Sì]
11. All'insieme {1, 2, 3, 4, 5} l'estratto numero k ($1 \le k \le 5$) della prima estrazione del 2015 sulla ruota di Napoli. [Sì]
12. All'insieme {1, 2, …, 10} il primo estratto della ruota numero k ($1 \le k \le 10$) della prima estrazione del 2015. [No]

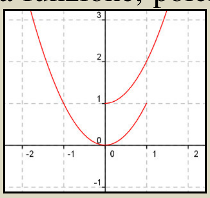
Livello **2**

13. $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x>1 \\ x^2+1 & x<0 \end{cases}$; $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x>1 \\ x^2+1 & x>0 \end{cases}$; $f(x)=\begin{cases} 1 & x<0 \\ 2 & x=0 \\ 3 & x>0 \end{cases}$ [Sì ; No ; Sì]

14. $f(x)=\begin{cases} 1 & x<-2 \\ 2 & x=0 \\ 3 & x>1 \end{cases}$; $f(x)=\begin{cases} 1 & x<2 \\ 2 & x=2 \\ 3 & x\ge 2 \end{cases}$; $f(x)=\begin{cases} 1 & 1<x<2 \\ 2 & 2\le x<5 \\ 3 & x\ge 4 \end{cases}$ [Sì ; No ; No]

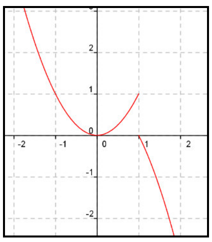
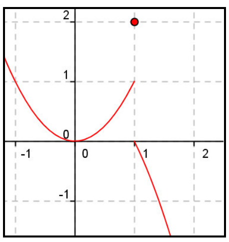
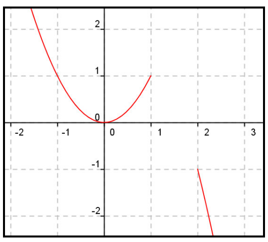
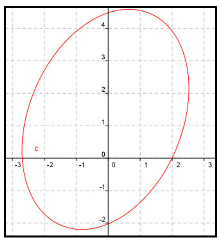
Lavoriamo insieme

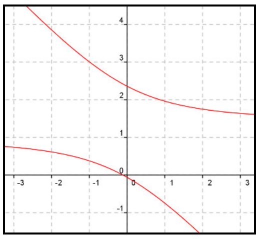
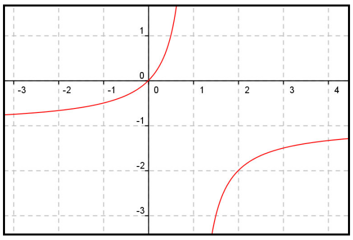
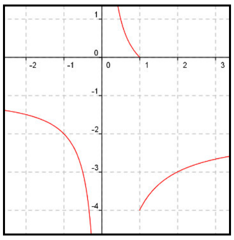
Il seguente grafico non si può riferire a una funzione, poiché ci sono ascisse comprese tra 0 e 1, che hanno più di un'ordinata.

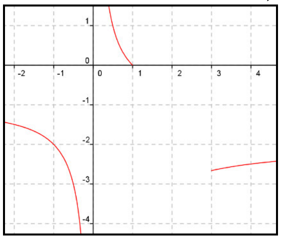
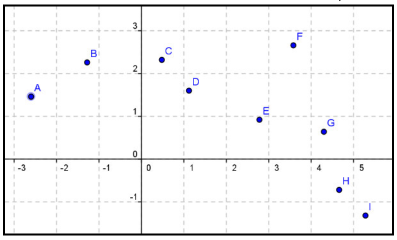


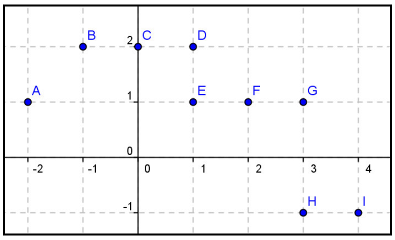
Stabilire quali dei seguenti grafici si riferiscono a funzioni, giustificando le risposte

Livello **1**

15.  ;  ;  ;  [Sì ; No ; Sì ; No]

16.  ;  ;  [No ; Sì ; Sì]

17.  ; 

; 

[Sì ; Sì ; No]

Lavoriamo insieme

Data la funzione $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, determinare $f(3)$.

Basta sostituire 3 a ogni x che compare nella definizione: $f(3)=\dfrac{3^2+1}{3^2-1}=\dfrac{9+1}{9-1}=\dfrac{10}{8}=\dfrac{4}{5}$

Livello 1

Per ciascuna delle date funzioni determinare quanto richiesto

18. $f(x) = x - 2, f(2) = ?$; $f(x) = 3x + 1,\ f\left(\dfrac{1}{2}\right) = ?$; $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 1, f(-1) = ?$ [0] $\left[0;\dfrac{5}{2};-\dfrac{1}{2}\right]$

19. $f(x) = -x^2 + x,\ f\left(-\dfrac{2}{3}\right) = ?$; $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}, f(2) = ?$; $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}-1, f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=?$ $\left[-\dfrac{10}{9};0;-\dfrac{7}{2}\right]$

20. $f(x)=\sqrt{x+1}, f(3) = ?$; $f(x)=\sqrt{x^2+2x+1}, f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = ?$; $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+1}}{x+1}, f\left(\dfrac{1}{3}\right)=?$ $\left[2;\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right]$

21. $f(x)=\sqrt[3]{4x+1-x^2}, f(-3) = ?$; $f(x)=\sqrt{x-\sqrt{x+1}}, f(3) = ?$; $f(x) = ln[ln(x) + 1], f(e) = ?$ $\left[\sqrt[3]{20};1;ln(2)\right]$

22. $f(x)=x^3-x+\dfrac{1}{x}, f\left(\dfrac{3}{4}\right)=?$; $f(x) = ln(x + 1),\ f\left(\sqrt{2}\right) = ?$ $\left[\dfrac{193}{192};ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$

23. $f(x) = sin(2x) - cos(x),\ f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = ?$; $f(x) = x + tan(3x),\ f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = ?$ $\left[\dfrac{\sqrt{3}-1}{2};\dfrac{\pi}{4}-1\right]$

24. $f(x)=\sqrt{x+1}-|x+2|, f(-1) = ?$; $f(x) = |x - |x + 2| + 1|,\ f\left(-\dfrac{2}{3}\right) = ?$ $\left[\dfrac{\sqrt{3}-4}{3};1\right]$

25. $f(x)=\dfrac{ln\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^3-1}}, f(2) = ?$; $f(x)=sin\left(\dfrac{x+1}{x}\right), f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=?$ $\left[\dfrac{ln(3)}{\sqrt{7}};sin\left(\dfrac{2+\pi}{\pi}\right)\right]$

Livello 2

26. $f(x)=\begin{cases} x-1 & x>1 \\ 2x+1 & x\le 1\end{cases}, f(1) = ?$; $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x\ge 0 \\ x^2+1 & x<0\end{cases}, f\left(\dfrac{1}{2}\right)=?$ $\left[3;\dfrac{5}{4}\right]$

27. $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x>0 \\ 3x+1 & x\le 0\end{cases}, f(2) = ?$; $f(x)=\begin{cases} x^3-1 & x\ge 0 \\ \dfrac{x^2+1}{x} & x<0\end{cases}, f\left(-\dfrac{1}{2}\right)-f\left(\dfrac{1}{2}\right)=?$ $\left[3;\dfrac{13}{8}\right]$

28. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1} & x>2\\ \sqrt[3]{x-1} & x\le 2\end{cases}, f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=?$; $f(x)=\begin{cases}sin(x) & x\ge 0\\ cos(x) & x<0\end{cases}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=?$ $\left[-\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{12}}{2};1\right]$

29. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1} & x\le 0\\ ln(x) & 0<x\le 2\\ \sqrt{x} & x>2\end{cases}$, $f(-1)+f(0)-f(1)=?$; $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+1} & x\le 1\\ ln(x-1) & 1<x\le 3\\ \frac{1}{x^2-1} & x>3\end{cases}$, $f(-1)+f(2)-f(4)=?$

$\left[-\frac{3}{2};\sqrt{2}-\frac{1}{15}\right]$

Lavoriamo insieme

Data la funzione $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, determinare $f(-x)$ ed esprimerla mediante $f(x)$.

Basta sostituire $(-x)$ a x: $f(-x)=\frac{-x+1}{-x-1}=\frac{x-1}{x+1}$. Adesso osserviamo che si ha: $f(-x)=\frac{1}{f(x)}$

Date le funzioni seguenti, calcolare quanto richiesto

Livello 1

30. $f(x) = x^2 + x + 1, f(2x) = ?$; $f(x) = x^3 - x + 1, f(x + 1) = ?$ $[4x^2 + 2x + 1 ; x^3 + 3x^2 + 2x + 1]$

31. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}, f(x^2) = ?$; $f(x) = (x-1)^x, f(x^2) = ?$; $f(x) = x^4 + 5x^2 + 3, f(x^2-1) = ?$

$\left[\frac{x^4-1}{x^4+1};\left(x^2-1\right)^{x^2};x^8-4x^6+11x^4-14x^2+9\right]$

32. $f(x) = |x + sin(x)|$, $f\left(\sqrt{x}\right)=?$; $f(x) = x^2 + 1, f[sin(x)] = ?$ $\left[\left|\sqrt{x}+sin\left(\sqrt{x}\right)\right|;sin\left(x^2+1\right)\right]$

Livello 2

33. $f(x)=\frac{e^{2x-1}+1}{e^{x+1}-1}, f(2x+1)=?$; $f(x)=\frac{x+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}}, f\left(x+\frac{1}{x}\right)=?$; $f(x) = x^2 - x, f(e^{x+1} - e^{x-1})$

$\left[\frac{e^{4x+1}+1}{e^{2x+2}-1};\frac{x^4+3x^2+1}{x^4+x^2+1};e^{x-1}\cdot\left(e^2-1\right)\cdot\left(e^{x+1}-e^{x-1}-1\right)\right]$

Livello 3

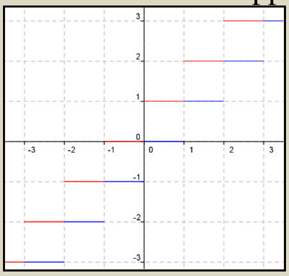
34. $f(x)=x+\frac{1}{x}, f\left(\frac{1}{x}\right)=?$ In che relazione sono le due funzioni? $\left[f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

35. $f(x)=\frac{x\cdot(x-1)}{2}$, $f(x+2) = ?$ In che relazione sono le due funzioni? $\left[f(x+2)=\frac{(x+1)\cdot(x+2)}{x\cdot(x-1)}\cdot f(x)\right]$

36. $f(x) = x^2 + x + 1, f(x + h) = ?$ Determinare per quale valore di h tale espressione è priva del termine di primo grado e per quale valore è priva del termine noto. $\left[x^2 + (2h + 1)x + h^2 + h + 1;\ h=-\frac{1}{2};\varnothing\right]$

Lavoriamo insieme

Consideriamo le funzioni che indichiamo con $\lfloor x \rfloor$ e con $\lceil x \rceil$ e che chiamiamo rispettivamente massimo intero contenuto in x o anche *floor* o pavimento, e minimo intero che contiene x, o anche *ceiling* o soffitto. Vogliamo rappresentare queste funzioni. Prima cerchiamo di capire le definizioni delle due funzioni. Vediamo qualche esempio: $\lfloor 0 \rfloor = 0$, $\lfloor 0{,}35 \rfloor = 0$, $\lfloor 0{,}9999 \rfloor = 0$, $\lfloor 1 \rfloor = 1$, $\lfloor -1{,}25 \rfloor = -2$; $\lceil 0 \rceil = 0$, $\lceil 0{,}35 \rceil = 1$, $\lceil 0{,}9999 \rceil = 1$, $\lceil 1 \rceil = 1$, $\lceil -1{,}25 \rceil = -1$. Quindi le rappresentazioni delle funzioni sono degli "scalini" larghi una unità, come mostrato di seguito, dove in blu abbiamo rappresentato la funzione pavimento e in rosso la



funzione soffitto.

Dalla definizione e dal grafico si deduce che: $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$ e $x \in (n; n+1)$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lceil x \rceil = n + 1, \lfloor x \rfloor = n$

Livello 3

Rappresentare le seguenti funzioni (round(x) è la funzione che associa a ogni ascissa la sua approssimazione per eccesso se la prima cifra decimale è maggiore o uguale a 5, o per difetto se minore di 5)

37. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$; $f(x) = \begin{cases} -1 & x \in \mathbb{Z} \wedge x \text{ pari} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 1 & x \in \mathbb{Z} \wedge x \text{ dispari} \end{cases}$; $f(x) = x + \lfloor x \rfloor$
38. $f(x) = \lceil x \rceil - x$; $f(x) = \lceil x \rceil + \lfloor x \rfloor$; $f(x) = \lceil x \rceil^2$; $f(x) = \lfloor x \rfloor^2$
39. $f(x) = \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor$. Esprimere in modo più semplice questa funzione. [$f(x) = -1$]
40. $f(x) = \lfloor x \rfloor \cdot \lceil x \rceil$. Le ordinate delle ascisse intere hanno una particolarità, quale? [Sono i quadrati delle ascisse]
41. $f(x) = round(x)$; $f(x) = |round(x)|$; $f(x) = round(x) - \lceil x \rceil$; $f(x) = round(x) - \lfloor x \rfloor$

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere l'equazione $3\lfloor x \rfloor - 1 = 2\lfloor x + 1 \rfloor + 2$. Cominciamo a semplificare: $3\lfloor x \rfloor - 2\lfloor x + 1 \rfloor = 3$. In che relazione sono $\lfloor x \rfloor$ e $\lfloor x + 1 \rfloor$? Per capirlo consideriamo qualche caso particolare:

$$\lfloor 1{,}75 \rfloor = 1, \lfloor 1{,}75 + 1 \rfloor = \lfloor 2{,}75 \rfloor = 2; \lfloor -1{,}75 \rfloor = -2, \lfloor -1{,}75 + 1 \rfloor = \lfloor -0{,}75 \rfloor = -1$$

Cioè $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$. Quindi: $3\lfloor x \rfloor - 2\lfloor x + 1 \rfloor = 3 \Rightarrow 3\lfloor x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor - 2 = 3 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 5$. Ovviamente le soluzioni sono tutti i numeri il cui "pavimento" è 5, cioè $5 \le x < 6$.

Risolvere le seguenti equazioni

Livello 3

42. $\lfloor x \rfloor + x = 1$; $\lceil x \rceil - x = 2$; $\lceil x \rceil + \lfloor x \rfloor = 5$; $\lfloor x \rfloor + 1 = 2\lfloor x + 2 \rfloor$ [$\varnothing$; $\varnothing$; $2 < x < 3$; $-3 \le x < -2$]
43. $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$; $2\lfloor x \rfloor + 3 = 3\lfloor x - 2 \rfloor + 5$; $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = 5$; $\lfloor x \rfloor - x = 2$ $[\forall x \in \mathbb{R}; 4 \le x < 5; \varnothing; \varnothing]$
44. $\lceil x \rceil + 1 = 2\lfloor x + 2 \rfloor$; $\lceil x + 1 \rceil - 3 = 4\lceil x - 2 \rceil$; $\lfloor x \rfloor \cdot \lfloor x - 1 \rfloor = 0$ [$-2 \le x < -1$; $1 < x \le 2$; $-1 \le x \le 1$]
45. $\lceil x \rceil \cdot \lceil x + 1 \rceil = 1$; $\lfloor x \rfloor \cdot \lceil x \rceil = 0$; $\lfloor x \rfloor^2 = 1$; $\lfloor x^2 \rfloor = 1$; $\lceil x \rceil^2 = 1$; $\lceil x^2 \rceil = 1$
46. $\left[x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; -1 \le x \le 1; (-1 \le x < 0 \vee 1 \le x < 2); \left(-\sqrt{2} < x \le -1 \vee 1 \le x < \sqrt{2}\right); (-1 \le x \le 1, x \ne 0); (-2 < x \le -1 \vee 0 < x \le 1) \right]$
47. Provare che $\lfloor x \rfloor + \lfloor 1 - x \rfloor = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Z} \\ 0 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$.

Lavoriamo insieme

La funzione $f(x)=\begin{cases} x^3 \cdot tan(\pi/7) & x<\pi \\ 1+ln(3) & x\ge\pi \end{cases}$ è algebrica e razionale, poiché nella sua definizione la variabile dipendente è coinvolta solo nell'operazione di elevamento al cubo.

Classificare le seguenti funzioni

Livello 1

48. $f(x) = x^2 - tan(3)$; $f(x) = 3^2 - tan(x)$; $f(x) = (2x - ln(4))^5$ [razionale ; trascendente ; razionale]

49. $f(x) = (2x - ln(4))^{5x+1}$; $f(x)=\dfrac{x^4-\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}-\pi}$; $f(x)=\dfrac{x^5+\sqrt{cos(\pi)}}{\sqrt{x+\log_{1/2}5}}$

[algebrica non razionale ; algebrica non razionale ; algebrica non razionale]

50. $f(x)=\begin{cases} |x| & x<1 \\ |sin\ x| & x>2 \end{cases}$; $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1+x}{x} & x<1 \\ \dfrac{1-\sqrt{x}}{\log_x 3} & x>2 \end{cases}$; $f(x)=\begin{cases} x^3+x^x & x>0 \\ sin\left(\dfrac{\pi}{9}\right) & x\le 0 \end{cases}$; $f(x)=\begin{cases} 2^x & x>\dfrac{3}{4} \\ x^2 & x<-\dfrac{1}{4} \end{cases}$

[trascendente; trascendente ; algebrica non raz. ; algebrica non raz.]

Dominio e codominio delle funzioni

Nella definizione di funzione abbiamo sempre aggiunto la clausola “se esiste il corrispondente”, infatti non è detto che la legge stabilita sia verificata da tutti gli elementi dell’insieme di partenza.

Esempio 15

Se consideriamo la funzione reale di variabile reale definita da $f(x) = \sqrt{x}$, ovviamente questa funzione è definita solo per valori non negativi di *x*.

Diamo allora una nuova definizione.

Definizione 9

Data una funzione reale di variabile reale $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diciamo suo **dominio** (brevemente **dom(*f*)**) o **insieme di esistenza** (brevemente **IdE(*f*)**) il sottoinsieme dei numeri reali che hanno un corrispondente reale mediante la *f*.

Che cosa significa

Dominio deriva dal latino *dominium* che a sua volta deriva da *dominus*, cioè signore. Quindi il dominio è il luogo in cui qualcuno o qualcosa domina, padroneggia. Come estensione perciò il dominio di una funzione è dove essa agisce.

Esempio 16

Il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è, per quanto detto, *dom*(*f*) = $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = \mathbb{R}_0^+$.

Ovviamente possiamo considerare anche il sottoinsieme corrispondente al dominio.

Definizione 10

Data una funzione reale di variabile reale $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diciamo suo **codominio** (brevemente **cod(*f*)**) o **immagine** (brevemente **Im(*f*)**) il sottoinsieme dei numeri reali che sono corrispondenti di almeno un numero reale mediante la *f*.

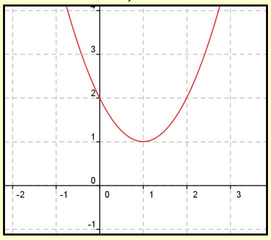
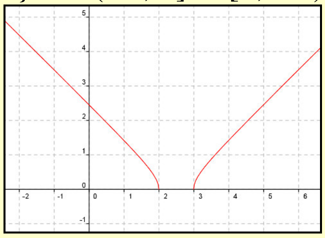
Esempio 17

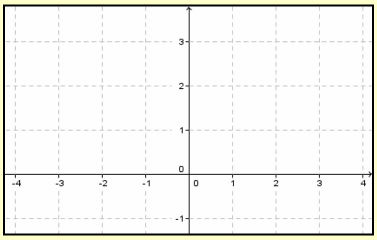
- Il codominio della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è ovviamente *cod*(*f*) = $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = \mathbb{R}_0^+$. Quindi in modo corretto potremmo scrivere: $f(x) = \sqrt{x} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$.
- Non dobbiamo pensare che il dominio coincida sempre con il codominio. La funzione $f(x) = x^2$ ha per dominio $\mathbb{R}$, mentre il suo codominio è l’insieme dei numeri reali non negativi. $f(x) = x^2$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$.

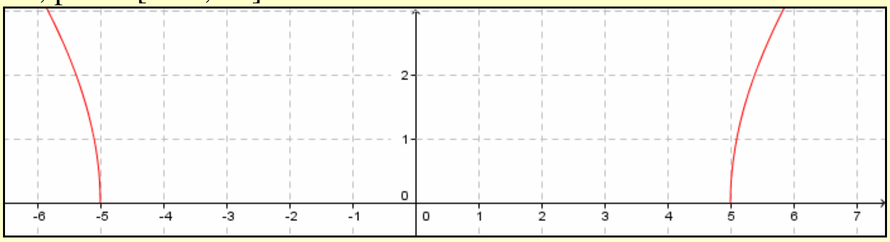
Con la rappresentazione grafica risulta particolarmente semplice determinare dominio e codominio di una funzione, ovviamente sempre tenuto conto di ciò che si vede.

Esempio 18

- Il grafico seguente si riferisce a una funzione in cui sia dominio che codominio è l’insieme dei numeri reali.

- Il grafico accanto si riferisce a una funzione il cui dominio è l'insieme dei numeri reali, ma il cui  codominio sono tutti i numeri reali maggiori o uguali a 1.
- Il grafico a lato si riferisce a una funzione il cui dominio è $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 2 \vee x \geq 3\}$ = $=(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$  e il cui codominio è $\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\} = \mathbb{R}_0^+$.
- In basso abbiamo la rappresentazione della funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$ con Geogebra, prima in [– 4; 4], cioè come se la funzione non esistesse, poi in [– 10; 10].





Ovviamente anche il codominio ha la sua importanza, se scegliessimo una zona grafica che mostra solo ordinate negative otterremo ancora una volta un grafico vuoto.

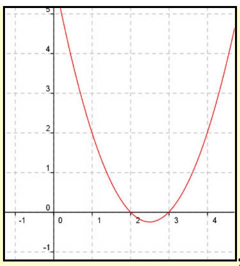
L'ultimo degli esempi precedenti ci convince dell'importanza della ricerca del dominio e del codominio di una funzione, perché la semplice rappresentazione grafica non sempre ci aiuta. Conoscere dominio e codominio permette anche una scelta opportuna della zona grafica da rappresentare mediante un software.
A volte può essere utile variare il dominio di una funzione.

Definizione 11

Data una funzione reale di variabile reale $f : A \to B$, diciamo sua **restrizione** la funzione che ha la stessa definizione della *f*, ma il cui dominio è un sottoinsieme di *dom*(*f*).

Ovviamente restringendo il dominio della funzione, in generale si restringe anche il suo codominio.

Esempio 19

Data la funzione $f(x) = x^2 - 5x + 6$, il cui grafico è la parabola mostrata in figura , che ha dominio $\mathbb{R}$ e codominio $\left\{y \in \mathbb{R} : y \geq -\frac{1}{4}\right\} = \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$, come si capisce facilmente, dato che le coordinate del vertice sono $V \equiv \left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{4}\right)$. Restringendo la funzione a [4; + ∞), il codominio diventa [2; +∞). Se invece restringiamo a [1; + ∞), il codominio non varia.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Determinare l'insieme di esistenza della funzione $f(x)=\sqrt{x-2}+ln(5x-1)-\frac{\sqrt[3]{x}}{3-x}$. Tutto dipende dalle operazioni coinvolte nella definizione della funzione, ovviamente non danno "preoccupazioni" la somma algebrica e il prodotto, lo danno invece la divisione (la frazione), la radice quadrata e il logaritmo. Neanche la radice cubica impone restrizioni sul dominio. Basta quindi imporre le condizioni per l'esistenza di ciascuna di queste operazioni, ottenendo il sistema:

$$\begin{cases} x-2\geq 0 \\ 5x-1>0 \\ 3-x\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\geq 2 \\ x>\frac{1}{5} \\ x\neq 3\end{cases}\Rightarrow x\geq 2\wedge\neq 3\Rightarrow dom(f)=[2,3)\cup(3,+\infty).$$

Determinare l'insieme di esistenza delle seguenti funzioni

Livello 1

1. $f_1(x)=\frac{x+1}{x-1}$; $f_2(x)=\frac{1}{x^2+1}$; $f_3(x)=\sqrt{x^2+2}$; $f_4(x)=1+\frac{1}{x^2-1}$ $\left[\mathbb{R}\setminus\{1\};\mathbb{R};\mathbb{R};\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}\right]$

2. $g_1(x)=\sqrt[4]{2x-1}+\sqrt[5]{3x-1}$; $g_2(x) = ln(x^2 + 5)$; $g_3(x) = 4x + ln(5)$ $\left[\left[\frac{1}{2};+\infty\right);\mathbb{R};\mathbb{R}\right]$

3. $h_1(x)=\frac{x+2}{ln(x-1)}$; $h_2(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{17}}$; $h_3(x)=\frac{x+5}{x^2-4}$; $h_4(x)=\sqrt{-x^2}$ $\left[(1;2)\cup(2;+\infty);\mathbb{R}_0^+;\mathbb{R}\setminus\{-2;2\};\{0\}\right]$

4. $m_1(x)=\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x}-1}$; $m_2(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$; $m_3(x)=\frac{sin(2x+1)}{\sqrt[3]{x+2}}$; $m_4(x) = ln(x + 2)$

   $\left[(0;1)\cup(1;+\infty);(0;+\infty);\mathbb{R}\setminus\{-2\};(-2;+\infty)\right]$

5. $p_1(x) = sec(x^2)$; $p_2(x)=\frac{log_2(x+1)}{x^4+5}$; $p_3(x) = tan(3x - 4)$; $p_4(x) = cot(4x + 2)$

   $\left[x\neq\pm\frac{\sqrt{2\pi\cdot(4k\pm 1)}}{2};(-1;+\infty);x\neq\frac{\pi+8}{6}+k\cdot\frac{\pi}{3};x\neq\frac{\pi-2}{4}+k\cdot\frac{\pi}{4}\right]$

6. $q_1(x)=\frac{sin(x+1)}{cos(x)}$; $q_2(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^2+1}}$; $q_3(x)=\frac{x^2+1}{x+3}-\frac{x}{2-x}$; $q_4(x)=\sqrt{x+\pi}$; $q_5(x)=\sqrt{|x+3|}$

   $\left[\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\};[0;+\infty);\mathbb{R}\setminus\{-3;2\};(-\pi;+\infty);\mathbb{R}\right]$

Livello 2

7. $f_1(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{x^2-3}$; $f_2(x)=\frac{log_x(3)}{2x+1}$; $f_3(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{2-3x}$; $f_4(x)=ln(x+1)-\sqrt{1-2x}$

   $\left[\mathbb{R}_0^+\setminus\{\sqrt{3}\};(0;+\infty)\setminus\{1\};\left[-2;\frac{2}{3}\right];\left(-1;\frac{1}{2}\right]\right]$

8. $h_1(x)=\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-9}}$; $h_2(x)=log_3\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$; $h_3(x) = log_{3x-1}(4x + 1)$; $h_4(x) = ln[ln(2x - 5)]$

   $\left[(-\infty;-3)\cup(3;+\infty);(-\infty;-1)\cup(2;+\infty);\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right);(3;+\infty)\right]$

9. $m_1(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}$; $m_2(x)=\dfrac{x+tan(x)}{sin(x)}$; $m_3(x)=\dfrac{\sqrt{ln(2x+1)}}{\sqrt[3]{\sqrt{x-2}+1}}$; $m_4(x)=\sqrt{\sqrt{x}-1}$

$\left[(1;+\infty);\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\};[2;+\infty);[1;+\infty)\right]$

10. $p_1(x)=\sqrt{log_5(x-2)-1}$ $p_2(x)=cot(2x)-\dfrac{\sqrt[3]{x}}{4x+1}$ $q_1(x)=(x+1)^x+ln(3x+1)$

$\left[[7;+\infty);\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2};-\frac{1}{4}\right\},k\in\mathbb{Z};\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)\right]$

11. $r_1(x)=ln(x^2-4)-\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt[3]{x}}{x^4-1}$; $r_2(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}+ln(x^2-16)-\dfrac{\sqrt[4]{x}-5}{3+x^2}$ [(2; + ∞) ; (4; + ∞)]

12. $q_1(x)=\sqrt{x^3-2}+ln(x^2+1)+\dfrac{\sqrt[3]{x-7}}{9-x^2}$; $q_2(x)=\sqrt[7]{x+9}+\sqrt{3x^2-2}+\dfrac{ln(x-1)}{x-x^2}$ $\left[\left[\sqrt[3]{2};3\right)\cup(3;+\infty);(1;+\infty)\right]$

13. $f(x)=\sqrt{3x-2}+ln(5x+1)-\dfrac{\sqrt[5]{x-4}}{3-x^2}$ $n(x)=\sqrt{\dfrac{7x-1}{4x-3}}+2ln(x^2-x+3)+\dfrac{4x-1}{3x^2-x-2}$

$\left[\left[\frac{2}{3};\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)\right]\left[\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)\cup\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{7}\right]\cup\left(\frac{3}{4};1\right)\cup(1;+\infty)\right]$

Livello 3

14. $p(x)=\log_{x^2-1}(x^3-2)+\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}-1}-2}$ [[25; + ∞)]

15. $q(x)=sin^{-1}(x^2-x)$ (ricorda che il dominio di $sin^{-1}(x)$ è [–1; 1] $\left[\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]\right]$

16. $t(x)=sin^{-1}(2x^2-3x+1)+cos^{-1}(2x-3)$; $u(x)=sin^{-1}(ln(2x+1))$ $\left[\left[1;\frac{3}{2}\right];\left[\frac{e^{-1}-1}{2};\frac{e-1}{2}\right]\right]$

17. $w(x)=\sqrt{sin^{-1}(1-3x)}$; $z(x)=ln\left[cos^{-1}(4x+1)\right]$ $\left[\left(0;\frac{1}{3}\right);\left[-\frac{1}{2};0\right)\right]$

Lavoriamo insieme

Determinare l'insieme di esistenza della funzione $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x+1-|3x|}}{|2x-4|-|3x+7|}$. Anche in questo caso dobbiamo risolvere un sistema: $\begin{cases}4x+1-|3x|\ge 0\\ |2x-4|-|3x+7|\ne 0\end{cases}$. Risolviamo separatamente:

$$4x+1-|3x|\ge 0\Rightarrow\begin{cases}4x+1-3x\ge 0\\ x\ge 0\end{cases}\vee\begin{cases}4x+1+3x\ge 0\\ x<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ x\ge 0\end{cases}\vee\begin{cases}x\ge -\frac{1}{7}\\ x<0\end{cases}\Rightarrow x\ge 0\vee 0<x\le -\frac{1}{7}\Rightarrow x\ge -\frac{1}{7}$$

$$|2x-4|-|3x+7|\ne 0\Rightarrow 2x-4\ne 3x+7\vee 2x-4\ne -3x-7\Rightarrow x\ne -11\vee x\ne -\frac{3}{5}$$

Quindi il sistema equivale a: $\begin{cases}x\ge -\frac{1}{7}\\ x\ne -11\vee x\ne -\frac{3}{5}\end{cases}\Rightarrow x\ge -\frac{1}{7}$, la cui soluzione è appunto il dominio cercato.

Determinare l'insieme di esistenza delle seguenti funzioni

Livello 3

18. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-|3x+1|}}{|-2x+1|-|x-7|}$; $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+1-|x-3|}}{\sqrt{x-|-3+x|-|2x+5|}}$; $f(x)=\dfrac{\sqrt{7x+1-|5x+2|}}{|3x+1|-|-x+5|}$

$$\left[\left[-\frac{2}{3};0\right];\left[\frac{3}{2};+\infty\right);\left[\frac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty)\right]$$

19. $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x+5-|4x+1|}}{|-x+2|-|3x-8|}$; $f(x)=\dfrac{\sqrt{3-|4x+7|}}{|-5x+3|-|8x-2|}$; $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-|7x-1|}}{|5x-8|-|-3x+2|}$

$$\left[\left[-\frac{6}{7};4\right]\setminus\left\{\frac{5}{3};3\right\};\left[-\frac{5}{2};-1\right];\left[\frac{1}{8};\frac{1}{6}\right]\right]$$

20. $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x-3+|6x+7|}}{|2x+1|+|-3x-2|}$; $f(x)=\dfrac{\sqrt{7+|-2x+3|}}{|x-9|-|4x+5|}$; $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x-|4x-7|}}{\sqrt{|-5x+1|-x}}$

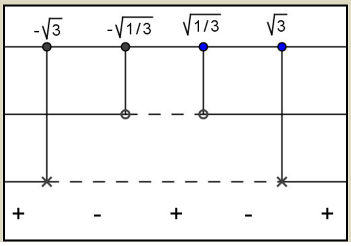
$$\left[(-\infty;-5]\cup\left[-\frac{2}{5};+\infty\right);\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{14}{3};\frac{4}{5}\right\};[1;7]\right]$$

21. $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x-5-|4x|}}{\sqrt{|-x|-|-7x+3|}}$; $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1+|3x+4|}}{|x+2|+\sqrt{|4x+1|-2}}$; $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-3-|4x-1|}}{|x+1|-|2x-7|}$

$$\left[\varnothing;\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup\left[-\frac{5}{4};-\frac{3}{4}\right]\cup\left[\frac{1}{4};+\infty\right);\varnothing\right]$$

Lavoriamo insieme

Per la determinazione del codominio di una funzione può essere utile determinare prima il segno, dato che in tal modo stabiliamo per quali ascisse si ottengono ordinate positive e per quali negative o nulle. Per esempio sia $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{5x^2-15}$. Basta risolvere la disequazione $\dfrac{3x^2-1}{5x^2-15}\geq 0$. Determiniamo il segno del numeratore: $3x^2-1\geq 0\Rightarrow x\leq-\sqrt{\dfrac{1}{3}}\vee\geq\sqrt{\dfrac{1}{3}}$, quindi del denominatore: $5x^2-15\geq 0\Rightarrow x\leq-\sqrt{3}\vee\geq\sqrt{3}$. Riportiamo il tutto in un grafico, l'ultima riga indica il segno della funzione in ciascuno degli intervalli.



Determinare quando sono positive le seguenti funzioni

Livello 1

22. $f(x)=\dfrac{4x-1}{x-x^2}$; $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-x^2}$; $f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{5x^2-4}$; $f(x)=\dfrac{x^4-x}{2x^3-1}$

$$\left[\left(\frac{1}{4}<x<1\vee x>0\right);-1<x<0;\left(x<-\frac{2\cdot\sqrt{5}}{5}\vee\frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right);\left(0<x<\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\vee x>1\right)\right]$$

23. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+4}$; $f(x)=\dfrac{x^2-5}{1-3x+x^2}$; $f(x)=\dfrac{-1}{1-x+x^2}$; $f(x)=\dfrac{x^2+x}{5x^2+x-1}$

$$\left[\forall x\in\mathbb{R};\left(x<-\sqrt{5}\vee\frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\sqrt{5}\vee x>\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right);\varnothing;\left(x<-1\vee\frac{-1-\sqrt{21}}{10}<x<0\vee x>\frac{\sqrt{21}-1}{10}\right)\right]$$

24. $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}$; $f(x)=\dfrac{2x^3-1}{x^2-11x-12}$; $f(x)=\dfrac{x-1}{3x+2}$

$$\left[\frac{3}{2}<x\le 4;-1<x<\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\vee x>12;\left(x<-\frac{2}{3}\vee x>1\right)\right]$$

25. $f(x) = ln(3x^2 - x - 1) - 2$; $f(x) = log_2(x) + log_2(3x - 1)$; $f(x)=\dfrac{4x^2+1}{4-3x}$

$$\left[x<\frac{1-\sqrt{13+12e^2}}{6}\vee x>\frac{1+\sqrt{13+12e^2}}{6}\right]\left[x<\frac{1-\sqrt{13}}{6}\vee x>\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right]\qquad\left[x<\frac{4}{3}\right]$$

Livello 2

Si ricordi che $log_a(b)\begin{cases}>0 & se\ (a>1\wedge b>1)\vee(0<a<1\wedge 0<b<1)\\ <0 & se\ (a>1\wedge 0<b<1)\vee(a>1\wedge 0<b<1)\end{cases}$

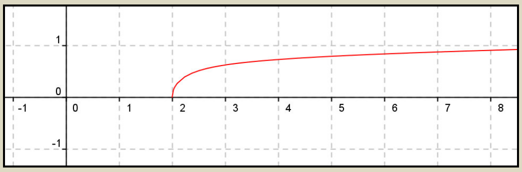
26. $f(x) = log_{4x-1}(5x + 2)$; $f(x)=log_{x^2-x}(3-2x)$; $f(x) = log_{2x+5}(x^2 - 16)$

$$\left[x>\frac{1}{2};\left(x<0\wedge x\neq\frac{1-\sqrt{5}}{2}\vee 1<x<\frac{3}{2}\right);x>\sqrt{17}\right]$$

27. $f(x) = log_{3x+2}(7x - 2)$; $f(x)=\dfrac{log_{11x+12}(4x+3)}{x+1}$; $f(x)=\dfrac{x}{log_{4x-1}(7-2x)}$ $\left[x>\dfrac{3}{7};x>-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}<x<3\right]$

Lavoriamo insieme

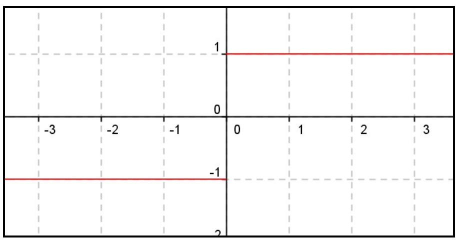
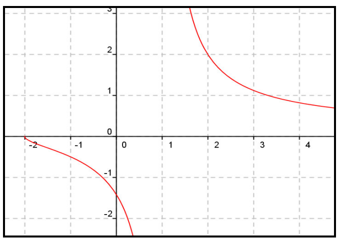
Tenuto conto del grafico seguente vogliamo determinare dominio e codominio della funzione, limitatamente a ciò che vediamo.

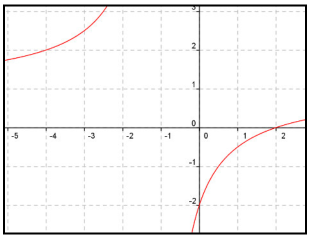
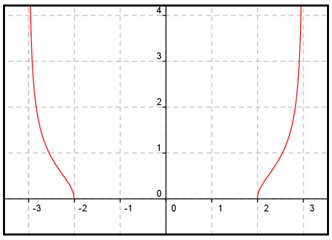


Ipotizziamo che il grafico sia "regolare", nel senso che se, come nel nostro caso non vediamo nulla prima dell'ascissa $x = 1$, vuol dire che non c'è effettivamente nulla, lo stesso per le ordinate. Pertanto sulla base di ciò si ha: $dom(f)=[2,+\infty), cod(f)=[0,1)$.

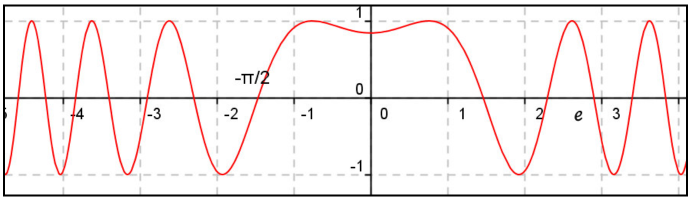
Determinare dominio e codominio delle seguenti funzioni nelle restrizioni mostrate

Livello 1

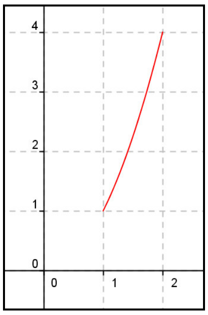
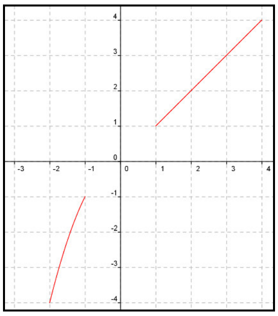
28.   $[\mathbb{R}\to\{-1;1\};[-2;1)\cup(1;+\infty)\to\mathbb{R}]$

29.  

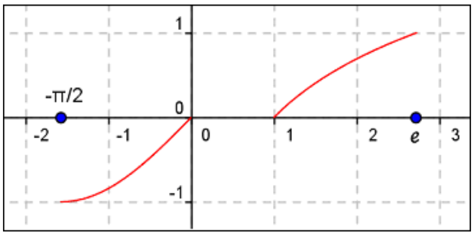
$[\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}\setminus\{1\}\ ;\ (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)\to\mathbb{R}_0^+]$

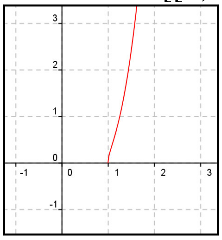
30. 

$[\mathbb{R} \to [-1; 1]]$

31.  

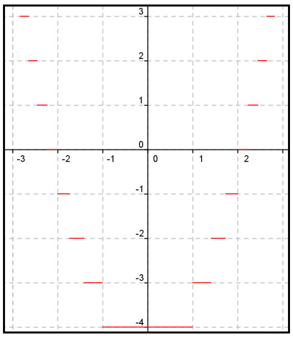
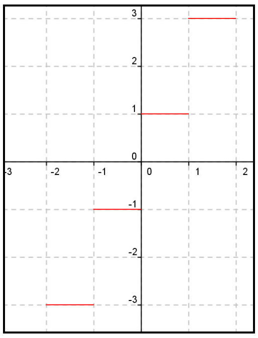
$[[1; 2] \to [1; 4]\ ;\ [-2; -1] \cup [1; 4]; [-4; -1] \cup [1; 4]]$

32. 

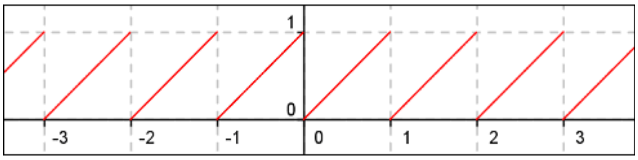
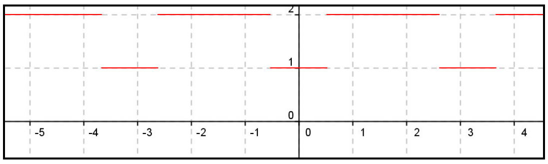


$\left[\left[-\frac{\pi}{2};0\right]\cup[1;e]\to[-1;1];[1;+\infty)\to[0;+\infty)\right]$

Livello 2

33.  

$\left[\mathbb{R}\to[-4;+\infty)\cap\mathbb{Z};\mathbb{R}\to\mathbb{Z}_d\right]$

34.  

$[\mathbb{R} \to [0;1]\ ;\ \ \mathbb{R} \to \{1; 2\}]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo trovare il codominio della funzione $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$. Questo equivale a stabilire per quali valori di x l'equazione $y=\frac{x^2+1}{x-1}$ ammette soluzioni reali. Si ha: $y \cdot (x - 1) = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 - xy + 1 + y = 0$, che è un'equazione di secondo grado in x e ha soluzioni reali solo quando il discriminante è non negativo, cioè se $\Delta = y^2 - 4 \cdot (1 + y) \geq 0 \Rightarrow y^2 - 4y - 4 \geq 0$. Il delta di questa disequazione è positivo, pertanto le soluzioni sono: $y \leq 2-\sqrt{8} \vee y \geq 2+\sqrt{8}$, che è perciò il codominio cercato.

Determinare il codominio delle seguenti funzioni

Livello 1

35. $f(x) = 3x - 1$; $f(x) = x^2 + 1$; $f(x) = -x^2 - 3$; $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ $[\mathbb{R}\ ;\ [1;+\infty)\ ;\ (-\infty;-3]\ ;\ \mathbb{R}\setminus\{1\}]$

36. $f(x) = (x^2 + 3)^2$; $f(x) = x^4 + 4x^2 + 5$; $f(x)=\frac{1}{x^2+5}$; $f(x) = e^{2x-1}$ $\left[[9;+\infty);[5;+\infty);\left(0;\frac{1}{5}\right];[0;+\infty)\right]$

37. $f(x) = sin(3x - 1)$; $f(x) = 3sin(4x)$; $f(x) = 2^{x+1}$; $f(x)=\sqrt{x+1}$ $[[-1;1]\ ;\ [-3;3]\ ;\ [0;+\infty)\ ;\ [0;+\infty)]$

38. $f(x) = csc(2x - 1)$; $f(x)=\sqrt{2x^2+5}$; $f(x) = 1 - cos(-x + 5)$; $f(x)=\frac{-1}{2x^2+3}$

$$\left[(-\infty;-1]\cup[1;+\infty);\left[\sqrt{5};+\infty\right);[-1;3];\left[-\frac{1}{3};0\right)\right]$$

Livello 2

39. $f(x)=\frac{1}{2+3\cdot sin(x)}$; $f(x)=\frac{-2}{1-4\cdot cos(2x)}$; $f(x)=x+\sqrt{x}$

$$\left[(-\infty;-1]\cup\left[\frac{1}{5};+\infty\right);\left(-\infty;-\frac{2}{5}\right]\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right);\mathbb{R}_0^+\right]$$

40. $f(x)=\sqrt{sin^2(4x+2)+1}$; $f(x)=\sqrt{1+2\cdot cos(x^2)}$; $f(x) = sin^{-1}(3x + 4)$ $\left[\left[1;\sqrt{2}\right];\left[0;\sqrt{3}\right];\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right]$

41. $f(x) = sin^{-1}(x^2)$; $f(x)=\frac{ln(x)}{1+ln(x)}$; $f(x)=\sqrt{sin^{-1}(x)}$; $f(x) = ln[cos^{-1}(2x - 1)]$

$$\left[\left[0;\frac{\pi}{2}\right];\mathbb{R}\setminus\{1\};\left[0;\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right];\left(0;ln\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right]$$

Livello 3

42. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-4}$; $f(x)=\frac{x^2-2}{1-x}$; $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ $\left[\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]\cup(1;+\infty);(-\infty;+\infty);\left[\frac{1}{2};+\infty\right)\right]$

43. $f(x)=\frac{x^2+1}{3-x^2}$; $f(x)=\frac{x^2+x+1}{1-x-x^2}$; $f(x)=\frac{x^4+1}{5-2x^4}$; $f(x)=\frac{x^2-x-1}{2-x^2}$

$$\left[(-\infty;-1)\cup\left(\frac{1}{3};+\infty\right);(-\infty;-1)\cup\left(\frac{3}{5};+\infty\right);\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left[-\frac{1}{5};+\infty\right);(-\infty;+\infty)\right]$$

Lavoriamo insieme

- Vogliamo trovare dei valori da assegnare al parametro reale m in modo che la funzione seguente $f(x)=\frac{x+\sqrt{x^2-m}}{mx+1}$, abbia come dominio $\mathbb{R}$. Deve essere $\begin{cases} x^2-m\ge 0 \\ mx+1\ne 0 \end{cases}$ e questo deve accadere per ogni valore reale di x. Per la disequazione basta che sia $m\le 0$, mentre la disuguaglianza è verificata per ogni x solo se $m = 0$. Pertanto la funzione ha dominio tutti i reali solo per $m = 0$ e in tal caso essa diviene: $f(x)=\frac{x+\sqrt{x^2}}{1}\Rightarrow f(x)=x+|x|$.
- Sempre con riferimento alla funzione data, vogliamo stabilire per quali m il dominio è di tipo $\mathbb{R}\setminus\{a\}$.

Escludendo il caso già trattato m = 0, deve essere $\begin{cases} x^2 - m \geq 0 \\ mx + 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \\ x \neq -\frac{1}{m} \end{cases} \vee \begin{cases} m > 0 \\ x \leq -\sqrt{m} \vee x \geq \sqrt{m} \\ x \neq -\frac{1}{m} \end{cases}$. Il primo caso si risolve immediatamente: $\begin{cases} m < 0 \\ x \neq -\frac{1}{m} \end{cases}$. Più laborioso è il secondo. Infatti dobbiamo distinguere due sottocasi: $\begin{cases} m > 0 \\ x \leq -\sqrt{m} \vee x \geq \sqrt{m} \\ x \neq -\frac{1}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ x \leq -\sqrt{m} \vee x \geq \sqrt{m} \\ x \neq -\frac{1}{m} \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < m < 1 \\ x \leq -\sqrt{m} \vee x \geq \sqrt{m} \\ x \neq -\frac{1}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ x \leq -\sqrt{m} \vee x \geq \sqrt{m} \end{cases}$ $\Rightarrow \vee \begin{cases} 0 < m < 1 \\ x \leq -\sqrt{m} \vee x \geq \sqrt{m} \wedge x \neq -\frac{1}{m} \end{cases}$. Quindi il problema ha soluzione solo se a è un numero reale positivo, ma non se a è un numero reale non positivo. Per esempio per a = 3, basterebbe prendere $m = -\frac{1}{3}$. Infatti il dominio della funzione $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}x + 1}$ è $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. Avremmo soluzioni anche se volessimo un dominio del tipo (–∞; –a] ∪ [a; +∞), con a ≥ 1, oppure del tipo $\left(-\infty; -\frac{1}{a^2}\right) \cup \left(-\frac{1}{a^2}; -a\right] \cup [a; +\infty)$, con 0 < a < 1. Per esempio per a = 4, prendiamo m = 16 e abbiamo $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2 - 16}}{16x + 1}$, di dominio [–4; 4]. Mentre per $a = \frac{2}{3}$, prendiamo $m = \frac{4}{9}$ e abbiamo $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2 - \frac{4}{9}}}{\frac{4}{9}x + 1}$, il cui dominio è $\left(-\infty; -\frac{9}{4}\right) \cup \left(-\frac{9}{4}; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Determinare i valori del parametro reale m, in modo che il dominio delle seguenti funzioni sia $\mathbb{R}$

Livello 2

44. $\dfrac{4x^2 - 3x}{7mx^2 - 3x + 1}$; $\sqrt[4]{mx^2 + x + m}$; $ln(mx^2 + 2)$; $\dfrac{3x^2 - 2x}{mx^2 - mx + 1}$; $log_{m+1}(mx^2 - 3x + 2)$; $\sqrt[6]{mx^2 - 1}$ $\left[m > \frac{9}{28}; m > \frac{1}{2}; m > 0; 0 < m < 4; m > \frac{9}{8}; \varnothing\right]$

Determinare i valori del parametro reale m, in modo che il dominio delle seguenti funzioni sia quello indicato accanto

Livello 3

45. $\dfrac{x^2 - 1}{3mx - 1}$, $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$; $\dfrac{1}{x^2 - mx + 2}$, $\mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$; $\dfrac{1}{6x^2 + mx - 3}$, $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}; \frac{1}{3}\right\}$ $\left[m = \frac{2}{3}; \varnothing; m = 7\right]$

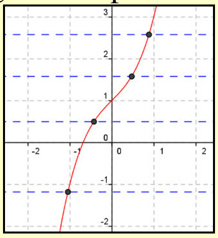
46. $\sqrt{4mx - 1}, \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$; $ln(3 - 4mx)$, (–∞; –1) ; $ln(3 - 4mx)$, (–1; +∞) $\left[m = \frac{3}{8}; \varnothing; m = -\frac{3}{4}\right]$

Iniettività e suriettività di una funzione. Funzioni invertibili

Abbiamo detto che una funzione è una legge che a ogni valore del dominio associa un solo valore del codominio. Vi sono però funzioni per cui vale anche il viceversa, cioè a ogni valore del codominio è associato un valore del dominio.

Esempio 20

Ogni retta non parallela all'asse delle ordinate verifica quanto detto. In generale ciò è vero per ogni funzione che, come quella in figura, , è tale che ogni retta parallela all'asse delle ordinate ne incontra il grafico al massimo in un punto.



Diamo un nome a questo tipo di funzioni

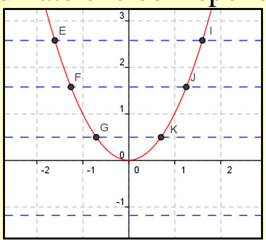
Definizione 12

Una funzione f, si dice **iniettiva** se ogni elemento di $cod(f)$ è corrispondente di un solo elemento di $dom(f)$.

Il dominio di una funzione serve a stabilire quali valori hanno corrispondente. Il codominio è l'immagine del dominio, cioè l'insieme dei corrispondenti. Se definiamo una funzione su un generico insieme, ovviamente non è detto che tale insieme corrisponda con il codominio.

Esempio 21

Se consideriamo la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, il suo codominio è l'insieme dei reali non negativi, non tutti i reali. In figura vediamo che ci sono ordinate che non hanno corrispondenti ascisse. Per inciso notiamo che la funzione non è iniettiva, essendoci ordinate che corrispondono alla stessa ascissa.



Anche in questo caso poniamo una definizione.

Definizione 13

Una funzione $f: A \to B$, si dice **suriettiva** se $cod(f) = B$.

Ovviamente vi sono anche funzioni che sono contemporaneamente iniettive e suriettive.

Definizione 14

Una funzione si dice **biiettiva** o anche una **corrispondenza biunivoca** se è sia iniettiva che suriettiva.

Che cosa significa

Iniettiva – Da iniettare, estensione del movimento della iniezione, mediante la quale operazione un fluido viene inserito in un determinato luogo.
Suriettiva – Anche detta su tutto, cioè la funzione agisce su tutto l'insieme di arrivo. Il suffisso *ettiva* viene

messo per "intonazione" con gli altri vocaboli.
Biiettiva – Nel senso di doppiamente (bis) iniettiva, quindi in un senso e nell'altro.

La particolarità di una funzione iniettiva consiste nel fatto che possiamo ricavare dall'ordinata la corrispondente ascissa, così come, in genere, da ogni ascissa ricaviamo l'eventuale ordinata. Possiamo cioè scambiare fra loro la variabile dipendente e quella indipendente.

Definizione 15

Data una funzione iniettiva *f*, diciamo sua funzione **inversa** la funzione la cui legge associa a tutti gli elementi di *cod*(*f*) gli elementi di *dom*(*f*) di cui essi sono corrispondenti.

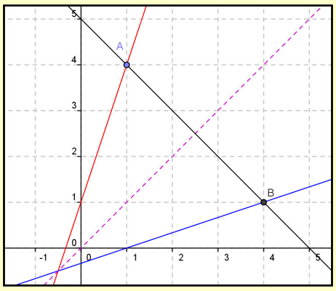
Notazione 3

L'inversa di una funzione f invertibile si indica con f^{-1}.

È evidente che nell'inversione di una funzione si scambiano dominio e codominio fra di loro.

Esempio 22

La funzione $f(x) = 3x + 1$, essendo una retta è ovviamente iniettiva e perciò invertibile. La sua inversa si ottiene ricavando x: $y = 3x + 1 \Rightarrow x = \dfrac{y-1}{3}$. In figura abbiamo le due rette, in rosso la f e in blu la f^{-1}.



Osserviamo altresì che l'inversa di una funzione iniettiva si può trovare anche come simmetrica della data funzione rispetto alla retta $y = x$, poiché tale simmetria serve appunto a scambiare fra loro ascisse e ordinate.

Dato che una funzione è iniettiva se ad ascisse diverse corrispondono ordinate diverse, vi sono certe funzioni, che definiamo di seguito, certamente iniettive.

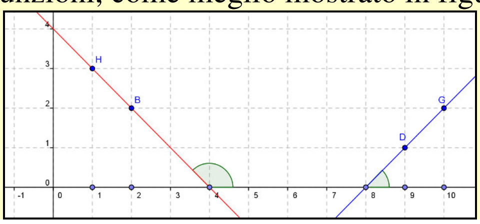
Definizione 16

Una funzione per la quale comunque si considerano $x_1, x_2 \in X \cap dom(f)$, si ha
- $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, si dice **crescente in $X \cap dom(f)$**.
- $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, si dice **decrescente in $X \cap dom(f)$**.

In generale le funzioni precedenti vanno sotto il nome di funzioni **strettamente monotòne**.

Esempio 23

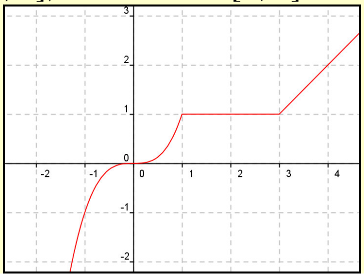
Ogni retta non parallela agli assi coordinati è una funzione crescente se il suo coefficiente angolare è un numero positivo, decrescente se è un numero negativo. Infatti nel primo caso l'angolo da essa formato con il semiasse positivo delle ascisse è acuto, nel secondo ottuso. E tali fatti implicano appunto la crescenza, rispettivamente decrescenza, delle funzioni, come meglio mostrato in figura.



Ci sono funzioni che pur non decrescendo, non sempre crescono.

Esempio 24

La funzione in figura è crescente in (–∞; 1], è costante in [1; 3] e di nuovo crescente in (3; +∞).



Distinguiamo le funzioni come la precedente dalle funzioni strettamente monotòne.

Definizione 17

Una funzione per la quale comunque si considerano $x_1, x_2 \in X \cap dom(f)$, si ha

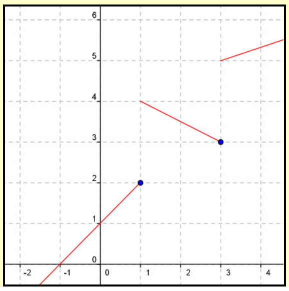
- $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, si dice **non decrescente in $X \cap dom(f)$**.
- $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, si dice **non crescente in $X \cap dom(f)$**.

In generale le funzioni precedenti vanno sotto il nome di funzioni **debolmente monotòne**.

Ovviamente ogni funzione strettamente monotòna è iniettiva, ma non è sempre vero il viceversa. Cioè la stretta monotonia è condizione sufficiente ma non necessaria per la iniettività.

Esempio 25

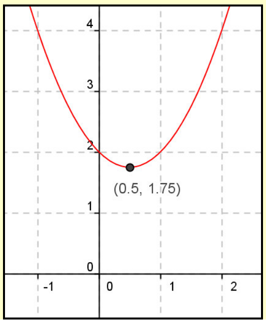
La funzione in figura non è strettamene monotòna nel suo dominio, eppure è iniettiva.



In generale un funzione "regolare" (dove con questo nome indichiamo una funzione rappresentabile, cioè non una funzione alla Dirichlet), se non è monotòna è comunque formata dall'unione di funzioni monotòne.

Esempio 26

La funzione in figura non è monotòna nel suo dominio, ma si può considerare formata unendo una funzione strettamente decrescente in $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ e una strettamente crescente in $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

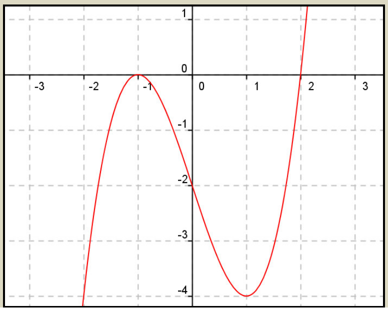


Negli esercizi forniremo esempi di funzioni formate dall'unione solo di funzioni crescenti o solo decrescenti, che però nel loro dominio non sono monotòne.

Verifiche

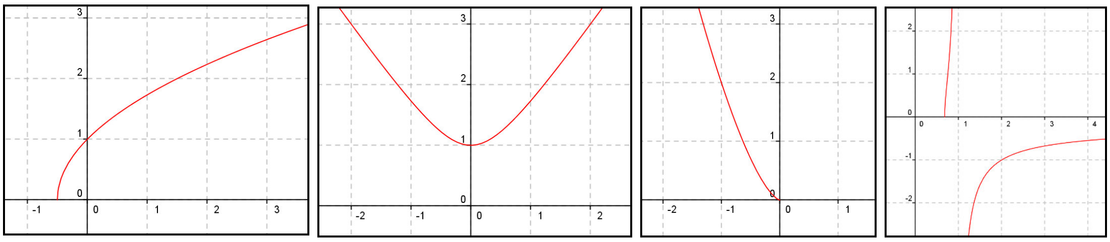
Lavoriamo insieme

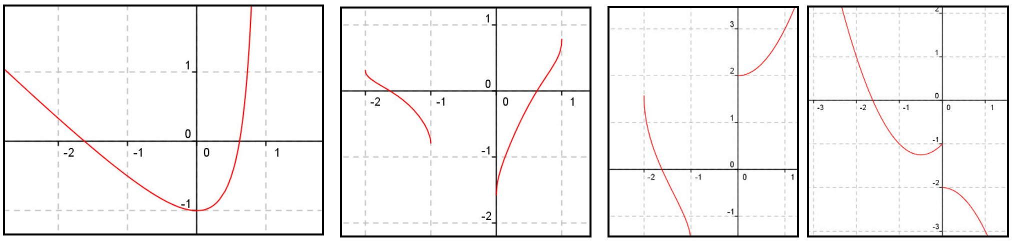
Considerando il grafico seguente, possiamo dire che la funzione non è iniettiva, poiché per esempio, l'equazione $f(x) = -2$ ha ben 3 soluzioni.



Tenuto conto del grafico, stabilire se le seguenti funzioni sono iniettive nel loro insieme di esistenza

Livello 1

1.  [Sì; No; Sì; Sì]

2.  [No ; No; Sì ; No]

Lavoriamo insieme

Data la funzione $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x+3}$, vogliamo stabilire se è iniettiva. Consideriamo due generiche ascisse e supponiamo che abbiano la stessa ordinata, se la funzione è iniettiva ciò non è possibile, ossia dobbiamo dimostrare che $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Nel nostro caso abbiamo $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{3x_1 - 1}{2x_1 + 3} = \dfrac{3x_2 - 1}{2x_2 + 3}$.

Ovviamente ciascuna delle ascisse scelte appartiene a $dom(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$. Si ha quindi: $(3x_1 - 1)(2x_2 + 3) = (3x_2 - 1)(2x_1 + 3) \Rightarrow 6x_1x_2 + 9x_1 - 2x_2 - 3 = 6x_1x_2 + 9x_2 - 2x_1 - 3 \Rightarrow 9x_1 + 2x_1 = 9x_2 + 2x_2 \Rightarrow 11x_1 = 11x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$; quindi se le ordinate sono uguali anche le ascisse lo sono, pertanto la funzione è iniettiva.

Stabilire se le seguenti funzioni sono iniettive nel loro insieme di esistenza

Livello 2

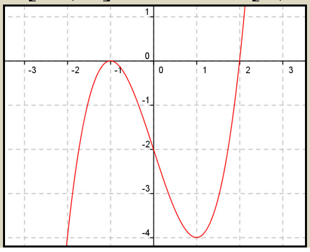
3. $f(x) = \dfrac{24x+5}{17x-9}$; $f(x) = 5x - 1$; $f(x) = x^2 - 1$; $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$; $f(x) = e^{2x-1}$ [Sì ; Sì ; No ; No ; Sì]

4. $f(x) = \dfrac{4x-1}{11x+3}$; $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$; $f(x) = x^3$; $f(x) = 2x^2 - x + 1$; $f(x) = sin^{-1}(x + 3)$ [Sì ; No ; Sì ; No ; Sì]

5. $f(x) = \sqrt{x^3+1}$; $f(x) = |x|$; $f(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$; $f(x) = \dfrac{|x+1|}{x-1}$; $f(x) = ln(x^2 + 2)$; [Sì ; No ; No ; No; No]

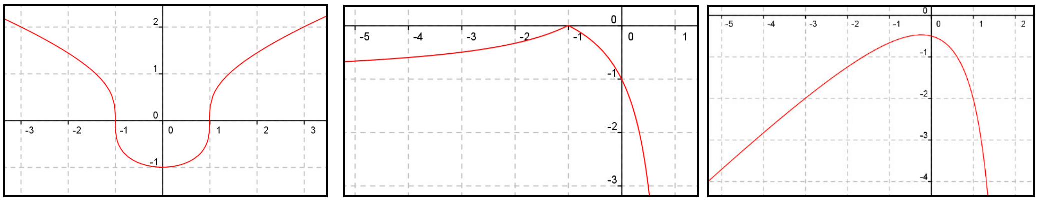
Lavoriamo insieme

Riprendiamo in considerazione il grafico che avevamo già visto non rappresentare una funzione iniettiva. osserviamo però che possiamo considerare infinite restrizioni della funzione che risultano iniettive, per esempio se restringiamo a (–∞;–1] oppure a [–1; 1] o anche a [1; +∞) e ad altri infiniti domini.

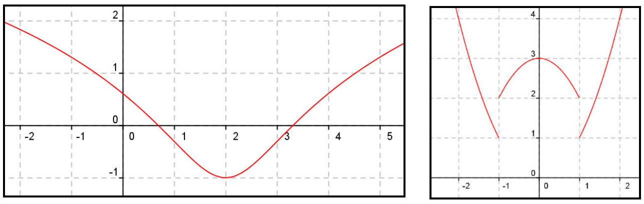


Determinare una restrizione delle seguenti funzioni affinché esse risultino iniettive, ovviamente le risposte possono essere infinite, noi proponiamo quelle più “ampie”

Livello 2

6. 

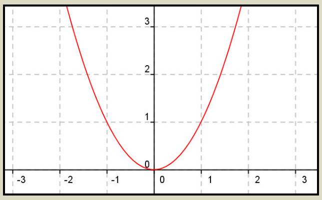
$\left[\mathbb{R}_0^+ \vee \mathbb{R}_0^-;(-\infty;-1]\vee[-1;+\infty);\mathbb{R}_0^+ \vee \mathbb{R}_0^-\right]$

7. 

[(–∞; 2] ∨ [2; +∞) ; (–∞; –1] ∨ [–1; 0] ∨ [0; 1] ∨ [–1;+∞)]

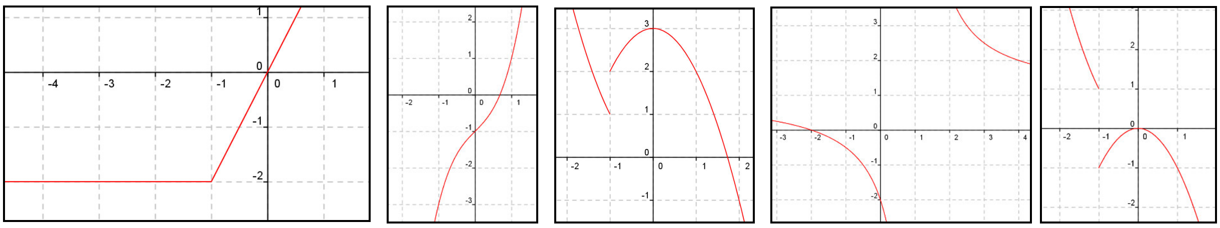
Lavoriamo insieme

La funzione $f(x) = x^2$ non è iniettiva, poiché per esempio $f(1) = f(-1)$. Vogliamo stabilire se è suriettiva su tutti i reali, ossia se l’equazione $y = x^2$ ammette soluzioni nell’incognita x per qualsiasi scelta di y nell’insieme dei numeri reali. Ovviamente ciò non succede, perché se scegliamo $y < 0$, non esiste alcun x il cui quadrato possa essere uguale a y. Confermiamo il tutto con il grafico, che è quello ben noto di una parabola.



Stabilire se le seguenti funzioni sono suriettive su tutti i reali

Livello 1

8. 

[No ; Sì ; Sì ; No ; No]

Livello 2

9. $f(x)=\dfrac{x+5}{x-1}$; $f(x) = 2 - 3x$; $f(x) = -x^2 - 1$; $f(x)=\sqrt{x^2-1}$; $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+3}$ [no; sì ; no; no ; no]

10. $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{3x-2}$; $f(x) = x^3 + x - 1$; $f(x) = x^2 - 5x + 6$; $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$; $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ [no ; sì ; no; no ; no]

11. $f(x) = |x| - |2x + 1|$; $f(x) = (x^3 + 1)^2$; $f(x) = ln(3x +1)$; $f(x)=e^{x^2-1}$; $f(x) = tan(4x - 1)$ [no; sì; sì ; no ; sì]

Lavoriamo insieme

Abbiamo già visto che la funzione $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x+3}$ è iniettiva, pertanto è invertibile, vogliamo determinare la sua funzione inversa. Basta risolvere l'equazione $y=\dfrac{3x-1}{2x+3}$ nell'incognita $x \Rightarrow y \cdot (2x + 3) = 3x - 1 \Rightarrow (2y - 3) \cdot x = - 1 - 3y \Rightarrow x=\dfrac{1+3y}{3-2y}$. Abbiamo perciò: $dom(f)=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}, cod(f)=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$. Quindi $dom\left(f^{-1}\right)=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3}{2}\right\}, cod\left(f^{-1}\right)=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$.

Dopo avere verificato che le seguenti funzioni sono iniettive, determinarne le funzioni inverse nel loro insieme di esistenza

Livello 2

12. $f(x)=\dfrac{7x+2}{15x-1}$; $g(x)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{4}{3}$; $h(x)=log_3\left(\sqrt{x}\right)$ $\left[f^{-1}(x)=\dfrac{x+2}{15x-7}; g^{-1}(x)=2x+\dfrac{8}{3}; h^{-1}(x)=3^{2x}\right]$

13. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$; $g(x)=\sqrt{x-1}$; $h(x)=e^{\frac{x+1}{x-1}}$; $p(x)=\dfrac{8x+4}{-7x+1}$

$\left[f^{-1}(x)=\dfrac{x^2+1}{1-x^2}, x>0; g^{-1}(x)=x^2+1, x>0; h^{-1}(x)=\dfrac{ln(x)+1}{ln(x)-1}; p^{-1}(x)=\dfrac{x-4}{7x+8}\right]$

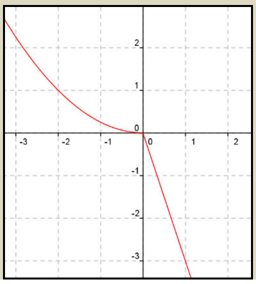
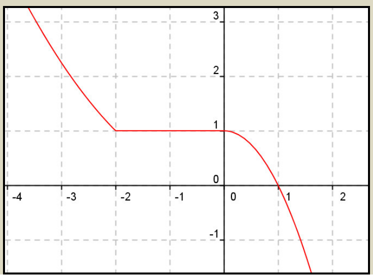
14. $f(x) = x^3 + 1$; $g f(x) = e^{1-x}$; $h(x) = ln(x + 1)$ $\left[f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}; g^{-1}(x)=1-ln(x); h^{-1}(x)=e^x-1\right]$

Livello 3

15. La somma di due funzioni iniettive è una funzione iniettiva? Giustificare la risposta. [No]
16. Una funzione lineare del tipo $y=ax+b, a\neq 0$ è iniettiva. La somma di due funzioni lineari è sempre iniettiva? Giustificare la risposta. [No]

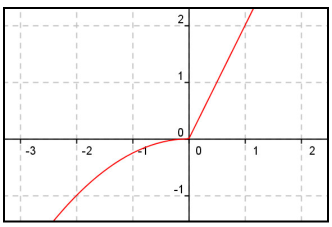
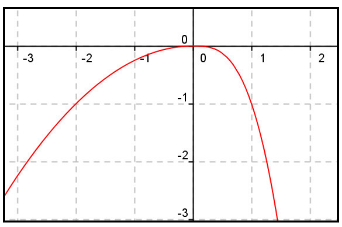
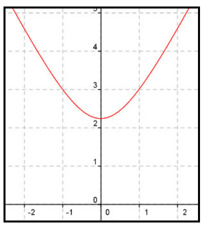
Lavoriamo insieme

La funzione rappresentata nel primo grafico è strettamente decrescente; invece la seconda è non crescente, perché in [–2; 0] è costante.

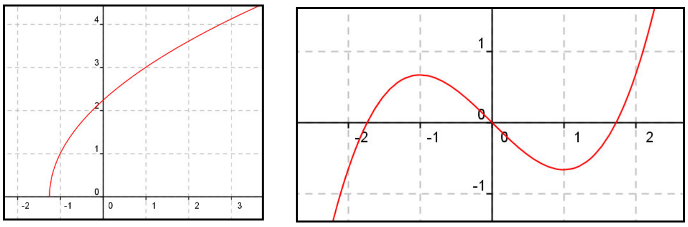



Tenuto conto del grafico determinare in quali intervalli sono crescenti, costanti o decrescenti

Livello 1

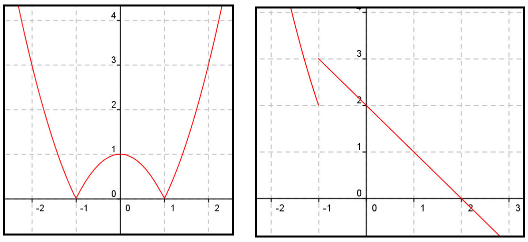
17.   

[(Str. Cr.) ; (Cr. : $x \le 0$, Decr. : $x > 0$) ; (Decr.: $x \le 0$, Cr.: $x > 0$)]

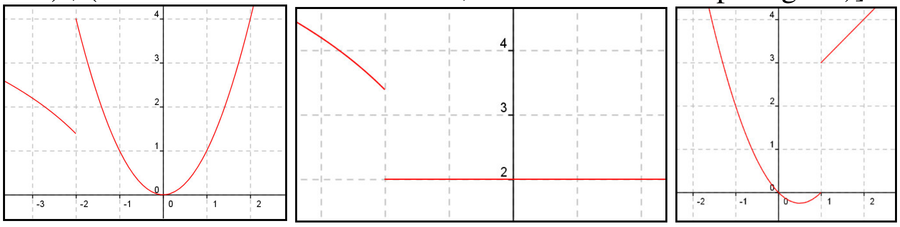
18. 

[(Str. Cr.) ; (Decrescente: $-1 \le x \le 1$, Crescente: $x < -1 \vee x > 1$)]

Livello 2

19. 

[(Decrescente: $x \le -1 \vee 0 \le x \le 1$, Crescente: $-1 < x < 0 \vee x > 1$) ; (Decrescente: $x \le -1$ e $x > -1$, ma non monotona per ogni x)]

20. 

[(Decrescente: $x \le -2 \vee -2 < x < 0$, Crescente: $x \ge 0$) ; Non Cr. ; Cr.: $x \ge \frac{1}{2}$, Decr.: $x < \frac{1}{2}$]

Lavoriamo insieme

- Come facciamo a stabilire se la funzione $f(x) = x^3$ è crescente nel suo dominio? Dobbiamo dimostrare che $x_1 > x_2 \Rightarrow x_1^3 > x_2^3$. Ma ciò è ovvio perché innalzando a una potenza dispari non variamo il segno, pertanto se moltiplichiamo fra loro numeri più piccoli otteniamo più piccoli.
- Ciò non vale invece per $f(x) = x^2$, infatti non è detto che $x_1 > x_2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2$, dato che innalzando a una potenza pari si ottengono sempre numeri positivi. Pertanto l'implicazione è vera se le ascisse sono positive, per esempio $3 > 2 \Rightarrow 9 > 4$; non sempre è vero invece se una almeno delle ascisse è negativa. Per esempio da $2 > -3$ segue la scritta falsa $4 > 9$.

Verificare se le seguenti funzioni sono monotòne nel loro dominio

Livello 2

21. $f(x) = 4x + 1$; $f(x) = 2 - 3x$; $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$; $f(x) = \frac{1}{x}, x < 0$ [Cr. ; Decr. ; Decr. ; Decr.]

22. $f(x) = \sqrt{x}$; $f(x) = \sqrt[3]{-x}$; $f(x) = |4x + 1|$; $f(x) = |2x| - |3x|$ [Cr. ; Decr. ; No mon. ; No mon.]

23. $f(x) = 2^{x+1}$; $f(x) = 3^{2-x}$; $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor$; $f(x) = \lceil x \rceil + \lfloor x \rfloor$ [Cr. ; Decr. ; No mon. ; Cr.]

Livello 3

24. $f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 1 \\ 3x+2 & x \ge 1 \end{cases}$; $f(x) = \begin{cases} 3-x & x < 2 \\ 2-3x & x > 3 \end{cases}$; $f(x) = \begin{cases} -3x+1 & x < 0 \\ x-2 & x \ge 0 \end{cases}$; $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x+1 & x \ge 0 \end{cases}$; $f(x) = \begin{cases} 2^x & x < 0 \\ 2 & 0 \le x \le 1 \\ 3^x & x > 1 \end{cases}$

[Crescente. ; Decrescente ; Non monotona ; Non monotona ; Non monotona]

25. $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x < 0 \\ x+2 & x \ge 0 \end{cases}$; $f(x) = \begin{cases} ln(x) & x < 1 \\ 2-3x & x \ge 1 \end{cases}$; $f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ ln(x)+1 & x \ge 1 \end{cases}$; $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & x < 2 \\ 3^{-x} & x \ge 2 \end{cases}$; $f(x) = \begin{cases} 3^{-x} & x < 0 \\ -2 & 0 \le x \le 1 \\ 2^{-x} & x > 1 \end{cases}$

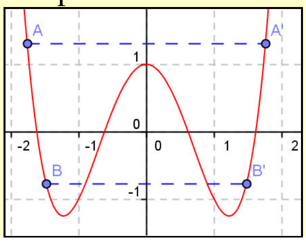
[Crescente ; Non monotona; Crescente ; Non monotona ; Non Decrescente]

Particolari simmetrie delle funzioni

Alcune funzioni hanno delle proprietà che rendono più semplice anche la loro rappresentazione grafica.

Esempio 27

La funzione $y = x^4 - 3x^2 + 1$, contenendo solo potenze pari della variabile indipendente, ovviamente non può essere iniettiva, poiché assegnando a tale variabile valori opposti, come per esempio 1 e –1, si ottengono sempre le stesse ordinate. Ciò significa che se tracciamo la funzione per $x > 0$ sappiamo anche tracciarla per $x < 0$, basta effettuare la simmetria rispetto all'asse delle ordinate. In figura vediamo la funzione tracciata con un software. Abbiamo anche tracciato due punti e i loro simmetrici rispetto all'asse delle ascisse.



Diamo un nome a funzioni come quella mostrata nell'esempio.

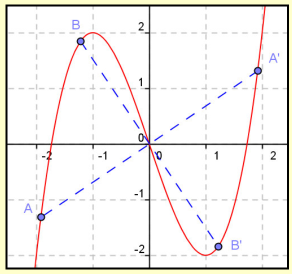
Definizione 18

Una funzione per la quale si ha $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in dom(f)$, si chiama **funzione pari**.

Una funzione pari è una funzione simmetrica rispetto all'asse delle ordinate, si preferisce chiamarla in tal modo poiché tutte le funzioni algebriche la cui espressione contiene solo potenze pari della x, godono di tale proprietà. Consideriamo adesso un altro tipo di simmetria.

Esempio 28

La funzione $y = x^3 - 3x$, contenendo solo potenze dispari della variabile indipendente, verifica una proprietà simile alle funzioni pari, infatti se assegniamo alla x due valori opposti, stavolta otterremo ordinate opposte. Ciò significa che se tracciamo la funzione per $x > 0$ sappiamo anche tracciarla per $x < 0$, basta effettuare la simmetria rispetto all'origine. In figura vediamo la funzione tracciata con un software. Abbiamo anche tracciato due punti e i loro simmetrici rispetto all'origine.



Diamo un nome anche alle precedenti funzioni.

Definizione 19

Una funzione per la quale si ha $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in dom(f)$, si chiama **funzione dispari**.

Una funzione pari è una funzione simmetrica rispetto all'origine, anche in questo caso usiamo l'aggettivo dispari poiché tutte le funzioni algebriche la cui espressione contiene solo potenze dispari della x, godono di tale proprietà. Si stia attenti che le funzioni dispari non devono contenere il termine noto, poiché esso altri non è che il coefficiente di x^0 e 0 non è un numero dispari.
Ovviamente la simmetria pari o dispari ha senso solo per domini essi stessi simmetrici.

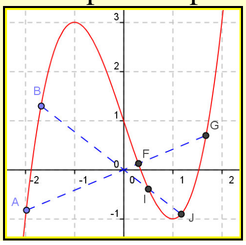
Esempio 29

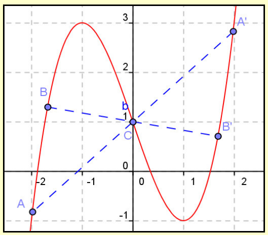
Una funzione per cui si ha *dom*(*f*) = [–2; 3] ovviamente non può essere né pari e né dispari, dato che esiste $f(x)$ in (2; 3], ma non esiste $f(x)$ in [–3; –2), pertanto non ha senso calcolare $f(-x)$ per $2 < x \le 3$.

Consideriamo un altro tipo di simmetria.

Esempio 30

Nella prima figura abbiamo la funzione $y = x^3 - 3x + 1$ e notiamo che non ha una simmetria rispetto all'origine. però ha una simmetria rispetto al punto (1; 0).





Tenuto conto dell'esempio precedente vogliamo capire come si può stabilire l'eventuale simmetria di una funzione rispetto a un punto. Ricordiamo le leggi della simmetria rispetto a un centro $C \equiv (a;\ b)$: $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$, quindi la simmetrica di $y = f(x)$ rispetto a C, è $2b - y = f(2a - x) \Rightarrow y = 2b - f(2a - x)$.

Pertanto possiamo enunciare il seguente risultato.

Teorema 3

La funzione $y = f(x)$ è simmetrica rispetto a $C \equiv (a;\ b)$ se e solo se: $f(x) + f(2a - x) = 2b$.

Ovviamente la simmetria precedente ha senso solo se $dom(f) = \mathbb{R}$, oppure a è centro di simmetria di *dom*(*f*), anche se $a \notin dom(f)$.

Esempio 31

- Una funzione per la quale si ha: *dom*(*f*) = [1; 3) non può avere alcuna simmetria centrale, poiché $\exists\, f(1)$ e $\nexists\, f(3)$.
- Una funzione per la quale si ha: *dom*(*f*) = [1; 3] può avere simmetria centrale solo rispetto a $C \equiv (2; f(2))$.
- Una funzione per la quale si ha: $dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ può avere simmetria centrale solo rispetto a un punto dell'asse y, anche se non è definita per $x = 0$.
- Adesso verifichiamo il precedente teorema sulla funzione dell'esempio 3, che abbiamo visto essere simmetrica rispetto a $C \equiv (0;\ 1)$. E in effetti si ha: $x^3 - 3x + 1 + [(-x)^3 - 3(-x) + 1] = 2$. Se non avessimo saputo che la funzione era simmetrica rispetto a C, come avremmo potuto stabilirlo? Applicando la legge a un generico punto $C \equiv (a;\ b)$. $x^3 - 3x + 1 + [(2a - x)^3 - 3(2a - x) + 1] = 2b \Rightarrow x^3 - 3x + 1 + 8a^3 - x^3 - 12a^2x + 6ax^2 - 6a + 3x + 1 = 2b \Rightarrow -12a^2x + 6ax^2 + 8a^3 - 6a + 2 = 2b$. Poiché a sinistra abbiamo un polinomio e a destra un numero, vuol dire che i coefficienti del polinomio di grado superiore a 0, devono essere tutti nulli, cioè deve essere $a = 0$, quindi rimane solamente $2 = 2b$, da cui $b = 1$. Abbiamo così determinato il centro della simmetria.

Il precedente teorema ci suggerisce di trovare anche la proprietà che verificano le funzioni simmetriche rispetto a rette parallele all'asse delle ordinate.

Teorema 4

La funzione $y = f(x)$ è simmetrica rispetto alla retta $x = a$, se e solo se: $f(x) = f(2a - x)$.

Dimostrazione

Le leggi della simmetria rispetto alla retta $x = a$ sono $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}$, quindi vuol dire che la simmetrica della funzione $y = f(x)$ rispetto alla retta $y = a$, ha equazione $y = f(2a - x)$.

Anche in questo caso la simmetria precedente ha senso solo se $dom(f) = \mathbb{R}$, oppure a è centro di simmetria di $dom(f)$, anche se $a \notin dom(f)$.

Esempio 32

- Una funzione per la quale si ha: $dom(f) = [-5; 7]$ può avere simmetria di asse parallelo all'asse y, solo rispetto alla retta $x = 1$ $\left(x=\frac{7+(-5)}{2}\right)$.
- La funzione $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$, pur non essendo definita per $x = 1$, è simmetrica rispetto a $x = 1$, infatti si ha: $f(2-x)=\frac{1}{(2-x-1)^2}=\frac{1}{(-x+1)^2}=f(x)$.
- Vediamo se la funzione $f(x) = x^2 - 4x + 4$, ha simmetrie rispetto a rette di equazione $x = a$. Deve essere $f(2a - x) = (2a - x)^2 - 4 \cdot (2a - x) + 4 = 4a^2 - 4ax + x^2 - 8a + 4x + 4 = x^2 - 4 \cdot (a - 1) \cdot x + 4a^2 - 8a + 4$; deve perciò aversi $f(x) = f(2a - x) \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = x^2 - 4 \cdot (a - 1) \cdot x + 4a^2 - 8a + 4$. Uguagliando i coefficienti delle incognite di uguale grado si ha: $\begin{cases}1=a-1\\4a^2-8a=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\a=0\vee a=2\end{cases}\Rightarrow a=2$, quindi la data funzione è simmetrica rispetto alla retta di equazione $x = 2$.

Un'altra interessante simmetria si ha rispetto alla prima o alla seconda bisettrice ed ha ovviamente senso solo per funzioni invertibili e definite in intervalli simmetrici.

Teorema 5

La funzione invertibile $y = f(x)$ è simmetrica rispetto alla retta $x = y$, se e solo se: $f(x) = f^{-1}(x)$, $\forall\, x \in dom(f)$.

Dimostrazione

Le leggi della simmetria rispetto alla retta $x = y$ sono $\begin{cases}x'=y\\y'=x\end{cases}$, quindi vuol dire che la simmetrica della funzione $y = f(x)$ rispetto alla retta $x = y$, ha equazione $x = f(y) \Rightarrow y = f^{-1}(x)$.

Teorema 6

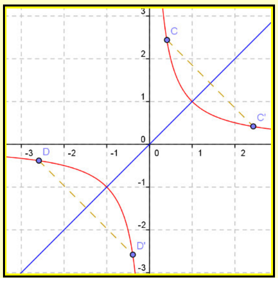
La funzione invertibile $y = f(x)$ è simmetrica rispetto a $x = -y$, se e solo se: $f(x) = -f^{-1}(x)$, $\forall\, x \in dom(f)$.

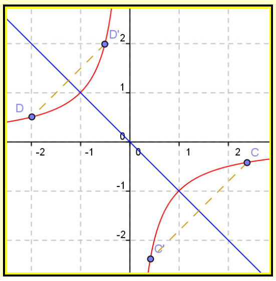
Dimostrazione

Le leggi della simmetria rispetto alla retta $x = y$ sono $\begin{cases}x'=-y\\y'=-x\end{cases}$, quindi vuol dire che la simmetrica della funzione $y = f(x)$ rispetto a $x = y$, ha equazione $-x = f(-y) \Rightarrow -y = f^{-1}(-x) \Rightarrow y = -f^{-1}(-x)$.

Esempio 33

La funzione $y=\frac{1}{x}$ è ovviamente invertibile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ed è inversa di se stessa, quindi è simmetrica rispetto alla prima bisettrice, come mostrato nella prima figura. Ma è simmetrica anche rispetto alla seconda bisettrice, poiché si ha: : $f(x) + f^{-1}(x) = \frac{1}{x}-\frac{1}{x} = 0$, si veda la seconda figura .

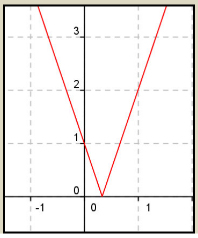




Verifiche

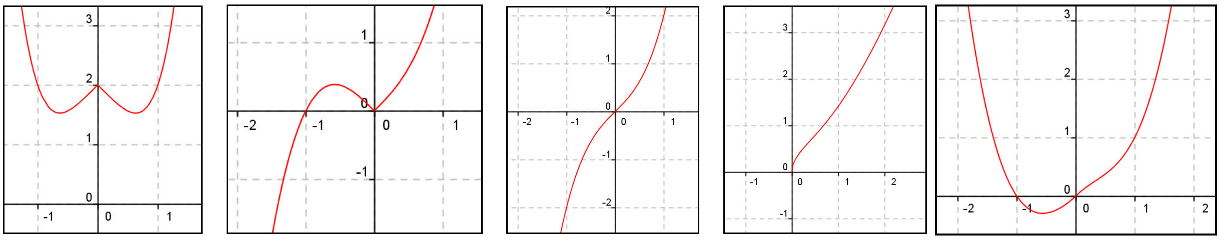
Lavoriamo insieme

Il seguente grafico non rappresenta né una funzione pari, né una dispari, poiché non si notano simmetrie né rispetto all'asse y, né rispetto all'origine.

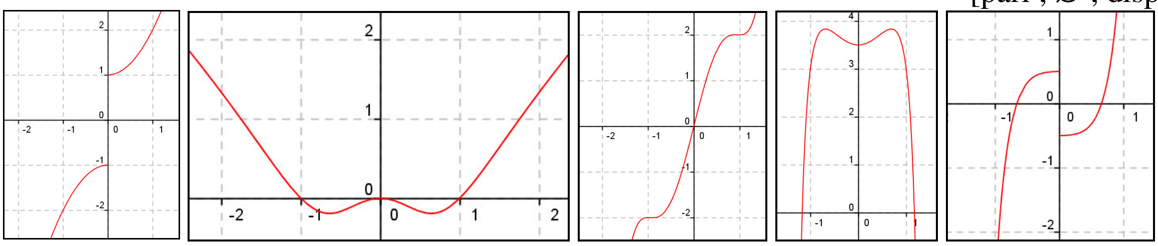


Tenuto conto dei grafici, determinare se essi rappresentano funzioni pari o dispari, ∅ indica che le funzione non è né pari e né dispari

Livello **1**

1. 

[pari ; ∅ ; dispari ; ∅ ; ∅ ;]

2. 

[dispari ; pari ; dispari ; pari ; dispari]

Lavoriamo insieme

Stabilire se la funzione $f(x)=\dfrac{x^4-3x^2}{|x+1|}$ è pari o dispari. Il dominio è simmetrico: $x \neq -1$, quindi può esserci simmetria. Si ha $f(-x)=\dfrac{(-x)^4-3(-x)^2}{|(-x)+1|}=\dfrac{x^4-3x^2}{|-x+1|}\neq \pm f(x)$, la funzione non è né pari e né dispari.

Determinare se le seguenti funzioni sono pari o dispari, la risposta vuota significa né pari, né dispari

Livello **1**

3. $f(x) = 3x^2 + |x + 2|$; $f(x)=\sqrt{2x^4-x^2+1}$; $f(x) = |3x^2 - 1| + |x^2 - 1|$ [∅ ; pari ; ∅]

4. $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x}$; $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x^4-3}$; $f(x)=\dfrac{x^3+x}{2}$ [dispari ; pari ; dispari]

5. $f(x) = sin(2x + 1)$; $f(x) = ln(x^2 + 1)$; $f(x) = |cos(3|x - 2)|$ [∅ ; pari ; ∅]

Livello **2**

6. $f(x)=e^{x^2-x+1}$; $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{3x^4-x^2-2}$; $f(x) = |3x - 1| - |3x + 1|$ [∅ ; pari ; dispari]

7. $f(x) = sin(x^2)$; $f(x) = sin^{-1}(x^3)$; $f(x) = sin^{-1}(x^2)$ [pari ; dispari ; pari]

Livello 3

8. $f(x)=\dfrac{|x^3+1|-|x+1|}{x}$; $f(x) = |ax - b| - |ax + b|$; $f(x) = |ax - b| + |ax + b|$ [∅ ; dispari ; pari]

Lavoriamo insieme

Vogliamo stabilire se esistono h e k per i quali la funzione $f(x)=(5k-2)\cdot\dfrac{\sqrt[5]{x^2}}{x}+(3h-1)\cdot x^4-x^3$ risulta dispari. Deve aversi

$$f(x)+f(-x)=0\Rightarrow(5k-2)\cdot\frac{\sqrt[5]{x^2}}{x}+(3h-1)\cdot x^4-x^3+(5k-2)\cdot\frac{\sqrt[5]{(-x)^2}}{-x}+(3h-1)\cdot(-x)^4$$

$$-(-x)^3=0\Rightarrow\cancel{(5k-2)\cdot\frac{\sqrt[5]{x^2}}{x}}+(3h-1)\cdot x^4-\cancel{x^3}-\cancel{(5k-2)\cdot\frac{\sqrt[5]{x^2}}{x}}+(3h-1)\cdot x^4+\cancel{x^3}=0\Rightarrow 2\cdot(3h-1)\cdot x^4=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow 3h-1=0\Rightarrow h=\dfrac{1}{3}$. Quindi la funzione è dispari per qualsiasi k e per $h=\dfrac{1}{3}$, ed è $f(x)=(5k-2)\cdot\dfrac{\sqrt[5]{x^2}}{x}-x^3$.

Determinare, se esistono, i valori reali da assegnare ai parametri affinché le date funzioni abbiano la simmetria richiesta

Livello 2

9. $f(x) = 3ax^3 - 2x + a - 1$, dispari ; $f(x) = (2a + 1)x^3 - 2x^2 + 3$, pari ; $f(x)=\dfrac{e^{ax}+1}{e^{2x}-1}$, pari

$\left[a=1;a=-\dfrac{1}{2};\varnothing\right]$

10. $f(x) = (a - 1)x^4 + x^3 - x + 2$, dispari ; $f(x) = (a - 1)x^4 + x^3 - x + 2$, pari [∅ ; ∅]

11. $f(x) = 2x^5 - |2a + 1| \cdot x^2 + 1$, pari ; $f(x) = |4a - 1|x^3 - x^2 + |x| - 1$, pari ; $f(x)=\dfrac{e^{ax}+1}{e^{x^2}-1}$, pari

$\left[\varnothing;a=\dfrac{1}{4};a=0\right]$

Livello 3

12. $f(x) = (a^2 - 1) \cdot x^6 - x^3 + x - b + 2$, dispari ; $f(x) = (2a + b) \cdot x^3 - x^2 + (a - b) \cdot x + 1$, pari

[$(a = \pm1, b = 2)$; $(a = b = 0)$]

13. $f(x)=3x^4-(2h-1)\cdot x^3+(k-2)\cdot\dfrac{\sqrt[5]{x^3}}{x}$, dispari ; $f(x)=3x^4-(2h-1)\cdot x^3+(k-2)\cdot\dfrac{\sqrt[5]{x^3}}{x}$, pari

∅ $\left[h=\dfrac{1}{2},\forall k\in\mathbb{R}\right]$

14. $f(x)=\dfrac{(k-2)\cdot x}{x^2+1}+2h-cos\left[(h+k)x\right]$, pari [$k = 2$, $\forall h\in \mathbb{R}$]

15. $f(x)=\dfrac{(a-b)x^4+(2a-b)\cdot x^3-a}{(a+b)\cdot x-2b+1}$, dispari ; $f(x)=\dfrac{(a-b)x^4+(2a-b)\cdot x^3-a}{(a+b)\cdot x-2b+1}$, pari [∅ ; $b = 2a$]

16. Spiegare perché una funzione definita in [–2; 3] non può essere né pari, né dispari.
[Perché per esempio $f(3)$ esiste e $f(-3)$ no]

17. Spiegare perché una funzione il cui codominio è [0; +∞) oppure (–∞; 0] non può essere dispari.
[Perché sia $f(x)$ che $f(-x)$, se esistono, sono sempre dello stesso segno]

18. Una funzione non definita solo per $x = 0$ può essere pari o dispari? Giustificare la risposta. [Sì]

19. Una funzione non definita solo per $x = 1$ può essere pari o dispari? Giustificare la risposta. [No]

20. Una funzione non definita solo per $x = \pm 1$ può essere pari o dispari? Giustificare la risposta. [Sì]

Livello 3

21. Dimostrare che la somma algebrica di due funzioni pari è una funzione pari.
22. Dimostrare che la somma algebrica di due funzioni dispari è una funzione dispari.
23. Se una funzione è dispari, il suo valore assoluto che tipo di funzione è? [Pari]
24. Affinché una funzione sia pari, la condizione che il suo dominio sia formato solo da numeri positivi, è necessaria o sufficiente? [Nessuna delle due]
25. Una funzione il cui codominio è formato solo da numeri positivi può essere dispari? [No]
26. Dimostrare che il prodotto di due funzioni pari è una funzione pari.
27. Dimostrare che il prodotto di due funzioni dispari è una funzione pari.
28. Dimostrare che il prodotto di una funzione pari e una funzione dispari è una funzione dispari.
29. La potenza ennesima di una funzione pari che tipo di funzione è? E quella di una funzione dispari? [Pari; pari per n pari e dispari per n dispari]
30. Fornire un esempio che dimostri che la seguente affermazione non è corretta: *Una funzione si dice pari se la sua espressione analitica è formata solo da monomi di grado pari.*
31. Una funzione razionale contenente monomi di grado pari e grado dispari può essere dispari? Giustificare la risposta. $\left[\text{Sì,p.e.}\dfrac{x^2+1}{x}\right]$

Lavoriamo insieme

La funzione $f(x) = x^4 - 12x^3 + 52x^2 - 96x + 61$, non è simmetrica né rispetto all'asse delle y, né rispetto all'origine. Non è simmetrica nemmeno rispetto a una delle bisettrici, perché ovviamente non è invertibile.

- Vediamo se è simmetrica rispetto il generico centro $C \equiv (a;\ b)$. Risolviamo $f(x) + f(2a - x) = 2b$, nelle incognite a e b: $x^4 - 12x^3 + 52x^2 - 96x + 61 + (2a - x)^4 - 12(2a - x)^3 + 52(2a - x)^2 - 96(2a - x) + 61 = 2b$. Non effettuiamo tutti i calcoli, perché ci rendiamo conto immediatamente che si ottiene un polinomio di quarto grado, il cui coefficiente di grado 4 non dipende dai parametri, è $2x^4$, pertanto non può mai annullarsi. Quindi concludiamo che non vi sono simmetrie rispetto a nessun punto.
- Vediamo invece se vi sono simmetrie rispetto a una retta parallela all'asse delle y. Stavolta deve essere $f(x) = f(2a - x) \Rightarrow x^4 - 12x^3 + 52x^2 - 96x + 61 = (2a - x)^4 - 12(2a - x)^3 + 52(2a - x)^2 - 96(2a - x) + 61$. Non riportiamo tutti i calcoli, ma solo la semplificazione finale: $8(a - 3)x^3 + 24a(3 - a)x^2 + 16(2a^3 - 9a^2 + 13a - 12)x - 16a^4 + 96a^3 - 208a^2 + 192°$; in effetti anche questa volta non è necessario effettuare i calcoli, basta determinare il coefficiente del termine di terzo grado, vedere quando si annulla (in questo caso per $a = 3$) e poi verificare se tale valore annulla tutta l'espressione. In questo caso accade, pertanto possiamo dire che la data funzione è simmetrica rispetto alla retta $x = 3$.

Stabilire se le seguenti funzioni sono simmetriche rispetto a un centro generico o a una generica retta parallela all'asse y o a una delle due bisettrici dei quadranti. Giustificare la risposta. Nelle risposte è dato il centro o l'equazione dell'asse di simmetria

Livello 2

32. $f(x) = x^3 + 7x^2 + 15x + 10$; $f(x)=\dfrac{2x^2-4x+1}{x^2-2x+1}$; $f(x)=\dfrac{x^2-5x+8}{x-2}$ [(–3;1) ; $x = 1$; (2; –1)]
33. $f(x)=\dfrac{7x^2-28x+31}{2x^2-8x+9}$; $f(x) = ln(4x^2 + 24x + 37) - 2$; $f(x)=\dfrac{4x^2+9x+7}{2x^2+4x+3}$ [$x = 2$; $x = -3$; (–1; 2)]
34. $f(x)=\dfrac{1}{2x}$; $f(x)=\dfrac{1}{x^2-8x+17}$; $f(x)=e^{x^2+4x+3}$ [(0 ; 0), $x = \pm y$; $x = 4$; $x = -2$]

Composizione di due o più funzioni

Concludiamo il discorso sulle funzioni considerando una particolare operazione definita su di esse.

Problema

Se abbiamo due funzioni *f* e *g*, possiamo ottenere da esse un'unica funzione che abbia il dominio di *f* e il codominio di *g*?

Consideriamo un problema simile. Supponiamo di volere arrivare da Bari a Canberra, in Australia. Poiché non vi è un volo diretto Bari – Canberra, dobbiamo effettuare almeno uno scalo. Quando sarà possibile? Quando vi sarà una località collegata direttamente sia a Bari che a Canberra.
Riportando il discorso alle funzioni, vediamo cosa accade.

Esempio 34

Siano le funzioni $f(x) = 2x - 1, g(x) = \sqrt{x}$. Si ha: $dom(f) = cod(f) = \mathbb{R}$, $dom(g) = cod(g) = \mathbb{R}_0^+$. Consideriamo $2 \in dom(f)$, si ha $f(2) = 3$. Poiché $3 \in dom(g)$, possiamo calcolare $g(3) = \sqrt{3}$, pertanto possiamo dire che partendo da $2 \in dom(f)$, siamo arrivati a $\sqrt{3} \in cod(g)$. Possiamo allora dire che abbiamo costruito la funzione che cercavamo, che avesse cioè il dominio di *f* e il codominio di *g*? No, perché quanto trovato non vale per ogni $x \in dom(f)$; infatti $0 \in dom(f)$, ma $f(0) = -1 \notin dom(g)$.

Tenuto conto dell'esempio precedente possiamo chiarire meglio il nostro problema.

Definizione 20

Date due funzioni reali di una variabile reale *f* e *g*, se accade che $cod(f) \subseteq dom(g)$, allora esiste una funzione, che chiamiamo **composizione** di *f* e *g* nell'ordine, che a ogni $x \in dom(f)$ associa $y \in cod(g)$.

Notazione 4

- La composizione delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, in questo ordine, si indica con $f \circ g$.
- Il corrispondente del generico *x* nella composizione delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, in questo ordine, si indica con $g[f(x)]$.

Esempio 35

Quindi date $f(x) = 2x - 1, g(x) = \sqrt{x}$, non possiamo effettuare $f \circ g$ perché $cod(f) \not\subset dom(g)$, invece possiamo effettuare perché $cod(g) = \mathbb{R}_0^+ \subset \mathbb{R} = dom(f)$. Per trovare la legge che definisce tale funzione composta basta applicare le leggi a un generico elemento *x*: $x \xrightarrow{g} \sqrt{x} \xrightarrow{f} 2\sqrt{x} - 1$. Pertanto $g \circ f : \mathbb{R}_0^+ \to [-1; +\infty), g[f(x)] = 2 \cdot \sqrt{x} - 1$. Come si vede il codominio di $g \circ f$ non è uguale a quello di *g*.

Quindi non possiamo garantire che il codominio della funzione composta coincide con quello della prima funzione. Inoltre possiamo affermare che la composizione fra funzioni non è un'operazione commutativa.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo stabilire se possiamo comporre le funzioni $f(x)=\frac{4x-1}{x^2-1}, g(x)=\sqrt{2x-3}$, e in caso affermativo vogliamo determinare le leggi delle relative composizioni. Abbiamo *dom*(*f*) = ℝ \ {±1}, *dom*(*g*) = $\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Calcoliamo i due codomini: $y=\frac{4x-1}{x^2-1}\Rightarrow\left(x^2-1\right)\cdot y=4x-1\Rightarrow yx^2-4x-y+1=0\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+y^2-y}}{y}$, quindi deve essere $\begin{cases}y^2-y+4\ge 0\\ y\ne 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\forall y\in\mathbb{R}\\ y\ne 0\end{cases}\Rightarrow y\ne 0$, la prima disequazione ha quel risultato perché il discriminante è negativo (1 – 16). Quindi *cod*(*f*) = ℝ \ {0}. Facilmente si ha: *cod*(*g*) = [0; +∞). Possiamo allora dire che non possiamo comporre né *f* con *g* né *g* con *f*. Se però effettuiamo delle restrizioni ciò può farsi. Cominciamo con *f*[*g*(*x*)], dobbiamo fare in modo che sia *cod*(*g*) ⊆ *dom*(*f*), cioè dobbiamo escludere il numero 1 da *cod*(*g*), per fare ciò ovviamente dobbiamo modificare *dom*(*g*). Deve essere $\sqrt{2x-3}\ne 1\Rightarrow 2x-3\ne 1\Rightarrow x\ne 2$, quindi se $f:\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $g:\left[\frac{3}{2};2\right)\cup(2;+\infty)\to[0;1)\cup(1;+\infty)$, possiamo effettuare la composizione seguente, $f\left[g(x)\right]=f\left(\sqrt{2x-3}\right)=\frac{4\cdot\sqrt{2x-3}-1}{\left(\sqrt{2x-3}\right)^2-1}=\frac{4\cdot\sqrt{2x-3}-1}{2x-4}$.

Analogamente possiamo fare per la composizione nell'ordine inverso, imponendo *cod*(*f*) = $\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$, che significa $\frac{4x-1}{x^2-1}\ge\frac{3}{2}\Rightarrow -1<x\le\frac{4-\sqrt{19}}{3}\vee 1<x\le\frac{4+\sqrt{19}}{3}$, quindi se la f ha questo dominio possiamo comporre, ottenendo: $g\left[f(x)\right]=g\left(\frac{4x-1}{x^2-1}\right)=\sqrt{2\cdot\frac{4x-1}{x^2-1}-3}=\sqrt{\frac{8x-2-3x^2+3}{x^2-1}}=\sqrt{\frac{-3x^2+8x+1}{x^2-1}}$.

Dopo aver determinato dominio e codominio delle seguenti coppie di funzioni, stabilire per quali valori di x è possibile effettuare le composizioni f °g, g° f, quindi determinare le due composizioni. Nelle risposte è indicata l'eventuale restrizione del dominio.

Livello 2

1. $f(x) = 3x – 2$, $g(x) = \frac{1}{x}$ $\left[f\left[g(x)\right]=\frac{3}{x}-2, x\ne 0; g\left[f(x)\right]=\frac{1}{3x-2}, x\ne\frac{2}{3}\right]$
2. $f(x) = x^2 – 2$, $g(x) = 3x^3 – 1$ $[f[g(x)] = (3x^3 – 1)^2 – 2; g[f(x)] = 3 \cdot (x^2 – 2)^3 – 1]$
3. $f(x)=\sqrt{4x+1}, g(x)=x^2-x$ $\left[f\left[g(x)\right]=\sqrt{4x^2-4x+1}, x\in\left[\frac{1-\sqrt{2}}{2};\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]; g\left[f(x)\right]=4x+1-\sqrt{4x+1}\right]$
4. $f(x)=\sqrt{2-x}, g(x)=\sqrt{9x+1}$ $\left[f\left[g(x)\right]=\sqrt{2-\sqrt{9x+1}}, x\in\left[-\frac{1}{9};\frac{1}{3}\right]; g\left[f(x)\right]=\sqrt{9\cdot\sqrt{2-x}+1}, x\in(-\infty;2]\right]$
5. $f(x) = sin(x)$, $g(x) = cos(x)$ $\left[f\left[g(x)\right]=sin\left[cos(x)\right]; g\left[f(x)\right]=cos\left[sin(x)\right]\right]$
6. $f(x) = tan(x)$, $g(x) = 2x – 3$ $\left[f\left[g(x)\right]=tan(2x-3), x\notin\left\{\frac{6+\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right\}; g\left[f(x)\right]=2tan(x)-3\right]$

7. $f(x)=\frac{2x-1}{4x^2-9}, g(x)=\frac{8x-3}{9x^2-1}$ $\left[\begin{array}{l} f[g(x)]=\frac{(9x^2-1)\cdot(9x^2-16x+5)}{729x^4-418x^2+192x-27}, x\notin\left\{\frac{-8\pm\sqrt{307}}{27}\right\} \\ g[f(x)]=\frac{(4x^2-9)\cdot(12x^2-16x-19)}{4\cdot(4x^4-27x^2+9x+18)}, x\notin\left\{\frac{3\pm\sqrt{33}}{4};\frac{-3\pm\sqrt{57}}{4}\right\}\end{array}\right]$

8. $f(x) = sin^{-1}(2x)$, $g(x) = 2x - 1$ $\left[f[g(x)]=sin^{-1}(4x-2), x\in\left[\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right]; g[f(x)]=2sin^{-1}(2x)-1\right]$

9. $f(x)=ln(x^2-1), g(x)=\sqrt{x^2-x}$ $\left[\begin{array}{l} f[g(x)]=ln(x^2-x-1); x\in\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right) \\ g[f(x)]=\sqrt{ln^2(x^2-1)-ln(x^2-1)}, x\in\left(-\infty;-\sqrt{e+1}\right]\cup\left[\sqrt{e+1};+\infty\right)\end{array}\right]$

10. $f(x) = e^{2x-1}$, $g(x) = ln(4x - 1)$
$\left[f[g(x)]=\frac{(4x-1)^2}{e}, x\in\left(\frac{1}{4};+\infty\right); g[f(x)]=ln(4e^{2x}-e)-1, x\in\left(\frac{1}{2}-ln(2);+\infty\right)\right]$

Livello 3

11. $f(x) = sin(4x + 1)$, $g(x) = sin^{-1}(3x - 2)$ $\left[\begin{array}{l} f[g(x)]=sin[4sin^{-1}(3x-2)+1], x\in\left[\frac{2-sin^{-1}(1)}{3};\frac{2+sin^{-1}(1)}{3}\right] \\ g[f(x)]=sin^{-1}[3sin(4x+1)-2], x\in\left[\frac{sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)-1}{4};\frac{\pi-2}{8}\right]\end{array}\right]$

12. $f(x)=\begin{cases} x & x<0 \\ 2x & x\ge 0\end{cases}, g(x)=3x+1$ $\left[f[g(x)]=\begin{cases} 3x+1 & x<0 \\ 6x+2 & x\ge 0\end{cases}; g[f(x)]=\begin{cases} 3x+1 & x<0 \\ 6x+1 & x\ge 0\end{cases}\right]$

13. $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x<0 \\ -x^2+1 & x\ge 0\end{cases}, g(x)=\sqrt{x}$ $\left[f[g(x)]=-x+1, x\ge 0; g[f(x)]=\begin{cases} \sqrt{x^2+1} & x<0 \\ \sqrt{-x^2+1} & 0\le x\le 1\end{cases}\right]$

14. $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x<0 \\ \sqrt{x} & x\ge 0\end{cases}, g(x)=ln(x)$ $\left[f[g(x)]=\begin{cases} \frac{1}{ln(x)} & 0<x<1 \\ \sqrt{ln(x)} & x\ge 1\end{cases}; g[f(x)]=ln(\sqrt{x}), x>0\right]$

15. $f(x)=\begin{cases} sin(x) & x<1 \\ cos(x) & x\ge 1\end{cases}, g(x)=sin^{-1}(x)$ $\left[f[g(x)]=\begin{cases} x & x<1 \\ \sqrt{1-x^2} & x\ge 1\end{cases}; g[f(x)]=\begin{cases} x & x<1 \\ sin^{-1}[cos(x)] & x\ge 1\end{cases}\right]$

16. $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x<0 \\ x & x\ge 0\end{cases}, g(x)=\begin{cases} x & x\le 0 \\ \frac{1}{x} & x>0\end{cases}$ [$f[g(x)] = f(x)$; $g[f(x)] = g(x)$]

17. Se una funzione è invertibile, possiamo dire che essa può essere sempre composta con la propria inversa? E in caso di risposta affermativa, che tipo di funzione è la composta? [Sì, la funzione $f(x) = x$]

18. Esistono funzioni per le quali $f[g(x)] = f(x)$, $g[f(x)] = g(x)$? In caso affermativo fornire un esempio. [Sì, quella dell'esercizio 16]

Lavoriamo insieme

Data la funzione $f(x) = x^2 + 1$, per essa si ha $dom(f) = \mathbb{R}$, $cod(f) = [1; +\infty)$, quindi possiamo effettuare la composizione per se stessa. Vogliamo calcolare $f\{f\{f(1)\}\}$, che possiamo scrivere più semplicemente come $f^3(1)$. Abbiamo $f^3(1) = f[f(1^2 + 1)] = f[f(2)] = f(2^2 + 1) = f(5) = 5^2 + 1 = 26$.

Calcolare quanto richiesto

Livello 1

19. $f(x) = x + 1, f^2(-2) = ?$; $f(x) = 2x - 1, f^3(1) = ?$; $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}, f^3(0) = ?$; $f(x) = (x + 1)^2, f^4(-1) = ?$ [0 ; 1 ; –1; 25]

20. $f(x) = \sqrt{x^2+1}, f^2(-2) = ?$; $f(x) = x^2 - x,\ f^3\left(\dfrac{1}{2}\right) = ?$; $f(x) = x + |x|, f^2(-1) = ?$ $f(x) = sin(x), f^3(\pi) = ?$ $\left[\sqrt{6}; -\dfrac{55}{256}; 0; 0\right]$

Livello 2

21. $f(x) = x^2, f^3(x) = ?$; $f(x) = x + |x|, f^n(-1) = ?$; $f(x) = sin(x), f^n(\pi) = ?$ $[x^8 ; 0 ; 0]$

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. Possiamo dire che $\lceil x \rceil^2 = \lceil x^2 \rceil$? In caso di risposta negativa fornire un esempio. $\left[\left\lceil \sqrt{2} \right\rceil^2 = 1^2 = 1, \left\lceil \left(\sqrt{2}\right)^2 \right\rceil = 2\right]$

2. Dato $f(x) = \log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, dimostrare che $f(a) + f(b) = f\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$.

3. Dimostrare che ogni funzione $f: [-a; a] \to \mathbb{R}$, con $a > 0$, può scriversi come somma di una funzione pari e una funzione dispari.

4. Determinare la legge della funzione $\lceil k \cdot x \rceil$, $k \in \mathbb{N}$ $\left[\begin{cases} k \cdot n + 1 & n < x \le n + \dfrac{1}{k} \\ k \cdot n + 2 & n + \dfrac{1}{k} < x \le n + \dfrac{2}{k} \\ & \dots \\ k \cdot (n+1) & n + \dfrac{k-1}{k} < x < n + 1 \end{cases}\right]$

5. Determinare la legge della funzione $\lfloor k \cdot x \rfloor$, $k \in \mathbb{N}$ $\left[\begin{cases} k \cdot n & n \le x < n + \dfrac{1}{k} \\ k \cdot n + 1 & n + \dfrac{1}{k} \le x < n + \dfrac{2}{k} \\ & \dots \\ k \cdot n + k - 1 & n + \dfrac{k-1}{k} \le x < n + 1 \end{cases}\right]$

6. Determinare tutte le radici reali della funzione f, che verifica la proprietà: $f\left(x^{\frac{1}{9}}\right) = x^2 - 3x - 4$. $\left[x = 4^{-\frac{1}{9}} \vee -1\right]$

7. Sia una funzione f che verifica $f\left(\dfrac{1}{x}\right) - 3f(x) = x, x \ne 0$. Determinare $f(2)$. $\left[-\dfrac{3}{16}\right]$

8. Con il simbolo $\{x\}$ denotiamo la parte frazionaria di x. Per esempio $\{3,4\} = 0,4$ e $\{4\} = 0$. Se $f(x) = \left\{\dfrac{3}{2}x\right\}$. Quante soluzioni ha l'equazione $f(f(f(f(x)))) = 0$, per $0 \le x < 1$? [8]

9. Se $f(x) = ax + b$ e $f^{-1}(x) = bx + a$, con a e b numeri reali, quanto vale $a + b$? [–2]

10. Sapendo che $f(x) = x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)$ calcolare $f(0) + f(-1) + f(-2) + f(-3)$. $\left[\frac{10}{9}\right]$

11. Qual è il massimo numero di punti d'intersezione dei grafici di due diverse funzioni polinomiali di quarto grado $y = p(x)$ e $y = q(x)$, ciascuna di coefficiente direttore 1? [3]

12. Tenuto conto che $f(2x) = \frac{2}{2+x}$, $\forall x > 0$, determinare $2 \cdot f(x)$. $\left[\frac{8}{4+x}\right]$

13. Data $f(x) = ax^2 - \sqrt{2},\ \ a \in \mathbb{Z}$, risolvere l'equazione in a: $f\left(f\left(\sqrt{2}\right)\right) = -\sqrt{2}$. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

14. Se $f(x) = ax^7 + bx^3 + cx - 5$, e $f(-7) = 7$, calcolare $f(7)$. [–17]

15. Se $f(x) = ax^4 + bx^2 + x + 5$ e $f(-3) = 2$, allora $f(3)$ è A) –5 B) –2 C) 1 D) 3 E) 8 [E]

22. Comporre nei due versi: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x < 0 \\ e^x & x \geq 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 2 \\ 1 - x & x \geq 2 \end{cases}$

$$\left[f\left[g(x)\right] = \begin{cases} e^{x^2+1} & x < 2 \\ \frac{1}{(1-x)^2} & x \geq 2 \end{cases}; g\left[f(x)\right] = \begin{cases} \frac{1}{x^4} + 1 & x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 - \frac{1}{x^2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x < 0 \\ e^{2x} + 1 & 0 \leq x < ln(2) \\ 1 - e^x & x \geq ln(2) \end{cases} \right]$$

23. Comporre nei due versi: $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 2 \\ 4 - 3x & x \geq 2 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ 3x & x > 1 \end{cases}$

$$\left[f\left[g(x)\right] = \begin{cases} 4 - 3x^2 & x \leq -\sqrt{2} \\ 2x^2 - 1 & -\sqrt{2} < x \leq 1 \\ 4 - 9x & x > 1 \end{cases}, g\left[f(x)\right] = \begin{cases} (2x-1)^2 & x \leq 1 \\ 6x - 3 & 1 < x < 2 \\ (4-3x)^2 & x \geq 2 \end{cases} \right]$$

16. Una funzione f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è definita dalla legge: $f(n) = \begin{cases} n + 3 & se\ n\ è\ dispari \\ n/2 & se\ n\ è\ pari \end{cases}$. Supponiamo k dispari e $f\{f[f(k)]\} = 27$. Quanto vale la somma delle cifre di k? A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15 [B]

17. Tenuto conto che $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, determinare $f[sec^2(\theta)]$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. $[sin^2(\theta)]$

18. Sapendo che $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$, risolvere $f(x) = f(-x)$. *Suggerimento*: sostituire nella prima uguaglianza $\frac{1}{x}$ a x, quindi eliminare $f\left(\frac{1}{x}\right)$. $\left[x = \pm\sqrt{2}\right]$

19. Sia f una funzione tale che $f(x/3) = x^2 + x + 1$. Determinare la somma di tutti gli z per i quali: $f(3z) = 7$. $\left[-\frac{1}{9}\right]$

20. $p(x)$ è un generico polinomio, determinare tutti i polinomi che verificano: $p(x^2) = [p(x)]^2 = p[p(x)]$. Suggerimento: due polinomi sono identici se hanno lo stesso grado e gli stessi coefficienti dei termini di uguale grado. $[p(x) = x^2]$

21. Se $f(x) = \sqrt[n]{a - x^n}$ e $x \geq 0$, determinare $f[f(x)]$. $[x]$

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi
I temi completi dei Licei Scientifici per gli ultimi anni sono scaricabili, con soluzione, dal sito

http://matdidattica.altervista.org/esamidistato.htm

1. (Liceo scientifico 2001/02) In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione: $y=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}$. Tale luogo è costituito da: A) un punto; B) due punti; C) infiniti punti; D) nessun punto. Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un esauriente spiegazione della risposta. [B), i punti (–1; 0) e (1; 0)]
2. (Liceo scientifico 2002/03) Il dominio della funzione $f(x)=ln\left[\sqrt{x+1}-(x-1)\right]$ è l'insieme degli x reali tali che: A) $-1 < x \le 3$; B) $-1 \le x < 3$; C) $0 < x \le 3$; D) $0 \le x < 3$. Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta effettuata. [B]
3. (Liceo scientifico PNI 2007/2008) Qual è l'equazione della curva simmetrica rispetto all'origine di $y = -e^{2x}$? Quale quella della curva simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante? $\left[y=e^{2x}; y=\frac{1}{2}ln(-x)\right]$
4. (Liceo scientifico 2008/09) Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Tra le funzioni (o applicazioni) di A in B, ce ne sono di suriettive? Di iniettive? Di biiettive?
[Suriettive sì, biiettive no, iniettive dipende se si vuole che il dominio sia tutto A no, diversamente sì]
5. (Liceo scientifico 2010/11) Il profitto di una azienda, in milioni di euro, è stato rappresentato nella tabella sottostante designando con x_i l'anno di osservazione e con y_i il corrispondente profitto

Anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,97	3,02	3,490	3,71	3,80	3,76	3,65

Si cerca una funzione che spieghi il fenomeno dell'andamento del profitto giudicando accettabile una funzione g definita su $\mathbb{R}^+$ se per ciascun x_i oggetto dell'osservazione si ha $|g(x_i) - y_i| \le 10^{-1}$. Si verifichi, con l'aiuto di una calcolatrice, che è accettabile la funzione $f(x) = (ax + b) \cdot e^{-x/3} + 3$ e si dica, giustificando la risposta, se è vero che, in tal caso, l'evoluzione del fenomeno non potrà portare a profitti inferiori ai 3 milioni di euro. [Sì]

6. (Liceo scientifico 2012/13) Si calcoli il dominio della funzione $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{2-\sqrt{3-x}}}$. [[–1; 2]]
7. Si determini il dominio della funzione: $f(x)=\sqrt{3-log_2(x+5)}$. [(– 5; – 3]]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
CMC = Canadian Mathematics Challenge
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest
NC = North Carolina Mathematical Contest
SC = South Carolina Mathematical Contest

Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnato agli HSMC del 2002.
La funzione g verifica le seguenti proprietà: i) $g(0) = 2$; *ii)* $g(1) = 3$; *iii)* $g(x + y) + g(x - y) = g(x) \cdot g(y)$, *con* $x, y \in \mathbb{Z}$. *Trovare* $g(5)$
La proprietà iii) si può anche scrivere $g(x + y) = g(x) \cdot g(y) - g(x - y)$. Questa relazione è di tipo ricorsivo, permette cioè di trovare un valore della funzione mediante suoi valori già calcolati. Così $g(2) = g(1 + 1) = g(1) \cdot g(1) - g(1 - 1) \Rightarrow g(2) = 3 \cdot 3 - 2 = 7$. Analogamente: $g(3) = g(2 + 1) = g(2) \cdot g(1) - g(2 - 1) \Rightarrow g(3) = 7 \cdot 3 - 3 = 18$; $g(4) = g(3 + 1) = g(3) \cdot g(1) - g(3 - 1) \Rightarrow g(4) = 18 \cdot 3 - 7 = 47$.
E infine $g(5) = g(4 + 1) = g(4) \cdot g(1) - g(4 - 1) \Rightarrow g(5) = 47 \cdot 3 - 18 = 123$.

1. (AHSME 1995) Sia f una funzione lineare con le proprietà seguenti: $f(1) \le f(2)$, $f(3) \le f(4)$, e $f(5) = 5$. Quale delle seguenti è vera? A) $f(0) < 0$ B) $f(0) = 0$ C) $f(1) < f(0) < f(-1)$ D) $f(0) = 5$ E) $f(0) > 5$ [D]
2. (AHSME 1997) Consideriamo le funzioni f che verificano $f(x + 4) + f(x - 4) = f(x)$ per tutti i numeri reali x. Tali funzioni sono periodiche e hanno un minimo periodo comune p. Quanto vale p?
A) 8 B) 12 C) 16 D) 24 E) 32 [D]
3. (AHSME 1998) Sia $f(x)$ una funzione che verifica le seguenti proprietà:
a) comunque siano i numeri reali x e y, $f(x + y) = x + f(y)$; b) $f(0) = 2$. Calcola $f(1998)$. [2000]
4. (HSMC 1999) Determinare il dominio della funzione $f(x) = \dfrac{2}{\lfloor x \rfloor^2 + \lfloor x \rfloor - 56}$.
$[(-\infty; -8) \cup [-7; 7) \cup [8; +\infty)]$
5. (HSMC 1999) Data la funzione $f(x) = \dfrac{c \cdot x}{2x + 3}$, determinare i valori di c per cui: $f(f(x)) = x$, $x \ne -\dfrac{3}{2}$.
$[c = -3]$
6. (HSMC 2000) Sia f una funzione tale che $f(3) = 1$ e $f(3x) = x + f(3x - 3)$, per ogni x. Calcolare $f(300)$.
[5050]
7. (HSMC 2004) Sia f una funzione polinomiale tale che si abbia: $f(x^2 + 1) = x^4 + 5x^2 + 3$ per ogni x reale. Calcolare $f(x^2 - 1)$. $[x^4 + x^2 - 3]$

Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnato agli HSMC del 2002. *Un numero r si chiama punto fisso per una funzione f se* $f(r) = r$. *Sapendo che* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *ha un solo punto fisso, determinare b in funzione di a.*
$f(r) = r$ implica $r^2 + ar + b = r \Rightarrow r^2 + (a + 1) \cdot r + b = 0$ dato che vi è una sola soluzione deve essere nullo il discriminante dell'equazione: $(a - 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot b = 0 \Rightarrow b = \dfrac{1}{4} \cdot (a - 1)^2$.

8. (HSMC 2005) Sia $f(t) = \dfrac{t + 2}{t - 2}$, calcolare $f^{-1}(c^{-1} - 1)$. $\left[\dfrac{2}{1 - 2c}\right]$
9. (HSMC 2002) Siano le funzioni f e g tali che si abbia $f(x) = 2x - 6$ e $f[g(x)] = g[f(x)] = x$ per ogni x, determinare l'ascissa dell'intersezione delle curve $y = f(x)$ e $y = g(x)$. [6]
10. (HSMC 2006) Scrivere la funzione $f(x) = 1 - x^3 - x^4 - 2x^5$ come somma di una funzione pari e una dispari. $[f(x) = (1 - x^4) + (-x^3 - 2x^5)]$
11. (HSMC 2007) Sia f una funzione che verifica l'uguaglianza $f(x \cdot y) = \dfrac{f(x)}{y}$, per tutti i numeri reali positivi x e y. Se $f(300) = 2$, qual è il valore di $f(800)$? $\left[\dfrac{3}{4}\right]$

Questions in English

Working together

Consider the question assigned at HSMC in 2003. *Suppose f satisfies* $3f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)=x$. *Find f*(3).

Substituting $x = 3$ and then $x=\frac{1}{3}$ into the expression: $3f\left(\frac{1}{3}\right)-f(3)=3 \wedge 3f(3)-f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$. Then $-f(3)+3f\left(\frac{1}{3}\right)=3 \wedge 9f(3)-3f\left(\frac{1}{3}\right)=1$ and we conclude that $8 \cdot f(3) = 4$, or $f(3)=\frac{1}{2}$.

12. (AHSME 2001) Let f be a function satisfying $f(xy)=\frac{f(x)}{y}$ for all positive real numbers x and y. If $f(500) = 3$, what is the value of $f(600)$? $\left[\frac{5}{2}\right]$
13. (HSMC 2001) Let $F(x)=\frac{1+x}{1-x}$. Form a new function $G(x)$ by replacing x in $F(x)$ with the expression $\frac{3x+x^3}{1+3x^2}$. Express $G(x)$ in terms of $F(x)$. $[G(x) = [F(x)]^3]$
14. (NC 2001) Which of the following functions is neither odd nor even?
A) $x^3 - 2x$ B) $x^3 - x\,|x|$ C) $x^5 - x^3 + 3x$ D) $x^4 - 2x^2 + x + 1$ E) $3x^2 - x + 6$ [D]
15. (CMC 2001) Calculate the value of the sum $\lfloor\sqrt{1}\rfloor+\lfloor\sqrt{2}\rfloor+\lfloor\sqrt{3}\rfloor+\ldots+\lfloor\sqrt{50}\rfloor$. [217]
16. (HSMC 2001) If $f(x) = 3x + 4$, find a function $g(x)$ such that $f(g(x)) = 4x - 1$. $\left[\frac{4x-5}{3}\right]$
17. (HSMC 2002) Given functions $f(x) = 2x - 6$ and $g = f^{-1}$, solve $f(x) = g(x)$. $[x = 6]$

Working together

This question was assigned at HSMC in 2006. *Let* f_1 *be the function defined by* $f_1(x)=\frac{2x-1}{x+1}$. *For n* = 1, 2, 3 . . . *define* $f_{n+1} = f_1(f_n(x))$. *It can be shown that* $f_{35} = f_5$. *Find* $f_{29}(x)$.
f_1 is an invertible function. $f_{35} = f_5$ implies that $f_{35} = i$, the identity function. Since $f_{30} = f_1(f_{29}) = i$, then f_{29} is the inverse of f_1. One computes this inverse and obtains

$$f_{29}(x)=f_1^{-1}(x)\Rightarrow y=\frac{2x-1}{x+1}\Rightarrow y\cdot(x+1)=2x-1\Rightarrow x\cdot(y-2)=-1-y\Rightarrow x=\frac{y+1}{2-y}\Rightarrow f_{29}(x)=\frac{x+1}{2-x}$$

18. (HSMC 2004) Consider the function $f(x)$ such that $f(mn) = f(m + n)$ for all real numbers m and n. If $f(2) = 4$, find f(64). [4]
19. (NC 2004) A dress that is size x in France is size $s(x)$ in the United States, where $s(x) = x - 32$. A dress that is size x in the United States is size $y(x)$ in Italy, where $y(x) = 2(x + 12)$. Which function $h(x)$ will convert French dress sizes to Italian dress sizes? $[2x - 40]$
20. (SC 2008) Suppose that $f(x) = x^x$ and $f(x) = x^{2x}$. Which of the functions below is equal to $f[g(x)]$? [E]
A) x^{3x} B) $x^{x^{2x}}$ C) $x^{2x^{2x}}$ D) $x^{2x^{3x}}$ E) $x^{2x^{2x+1}}$
21. (HSMC 2008) Let $f(x)$ be a function such that $f(x) + 3f(-x) = cos(x)$ for every real number x. What is the value of $f(\pi)$? $\left[-\frac{1}{4}\right]$

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia militare) Stabilire il dominio di definizione della funzione $\frac{log(x-2)}{\sqrt{1-x}}$

   A) Nessun x B) $-2 < x < 1$ C) $x > 2$ D) Qualunque x

2. (Accademia militare) Il dominio della funzione $f(x) = \frac{ln(x+1)}{x-2}$ è uguale a:

   A) $(-1; +\infty)$ B) $(-1; 2) \cup (2; +\infty)$ C) $(0; +\infty)$ D) $(1; +\infty)$

3. (Odontoiatria 1998) Data la funzione $y = a + bx$, se x raddoppia, di quanto aumenta y?
   A) b B) $2b$ C) $2a$ D) bx D) x.

4. (Odontoiatria 2000) La curva di equazione $y = -\frac{\sqrt{7}+1}{|x|}$ ha il grafico contenuto nei quadranti:

   A) I e III B) I e II C) II e III D) III e IV E) I e IV

5. (Odontoiatria 2001) Data una funzione $f(x)$ tale che $f(x+1) = \frac{2 \cdot f(x) + 2}{2}$ e $f(1) = 2$, quant'è $f(2)$?

   A) 3 B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) 2 E) 1

6. (Odontoiatria 2002) Quale fra gli insiemi seguenti rappresenta il dominio della funzione $y = \frac{\sqrt{1-e^x}}{ln(x)}$?

   A) insieme dei numeri reali B) insieme dei numeri razionali C) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$ D) $(-\infty; 0)$ E) $\varnothing$

7. (Medicina 2002) Data una funzione $y = f(x)$ è sempre vero che

   A) la funzione reciproca ha lo stesso dominio della funzione $f(x)$ B) la funzione inversa ha lo stesso dominio della funzione $f(x)$ C) la funzione inversa è data da $y = \frac{1}{f(x)}$ D) la funzione inversa è data da $y = -f(x)$ E) la funzione reciproca è data da $y = \frac{1}{f(x)}$

8. (Veterinaria 2002) L'espressione matematica $b = f(a)$ è la traduzione in simboli della frase:
   A) il valore di a è in funzione di quello di b B) il valore di b è uguale a quello di a C) il valore di b è ottenuto moltiplicando f per a D) il valore di a è ottenuto moltiplicando b per l'inverso di f E) il valore di b è in funzione di quello di a

9. (Veterinaria 2003) La funzione $y = a^{-x}$ con $a > 0$:
   A) è sempre positiva B) può essere sia positiva che negativa C) è sempre negativa
   D) interseca l'asse delle ascisse E) non interseca l'asse delle ordinate

10. (Veterinaria 2004) La funzione inversa di $f(x) = \frac{3}{2-y}$ è

    A) $x = \frac{y}{2y-3}$ B) $x = \frac{3}{2-y}$ C) $x = \frac{3-2y}{y}$ D) $x = \frac{-2y+3}{-y}$ E) $x = \frac{3}{y-2}$

11. (Odontoiatria 2004) Quale fra le seguenti funzioni ha il grafico simmetrico rispetto all'origine degli assi? A) $y = x^5 \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{3x}$ B) $y = \frac{2}{5}x^7 - x^5 \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{6}$ C) $y = x^4 - 7x^2 + 1$
    D) $y = \sqrt{x^2 + |x| + 4}$ E) $y = \sqrt{x^2 + |x+4|}$

12. (Medicina 2004) Data la funzione $f(x) = \sqrt{|x| + 3x - 1}$, $f(2x)$ vale:

    A) $\sqrt{2|x| + 6x - 2}$ B) $2 \cdot \sqrt{|x| + 3x - 1}$ C) $\sqrt{2|x| + 6x - 1}$ D) $\sqrt{|2x| + 3x - 1}$ E) $2 \cdot \sqrt{2|x| + 6x - 1}$

13. (Odontoiatria 2005) Essendo x e y due variabili reali, la funzione $y = \sqrt{|x| - 1}$

    A) è definita solo per $x \geq 1$ B) non è definita $-1 \leq x \leq 1$ C) è definita solo per $x \leq 1$
    D) è sempre definita e positiva E) è positiva in ogni punto del suo dominio

14. (Veterinaria 2005) Una fabbrica di bulloni sostiene una spesa fissa mensile media di € 120000,00 (il mese commerciale è inteso di 30 giorni) e un costo di produzione di € 3,15 per ogni bullone prodotto. Indicata con y la spesa giornaliera complessiva e con x il numero di bulloni prodotti in un giorno, individuare la relazione tra le variabili x e y

A) $y = 120000{,}00 + 3{,}15x$ B) $y = 4000{,}00 + \frac{3{,}15}{x}$ C) $y = 3{,}15x - 120000{,}00$

D) $y = 4000{,}00 + 3{,}15x$ E) $y = \frac{3{,}15}{x} - 4000{,}00$

15. (Odontoiatria 2005) Quale delle seguenti equazioni rappresenta una funzione lineare $y = f(x)$, tale che $f(-2) = 3, f(3) = -2$? A) $y = -x + 1$ B) $y = x + 5$ C) $y = x - 5$ D) $y = -2x - 1$ E) $y = -2x + 4$

16. (Medicina 2005) Quale delle seguenti equazioni rappresenta una funzione $y = f(x)$ tale che $f(2) = -1$ e $f(-1) = 5$? A) $y = -x^2 + 2x - 1$ B) $y = -2x^2 + x + 8$ C) $y = 2x^2 - x - 7$ D) $y = x^2 - 3x + 1$ E) $y = 3x^2 - 2x$

17. (Odontoiatria 2006) La funzione $y = \frac{x+2}{\log(x-1)}$ è definita per

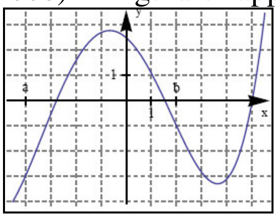
A) $x > 1 \land x \neq 2$ B) $1 < x \leq 2$ C) $x \geq 1 \land x \neq 2$ D) $x \leq 1$ E) $x > 1$

18. (Odontoiatria 2007) Essendo x e y due variabili reali, la funzione: $y = ln(x - 1)$

A) non è definita per $-1 \leq x \leq 1$ B) è definita solo per $x \geq 1$ C) è definita solo per $x \leq 1$

D) è sempre definita e positiva E) è positiva in ogni punto del suo dominio

19. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza 2008) In figura è rappresentato il grafico di una funzione f.



Quanto vale il rapporto $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$? A) $-\frac{1}{3}$ B) 1 C) $\frac{1}{3}$ D) $-\frac{2}{3}$

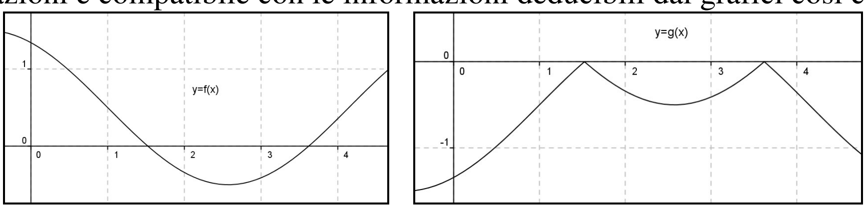
20. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza 2008) Sia f la funzione definita da $f(x) = x^3 + 8$. Per quale x si ha che $f(x)$ è il doppio del valore della funzione in $x = 0$? A) 16 B) 0 C) 2 D) –2

21. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza 2008) Due grandezze F ed R sono legate dalla relazione $F = \frac{2}{R^2}$. Se F triplica, allora R diventa

A) $\frac{2}{3}$ del valore iniziale B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ del valore iniziale C) $\frac{1}{3}$ del valore iniziale D) $\frac{1}{9}$ del valore iniziale

22. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza 2008) Una ditta di elettrodomestici ha venduto in un anno 2000 forni a microonde di un certo modello, al prezzo di 100 euro l'uno. È stato stimato che, se nell'anno successivo il prezzo di vendita di quel modello aumenterà di x euro, allora il numero di forni venduti in un anno diminuirà di $30x$. Quale delle seguenti funzioni $I(x)$ descrive l'incasso annuo della ditta al variare dell'aumento x? A) $I(x) = 100 \cdot (2000 - 30x)$ B) $I(x) = (2000 + 30x) \cdot (100 + x)$ C) $I(x) = (100 + x) \cdot (2000 - 30x)$ D) $I(x) = (2000 - 30x) \cdot 100x$

23. (Architettura 2009) Nella figura sono rappresentati i grafici delle funzioni $y = f(x)$, $y = g(x)$. Quale delle seguenti relazioni è compatibile con le informazioni deducibili dai grafici così come disegnati.



A) $g(x) = |-f(x)|$ B) $g(x) = -|f(x)|$ C) $g(x) = f(|x|)|$ D) $g(x) = -f(|x|)$ E) $g(x) = f(|-x|)$

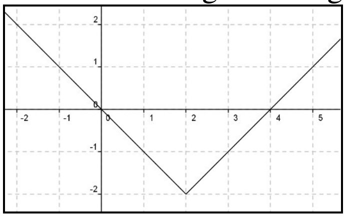
24. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza) Indica quale delle seguenti funzioni ha la proprietà *per ogni coppia di numeri* (x_1, x_2) *del dominio, se* $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

A) $f(x) = |x|$ B) $f(x) = cos(x)$ C) $f(x) = log(x)$ D) $f(x) = \frac{1}{x}$

25. (Ingegneria 2009) Se $f(x) = x^2 - x^3$, allora $f(x - 2)$ vale

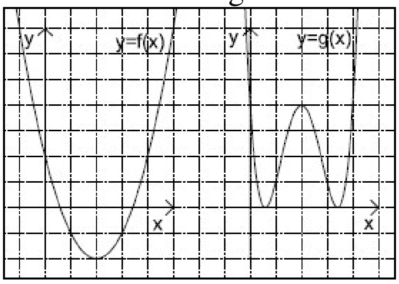
A) $x^2 - x^3 + 2$ B) $(3 - x)(x - 2)^2$ C) $x^2 - x^3 - 2$ D) $x^2 - 2 - x^3 + 2$ E) Nessuna delle altre

26. (Test Bocconi) Quale fra le seguenti funzioni ha il grafico seguente?



A) $f(x) = |x + 2| + 2$ B) $f(x) = |x - 2| + 2$ C) $f(x) = |x + 2| - 2$ D) $f(x) = |x - 2| - 2$ E) $f(x) = |x - 2|$

27. (Facoltà scientifiche CISIA 2010) In figura sono rappresentati, usando la stessa scala, i grafici di due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, che sono legate da una delle seguenti relazioni. Quale?



A) $g(x) = -f(x)$ B) $g(x) = [f(x)]^2$ C) $g(x) = \sqrt{f(x)}$ D) $g(x) = |f(x)|$ E) $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_5_9.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
A	B	D	D	A	E	E
8	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
E	A	B	A	C	B	D
15	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**
A	D	A	A	C	C	B
22	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	
C	B	C	B	D	B	

9. Successioni di numeri reali e funzioni reali di una variabile reale

9.3 Continuità delle funzioni

Prerequisiti
- Sistema di riferimento cartesiano ortogonale
- Rappresentazione grafica di semplici funzioni
- Concetto di dominio e codominio di una funzione
- Concetto di infinito
- Gli insiemi numerici fondamentali e le loro proprietà

Obiettivi
- Comprendere il concetto di limite
- Comprendere il concetto di funzione continua
- Sapere determinare se un insieme numerico è limitato o illimitato
- Sapere applicare il principio di sostituzione degli infiniti nel calcolo dei limiti
- Sapere determinare se una funzione è continua
- Sapere distinguere i diversi tipi di discontinuità

Contenuti
- Topologia della retta
- I limiti delle funzioni reali di una variabile reale
- Continuità di una funzione
- Operazioni aritmetiche con i limiti e forme indeterminate
- Teoremi sulle funzioni continue
- I limiti notevoli

Parole chiave
Convergenza – Discontinuità – Divergenza – Oscillazione – Punto di accumulazione
Punto di frontiera – Punto isolato

Richiamiamo le conoscenze...

Ricordiamo un fondamentale risultato che abbiamo studiato al primo anno di corso.

Teorema A (del resto o di Ruffini)

Il resto della divisione $\frac{p(x)}{x-a}$, con $p(x)$ polinomio nell'unica variabile x, è $p(a)$.

Vediamo una sua utile conseguenza.

Corollario A

Condizione necessaria e sufficiente affinché il polinomio in una sola variabile $p(x)$ sia divisibile per il binomio $(x - a)$ è che si abbia $p(a) = 0$.

Per dividere un polinomio per un binomio di primo grado si utilizza la cosiddetta regola di Ruffini.

Esempio 1

Vogliamo effettuare la divisione $(5t^3 - 4t^2 + t - 1) : (t - 2)$. La regola di Ruffini consiste nel costruire lo schema seguente $\begin{array}{c|ccc|c} & 5 & -4 & 1 & -1 \\ 2 & & 10 & 12 & 26 \\ \hline & 5 & 6 & 13 & 25 \end{array}$ in cui nella prima riga ci sono i coefficienti del polinomio dividendo, fuori dallo schema c'è il numero che annulla il polinomio divisore (2), nella seconda riga ci sono i prodotti del precedente numero per i numeri dell'ultima riga; in questa, il primo numero (5) è uguale al primo coefficiente del dividendo, gli altri sono ottenuti dalla somma fra gli elementi della prima e quelli della seconda riga. L'ultimo numero dell'ultima riga è il resto della divisione (25), gli altri sono i coefficienti del polinomio quoziente che è di un grado in meno del dividendo, cioè $5t^2 + 6t + 13$.

Topologia della retta

Il problema

La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ non è definita per $x = 0$, ma è definita per qualsiasi altro valore, non importa quanto "vicino" a zero. Cosa succede nelle "vicinanze" dello zero?

Poiché il nostro principale obiettivo è la rappresentazione grafica delle funzioni, dopo avere stabilito dove esse esistono, con la determinazione dell'I.d.e., dobbiamo cominciare a imparare come possiamo tracciarle. Un'interessante problema è perciò quello di stabilire cosa succede quando una funzione non esiste, soprattutto quando, come nel caso del problema, essa non è definita in un singolo punto. Nell'insieme dei numeri reali possiamo effettuare l'indagine richiesta, poiché possiamo avvicinarci ad un dato valore in modo appunto "continuo", senza salti. Il problema però è che in generale l'insieme di definizione di una funzione non è sempre tutto l'insieme $\mathbb{R}$, ma un suo sottoinsieme che, come abbiamo visto nell'unità precedente, non sempre è un insieme continuo. In effetti però non è necessario che un insieme sia continuo per studiare il comportamento nelle "vicinanze" di un suo punto. Ricordiamo che stiamo considerando insiemi numerici, quindi parleremo di numeri di un insieme, piuttosto che di elementi.

Esempio 1

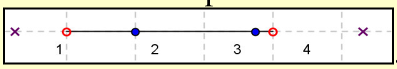
L'insieme $A = (-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$ non è continuo, dato che, per esempio l'intervallo (1; 6) relativamente alla sua parte [2; 5], non contiene elementi di A. Eppure possiamo avvicinarci ugualmente al numero 2 o al numero 5, anche se non appartengono ad A, perché ogni intervallo fatto di numeri minori di 2, contiene solo elementi di A. Lo stesso accade per ogni intervallo costituito di numeri maggiori di 5. Ciò invece non è possibile per l'insieme formato da tutti i numeri minori o uguali a 2 unito al solo numero 3. Nel caso del numero 3, non possiamo avvicinarci a 3 passando solo per numeri appartenenti ad A.

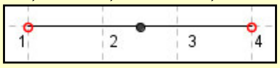
In vista del precedente esempio poniamo le seguenti definizioni.

Definizione 1

Ogni intervallo che contiene un generico numero a si chiama **intorno di *a***. In particolare se l'intervallo, non importa se aperto o chiuso, ha estremi $a - r$ e $a + r$, parliamo di **intorno circolare di raggio *r***.

Esempio 2

L'intervallo (1; 4) è un intorno di qualsiasi numero maggiore di 1 e minore di 4. Per esempio è un intorno di 2 ma anche di 3,75. Non è un intorno di 1 né di 4, di 0,25 o 5,31. 

. In particolare è un intorno circolare di 2,5 di raggio 1,5. 

Infatti $|4 - 2,5| = |1 - 2,5| = 1,5$.

Notazione 1

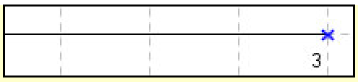
Un intorno circolare di x di raggio r si indica con il simbolo $I_r(x) = (x - r; x + r)$.

Definizione 2

Un numero in ogni intorno del quale vi sono numeri di un insieme A, si dice **punto di accumulazione di *A***.

Come si vede, non è necessario che un punto appartenga a un insieme per essere di accumulazione per lo stesso insieme.

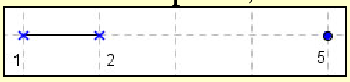
Esempio 3

Dato l'insieme A dei numeri minori di 3, tutti i suoi elementi sono ovviamente di accumulazione per A, ma anche 3, che non appartiene ad A, è di accumulazione per A, perché comunque consideriamo un intorno che contiene 3, esso contiene numeri minori di 3. 

Definizione 3

Un numero $a \in A$, che ha almeno un intorno che, a parte a, è tutto formato da numeri non appartenenti all'insieme A, si chiama **punto isolato di A**.

Esempio 4

Dato l'insieme $A = (1; 2) \cup \{5\}$, il numero 5 è isolato per A, dato che, per esempio, l'intorno (4; 7) dell'insieme A contiene solo il numero 5. 

Quindi il procedimento di "avvicinamento continuo" può effettuarsi solo per i punti di accumulazione. Vedremo meglio nel successivo paragrafo. Chiudiamo invece questo paragrafo con un paio di altri concetti, che abbiamo già trattato per le successioni.

Definizione 4

Diciamo che un insieme numerico è
- **limitato superiormente,** se esiste almeno un numero reale maggiore di tutti i numeri dell'insieme
- **limitato inferiormente,** se esiste almeno un numero reale minore di tutti gli elementi dell'insieme.
- Un insieme limitato inferiormente e superiormente si chiama **insieme limitato**.

Ovviamente tutti gli insiemi numerici finiti sono limitati.

Esempio 5

L'insieme $A = \left\{\frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ è formato dalle frazioni in cui il numeratore è più grande di una unità del denominatore. Essendo tutte frazioni positive, l'insieme è limitato inferiormente dallo zero. Ma è anche limitato superiormente, poiché ogni frazione di A si può scrivere $1 + \frac{1}{n} \le 1 + 1 = 2,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Quindi A è limitato.

Definizione 5

- Dato A limitato superiormente, ogni numero N: $N \ge a$, $\forall a \in A$, si chiama **maggiorante** di A.
- Dato A limitato inferiormente, ogni numero N: $N \le a$, $\forall a \in A$, si chiama **minorante** di A.

Esempio 6

Tutti i numeri negativi e lo zero sono minoranti dell'insieme $A = \left\{\frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$. Tutti i numeri maggiori o uguali di 2 sono suoi maggioranti.

Fra i maggioranti e i minoranti di un insieme ve ne sono due che hanno un ruolo importante.

Teorema 1

- L'insieme dei maggioranti di un insieme limitato superiormente ha un numero minore di tutti gli altri.
- L'insieme dei minoranti di un insieme limitato inferiormente ha un numero maggiore di tutti gli altri.

Dimostrazione per esercizio

In vista del precedente risultato possiamo porre una nuova definizione.

Definizione 6

- Il minimo dei maggioranti di un insieme *A* limitato superiormente, si chiama **estremo superiore di *A***. Se tale numero appartiene ad *A* si dice **massimo di *A***.
- Il simbolo $+\infty$ si dice **estremo superiore** di ogni insieme non limitato superiormente.
- Il massimo dei minoranti di un insieme *A* limitato inferiormente, si chiama **estremo inferiore** di *A*. Se tale numero appartiene ad *A* si dice **minimo di *A*.**
- Il simbolo $-\infty$, si dice **estremo inferiore** di ogni insieme non limitato inferiormente.

Notazione 2

- L'estremo superiore di un insieme *X* si indica con $\sup_X$. Il massimo con $\max_X$.
- L'estremo inferiore di un insieme *X* si indica con $\inf_X$. Il minimo con $\min_X$.

Se l'insieme *X* si capisce dal contesto, possiamo eliminarlo dalla notazione scrivendo *sup*, *max*, *inf*, *min*.

Esempio 7

L'insieme $X = \{x^2: x\in \mathbb{R}\}$ è illimitato superiormente, quindi $\sup_X = +\infty$. È però limitato inferiormente, dato che tutti i suoi elementi sono non negativi. Non è difficile capire che il suo estremo inferiore è 0, poiché tutti i suoi minoranti sono numeri negativi o 0, che è quindi il massimo di questi minoranti. E poiché 0 è un elemento di *X* è anche il minimo.

Come si fa a determinare l'estremo superiore o l'estremo inferiore di un insieme limitato? Non è difficile comprendere che valgono le seguenti proprietà.

Teorema 2

L'estremo superiore di un insieme *X* limitato superiormente verifica le seguenti proprietà
a) $x \le sup$, $\forall x \in X$; b) comunque si considera un numero positivo ε, $sup - \varepsilon$ non è un maggiorante di *X*.

Dimostrazione

La proprietà a) viene fuori dalla stessa definizione, dato che *sup* è un maggiorante di *X*. La proprietà b) dipende dal fatto che *sup* è il minimo dei maggioranti, pertanto se gli togliamo una qualsiasi quantità, non importa quanto piccola, il numero ottenuto è più piccolo di *sup* e perciò il numero differenza delle due quantità non è più un maggiorante di *X*.

Vale anche un analogo risultato per l'estremo inferiore.

Teorema 3

L'estremo inferiore di un insieme *X* limitato inferiormente verifica le seguenti proprietà
a) $x \ge inf$, $\forall x \in X$; b) comunque si considera un numero positivo ε, $inf + \varepsilon$ non è un minorante di *X*.

Dimostrazione

Per esercizio, sulla falsariga del teorema sul *sup*.

Esempio 8

Dato $X = \left\{\frac{n+1}{n}, n\in \mathbb{N}\right\}$, il suo *inf* è 1, perché $1 \le \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$ e 1 + ε non è più un minorante. Infatti se consideriamo per esempio ε = 0,00001, che è un numero certamente molto piccolo avremo che nell'insieme *X* ci saranno infiniti numeri più piccoli di 1 + ε = 1,00001. Sono tutti quelli per cui si ha: $1+\frac{1}{n} < 1{,}00001 \Rightarrow \frac{1}{n} < 0{,}00001 = 10^{-5} \Rightarrow n > 10^5$. Quindi tutte le volte che consideriamo elementi di *X* ottenuti assegnando al parametro *n*, valori interi maggiori di 10^5 otteniamo numeri più piccoli di 1 + ε.. Stabilire che il *sup* è 2 è molto più facile perché $2\in X$, si ottiene assegnando 1 a *n* e ovviamente tutti gli altri elementi di *X* sono più piccoli di 2. Quindi 2 è anche massimo di *X*.

Valgono anche dei risultati nei casi in cui *inf* e *sup* non sono numeri reali.

Teorema 4

- Se un insieme X non è limitato superiormente, allora comunque consideriamo un numero positivo k, esistono infiniti elementi di X maggiori di k.
- Se un insieme X non è limitato inferiormente, allora comunque consideriamo un numero positivo k, esistono infiniti elementi di X minori di $-k$.

Verifiche

Livello 1

Stabilire quali dei seguenti insiemi sono intorni dei punti accanto indicati

1. (1; 2) di 0,5 ; (1; 2) di 2 ; (1; 2) di 0 ; (1; 2) di $\sqrt{2}$; (–1; 1,4) di $\sqrt{2}$; $\left[0;\sqrt{2}\right]$ di $\frac{1}{\sqrt{2}}$; (3; 3,14) di π

[Sì ; Sì ; No ; Sì ; No ; Sì ; No]

2. (0; 1) di $\frac{1}{3}$; (0; 1) di $\frac{1}{\pi}$; (2; 3) di $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; $\left(\sqrt{1+\sqrt{2}};\sqrt{1+\sqrt{3}}\right)$ di 1 ; (1; 1,5) di $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}$

[Sì ; Sì ; No ; No ; No]

Scrivere gli intorni dei punti di raggio r indicati

3. $I_1(2)$; $I_2(-1)$; $I_{\frac{1}{2}}(0)$; $I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{5}\right)$; $I_\pi(\pi)$; $I_{\frac{2}{5}}\left(\frac{1}{3}\right)$ $\left[(1;3);(-3;1);\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{15};\frac{11}{15}\right);(0;2\pi);\left(-\frac{1}{15};\frac{11}{15}\right)\right]$

4. $I_{\frac{1}{3}}\left(-\frac{2}{5}\right)$; $I_{\frac{1}{4}}\left(\frac{2}{3}\right)$; $I_{\sqrt{2}}(1)$; $I_1\left(\sqrt{2}\right)$; $I_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}\right)$

$\left[\left(-\frac{11}{15};-\frac{1}{5}\right);\left(\frac{5}{12};\frac{11}{12}\right);\left(1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right);\left(\sqrt{2}-1;1+\sqrt{2}\right);\left(\sqrt{3}-\sqrt{2};\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]$

Determinare centro e raggio dei seguenti intorni

5. (2; 5) ; (–5; –2) ; (1; 4) ; (–3; –1) $\left(\frac{1}{2};3\right)$; $\left(-\frac{1}{2};3\right)$ $\left[I_{\frac{7}{3}}(3);I_{-\frac{7}{2}}(3);I_{\frac{5}{2}}(3);I_{-2}(2);I_{\frac{7}{4}}\left(\frac{5}{2}\right);I_{\frac{5}{4}}\left(\frac{7}{2}\right)\right]$

6. $\left(\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right)$; $\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{4}\right)$; $\left(0;\sqrt{2}\right)$; $\left(1-\sqrt{2};1\right)$; $\left(-\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$

$\left[I_{\frac{7}{8}}\left(\frac{5}{4}\right);I_{-\frac{7}{8}}\left(\frac{5}{4}\right);I_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\sqrt{2}\right);I_{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\left(\sqrt{2}\right);I_{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]$

Lavoriamo insieme

Determinare gli estremi dell'insieme $X=\left\{\frac{n+2}{n-2}:n\in\mathbb{N},n\geq 3\right\}$.

Possiamo scrivere $\frac{n+2}{n-2}=\frac{n-2+4}{n-2}=\frac{n-2}{n-2}+\frac{4}{n-2}=1+\frac{4}{n-2}$, il che vuol dire che tutti gli elementi di *X* sono maggiori di 1. Inoltre all'aumentare di *n* aumenta il denominatore, quindi diminuisce la frazione. Perciò per il primo valore che si assegna a *n*, cioè 3, otteniamo il massimo dell'insieme: $\frac{4\cdot 3+2}{4\cdot 3-2}=\frac{14}{10}=\frac{7}{5}$. 1 è invece l'estremo inferiore, che non è minimo perché non appartiene a *X*. Infatti, per quanto detto ogni elemento di *X* è maggiore di 1, mentre se consideriamo 1 + ε, con ε>0, ci sono elementi di *X* minori di 1 + ε. Infatti:

$$\frac{n+2}{n-2}<1+\varepsilon\Rightarrow 1+\frac{4}{n-2}<1+\varepsilon\Rightarrow\frac{4}{n-2}<\varepsilon\Rightarrow\frac{n-2}{4}>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow n>2+\frac{4}{\varepsilon}$$

Così per esempio se $\varepsilon=10^{-5}$, tutti gli elementi di *X* che si ottengono assegnando a *n* valori maggiori di $2+\frac{4}{10^{-5}}=2+400000=400002$ sono più piccoli di $1+10^{-5}=1,00001$. Calcoliamone qualcuno.

$$\frac{400003+2}{400003-2}=\frac{400005}{400001}\approx 1,000009<1,00001$$

Determinare estremo superiore ed estremo inferiore degli insiemi seguenti, dire se eventualmente ci sono massimo o minimo

Livello 2

7. $\left\{\frac{2n+3}{5n}; n \in \mathbb{N}\right\}; \left\{\frac{n-1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}; \left\{n+\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$

[(*inf* = 0, *max* = 1) ; (*min* = 0, *sup* = 1) ; (*min* = 2, *sup* = +∞)]

8. $\left\{\frac{1-n^2}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}; \left\{\frac{3n^2-1}{2n^2}; n \in \mathbb{N}\right\}; \left\{\frac{3n^2+1}{2n^2}; n \in \mathbb{N}\right\}$

$\left[(inf = -\infty,\ max = 0)\ ;\ \left(min = 1,\ sup = \frac{3}{2}\right)\ ;\ \left(inf = \frac{3}{2},\ max = 2\right)\right]$

Livello 3

9. $\left\{(-1)^n \cdot \frac{2n+3}{5n}; n \in \mathbb{N}\right\}; \left\{(-1)^n \cdot \frac{n-1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}; \left\{(-1)^n \cdot \frac{3n^2+1}{4n-1}; n \in \mathbb{N}\right\}; \left\{\frac{n^2+n-1}{n^2-n+1}; n \in \mathbb{Z}\right\}$

$\left[\left(min = -1,\ max = \frac{7}{5}\right)\ ;\ (inf = -1,\ sup = 1)\ ;\ (inf = -\infty,\ sup = +\infty)\ ;\ \left(min = -1;\ max = \frac{5}{3}\right)\right]$

I limiti delle funzioni reali di una variabile reale

La Natura rifugge dall'infinito, poiché esso è senza fine o imperfetto e la Natura va sempre alla ricerca di un termine.
Aristotele, Generazione degli animali

Il problema

Data una funzione non definita in un suo punto di accumulazione P, come si comporta la stessa funzione in un intorno di P?

Cominciamo a considerare un esempio.

Esempio 9

Sia la funzione $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, il cui insieme di esistenza è $x \neq 1$. $x = 1$ è di accumulazione per il dominio, poiché la funzione non è definita solo per $x = 1$, quindi comunque consideriamo un suo intorno, in esso troviamo infiniti valori del dominio. Possiamo perciò avvicinarci a 1 con qualsiasi approssimazione. Cominciamo a osservare che possiamo avvicinarci a 1 sia per valori minori che per valori maggiori di 1.

In vista di quanto stabilito nell'esempio precedente poniamo una nuova definizione.

Definizione 7

- Dato un numero a, l'intervallo $(b; a)$, in cui b è un numero reale minore di a o il simbolo $-\infty$, si chiama **intorno sinistro di *a***.
- Dato un numero a, l'intervallo $(a; b)$, in cui b è un numero reale maggiore di a o il simbolo $+\infty$, si chiama **intorno destro di *a***.

Notazione 3

- Un intorno sinistro di a, di raggio r, si indica con $I_r^-(x_0) = (x_0 - r; x_0)$.
- Un intorno destro di a, di raggio r, si indica con $I_r^+(x_0) = (x_0; x_0 + r)$.

Adesso possiamo procedere con il processo di "avvicinamento" al punto di accumulazione.

Esempio 10

Calcoliamo alcuni valori della funzione $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, per valori presi a caso in un intorno sinistro di 1 di raggio arbitrario, ma "abbastanza" piccolo.

x	0,9	0,95	0,99	0,997	0,9991	0,9999	0,99999
$f(x)$	–19	–39	–199	≈ –666	≈ –2221	≈ –19999	≈ –199999

I valori ottenuti ci suggeriscono che all'avvicinarci al valore 1 da sinistra, la funzione tende a diventare sempre più piccola, senza un apparente limitazione. Vediamo cosa accade invece avvicinandoci dalla destra di 1.

x	1,1	1,03	1,004	1,001	1,0002	1,00001	1,000001
$f(x)$	21	67	501	2001	10001	200001	2000001

Quindi stavolta la funzione tende a diventare sempre più grande senza alcuna apparente limitazione.

Tenendo conto dei risultati dell'esempio precedente cosa possiamo dire sulla funzione $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$? Certamente che la funzione è illimitata e che quindi il suo *inf* è $-\infty$, mentre il suo *sup* è $+\infty$. In effetti possiamo dire di più, cioè possiamo stabilire cosa accade quando ci avviciniamo a tali estremi. Possiamo allora porre le seguenti definizioni.

Definizione 8

Data una funzione $y = f(x)$ e un punto di accumulazione x_0 del suo dominio

- se l'*inf* di $f(x)$, per x appartenente a un qualsiasi intorno (completo, sinistro, destro) di x_0 è $-\infty$, diciamo che la funzione $f(x)$ **diverge negativamente per x che tende (a x_0, a x_0 dalla sinistra, a x_0 dalla destra)**.
- se il *sup* di $f(x)$, per x appartenente a un qualsiasi intorno (completo, sinistro, destro) di x_0 è $+\infty$, diciamo che la funzione $f(x)$ **diverge positivamente per x che tende (a x_0, a x_0 dalla sinistra, a x_0 dalla destra)**.

Notazione 4

- Per dire che $f(x)$ diverge negativamente per x che tende (a x_0, a x_0 dalla sinistra, a x_0 dalla destra) scriviamo $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ e leggiamo *limite per x che tende (a x_0, a x_0 da sinistra, a x_0 da destra) di $f(x)$ è meno infinito*.
- Per dire che $f(x)$ diverge positivamente per x che tende (a x_0, a x_0 dalla sinistra, a x_0 dalla destra) scriviamo $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ e leggiamo *limite per x che tende (a x_0, a x_0 da sinistra, a x_0 da destra) di $f(x)$ è più infinito*.

Ovviamente non si deve pensare che se tendiamo da sinistra il limite è meno infinito e da destra più infinito.

Esempio 11

Se avessimo considerato la funzione $f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2}$, avremmo ovviamente ottenuto sempre valori positivi in qualsiasi intorno, destro o sinistro, di 1, pertanto avremmo scritto $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{(x-1)^2} = +\infty$. Allo stesso modo avremmo: $\lim_{x\to 1} \frac{-x}{(x-1)^2} = -\infty$.

In effetti le verifiche effettuate non ci assicurano che il limite di una certa funzione è più o meno infinito.

Esempio 12

La funzione $f(x) = \frac{10^5 x^2 - 99999x - 1}{x-1}$, non è definita per $x = 1$. Se effettuiamo il processo di avvicinamento a 1, otterremo, per esempio: $f(0,9) = 90001$, e $f(0,999) = 99901$. Quindi anche in questo caso potremmo congetturare che $\lim_{x\to 1^-} \frac{10^5 x^2 - 99999x - 1}{x-1} = +\infty$. In realtà ciò non è vero, perché anche se abbiamo ottenuto ordinate "molto grandi", non è detto che otterremo qualsiasi valore grande "a piacere". In effetti non si otterranno mai valori superiori a 100001, come si vedrà meglio in seguito.

Dobbiamo quindi trovare un metodo "migliore" per stabilire se il limite di una funzione è o no infinito.

Teorema 5

Una funzione $f(x)$ ammette limite più infinito per x che tende (a x_0, a x_0 dalla sinistra, a x_0 dalla destra) di accumulazione per il dominio di f, se, comunque fissiamo un numero positivo k, si ha $f(x) > k$, per tutti gli x appartenenti a un intorno (completo, sinistro, destro) di x_0.

Dimostrazione

Consideriamo solo il caso $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, gli altri due casi (con intorno sinistro o destro) si dimostrano allo stesso modo. Abbiamo detto che ciò significa che comunque consideriamo un intorno di x_0, il suo *sup* è $+\infty$. Ma il teorema 4 dice che comunque consideriamo un numero positivo k, allora vi sono infiniti elementi dell'intorno maggiori di k. E siccome ciò accade per ogni k e per ogni raggio dell'intorno, vuol dire che esiste un intorno in cui tutti gli elementi sono maggiori di k.

Adesso possiamo stabilire veramente se entrambe le funzioni viste negli esempi tendono o no a più infinito.

Esempio 13

- È vero che $\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1}=+\infty$? Fissiamo un generico numero positivo k e vediamo per quali x si ha:

$$f(x)>k\Rightarrow\frac{x+1}{x-1}>k\Rightarrow\frac{x+1-kx+k}{x-1}>0\Rightarrow\frac{(1-k)\cdot x+1+k}{x-1}>0\Rightarrow(1-k)\cdot x+1+k>0$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo eliminato il denominatore perché stiamo indagando gli intorni destri di 1, per i quali quindi $x > 1$ e perciò $x - 1 > 0$. Possiamo anche pensare che $1 - k < 0$, dato che stiamo supponendo che k sia un numero positivo "abbastanza" grande. Quindi avremo:

$$(k-1)\cdot x-1-k<0\Rightarrow x<\frac{1+k}{k-1}=\frac{k-1+2}{k-1}=\frac{k-1}{k-1}+\frac{2}{k-1}=1+\frac{2}{k-1}$$

Abbiamo scritto la soluzione in modo da essere facilmente confrontabile con il numero 1. Dato che $x > 1$, la funzione è maggiore del k fissato per $1<x<1+\frac{2}{k-1}$, che è un intorno destro di 1 di raggio $\frac{2}{k-1}$. Quindi possiamo dire che effettivamente $\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1}=+\infty$. Anzi possiamo dire di più. possiamo dire per esempio che per $k = 1000$, tutti gli elementi dell'intorno destro di 1 di raggio $\frac{2}{1000-1}=\frac{2}{999}\approx 0,002$ fanno assumere a $f(x)$ valori maggiori di 1000. Ciò non è detto per altri valori, così $f(1,1) = 21 < 1000$.

- Adesso vediamo se è vero che $\lim_{x\to 1^-}\frac{10^5x^2-99999x-1}{x-1}=+\infty$. Intanto osserviamo che :

$$\frac{10^5x^2-99999x-1}{x-1}=\frac{(x-1)\cdot(10000x+1)}{x-1}=10000x+1$$

Quindi basta considerare la semplice disequazione $10000\,x + 1 > k$ (*) la cui soluzione è $x>\frac{k-1}{10000}$ e tenuto conto che siamo in un intorno sinistro di 1, avremo $f(x) > k$ per $\frac{k-1}{10000}<x<1$, che è un intorno di 1 solo se $\frac{k-1}{10000}<1\Rightarrow k-1<10000\Rightarrow k<9999$. Quindi la (*) non è vera per qualsiasi valore di k. Per esempio se fosse $k = 10^6$, avremmo $10000\,x + 1 > 10^6 \Rightarrow x>\frac{10^6-1}{10^4}\approx 100$, che certamente non rappresenta un intorno sinistro di 1. Quindi è falso che $\lim_{x\to 1^-}\frac{10^5x^2-99999x-1}{x-1}=+\infty$.

In modo analogo possiamo stabilire un modo per determinare se il limite di una funzione è meno infinito.

Teorema 6

Una funzione $f(x)$ ammette limite meno infinito per x che tende (a x_0, a x_0 dalla sinistra, a x_0 dalla destra) di accumulazione per il dominio di f, se, comunque fissiamo un numero positivo k, si ha $f(x) < -k$, per tutti gli x di un intorno (completo, sinistro, destro) di x_0.

Dimostrazione Per esercizio, sulla falsariga di quella del teorema 5.

Ovviamente non è detto che una funzione tenda sempre a più o a meno infinito, come abbiamo già visto nel caso del $\lim_{x\to 1^-}\frac{10^5x^2-99999x-1}{x-1}$, che ancora non sappiamo quanto valga; però abbiamo visto che se x è diverso da 1, si ha: $\frac{10^5x^2-99999x-1}{x-1}=10000x+1$. Le due funzioni non sono uguali perché

$f\left(x\right)=\frac{10^5x^2-99999x-1}{x-1}$ ha dominio $x \neq 1$, mentre $g(x) = 10000x + 1$ ha dominio tutti i numeri reali. Diciamo che le funzioni sono "quasi uguali". Ma allora non è difficile pensare che se $f(x) = g(x)$, $\forall\ x \neq 1$, allora $\lim_{x\to1} f\left(x\right)=\lim_{x\to1} g\left(x\right)$. E ovviamente $\lim_{x\to1} g\left(x\right)=g\left(1\right)=10001$. Per il momento ci accontentiamo di parlare "per intuizione", in seguito saremo più rigorosi. Il nostro attuale interesse è quello di precisare cosa significa che una funzione, al tendere di x a un punto di accumulazione del suo dominio, tende a un numero piuttosto che a infinito.

Definizione 9

Diciamo che $f(x)$ **converge a ℓ per x che tende (a x_0, a x_0 dalla sinistra, a x_0 dalla destra)** punto di accumulazione del suo dominio, se in ogni intorno di ℓ esistono infiniti valori di $f(x)$ per cui x appartiene a un intorno (completo, sinistro, destro) di x_0.

Esempio 14

La funzione $f\left(x\right)=\frac{x^3-x^2-3x+2}{x-2}$ non è definita per $x = 2$. Effettuiamo il processo di avvicinamento a 2:

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	2,1	2,01	2,001	2,0001
$f(x)$	4,51	≈ 4,95	≈ 4,995	≈4,9995	5,51	≈5,05	≈5,005	≈5,0005

In effetti abbiamo la sensazione di stare avvicinandoci a un numero, che, solo perché siamo abituati a pensare in termini di numeri interi, "potrebbe essere" 5, ma in effetti potrebbe anche essere 5,00000001 o 4,99999 o un altro valore simile.

Il precedente ci ha fornito un esempio di funzione che *potrebbe* convergere, anche se non ci da la sicurezza del numero verso il quale converge. Abbiamo quindi bisogno di un risultato che ci permetta di verificare se la nostra sensazione è corretta.

Teorema 7

Una funzione $f(x)$ ammette per limite un numero reale ℓ per x che tende a x_0 di accumulazione per il dominio di f, se, comunque fissiamo un numero $\varepsilon > 0$ esiste un numero $\delta > 0$, tale che se si ha $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ si ha anche $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$.

Dimostrazione

Non abbiamo fatto altro che "tradurre" la definizione di funzione convergente in termini di disequazioni.

Esempio 15

Adesso possiamo stabilire se è vero che $\lim_{x\to2}\frac{x^3-x^2-3x+2}{x-2}=5$. Dobbiamo risolvere la disequazione $5-\varepsilon<\frac{x^3-x^2-3x+2}{x-2}<5+\varepsilon$ e le sue soluzioni devono appartenere a un intorno di 2, cioè devono essere del tipo $2 - \delta < x < 2 + \delta$. Cominciamo a vedere se riusciamo a semplificare la frazione. Si vede che $x^3-x^2-3x+2=\left(x-2\right)\cdot\left(x^2+x-1\right)$, quindi $5-\varepsilon<\frac{\left(x-2\right)\cdot\left(x^2+x-1\right)}{x-2}<5+\varepsilon$. Possiamo semplificare poiché stiamo supponendo che sia $x \neq 2$, ottenendo $5 - \varepsilon < x^2 + x - 1 < 5 + \varepsilon$. Abbiamo quindi le due disequazioni: $x^2 + x - 6 - \varepsilon < 0$; $x^2 + x - 6 + \varepsilon > 0$; le cui soluzioni sono:

$$\left(\frac{-1-\sqrt{25-4\varepsilon}}{2}<x<\frac{-1+\sqrt{25-4\varepsilon}}{2}\right)\wedge\left(x<\frac{-1-\sqrt{25+4\varepsilon}}{2}\vee x>\frac{-1+\sqrt{25+4\varepsilon}}{2}\right)$$

Ora $\sqrt{25-4\varepsilon}<5,\sqrt{25+4\varepsilon}>5$, quindi $\frac{-1+\sqrt{25-4\varepsilon}}{2}<\frac{-1+5}{2}=2\wedge\frac{-1+\sqrt{25+4\varepsilon}}{2}>\frac{-1+5}{2}=2$. Perciò

$\frac{-1+\sqrt{25-4\varepsilon}}{2} \approx 2-\alpha \wedge \frac{-1+\sqrt{25+4\varepsilon}}{2} \approx 2+\beta$, in cui α e β sono due opportuni numeri reali; abbiamo allora: $2 - \alpha < x < 2 + \beta$. Se perciò prendiamo $\delta = min(\alpha, \beta)$, abbiamo finito, dato che si avrà: $2 - \delta < x < 2 + \delta$.

Abbiamo visto perciò funzioni che divergono e funzioni che convergono, ma, come visto per le successioni, potrebbe succedere anche un altro fatto.

Esempio 16

Consideriamo $f(x) = sin\left(\frac{1}{x}\right)$, che non è definita per $x = 0$. In tabella studiamo un intorno di 0.

x	–0,1	–0,01	–0,001	–0,0001	–0,00001
$sin(1/x)$	≈0,544	≈0,506	≈–0,826	≈0,306	≈0,350

Abbiamo ottenuto numeri quasi *a caso*, pertanto non ci sentiamo di dire che vi è convergenza, del resto la funzione è limitata sia superiormente che inferiormente, quindi il limite non può essere infinito.

Poniamo allora l'ultima definizione per il comportamento di una funzione nell'intorno di un suo punto di accumulazione.

Definizione 10

Diciamo che $f(x)$ è **oscillante per x che tende (a x_0, a x_0 dalla sinistra, a x_0 dalla destra)** punto di accumulazione del suo dominio, se non è né convergente, né divergente.

Abbiamo considerato il comportamento nell'intorno di un punto di oscillazione, ma, per le funzioni il cui dominio contiene intervalli illimitati del tipo $(a; +\infty)$ o $(-\infty; a)$, possiamo anche considerare cosa accade all'aumentare (o al diminuire) indiscriminato dell'ascissa.

Esempio 17

La funzione $\frac{3x+1}{2x-1}$ ha dominio $x \neq \frac{1}{2}$, ha perciò senso indagare come si comporta la funzione per valori molto "grandi" o molto "piccoli" di x.

x	100	5000	12478	124578	3587945
$\frac{3x+1}{2x-1}$	≈ 1,512	≈ 1,500	≈ 1,500	≈ 1,500	≈ 1,500

Possiamo cioè costruire una tabella come quella mostrata.

Intuitivamente possiamo dire che la funzione, all'aumentare indiscriminato della sua ascissa, converge verso un valore prossimo a 1,5.

Definizione 11

Se il dominio di $f(x)$ contiene un intervallo del tipo $(a; +\infty)$ (rispettivamente $(-\infty; a)$), diciamo che $f(x)$ **converge a ℓ per x che tende a più infinito** (rispettivamente **a meno infinito**), se, comunque fissiamo un numero positivo k, allora in ogni intorno di ℓ esistono infiniti valori di $f(x)$ per $x > k$ ($x < -k$).

Notazione 5

Se $f(x)$ converge a ℓ per x che tende a più (meno) infinito scriviamo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell\right)$.

Vediamo un risultato che permette il calcolo del limite.

Teorema 8

Si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \right)$ se, comunque fissiamo un numero positivo ε, esiste un numero positivo *k*, tale che quando si ha *x* > *k* (*x* < – *k*) si ha anche ℓ – ε < *f*(*x*) < ℓ + ε.

Dimostrazione Segue dalla *traduzione* della definizione 11.

Esempio 18

Vediamo se effettivamente si ha: $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{2x-1}=\frac{3}{2}$. Risolviamo la disequazione $\frac{3}{2}-\varepsilon<\frac{3x+1}{2x-1}<\frac{3}{2}+\varepsilon$.

Abbiamo: $\frac{3-2\varepsilon}{2}<\frac{3x+1}{2x-1}<\frac{3+2\varepsilon}{2} \Rightarrow \begin{cases}\frac{3x+1}{2x-1}<\frac{3+2\varepsilon}{2}\\ \frac{3x+1}{2x-1}>\frac{3-2\varepsilon}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}6x+2<6x+4\varepsilon x-3-2\varepsilon\\ 6x+2>6x-4\varepsilon x-3+2\varepsilon\end{cases}$. Abbiamo eliminato il denominatore 2*x* – 1 perché stiamo studiando il comportamento per *x* che tende a più infinito, quindi esso è certamente positivo. Continuiamo: $\begin{cases}4\varepsilon x>5+2\varepsilon\\ 4\varepsilon x>-5+2\varepsilon\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>\frac{5+2\varepsilon}{4\varepsilon}\\ x>\frac{-5+2\varepsilon}{4\varepsilon}\end{cases} \Rightarrow x>\frac{5+2\varepsilon}{4\varepsilon}$. Essendo ε un numero positivo "abbastanza" piccolo avremo: $\frac{-5+2\varepsilon}{4\varepsilon}<0$, ecco spiegata la soluzione del sistema. Possiamo ancora scrivere $x>\frac{5}{4\varepsilon}+\frac{1}{2}$ che è il numero *k* cercato. Per esempio considerato l'intorno di raggio $\varepsilon=10^{-5}$ avremo $x>\frac{5}{4\cdot 10^{-5}}+\frac{1}{2}=125000,5$.

In modo analogo possiamo definire la divergenza di una funzione per *x* che tende all'infinito.

Definizione 12

Se il dominio di *f*(*x*) contiene un intervallo del tipo (*a*; +∞) (rispettivamente (–∞; *a*)]), diciamo che *f*(*x*) **diverge a più (meno) infinito per *x* che tende a più (meno) infinito**, se, comunque fissiamo un numero positivo *k* esiste un numero positivo *h* per cui si ha *f*(*x*) > *k* (rispettivamente *f*(*x*) < – *k*) per *x* > *h* (*x* < – *k*).

Notazione 6

Per indicare che *f*(*x*) diverge per *x* che tende a più (meno) infinito scriviamo $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty \left(\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty\right)$

Esempio 19

Per stabilire che $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{2-x}=-\infty$, dobbiamo risolvere la disequazione $\frac{x^2+1}{2-x}<-k$. Essendo *x* che tende a più infinito possiamo dire che 2 – *x* < 0 e perciò scriviamo: $\frac{x^2+1}{x-2}>k \Rightarrow x^2+1>kx-2k \Rightarrow x^2-kx+2k+1>0$

Consideriamo solo la soluzione positiva: $x>\frac{k+\sqrt{k^2-8k-4}}{2}$, essendo *k* "molto grande", anche $h=\frac{k+\sqrt{k^2-8k-4}}{2}$ lo è. Per esempio se $k=10^{10} \Rightarrow h=\frac{10^{10}+\sqrt{10^{20}-8\cdot 10^{10}-4}}{2}\approx 10^{10}$.

Chiudiamo il paragrafo con un risultato apparentemente intuitivo, ma di fondamentale importanza.

Teorema 9 (di unicità del limite)

Se una funzione ha limite per x che tende a un punto di accumulazione o a uno dei simboli più o meno infinito, tale limite è unico.

Dimostrazione

Lo proveremo solo nel caso $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, lasciando gli altri casi per esercizio. Ovviamente, per la stessa definizione, non potrà accadere $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \vee \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. Supponiamo invece, per assurdo, che accada $\lim_{x \to +\infty} f(x) = m \in \mathbb{R}$, ovviamente con $m \neq \ell$. Ora dire che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ equivale a dire che, comunque fissiamo un numero positivo ε, esiste un numero positivo k per cui: $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon, \forall x > k$. Analogamente $\lim_{x \to +\infty} f(x) = m \in \mathbb{R}$ vuol dire che, scelto lo stesso ε esiste un numero positivo h per cui si ha: $m - \varepsilon < f(x) < m + \varepsilon, \forall x > h$. Se $h = k$ quindi valgono entrambe per ogni $x > k$, se ciò non accade varranno per il più grande fra h e k. Per non perdere di generalità indichiamo con M il più grande fra i detti numeri. Avremo allora: $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon, m - \varepsilon < f(x) < m + \varepsilon, \forall x > M$. Ma allora se sottraiamo termine a termine troviamo: $\ell - \varepsilon - (m - \varepsilon) < \ell + \varepsilon - (m + \varepsilon) \Rightarrow \ell - m < \ell - m$, che è assurdo perché non esistono numeri minori di se stessi.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo congetturare il valore del $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}$. Costruiamo la seguente tabella:

x	0,9	0,98	0,991	1, 2	1,03	1,005
$\frac{x^3-1}{x^2-1}$	$\approx$1,426	$\approx$1,485	$\approx$1,493	$\approx$1,654	$\approx$1,522	$\approx$1,504

Possiamo quindi congetturare che per x che tende a 1, $\frac{x^3-1}{x^2-1}$ converge a un valore *vicino* a 1,5.

Congetturare, giustificando la risposta, se i seguenti limiti rappresentano convergenza (C), divergenza (D) o oscillazione (O)

Livello 1

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-6x^2+15x-14}{x^2-4}$; $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2-x+3}{x^2-9}$; $\lim\limits_{x\to 5^+}\frac{x^2-2}{3\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt{5}\right)}$; $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^3-5x^2+3x-15}{x^2-25}$ [C ; C ; D ; C]

2. $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^3-5x^2+3x-15}{x^2-25}$; $\lim\limits_{x\to 2}\cos\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$; $\lim\limits_{x\to 4^+}\frac{x^2-1}{5\cdot\left(\sqrt{x}-2\right)}$; $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{5\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)}$ [D; O; D; C]

3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{5x-1}{x^2-4}$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{-3x^2+1}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{7x^2+x-1}{3x^2}$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x-x^2+1}{3x+1}$ [C ; D ; C ; D]

Livello 2

4. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{3x-1}-\sqrt{7x+2}\right)$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{13x-2}-\sqrt{13x+8}\right)$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sin(x)}{x+1}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} x\cdot\sin(x)$ [D ; C ; C ; O]

5. $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x-2}}$; $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x-2}}$; $\lim\limits_{x\to -1}\frac{e^{x+1}-1}{(x+1)^2}$; $\lim\limits_{x\to -1}\frac{e^{x+1}-1}{x+1}$ [D ; C ; D ; C]

Livello 3

6. $\lim\limits_{x\to 0} f(x), f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$; $\lim\limits_{x\to 3}\lfloor x\rfloor$; $\lim\limits_{x\to 1{,}5}\lfloor x\rfloor$; $\lim\limits_{x\to 2}\left(\lceil x\rceil-\lfloor x\rfloor\right)$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\lceil x\rceil$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x), f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x>0\\ -\frac{1}{x} & x<0\end{cases}$

[O ; O ; C ; C ; D ; C]

Livello 2

7. Sapendo che $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x^2+3}{x+1}=+\infty$, determinare l'intorno destro di –1 in cui si ha $f(x) > 1014$

$\left[-1<x<507-2\cdot\sqrt{64515}\approx -0{,}99\right]$

8. Sapendo che $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$, determinare l'intorno di 2 in cui si ha $3{,}99999 < f(x) < 4{,}00001$

[$1{,}99999 < x < 2{,}00001$]

9. Sapendo che $\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{2x^2+1}{x+2}=+\infty$, determinare l'intorno destro di –2 in cui si ha $f(x) > 3547$

$\left[-2<x<\frac{3547-3\cdot\sqrt{1404217}}{4}\approx -1{,}99\right]$

10. Sapendo che $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$, determinare l'intorno di 1 in cui si ha 1,9999 < $f(x)$ < 2,0001

[0,9999 < x < 1,0001]

11. Sapendo che $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x+5}{x-2}=-\infty$, determinare l'intorno sinistro di 2 in cui si ha $f(x) < -540$

$\left]1{,}987\approx\frac{1075}{541}<x<2\right[$

12. Sapendo che $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=1$, determinare il minimo k per cui si ha 0,999<$f(x)$< 1,001, $\forall x>k$

$\left[x>\sqrt{1999}\right]$

13. Sapendo che $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{3x+2}=+\infty$, determinare il minimo k per cui si ha $f(x)$ > 72548, $\forall x>k$

$\left[x>108822+2\cdot\sqrt{2960593195}\right]$

14. Sapendo che $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{x+3}=-\infty$, determinare il minimo k per cui si ha $f(x)$ < –25478, $\forall x>k$

$\left[x>12739+2\cdot\sqrt{40589639}\right]$

Spiegare perché i seguenti limiti non hanno significato

Livello 3

15. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2-x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x-2}{\sqrt{1-x}}$; $\lim\limits_{x\to 2} sin^{-1}(x)$; $\lim\limits_{x\to -3^+}\frac{ln(1+x)}{\sqrt{x+3}}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1)^3$

16. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} sec^{-1}(x)$; $\lim\limits_{x\to 4} ln\left[sin(x)\right]$; $\lim\limits_{x\to 2} cos^{-1}\left[log_2\left(x^2\right)\right]$; $\lim\limits_{x\to 2} log_{1-x}(x)$

Lavoriamo insieme

Verificare che $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{3}{2}$. Dobbiamo risolvere la disequazione $\frac{3}{2}-\varepsilon<\frac{x^3-1}{x^2-1}<\frac{3}{2}+\varepsilon,\varepsilon>0$.

Essendo $x \neq 1$, possiamo semplificare la frazione:

$$\frac{3}{2}-\varepsilon<\frac{\cancel{(x-1)}\cdot\left(x^2+x+1\right)}{\cancel{(x-1)}\cdot(x+1)}<\frac{3}{2}+\varepsilon\Rightarrow\frac{3}{2}-\varepsilon<\frac{x^2+x+1}{x+1}<\frac{3}{2}+\varepsilon\Rightarrow\begin{cases}2x^2+2x+2>(3-2\varepsilon)\cdot(x+1)\\2x^2+2x+2<(3+2\varepsilon)\cdot(x+1)\end{cases}$$

Non ci sono problemi a eliminare il denominatore perché certamente positivo in un intorno di 1.

$$\begin{cases}2x^2+(2\varepsilon-1)\cdot x+2\varepsilon-1>0\\2x^2-(2\varepsilon+1)\cdot x-2\varepsilon-1<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<\frac{1-2\varepsilon-\sqrt{4\varepsilon^2-20\varepsilon+9}}{4}\vee x>\frac{1-2\varepsilon+\sqrt{4\varepsilon^2-20\varepsilon+9}}{4}\\\frac{1+2\varepsilon-\sqrt{4\varepsilon^2+20\varepsilon+9}}{4}<x<\frac{1+2\varepsilon+\sqrt{4\varepsilon^2+20\varepsilon+9}}{4}\end{cases}$$

Abbiamo: $\sqrt{4\varepsilon^2-20\varepsilon+9}>\sqrt{4\varepsilon^2-12\varepsilon+9}=3-2\varepsilon;\sqrt{4\varepsilon^2+20\varepsilon+9}>\sqrt{4\varepsilon^2+12\varepsilon+9}=2\varepsilon+3$, quindi possiamo dire che si ha: $x>\frac{1-2\varepsilon+\sqrt{4\varepsilon^2-20\varepsilon+9}}{4}>\frac{1-2\varepsilon+3-2\varepsilon}{4}=1-\varepsilon$; oppure l'altro senso della disuguaglianza: $x<\frac{1+2\varepsilon+\sqrt{4\varepsilon^2+20\varepsilon+9}}{4}<\frac{1+2\varepsilon+2\varepsilon+3}{4}=1+\varepsilon$. Cioè x appartiene a un intorno di 1, che è quello che volevamo provare.

Verificare la validità delle seguenti uguaglianze

Livello 1

17. $\lim_{x\to 1}\left(x^2-x+1\right)=1$; $\lim_{x\to 0} ln\left(2x+1\right)=0$; $\lim_{x\to 0} sin\left(x\right)=0$; $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\left(3x+1\right)=\frac{5}{2}$; $\lim_{x\to -2}\frac{x+1}{x-1}=\frac{1}{3}$

18. $\lim_{x\to 1^+}\sqrt{3x+1}=2$; $\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{2x}=0$; $\lim_{x\to 0} e^{x+1}=e$; $\lim_{x\to 2}\left(x+1\right)^3=27$; $\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1}=+\infty$

19. $\lim_{x\to +\infty}\left(x^2-1\right)=+\infty$; $\lim_{x\to 3^+} ln\left(x-3\right)=-\infty$; $\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0$; $\lim_{x\to \infty} sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$; $\lim_{x\to -\infty}\frac{1-x}{2}=+\infty$

Livello 2

20. $\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2-1}{x+1}=-2$; $\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x^2-1}=-\infty$; $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x-2}=-1$; $\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-4}{x^2-9}=-\infty$; $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=12$

21. $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2}=1$; $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x+1}{3x-1}=\frac{2}{3}$; $\lim_{x\to 0^+}\frac{sin\left(x\right)+1}{sin\left(x\right)}=+\infty$; $\lim_{x\to -\infty}\frac{3x}{x^2-2}=-\infty$; $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x+1}{e^x-1}=+\infty$

22. $\lim_{x\to 1^-}\frac{ln\left(x\right)+1}{ln\left(x\right)}=-\infty$; $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}-1}{2\cdot\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$; $\lim_{x\to 1}\frac{e^{2x}-1}{e^x-1}=e+1$; $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{x+3}=+\infty$; $\lim_{x\to \pi^+}\frac{1-cos\left(x\right)}{1+cos\left(x\right)}=-\infty$

Verificare la falsità delle seguenti uguaglianze

Livello 1

23. $\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-1}=1$; $\lim_{x\to 0}\frac{3x+1}{2x-1}=3$; $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{1+2x}=47$; $\lim_{x\to 0}\frac{2x-1}{3x+2}=\frac{3}{2}$; $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=1$

24. $\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{1+2x}=+\infty$; $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}=2$; $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x+x^2}{2x-1}=1$; $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x+2}=4$

Continuità di una funzione

Il calcolo richiede la continuità, e la continuità richiede l'infinitamente piccolo; ma nessuno è in grado di dire cosa potrebbe essere l'infinitamente piccolo.
Bertrand Russell (1872–1970)

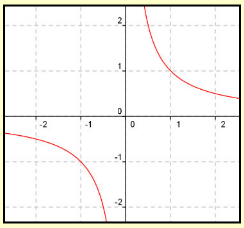
Il problema

Spesso nel linguaggio di ogni giorno usiamo il vocabolo continuo, per esempio parlando di un *procedimento continuo*, di una *applicazione continua* e via dicendo, intendendo con tale termine il fatto che non vi sono interruzioni nelle procedure. Abbiamo già parlato degli insiemi continui in matematica, vogliamo adesso precisare ancor meglio ciò che vuol dire *continuo* per le funzioni.

Abbiamo già visto che il processo di limite è consentito solo per i punti di accumulazione, poiché il processo di avvicinamento non può avvenire per "salti", ma deve essere un processo continuo, intendendo con questo termine proprio quello che abbiamo già stabilito per gli insiemi, il fatto cioè che non vi siano "buchi". Quindi ovviamente una funzione per essere continua in un intervallo deve essere definita in tutti i punti dell'intervallo.

Esempio 20

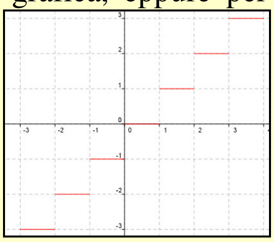
La funzione $y=\frac{1}{x}$ non può essere continua in alcun intervallo che contiene $x = 0$, poiché in quel valore non è definita. Infatti se andiamo a rappresentarla (e lo sappiamo fare perché non è altro che l'iperbole equilatera $xy = 1$), ha un grafico che in ogni intervallo che contiene $x = 0$ è "spezzato". È invece continua in ogni intervallo che non contiene $x = 0$.



Vi sono però funzioni che, pur essendo definite per dati valori di x, per gli stessi valori non sono continue (considerando ancora in modo intuitivo questo termine).

Esempio 21

La funzione *floor* o pavimento: $f(x) = \lfloor x \rfloor$, che abbiamo già trattato non è continua per alcun valore intero di x, come si vede dalla sua rappresentazione grafica, eppure per ognuno di questi valori è definita, Per esempio si ha: $f(1) = 1$.



Quindi una funzione può non essere continua in un punto anche se in tale punto è definita e lo stesso punto è di accumulazione. La continuità deve presupporre appunto un procedimento di avvicinamento a un dato valore che avvenga in modo per così dire graduale, senza salti. Possiamo allora porre la seguente definizione.

Definizione 13

Data una funzione $y = f(x)$ definita in x_0, diciamo che essa è **continua in x_0** se vale la seguente uguaglianza: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Una funzione continua in ogni punto di un insieme si dice **continua nell'insieme**.

Notazione 8

Per indicare che la funzione $y = f(x)$ è continua nell'insieme X scriveremo $f \in C^0(X)$ o diremo anche che f è di classe C zero in X.

La scritta $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ implica in realtà 3 fatti contemporanei.

1. deve esistere $f(x_0)$;
2. deve esistere $\lim_{x \to x_0} f(x)$;
3. i valori numerici dei punti 1 e 2 devono essere uguali.

Esempio 22

- Per la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ non ha senso parlare di continuità in $x = 0$, poiché non esiste $f(0)$.
- La funzione $f(x) = \lfloor x \rfloor$ non è continua in ogni $x_0 \in \mathbb{Z}$ perché non esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$, dato che $\lim_{x \to x_0^-} \lfloor x_0 \rfloor = x_0 - 1, \lim_{x \to x_0^+} \lfloor x_0 \rfloor = x_0, x_0 \in \mathbb{Z}$.
- La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$ non è continua in $x = 2$, nonostante che esista $f(2) = 1$ ed esista $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x - 2)} \cdot (x + 2)}{\cancel{x - 2}} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$. Ma questo limite è diverso da $f(2)$.

Proprio tenuto conto di quanto visto nell'esempio precedente possiamo distinguere fra di loro le discontinuità in tre classi.

Definizione 14

Data una funzione $y = f(x)$, diciamo che essa presenta in x_0 una **discontinuità**

- **di prima specie** se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R} \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$. In questo caso il valore assoluto della differenza fra i due limiti $\left| \lim_{x \to x_0^-} f(x) - \lim_{x \to x_0^+} f(x) \right| = |\ell_1 - \ell_2| \neq 0$ si chiama **salto di discontinuità**.
- **di seconda specie** se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty \vee \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty \vee \nexists \lim_{x \to x_0^-} f(x) \vee \nexists \lim_{x \to x_0^+} f(x)$.
- **di terza specie o eliminabile** se $\left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \right) \wedge \left(f(x_0) \neq \ell \vee \nexists f(x_0) \right)$; o se la funzione è definita solo in un intorno sinistro di x_0 e si ha: $\left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \right) \wedge \left(f(x_0) \neq \ell \vee \nexists f(x_0) \right)$; o solo in un intorno destro di x_0 e si ha: $\left(\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \right) \wedge \left(f(x_0) \neq \ell \vee \nexists f(x_0) \right)$.

Nella precedente definizione non è necessario assumere che x_0 sia un punto del dominio di $f(x)$, poiché, come già visto per $f(x) = \frac{1}{x}$, la presenza di $x = 0$ rappresenta in ogni caso una discontinuità della funzione nel suo complesso.

Esempio 23

- La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ ha una discontinuità di II specie in $x = 0$, poiché $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$.
- La funzione $f(x) = \lfloor x \rfloor$ in ogni $x_0 \in \mathbb{Z}$ ha una discontinuità di prima specie perché

$\lim_{x\to x_0^-} \lfloor x_0 \rfloor = x_0 - 1, \lim_{x\to x_0^+} \lfloor x_0 \rfloor = x_0, x_0 \in \mathbb{Z}$, il salto di discontinuità è sempre $x_0 - (x_0 - 1) = 1$.

- La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$ ha in $x = 2$, una discontinuità di III specie perché $4 = \lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2) = 1$.
- La funzione $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$ è definita in (0; + ∞), e si ha $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, quindi in $x = 0$, si ha una discontinuità di II specie.
- La funzione $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}$ è definita in (0; + ∞), e si ha $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$, quindi in $x = 0$, si ha una discontinuità di III specie.

Stiamo attenti a comprendere cosa vuol dire che una discontinuità di III specie è eliminabile. La discontinuità c'è e rimane, la funzione data è discontinua nel punto. Però possiamo costruire facilmente, a partire da essa, una funzione continua semplicemente ridefinendola nel punto in cui vi è la discontinuità.

Esempio 24

La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$ è discontinua in $x = 2$, mentre $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ 4 & x = 2 \end{cases}$ è continua anche in $x = 2$. Ovviamente la funzione g **non è** la funzione f, ma una funzione che coincide con f per ogni $x \neq 2$.

Vediamo adesso qualche importante risultato che riguarda le funzioni continue.

Teorema 10

Sono funzioni continue: i polinomi in tutto $\mathbb{R}$; $f(x) = a^x$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$; $f(x) = log_a(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$; le funzioni goniometriche elementari in tutti i punti del loro dominio.

Dimostrazione

Discendono dai ben noti limiti, per esempio dato che $\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$, ne viene che anche

$$\lim_{x\to x_0} \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n\right) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n.$$

Analoghe dimostrazioni per gli altri casi.

Valgono anche i seguenti ovvi risultati.

Teorema 11

Se $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ sono funzioni continue in x_0, allora è continua anche la funzione **combinazione lineare** $F(x) = a_1 \cdot f_1(x) + a_2 \cdot f_2(x) + \ldots + a_n \cdot f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot f_i(x), a_i \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione per esercizio

Teorema 12

Se $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ sono continue in x_0, allora anche $F(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x)$ lo è.

Dimostrazione per esercizio

Teorema 13

Se $f_1(x)$, $f_2(x)$ sono continue in x_0 e $f_2(x_0) \neq 0$, allora anche $F(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ lo è.

Dimostrazione per esercizio

Sappiamo che $f(x) = x^2$ è dappertutto continua, così come $g(x) = sin(x)$. Cosa possiamo dire della funzione composta $f[g(x)] = sin^2(x)$ oppure della funzione $g[f(x)] = sin(x^2)$, sono anch'esse continue?
Vale il seguente risultato.

Teorema 14

Se $g(x)$ è continua in x_0, esiste $f[g(x)]$ in un intorno completo di $g(x_0)$ e $f(x)$ è continua in $g(x_0)$, allora anche $f[g(x)]$ è continua in x_0.

Dimostrazione

Per ipotesi $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$ e $\lim_{x \to g(x_0)} f(x) = f[g(x_0)]$, ma allora anche $\lim_{x \to x_0} f[g(x)] = f[g(x_0)]$.

Il risultato precedente è importantissimo per il calcolo dei limiti.

Esempio 25

- Dato che sappiamo che $\lim_{x \to 2}(x^2 + x - 1) = 5$, poiché $sin(x^2 + x - 1)$ è definita in un intorno di 5 e $sin(x)$ è continua per $x = 5$, allora possiamo dire che $sin(x^2 + x - 1)$ è anch'essa continua per $x = 5$ e quindi che $\lim_{x \to 2} sin(x^2 + x - 1) = sin(5)$.
- Poiché $\sqrt{sin(x)}$ non è definita in un intorno di 5, dato che $sin(5) < 0$, non possiamo dire che $\sqrt{sin(x^2 + x - 1)}$ sia continua per $x = 2$, perciò non ha senso la scritta $\lim_{x \to 2} \sqrt{sin(x^2 + x - 1)}$.

Un analogo risultato al Teorema 14 vale per le funzioni invertibili.

Teorema 15

Se $f(x)$ è invertibile e continua in x_0, allora anche $f^{-1}(x)$ è continua in $f^{-1}(x_0)$.

Dimostrazione omessa

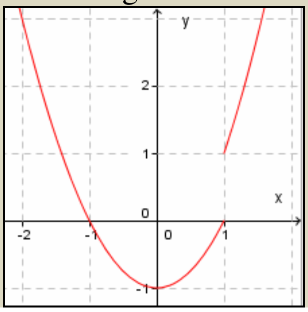
Esempio 26

Sappiamo che la funzione $f(x) = sin(x) : \to [-1; 1]$ è invertibile ed è anche continua $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, allora, per il teorema 15, $f^{-1}(x) = sin^{-1}(x) : [-1; 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ è continua $\forall\ x \in [-1; 1]$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo stabilire se la funzione $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & se\, x<1 \\ x^3+x-1 & se\ x\geq 1\end{cases}$ è continua e laddove non lo è vogliamo stabilire il tipo di discontinuità. L'unico problema ovviamente può essere in x = 1, poiché le due funzioni che unite formano la nostra funzione sono continue dappertutto. Calcoliamo i limiti: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2-1\right)=0;\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^3+x-1\right)=1$. Pertanto in x = 1 abbiamo una discontinuità di prima specie con salto uguale a (1 – 0) = 1. Ecco il grafico ottenuto con Geogebra.



Determinare e classificare gli eventuali punti di discontinuità delle seguenti funzioni

Livello **1**

1. $f(x)=\dfrac{x\cdot\sqrt{x}}{6-x^2}$; $g(x)=\dfrac{4x}{2-x^2}$ [$x=\sqrt{6}$, II specie ; $x=\pm\sqrt{2}$, II specie]
2. $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{1-2x^2}}$; $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ [$x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, II specie ; x = 1, III specie]
3. $f(x)=\dfrac{7\cdot\sqrt{x}}{1+x}$; $g(x)=\dfrac{x}{sin(x)}$ [Continua per $x\geq 0$; x = kπ, II specie]
4. $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-4}$; $g(x)=\dfrac{tan(x)}{3+x^4}$ $\left[x=2,\text{III specie; } x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\text{II specie}\right]$
5. $f(x)=sin\left(\sqrt{x}\right)$; $g(x)=cos\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$ [Continua per $x\geq 0$; x = 1, II specie]

Livello **2**

6. $f(x)=\dfrac{1-|x-1|}{x}$; $g(x)=\dfrac{|x-2|}{x^2-4}$ [x = 0, III specie ; (x = 2, I specie; x = –2, II)]
7. $f(x)=\dfrac{x-3}{|x-3|}$; $g(x)=\dfrac{x+1-|2x-1|}{x-2}$ [x = 0, I specie ; x = 2, III specie]
8. $f(x)=\begin{cases}-x^2-x^3+3 & x<0\\ 2x^3+x^4-5 & x\geq 0\end{cases}$; $g(x)=\begin{cases}2x^2-4x+1 & x<-1\\ x^3+2x^2+x & x\geq -1\end{cases}$ [x = 0, I S. ; x = –1, I S.]
9. $f(x)=\begin{cases}2x+3 & se\, x<0\\ x^2+3x+3 & se\ x\geq 0\end{cases}$; $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x<0\\ x & x\geq 0\end{cases}$ [Continua $\forall x\in\mathbb{R}$; Continua $\forall x\in\mathbb{R}$]

Livello **3**

10. $f(x)=\dfrac{1+|x-3|}{1-|x-3|}$; $g(x)=\dfrac{1-|x-1|}{|x+1|-1}$ [x = 2, x = 4, II S. ; (x = –2, II S.; x = 0, III S.)]

11. $f(x)=\begin{cases} x+1 & x<1 \\ x & 1\le x<2 \\ x^2-2 & x>2 \end{cases}$; $g(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x\le 1 \\ \frac{x}{x-1} & 1<x\le 2 \\ \frac{x-1}{x} & x>2 \end{cases}$ [x = 1, I S; x = 2, III S ; x = 0;1, II S; x = 2, I S]

12. $f(x)=\frac{|x+3|+1}{|x-1|-|x+2|}$; $g(x)=\frac{|x+3|+1}{|x-1|+|x+2|}$ [$x = -\frac{1}{2}$, II S. ; Continua $\forall x\in \mathbb{R}$]

Lavoriamo insieme

La funzione $f(x)=\begin{cases} k\cdot x^2-2x+1 & se\, x<2 \\ x^2+(k-1)\cdot x-1 & se\ x\ge 2 \end{cases}$ è continua sicuramente per ogni x < 2 e per ogni x > 2, poiché indipendentemente dai valori che assume il parametro reale k, abbiamo a che fare con dei polinomi. Non è detto però che sia continua per x = 2, almeno non per ogni valore di k. Infatti abbiamo

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(k\cdot x^2-2x+1\right)=4k-4+1=4k-3;$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(x^2+(k-1)\cdot x-1\right)=4+2\cdot(k-1)-1=2k+1.$$

Quindi la continuità in x = 2 ci sarà soltanto se $4k - 3 = 2k + 1 \Rightarrow k = 2$.

Livello 1

Determinare il valore dei parametri in modo che le funzioni siano continue nel loro dominio

13. $f(x)=\begin{cases} k\cdot x+3 & se\, x<0 \\ x^2+x+1 & se\ x\ge 0 \end{cases}$; $f(x)=\begin{cases} x+k & se\, x<1 \\ x^2+2x+1 & se\ x\ge 1 \end{cases}$ [$\varnothing$; k = 3]

14. $f(x)=\begin{cases} x^2+k\cdot x+1 & se\, x<2 \\ x^2+x-1 & se\ x\ge 2 \end{cases}$; $f(x)=\begin{cases} k\cdot sin(x) & se\, x<0 \\ x^2+x & se\ x\ge 0 \end{cases}$ [k = 0 ; $\forall k\in \mathbb{R}$]

15. $f(x)=\begin{cases} 2kx^3-3x+k & se\ x<1 \\ 3kx^2+2x-3k & se\ x\ge 1 \end{cases}$; $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & se\ x>1 \\ kx^2+x & se\ x\le 1 \end{cases}$ $\left[k=\frac{5}{3};k=0\right]$

Livello 2

16. $f(x)=\begin{cases} x^2-kx-2 & se\ x<0 \\ x^3+k^2x^2+3kx-1 & se\ x\ge 0 \end{cases}$; $f(x)=\begin{cases} (k+1)\cdot x^2-x-3 & se\ x<1 \\ (k^2-2)x^2+x-2 & se\ x\ge 1 \end{cases}$ [$\varnothing$; $k = 0 \vee 1$]

17. $f(x)=\begin{cases} x^2+(3k+1)\cdot x+1 & se\ x<2 \\ (2k^2+1)\cdot x^2+2x-k & se\ x\ge 2 \end{cases}$ $\left[k=\frac{3\pm\sqrt{17}}{8}\right]$

Livello 3

18. $f(x)=\begin{cases} ax^2+(3b+1)\cdot x & se\ x<2 \\ (2a+1)\cdot x^2+x-b & se\ x\ge 2 \end{cases}$; $f(x)=\begin{cases} a\cdot x^2+b\cdot x+1 & se\ x<1 \\ b\cdot x^2+2x-a & se\ x\ge 1 \end{cases}$ $\left[a=\frac{7b-4}{4};a=\frac{2}{3},\forall b\in \mathbb{R}\right]$

19. $f(x)=\begin{cases} a\cdot x^2+b\cdot x & se\ x<-1 \\ x^2+a\cdot x-b & se\ x\ge -1 \end{cases}$; $f(x)=\begin{cases} kx+2 & x\le -2 \\ \frac{kx-h}{x+1} & -2<x<0 \\ \sqrt{x+h}+\sqrt{kx} & x\ge 0 \end{cases}$ $\left[a=\frac{1}{2},\forall b\in \mathbb{R};h=0,k=\frac{1}{2}\right]$

20. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{k}{x+k} & x \le 0 \\ sin^{-1}(x) & 0 < x < 1 \\ ln(kx) & x \ge 1 \end{cases}$ [per la continuità in $x = 1$, $k = e^{\frac{\pi}{2}}$; discontinua in $x = 0$, sempre]

21. Dare l'esempio di una funzione continua soltanto per $x > 3$, $x \neq 5$. Giustificare la risposta.
22. Dare l'esempio di una funzione continua soltanto per $x \ge 3$, $x \neq 4$ Giustificare la risposta.

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare $\lim\limits_{x\to 0^+} tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Noi sappiamo che $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$, d'altro canto si ha anche $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} tan(x)=+\infty$, poiché la funzione $tan^{-1}(x)$ è continua in un intorno destro di zero, si ha: $\lim\limits_{x\to +\infty} tan^{-1}(x)=\dfrac{\pi}{2}$ e quindi alla fine avremo: $\lim\limits_{x\to 0^+} tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

Calcolare i seguenti limiti

Livello 2

23. $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} tan\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x}\right]$; $\lim\limits_{x\to+\infty} tan^{-1}\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-x}\right]$; $\lim\limits_{x\to+\infty} tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0^-} tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 2} cos^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$\left[-\infty; +\infty; \dfrac{\pi}{2}; 0; -\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{3}\right]$

Giochiamo alla matematica

Il problema della continuità è alla base di diversi paradossi. Ne forniamo un esempio che è quello cosiddetto del *povero ricco*. Cominciamo a porre alcuni fatti.
1. Una persona che possiede una moneta è da considerarsi povero;
2. Dando una sola moneta a una persona povera questa rimane povera.

Sulla base dei precedenti due fatti, sui quali tutti siamo d'accordo, poiché rientrano nel cosiddetto "buon senso", dimostreremo che un povero rimane povero indipendentemente dal numero di monete che possiederà. Infatti, se un povero possedesse n monete, possedendo $(n + 1)$ monete rimane povero. Poiché n può essere qualsiasi numero naturale vuol dire che non esistono ricchi e che, soprattutto, non è possibile arricchire. Ovviamente il fatto paradossale dipende proprio dalla mancanza di continuità che ha l'insieme dei numeri naturali, a cui appartiene il numero con cui contiamo le monete.
Il problema viene esposto anche in altre forme, per esempio in quella del *girino-rana*. Supponiamo di tenere sotto osservazione fotografica un girino, fotografandolo ogni x secondi. Nella prima foto avremo sicuramente un girino e nell'ultima, alla fine dell'evoluzione, avremo una rana. Quindi vuol dire che vi deve essere una foto in cui il girino è diventato rana. Qual è? Come è possibile che il passaggio avvenga in un istante? Tutti questi problemi sono tipici proprio dei fatti reali che sono misurabili solo utilizzando insiemi discreti. Lo stesso problema può associarsi anche ai confini. Dove inizia l'Italia e finisce la Francia? E così via. La conclusione è che ragionando su insiemi discreti con i concetti della continuità, a essi non applicabile, vengono fuori questi paradossi. Negli insiemi discreti bisogna fare delle convenzioni. Così come una persona diviene maggiorenne in un secondo, nel passaggio dalle 23:59:59 alle 00:00:00, così possiamo porre per convenzione che una persona è povera se possiede 100 monete e ricca se ne possiede 101. E così via.

Operazioni aritmetiche con i limiti e forme indeterminate

Il problema

Se conosciamo il limite di due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, entrambe per x che tende a uno stesso valore, finito o infinito, sappiamo determinare i limiti delle operazioni i cui operandi sono le date funzioni?

Per semplificare molti risultati conviene usare una particolare terminologia e simbologia.

Definizione 15

Diciamo **retta reale estesa** l'insieme formato dall'insieme $\mathbb{R}$ e dai simboli $\{-\infty; +\infty\}$.

Notazione 7

La retta reale estesa si indica con $\overline{\mathbb{R}}$.

Talvolta possiamo rispondere al quesito posto dal problema in modo intuitivo.

Esempio 27

Supponiamo che sia $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=2, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=3$, questo significa che all'avvicinarsi di x a x_0, $f(x)$ si avvicina a 2 e $g(x)$ a 3, quindi è lecito pensare che si abbia

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=2+3=5; \lim_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]=2-3=-1; \lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=2\cdot=6; \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2}{3}$$

Se volessimo dimostrare queste intuizioni, basta applicare le definizioni. Consideriamo il caso della somma. Quello che sappiamo equivale a dire: $2-\varepsilon < f(x) < 2+\varepsilon$, $\forall x$: $x_0-\delta_1 < x < x_0+\delta_1$; $3-\varepsilon < g(x) < 3+\varepsilon$, $\forall x$: $x_0-\delta_2 < x < x_0+\delta_2$. Ma allora se consideriamo $\delta = min(\delta_1; \delta_2)$, saranno vere entrambe le disuguaglianze, cioè $2-\varepsilon < f(x) < 2+\varepsilon$, $3-\varepsilon < g(x) < 3+\varepsilon$, $\forall x$: $x_0-\delta < x < x_0+\delta$. Quindi ovviamente $5-2\varepsilon < f(x)+g(x) < 5+2\varepsilon$, $\forall x$: $x_0-\delta < x < x_0+\delta$, cioè, come era ovvio aspettarsi: $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=2+3=5$.

Possiamo perciò enunciare il seguente risultato.

Teorema 16

Nell'ipotesi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell\in\mathbb{R}, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=m\in\mathbb{R}, x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ si ha:

- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\ell\pm m$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\ell\cdot m$
- se anche $m\neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{\ell}{m}$.

Dimostrazione

Per esercizio, sulla falsariga dell'esempio.

Nel Teorema precedente, relativamente alla divisione abbiamo dovuto aggiungere l'ulteriore ipotesi che il limite della funzione al denominatore sia diverso da zero, ciò ovviamente perché il simbolo $\frac{\ell}{0}$ non ha alcun senso nell'insieme dei numeri reali. Cosa succederà allora in questo caso?

Esempio 28

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 2, \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, cosa possiamo dire di $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$? Cosa accade se il denominatore tende a zero? Facciamo qualche esempio, la frazione $\frac{2}{10^{-50}} = 2\cdot 10^{50}$ è un numero enormemente grande, quindi l'intuizione ci suggerisce che sia $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, in cui il segno dipenderà da quello che avrà la $g(x)$ nel tendere a zero, cioè se tenderà a zero per valore positivi sarà $+\infty$, diversamente $-\infty$.

Possiamo quindi enunciare il seguente risultato.

Teorema 17

Nell'ipotesi $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \neq 0, \lim_{x\to x_0} g(x) = 0, x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ si ha: $\lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \infty$.

Dimostrazione per esercizio

Abbiamo lasciato irrisolto il caso dell'espressione $\frac{0}{0}$. Per questa non possiamo fornire una risposta perché essa dipende dalle funzioni considerate, come vedremo nel seguente esempio.

Esempio 29

Ovviamente si ha $\lim_{x\to 0} x = 0, \lim_{x\to 0} x^2 = 0$, quindi sia $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2}$ che $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x}$ sono del tipo $\frac{0}{0}$, eppure i loro risultati sono del tutto diversi perché $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$, mentre $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0$. Non solo ma anche $\lim_{x\to 0} \frac{a\cdot x}{b\cdot x}, a,b \neq 0$ è del tipo $\frac{0}{0}$ e $\lim_{x\to 0} \frac{a\cdot x}{b\cdot x} = \lim_{x\to 0} \frac{a\cdot \cancel{x}}{b\cdot \cancel{x}} = \frac{a}{b}, a,b \neq 0$. Quindi in pratica $\frac{0}{0}$ può avere infiniti risultati possibili, tutti diversi tra loro.

La forma $\frac{0}{0}$ la chiameremo **forma indeterminata** proprio perché il suo risultato, a differenza di altre forme già viste (come $\frac{3}{2}$ o $\frac{1}{0}$, …) non ha sempre lo stesso risultato. Consideriamo adesso qualche altro caso.

Esempio 30

Supponiamo che sia $\lim_{x\to x_0} f(x) = 2, \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, cosa possiamo dire stavolta dei limiti delle operazioni aritmetiche delle due funzioni? Anche in questo caso l'intuito ci suggerisce che la somma e il prodotto divergano positivamente e la differenza diverga negativamente, sul rapporto non ci pronunciamo. Dimostriamo questa intuizione, nel caso della somma. Si ha: $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$, $\forall x$: $x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_1$; $g(x) > k > 0$, $\forall x$: $x_0 - \delta_2 < x < x_0 + \delta_2$. Se consideriamo $\delta = min(\delta_1; \delta_2)$, saranno vere entrambe le disuguaglianze, e perciò
$f(x) + g(x) > k + 2 + \varepsilon$, $\forall x$: $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ e vista l'arbitrarietà di k e di ε, avremo che: $\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$.

Abbiamo perciò il seguente risultato

Teorema 18

Nell'ipotesi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell\in\mathbb{R}, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty\in\mathbb{R}, x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ si ha:

- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\mp\infty$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\begin{cases}\pm\infty & se\ \ell>0\\ \mp\infty & se\ \ell<0\end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{g(x)}{f(x)}\right]=\begin{cases}\pm\infty & se\ \ell>0\\ \mp\infty & se\ \ell<0\end{cases}$.

Dimostrazione per esercizio, sulla falsariga dell'esempio.

Altri due casi rimangono fuori dai precedenti perché legati alle scritte prive di senso ℓ/∞ e $0\cdot\infty$. Consideriamo per il momento il primo caso, per il quale non è difficile capire che accadrà un caso simile a quello già visto per $\ell/0$.

Teorema 19

Nell'ipotesi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell\in\mathbb{R}, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty, x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ si ha: $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=0$.

Dimostrazione per esercizio

Non possiamo dire niente invece del caso in cui entrambe le funzioni tendono a infinito.

Esempio 31

Ovviamente abbiamo $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$, eppure $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, mentre $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a\cdot x}{b\cdot x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a\cdot\cancel{x}}{b\cdot\cancel{x}}=\dfrac{a}{b}$. Quindi anche $\dfrac{\infty}{\infty}$ è una forma indeterminata.

Non è difficile provare il seguente risultato.

Teorema 20

Sono forme indeterminate le seguenti

- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right], x_0\in\overline{\mathbb{R}}, se \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ $\quad\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right], x_0\in\overline{\mathbb{R}}, se \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ $\quad\left(\dfrac{0}{0}\right)$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right], x_0\in\overline{\mathbb{R}}, se \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\mp\infty$ $\quad(\infty-\infty)$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right], x_0\in\overline{\mathbb{R}}, se \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ $\quad(\infty\cdot 0 \text{ o } 0\cdot\infty)$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}, x_0\in\overline{\mathbb{R}}, se \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ $\quad(1^\infty)$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}, x_0\in\overline{\mathbb{R}}, se \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ $\quad(0^0)$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}, x_0\in\overline{\mathbb{R}}, se \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ $\quad(\infty^0)$

Dimostrazione Basta fare degli esempi sulla falsariga dei precedenti.

In alcuni casi certe indeterminazioni si possono risolvere con semplici ragionamenti algebrici.

Esempio 32

Vogliamo calcolare $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{x^4+x^2-2}$. Ovviamente numeratore e denominatore, essendo entrambi definiti per $x = 1$, tenderanno al valore che si ottiene sostituendo 1 alla x, così facendo otteniamo una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Ricordiamo però che il teorema di Ruffini dice che se un polinomio si annulla per $x = a$, allora vuol dire che è divisibile per $(x - a)$, quindi possiamo scrivere: $\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x^2+x-1)}{(x-1)\cdot(x^3+x^2+2x+2)}$, che può semplificarsi in $\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\cdot(x^2+x-1)}{\cancel{(x-1)}\cdot(x^3+x^2+2x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-1}{x^3+x^2+2x+2}$, che adesso non è più una forma indeterminata poiché il numeratore tende a 1 + 1 – 1 = 1 e il denominatore tende a 1 + 1 + 2 + 2 = 6, quindi possiamo dire che si ha: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-1}{x^3+x^2+2x+2}=\frac{1}{6}$.

Il precedente esempio può essere usato per risolvere tutte le forme indeterminate $\frac{0}{0}$ rapporto di due polinomi. Ovviamente potrebbe capitare che la semplificazione dia luogo ancora a una forma $\frac{0}{0}$.

Esempio 33

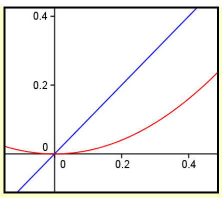
Vogliamo calcolare $\lim_{x\to 2}\frac{x^4-4x^3+7x^2-12x+12}{x^4-5x^3+9x^2-8x+4}$. Si verifica facilmente che è una forma $\frac{0}{0}$. Scomponiamo per $x - 2$, quindi semplifichiamo il fattore comune, ottenendo $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2+3x-6}{x^3-3x^2+3x-2}$, che è ancora un forma $\frac{0}{0}$. Quindi dobbiamo ulteriormente scomporre ottenendo $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3}{x^2-x+1}=\frac{4+3}{4-2+1}=\frac{7}{3}$, che non è più una forma indeterminata.

In ogni caso le forme indeterminate precedenti si risolvono sempre dopo al più un numero finito di passaggi perché ogni volta che scomponiamo e semplifichiamo otteniamo dei polinomi di grado inferiore, quindi al massimo dopo n semplificazioni un polinomio di grado n diventa di grado zero, cioè un numero e perciò non ci sarà più indeterminazione. Per studiare altre forme indeterminate vogliamo porre due nuove definizioni.

Definizione 16

- Se $\lim_{x\to x_0} f(x)=0, x_0\in\overline{\mathbb{R}}$, diciamo che $f(x)$ è un **infinitesimo** per x che tende a x_0.
- Se $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty, x_0\in\overline{\mathbb{R}}$, diciamo che $f(x)$ è un **infinito** per x che tende a x_0.

Esempio 34



Sia x che x^2 sono infinitesimi per x che tende a zero. Nella figura seguente li abbiamo rappresentati graficamente. Da tale grafico vediamo che x^2 sembra arrivare a zero più "rapidamente" rispetto ad x. Del resto se confrontiamo le due funzioni calcolandole negli stessi valori, ad ascisse uguali corrisponderanno ascisse più piccole per x^2 piuttosto che per x.
Per esempio per $x = 10^{-50}$ si ha $x^2 = 10^{-100}$, che è un valore "molto più vicino" allo zero che non $x = 10^{-50}$.

Il precedente esempio ci suggerisce di considerare una specie di gerarchia per gli infinitesimi.

Definizione 17

Se *f*(*x*) e *g*(*x*) sono due infinitesimi per $x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, allora se

- $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, diciamo che *f*(*x*) è un **infinitesimo di ordine superiore** a *g*(*x*);
- $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, diciamo che *f*(*x*) è un **infinitesimo di ordine inferiore** a *g*(*x*);
- $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \neq 0$, diciamo che *f*(*x*) e *g*(*x*) sono **infinitesimi dello stesso ordine;**
- $\nexists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, diciamo che *f*(*x*) e *g*(*x*) **non sono confrontabili**

Esempio 35

Due potenze a esponente positivo di *x*, sono infinitesimi per *x* che tende a zero, e $\lim_{x\to 0} \frac{x^h}{x^k} = \begin{cases} 0 & se\ h > k \\ 1 & se\ h = k \\ \infty & se\ h < k \end{cases}$.

Pertanto in generale x^h, per *x* che tende a zero e *h* > 0, è un infinitesimo sempre più *grande*, al crescere di *h*.

Non è difficile capire che avere determinato un modo per confrontare i diversi infinitesimi può facilitare il calcolo di alcuni limiti. Vale infatti il seguente risultato.

Teorema 21 (Principio di sostituzione degli infinitesimi)

Se $f_1(x)$ è infinitesimo di ordine inferiore a $f_2(x)$ allora $\lim_{x\to x_0}\left[f_1(x) + f_2(x)\right] = \lim_{x\to x_0} f_1(x), x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dimostrazione

Per ipotesi si ha: $\lim_{x\to x_0} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = 0$, quindi: $\lim_{x\to x_0}\left[f_1(x) + f_2(x)\right] = \lim_{x\to x_0}\left\{f_1(x)\cdot\left[1 + \frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right]\right\} = \lim_{x\to x_0} f_1(x)$.

Esempio 36

Grazie al teorema precedente possiamo dire che $\lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)^2 - 4\cdot\sqrt[3]{x-1}}{2\cdot(x-1)^2 + 3\cdot\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)^2}{2\cdot(x-1)^2} = \frac{1}{2}$. Perché $\sqrt[3]{x-1} = (x-1)^{\frac{1}{3}}$ è un infinitesimo di ordine superiore a $(x-1)^2$ così come lo è $\sqrt{x-1} = (x-1)^{\frac{1}{2}}$.

Analoghe considerazioni possono farsi per gli infiniti.

Definizione 18

Se *f*(*x*) e *g*(*x*) sono due infiniti per $x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, allora se

- $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, diciamo che *f*(*x*) è un **infinito di ordine superiore** a *g*(*x*);
- $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, diciamo che *f*(*x*) è un **infinito di ordine inferiore** a *g*(*x*);

- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \neq 0$, diciamo che $f(x)$ e $g(x)$ sono **infiniti dello stesso ordine;**
- $\nexists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, diciamo che $f(x)$ e $g(x)$ **non sono confrontabili**

Esempio 37

Due potenze a esponente positivo di x, sono infiniti per x che tende a più infinito, e $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^h}{x^k} = \begin{cases} 0 & se\ h < k \\ 1 & se\ h = k \\ \infty & se\ h > k \end{cases}$.

Pertanto in generale x^h, per x che tende a zero e $h > 0$, è un infinito sempre più *grande*, al crescere di h.

Anche in questo caso abbiamo un risultato che facilita il calcolo di alcuni limiti.

Teorema 22 (Principio di sostituzione degli infiniti)

Se $f_1(x)$ è infinito di ordine superiore a $f_2(x)$ allora $\lim_{x \to x_0} \left[f_1(x) + f_2(x) \right] = \lim_{x \to x_0} f_1(x), x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dimostrazione per esercizio sulla falsariga del Teorema 21.

Esempio 38

Grazie al teorema precedente possiamo dire che $\lim_{x \to +\infty} \frac{45x^2 - x + 13}{x^2 + 3x^3 - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{45x^2}{3x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{15}{x} = 0$.

Tenendo conto del precedente esempio abbiamo il seguente immediato risultato.

Teorema 23

Si ha: $\lim_{x \to \infty} \frac{a_0 + a_1 x^{\alpha_1} + a_2 x^{\alpha_2} + \ldots + a_n x^{\alpha_n}}{b_0 + b_1 x^{\beta_1} + b_2 x^{\beta_2} + \ldots + b_m x^{\beta_m}} = \begin{cases} \infty & se\ \alpha_n > \beta_m \\ \frac{a_n}{b_m} = \frac{a_n}{b_n} & se\ \alpha_n = \beta_m ; \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R} \\ 0 & se\ \alpha_n < \beta_m \end{cases}$.

Dimostrazione per esercizio

Il Principio di sostituzione degli infiniti è utile per risolvere alcune forme indeterminate ($\infty - \infty$).

Esempio 39

Vogliamo calcolare $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2x - 1} \right)$. Ovviamente il primo addendo è un infinito di ordine superiore al secondo pertanto $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2x - 1} \right) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$.

Concludiamo con alcuni utili limiti.

Teorema 24

$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ 0 & 0 < a < 1 \end{cases}$; $\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & a > 1 \\ +\infty & 0 < a < 1 \end{cases}$; $\lim_{x \to 0^+} log_a(x) = \begin{cases} -\infty & a > 1 \\ +\infty & 0 < a < 1 \end{cases}$; $\lim_{x \to +\infty} log_a(x) = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ -\infty & 0 < a < 1 \end{cases}$.

Dimostrazione omessa

Esempio 40

Possiamo dire che $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^x = 0$ mentre $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^x = +\infty$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare $\lim\limits_{x\to 0^+} tan^{-1}(x)$. Ovviamente si ha: $\lim\limits_{x\to 0^+} tan^{-1}(x) = tan^{-1}(0) = 0$.

Calcolare i seguenti limiti

Livello 1

1. $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 1}\frac{-1}{(x-1)^2}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x+1}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} tan(x)$ $\quad[+\infty ; -\infty ; -\infty ; +\infty ; 0 ; -\infty]$
2. $\lim\limits_{x\to 1} sin^{-1}(x)$; $\lim\limits_{x\to -1} sin^{-1}(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} csc^{-1}(x)$; $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} tan(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} ln(x)$; $\lim\limits_{x\to 0} cot(x^2)$ $\left[\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{2};+\infty;+\infty;-\infty;+\infty\right]$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} ln(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} 2^{-x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} 2^{-x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} ln\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$ $\quad[+\infty ; +\infty ; 0 ; -\infty ; +\infty ; +\infty]$

Livello 2

4. $\lim\limits_{x\to 1^+} log_x(2)$; $\lim\limits_{x\to 1^-} log_x(2)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} log_x(3)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} cot^{-1}(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} cot^{-1}(x)$; $\lim\limits_{x\to \frac{\sqrt{2}}{2}} sin^{-1}(x)$ $\left[+\infty;-\infty;0;0;\pi;\frac{\pi}{4}\right]$

Stabilire quali dei seguenti limiti esistono, giustificando la risposta

Livello 3

5. $\lim\limits_{x\to \infty} sin(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} ln\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 2} sin(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} cot\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} cot\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad$[No ; Sì ; Sì ; No ; Sì]
6. $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{-x^2-x-1}\right)$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{-x^2-x-1}\right)$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{-x-1}\right)$ $\quad$[Sì ; No ; No ; Sì]

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^5-7x^4+2x^3+18x^2-24x+9}{21x^5-51x^4+32x^3+8x^2-13x+3}$. Sostituiamo 1 a *x*, ottenendo sia al numeratore che al denominatore 0. Abbiamo quindi che (*x* – 1) è il fattore che provoca l'indeterminazione, dobbiamo perciò "esplicitarlo", scomponendo i polinomi. $\begin{array}{c|ccccc|c} & 2 & -7 & 2 & 18 & -24 & 9 \\ 1 & & 2 & -5 & -3 & 15 & -9 \\ \hline & 2 & -5 & -3 & 15 & -9 & 0 \end{array}$ e $\begin{array}{c|ccccc|c} & 21 & -51 & 32 & 8 & -13 & 3 \\ 1 & & 21 & -30 & 2 & 10 & -3 \\ \hline & 21 & -30 & 2 & 10 & -3 & 0 \end{array}$

Pertanto il limite diventa: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\cdot(2x^4-5x^3-3x^2+15x-9)}{\cancel{(x-1)}\cdot(21x^4-30x^3+2x^2+10x-3)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^4-5x^3-3x^2+15x-9}{21x^4-30x^3+2x^2+10x-3}$, che è ancora una forma indeterminata $\frac{0}{0}$, quindi vuol dire che il fattore (*x* – 1) è contenuto più di una volta. Continuando a scomporre otterremo: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\cdot(2x^3-3x^2-6x+9)}{\cancel{(x-1)}\cdot(21x^3-9x^2-7x+3)}$. A questo punto 1 non è più uno zero di almeno uno dei due polinomi, in realtà di entrambi, quindi l'indeterminazione non è più presente e possiamo concludere: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3-3x^2-6x+9}{21x^3-9x^2-7x+3} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Calcolare i seguenti limiti (non tutti sono forme indeterminate)

Livello 1

7. $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$; $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1}$; $\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{(x-1)^2}$; $\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x-1}$; $\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x^2-1}$; $\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x-1}{x^2+2x+1}$ $\left[2;\frac{1}{2};+\infty;0;-\frac{1}{2};+\infty\right]$

8. $\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2+4}$; $\lim_{x\to-2}\frac{x^3+8}{x^2-4}$; $\lim_{x\to3}\frac{x^3-4x^2+9}{x^2+x-12}$; $\lim_{x\to0}\frac{x^3-x}{x^4+x}$; $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{4x^2-2x}$; $\lim_{x\to\pi}\frac{x^2-\pi^2}{x-\pi}$ $\left[0;0;\frac{3}{7};-1;-2;2\pi\right]$

9. $\lim_{x\to-2}\left(\frac{x^2-4}{x+2}\right)^{\frac{x^3+8}{x^2-4}}$; $\lim_{x\to\frac{1}{3}}\left(\frac{2x-1}{x^2-1}\right)^{\frac{3x-1}{9x^2+3x-2}}$; $\lim_{x\to-\frac{2}{3}^-}\left(\frac{9x^2-4}{12x^2-x-6}\right)^{\frac{2x-1}{3x+2}}$; $\lim_{x\to-\frac{2}{3}^+}\left(\frac{9x^2-4}{12x^2-x-6}\right)^{\frac{2x-1}{3x+2}}$ $\left[-\frac{1}{64};\frac{\sqrt[3]{3}}{2};0;+\infty\right]$

10. $\lim_{x\to4^+}\left(\frac{x^3-3x^2-5x+4}{x^3-5x^2+3x+4}\right)^{\frac{x+2}{x^2-16}}$; $\lim_{x\to4^-}\left(\frac{x^3-3x^2-5x+4}{x^3-5x^2+3x+4}\right)^{\frac{x+2}{x^2-16}}$; $\lim_{x\to5^+}\left(\frac{x^3-4x^2-6x+5}{x^3-7x^2-5x+75}\right)^{\frac{x^2-7x+10}{x^2+6x-55}}$ [+∞; 0; +∞]

11. $\lim_{x\to3}\left(\frac{x^3-5x^2+3x+9}{x^3-8x^2+21x-18}\right)^{\frac{x^2-8x+15}{x^3+x^2-8x-12}}$; $\lim_{x\to-1}\left(\frac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}\right)^{\frac{x^2+6x+5}{x^2-2x-3}}$; $\lim_{x\to-2}\left(\frac{x^3+2x^2-4x-8}{x^3+5x^2+8x+4}\right)^{\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x-10}}$ $\left[2^{\frac{4}{25}};-3;2^{\frac{2}{27}}\right]$

Livello 2

12. $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; $\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x-1}}{x^3-1}$; $\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}}$; $\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x+2}-4}{x^2-4}$; $\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{1-3x}-2}{\sqrt{2x+3}-1}$ $\left[\frac{1}{2};+\infty;0;+\infty;-\frac{3}{4}\right]$

13. $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{6}}{\sqrt{x-2}-1}$; $\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-2}$; $\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{2x-\sqrt{12}}{\sqrt{x^2+1}-2}$; $\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{\sqrt{x^2+20}-5}{1-\sqrt{x^2-4}}$ $\left[\frac{5}{\sqrt{6}};0;\frac{4}{\sqrt{3}};-\frac{1}{5}\right]$

14. $\lim_{x\to1}\frac{2x^3-5x^2+4x-1}{2x^3-3x^2+1}$; $\lim_{x\to2}\frac{3x^3-10x^2+4x+8}{x^3-2x^2+x-2}$; $\lim_{x\to1^+}\frac{3x^3+10x^2+11x+4}{x^3-x^2+3x-3}$ $\left[\frac{1}{3};0;+\infty\right]$

15. $\lim_{x\to1}\frac{x^4-7x^3+17x^2-17x+6}{x^4+2x^3-4x^2-2x+3}$; $\lim_{x\to-1^-}\frac{x^4+6x^3+12x^2+10x+3}{x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3}$; $\lim_{x\to-2}\frac{x^5+6x^4+11x^3+2x^2-12x-8}{x^5+6x^4+13x^3+14x^2+12x+8}$ $\left[\frac{1}{4};+\infty;\frac{3}{5}\right]$

16. $\lim_{x\to-1}\frac{x^5+6x^4+8x^3-2x^2-9x-4}{4x^5+5x^4+10x^3+12x^2-6x-9}$; $\lim_{x\to3^+}\frac{x^5+25x^4-9x^3-9x^2-54x+54}{4x^5-25x^4+46x^3-34x^2+42x-9}$ [0 ; +∞]

17. $\lim_{x\to2}\frac{4x^5-19x^4+24x^3+7x^2-28x+12}{7x^5-29x^4+39x^3-33x^2+32x-4}$; $\lim_{x\to-3^-}\frac{x^4+7x^3+16x^2+15x+9}{x^5+10x^4+37x^3+63x^2+54x+27}$ $\left[\frac{3}{13};-\infty\right]$

Livello 3

18. $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{e^x-1}$; $\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-1}{e^{3x}-1}$; $\lim_{x\to e}\frac{ln^2(x)+ln(x)-2}{ln^2(x)-4ln(x)+3}$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2sin(x)-1}{6sin^2(x)-sin(x)-1}$ $\left[2;\frac{4}{3};-\frac{3}{2};\frac{2}{5}\right]$

Determinare il valore del parametro k in modo tale che sia vera l'uguaglianza

19. $\lim_{x\to2}\frac{k\cdot x^3-4x^2+x+6}{x^3-(k+6)\cdot x+6}=-\frac{3}{5}$; $\lim_{x\to2}\frac{k\cdot x^3-4x^2+x+6}{x^3-(k+6)\cdot x+6}=-4$; $\lim_{x\to-2}\frac{(2k+1)\cdot x^3+4x^2+x-6}{x^3-7x+k-6}=-1$ [1; $k\neq1$;∅]

20. $\lim_{x\to-2}\frac{(2k+1)\cdot x^3+4x^2+x-6}{x^3-7x+k-6}=-\frac{3}{5}$; $\lim_{x\to2}\frac{k\cdot x^3-7x^2+4x+2k}{(k+1)\cdot x^4-19x^3+42\cdot x+4k}=\frac{1}{2}$ [0 ; $k\neq2$]

21. $\lim_{x\to-1}\frac{x^5+(3k-2)\cdot x^4+19x^3+25x^2+16x+4}{x^5+8x^4+25x^3+(7k+3)\cdot x^2+28x+8}=0$ [0]

Studiare i limiti seguenti al variare del parametro reale k

22. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{k\cdot x^3-x^2+1}{(2k+1)\cdot x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{k\cdot x^4-k}{(3k+2)\cdot x-2}$; $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3k\cdot x^2-x+k}{x^3+1}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(k+1)\cdot x^2-4k-4}{(k+2)\cdot x-k-2}$

$$\left[\begin{cases}\frac{1}{2} & k\neq 0\\ -1 & k=0\end{cases};0;\begin{cases}\infty & k\neq -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{6} & k=\frac{1}{4}\end{cases};\begin{cases}\frac{4k-8}{k+2} & k\neq -2\\ \infty & k=-2\end{cases}\right]$$

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^5-x^4+2x^3+8x^2-2x+9}{21x^5-5x^4+3x^3-x+3}$.

Applicando il principio di sostituzione degli infiniti il limite diventa: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\cancel{x^5}}{21\cancel{x^5}}=\dfrac{2}{21}$.

Usando il principio di sostituzione degli infiniti calcolare i seguenti limiti

Livello 1

23. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4-x^3+7x^2-6}{2x^3-x^4-x^2-x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^4+x^5+2x^2+3}{2x^4-x^5-4x^2-x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^5-x^4+x^3+18}{-5x^4+3x^3+18x^2-3x+23}$ $[-3 ; -1 ; -\infty]$

24. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x^4+x^3-32x^2-49x-4478}{2x-3x^4+x^3+2x^5-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2}x^4-\sqrt{3}x^3+x^2-x}{1-\sqrt{5}x^4+\pi\cdot x^3-3}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2ex^5-\sqrt{2}x^4+\pi^2x^3+x^2-2}{\pi^5x^4+3x^3-\sqrt{3}x^2+ex^5-1}$ $\left[0;-\sqrt{\dfrac{2}{5}};2\right]$

25. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x^2+1}{3x^2-x}\right)^{\frac{7x-2}{3x+1}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x+1}{7x-3}\right)^{\frac{x^2-x}{3x^2+x-1}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x+3}{7x}\right)^{\frac{x-2}{x+3x^2-1}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{11x+1}{5x-1}\right)^{\frac{-9x^2}{2x+1}}$ $\left[\left(\dfrac{5}{3}\right)^{\frac{7}{3}};\sqrt[3]{\dfrac{4}{7}};1;0\right]$

26. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{12x+1}{41x-1}\right)^{\frac{2-3x^2}{2x+5}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{12x+1}{41x-1}\right)^{\frac{2+3x^2}{2x+5}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^3-x^2-5}{3x^3-x^2+x}\right)^{\frac{3x+2}{x-1}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^3-x^4-2x+1}{-2x^4+x^2+x^3}\right)^{\frac{x}{x^2-6}}$ $\left[+\infty;0;\dfrac{8}{27};1\right]$

27. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^3-x^2-x}{7x^2-5}\right)^{\frac{3x^2-x+1}{x^2+3x-5}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^3-x^2+2x}{x^3-x^2+2x-1}\right)^{\frac{-2x^3-x+5}{47x^2-x-1}}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^3+x^2+4x}{3x^3-x-2}\right)^{\frac{2x^2+x+4}{-x-2}}$ $[+\infty ; 0 ; 0]$

28. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^3+x^2-8}{3x^3+x^2+8x}\right)^{\frac{3x^2+x+2}{3x-10}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt[3]{x^4}-7\sqrt[7]{x^4}+2\sqrt[4]{x^3}+18\sqrt[3]{x^2}-2}{21\sqrt[4]{x^5}-51\sqrt[3]{x^4}+32\sqrt[4]{x^3}+13x+3}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-7\sqrt[3]{x^{11}}+12\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[3]{x^2}-1}{2\sqrt[9]{x^7}+5\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^5}-5}$ $\left[+\infty;-\dfrac{2}{51};-\infty\right]$

29. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[7]{x^5}+2\sqrt[4]{x^7}+8\sqrt[3]{x^2}-4x}{2\sqrt[4]{x^5}-5\sqrt[3]{x^4}+3\sqrt[4]{x^7}+\sqrt[3]{x^2}-13}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5\sqrt[13]{x^4}-\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-2x}{\sqrt[7]{x^2}-2\sqrt[3]{x^2}+8\sqrt[7]{x^8}-3x}$ $\left[\dfrac{2}{3};0\right]$

30. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{12\sqrt[3]{x^5}-17\sqrt[7]{x^4}-8\sqrt[3]{x^8}-24}{2\sqrt[4]{x^5}-5\sqrt[3]{x^8}+\sqrt[3]{x^7}-3x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[7]{x^2}+2\sqrt[4]{x^3}+2x+9}{2\sqrt[4]{x^3}-5\sqrt[7]{x^4}+18\sqrt[6]{x^5}-13}$ $\left[\dfrac{8}{5};+\infty\right]$

Livello 2

31. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x-1}{x^{5000}+2}$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2^x}$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}$; $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{3x+2}{x^2-x}}$ [–1 ; 1 ; +∞ ; 0 ; 0 ; 0]

Determinare il valore del parametro k in modo tale che sia vera l'uguaglianza

32. $\lim_{x\to+\infty}\frac{(2+5k)x^3+x-1}{(5k-2)\cdot x^3+x}=\frac{7}{3}$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{(5k+3)x^5-x^3+x^2}{(2-7k)\cdot x^5-x^4+3}=-\frac{5}{6}$ $\left[1;\frac{28}{5}\right]$

33. $\lim_{x\to+\infty}\frac{(8-3k)x^4-2x^2+1}{(5+2k)\cdot x^4-3x^3}=\frac{11}{3}$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{(4k+1)x^3-x^2+1}{(5k-8)\cdot x^3-2x+3}=\frac{9}{5}$ $\left[-1;\frac{77}{25}\right]$

Livello 3

34. $\lim_{x\to+\infty}\frac{(2k-1)x^3-3x^2}{(4k+2)\cdot x^2-x+3}=-\frac{3}{4}$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{(3-4k)x^3-x^2+1}{(2k+1)\cdot x^2-2x}=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{(8k+1)x^2-x+1}{(5k+3)\cdot x+3}=-\infty$

$$\left[\frac{1}{2};-\frac{1}{2}<k<\frac{3}{4};-\frac{3}{5}<k<-\frac{1}{8}\right]$$

35. $\lim_{x\to+\infty}\frac{(4-3k)x^3-1}{(7-2k)\cdot x^4-2x+3}=0$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{(3-4k)x^3-2x^2}{(7k+3)\cdot x^2+2x-1}=0$; $\lim_{x\to-\infty}\frac{(11k+1)x^3-x^2+2x-1}{(5k+7)\cdot x^4-2x^5+1}=0$

$$\left[k\neq\frac{2}{7};\varnothing;\forall k\in\mathbb{R}\right]$$

Studiare il valore del limite al variare del parametro k

36. $\lim_{x\to+\infty}\frac{(k+1)\cdot x^3-x^2+x}{x^3-(k+1)\cdot x}$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{(2k-1)\cdot x^3-x^2+1}{(k+6)\cdot x^3+1}$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{(2k+1)\cdot x^4+4x^3}{k\cdot x^3-7\cdot x+k}$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{(k^2-1)\cdot x^3+x^2+k}{(k+1)\cdot x^3-x}$

$$\left[\begin{cases}k+1 & k\neq-1\\ 0 & k=1\end{cases};\begin{cases}\frac{2k-1}{k+6} & k\notin\left\{\frac{1}{2},-6\right\}\\ 0 & k=\frac{1}{2}\\ -\infty & k=-6\end{cases};\begin{cases}+\infty & k<-\frac{1}{2}\vee k>0\\ -\infty & -\frac{1}{2}<k\leq 0\\ -8 & k=-\frac{1}{2}\end{cases};\begin{cases}k-1 & k\neq-1\\ -\infty & k=-1\end{cases}\right]$$

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x-1}-\sqrt{7x+2}\right)$. Abbiamo a che fare con una forma indeterminata +∞ – ∞.

Per eliminarla razionalizziamo: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{3x-1}-\sqrt{7x+2}\right)\cdot\left(\sqrt{3x-1}+\sqrt{7x+2}\right)}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{7x+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1-7x-2}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{7x+2}}=$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x-1}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{7x+2}}$. Adesso applichiamo il principio di sostituzione degli infiniti, ottenendo: $\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{\sqrt{3x}+\sqrt{7x}}=-\infty$. In effetti tale principio potevamo applicarlo subito:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x}-\sqrt{7x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)\cdot x=-\infty.$$

Calcolare i seguenti limiti

Livello 1

37. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{13x-2}-\sqrt{13x+8}\right)$; $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+2x}\right)$; $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x^2-x-1}-\sqrt{4x^2+5}\right)$ [0 ; –1 ; –∞]

38. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2-3}-\sqrt{2x^2+x}\right)$; $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-8}-\sqrt{17x+3}\right)$; $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+x-1}\right)$ $\left[-\frac{\sqrt{2}}{4};-\infty;-\frac{1}{2}\right]$

39. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x^2-x+1}-\sqrt{x^2+2x-4}\right)$; $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{-x^3-x+3}-\sqrt{-2x^3+x^2}\right)$ [+∞ ; –∞]

Livello 2

40. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3x-1}}{\sqrt{3x^2-x}-\sqrt{4x}}$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{2x+3}}{\sqrt{4x^2-2x+1}-\sqrt{x+2}}$; $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{5x+1}-\sqrt{x^2-2x}}$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{5x^2+2}-\sqrt{4x+3}}{\sqrt{7x^2-5}-\sqrt{3x+1}}$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{1}{2};-1;\frac{\sqrt{35}}{7}\right]$

41. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2}-\sqrt{5x+3}}{\sqrt{7x^2+2}-\sqrt{x-2}}$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2+5}-\sqrt{2x^2-x}}{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x-1}}$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+3^x-1}{10^{58}\cdot x^5+1}$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x-3^x}{4^x+x}$ $\left[\frac{\sqrt{14}}{7};\frac{\sqrt{6}-2}{2};+\infty;0\right]$

42. $\lim_{x\to+\infty}\frac{8^x-1}{3^x-1}$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cdot 2^x+1}{7\cdot 2^x+x-1}$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{1-5^x}{4^x}$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{5\cdot\pi^x+\sqrt{3^x}}{\pi^{x+1}+x^2}$ $\left[+\infty;\frac{3}{7};-\infty;\frac{5}{\pi}\right]$

Livello 3

43. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{5x+3}-\sqrt{5x-2}}$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^3-1}-\sqrt{2x^3+3}}{\sqrt{3x^2-3}-\sqrt{3x^2-x+1}}$ [–∞ ; 0]

44. $\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{4x^2-3}}{3\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{9x^2+1}}$; $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{5-x}}{5\sqrt{x^2-1}-\sqrt{25x^2+x+3}}$ $\left[\frac{2}{3};0\right]$

Determinare il valore del parametro k in modo tale che sia vera l'uguaglianza

Livello 3

45. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2-(k-1)\cdot x}-\sqrt{k\cdot x^2-2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{4}$; $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(4k+1)\cdot x^2+3x-1}-\sqrt{x^2+(3k-1)\cdot x-2}\right)=1$ [2 ;∅]

46. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(4k+1)\cdot x^2+3x-1}-\sqrt{x^2+(3k-1)\cdot x-2}\right)=2$ [0]

47. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(4k+1)\cdot x^2+3x-1}-\sqrt{x^2+(3k-1)\cdot x-2}\right)=+\infty$ [$k>0$]

Studiare il valore del limite al variare del parametro k

48. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-(k-1)\cdot x}-\sqrt{(k+1)\cdot x^2-1}\right)$ $\left[\begin{cases}+\infty & k>0\\ -\infty & -1<k<0\\ 1/2 & k=0\end{cases}\right]$

49. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(4k-1)\cdot x^2+3}-\sqrt{x^2+(k-1)\cdot x-2}\right)$ $\left[\begin{cases}+\infty & k>\frac{1}{2}\\ -\infty & \frac{1}{4}\le k<\frac{1}{2}\\ 0 & k=\frac{1}{2}\end{cases}\right]$

50. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(2k+1)\cdot x^2+x}-\sqrt{(2k-1)\cdot x^2-2}\right)$ [+∞ se $k>\frac{1}{2}$; Non ha senso per $k\le\frac{1}{2}$]

51. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{kx^2+x+1}-\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{(k+1)\cdot x^2+x+1}-\sqrt{(k+1)\cdot x^2+1}}$ $\left[\begin{cases}\sqrt{2} & k=1\\ +\infty & k>1\end{cases}\right]$

52. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{(k-1)x^2+k\cdot x}-\sqrt{(k-1)\cdot x^2+1}}{\sqrt{(2k-1)\cdot x^2+2}-\sqrt{(2k-1)\cdot x^2+k\cdot x-1}}$ $\left[\begin{cases}-\sqrt{\frac{2k-1}{k-1}} & k>1\\ -\infty & k=1\end{cases}\right]$

Teoremi sulle funzioni continue

Le funzioni continue godono di molte altre proprietà. Per esempio il fatto che la convergenza avvenga in modo “continuo” e non “a salti”, implica il seguente risultato.

Teorema 25 (di permanenza del segno)

Se $f(x)$ è continua in x_0 e $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0 (< 0)$ allora esiste $I_r(x_0)$, per cui $f(x) > 0$ (< 0), $\forall\, x \in I_r(x_0)$.

Dimostrazione

Consideriamo il caso che si abbia $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell > 0$, noi sappiamo che ciò significa che per un dato numero positivo ε esiste un intorno $I_r(x_0)$ per il quale si ha: $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$. Ma allora se scegliamo un ε tale che sia $\ell - \varepsilon > 0$, il che può sempre farsi poiché $\ell > 0$, avremo che $f(x) > \ell - \varepsilon > 0$, $\forall\, x \in I_r(x_0)$, che è proprio quello che volevamo dimostrare. Analoga dimostrazione se fosse $\ell < 0$ o uno dei simboli $\pm\infty$.

Esempio 41

Vogliamo provare che il teorema precedente non è invertibile, nel senso che non è detto che se una funzione è positiva (o negativa) in un intorno completo di x_0, allora anche $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ è positivo (o negativo). Intanto il limite potrebbe anche non esistere, per esempio non esiste $\lim\limits_{x\to+\infty} sin^2(x)$. Ma anche se il limite esistesse, come per esempio $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, non è positivo, nonostante sia $x^2 > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Se poi le funzioni continue sono definite su intervalli chiusi valgono anche molte altre importanti proprietà.

Teorema 26

Se $f(x)$ è continua in $[a; b]$, allora essa è limitata in $[a; b]$.

Dimostrazione

Dobbiamo dimostrare che non è possibile che esista $x_0 \in [a; b]$ per il quale si abbia $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ o $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$. Infatti per la continuità è $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}, \forall x_0 \in [a;b]$.

In effetti vale un risultato anche più generale e importante.

Teorema 27 (di Weierstrass)

Se $f(x)$ è continua in $[a; b]$, allora essa ammette in $[a; b]$ minimo e massimo.

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che non esista il minimo, cioè si abbia $f(x) \neq \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) = I, \forall x \in [a;b]$, allora possiamo considerare la funzione $g(x) = \dfrac{1}{f(x) - I}$ che è ovviamente continua in tutto $[a; b]$, dato che il denominatore non si annulla mai. Questa funzione, per il teorema precedente, deve essere limitata, ma ciò non è vero. Infatti per le proprietà dell’estremo inferiore $\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{x} \in [a,b] : f(\bar{x}) < I + \varepsilon$, ma allora $f(\bar{x}) - I < \varepsilon \Rightarrow \dfrac{1}{f(\bar{x}) - I} = g(\bar{x}) > \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$, che vuol dire che la funzione g non è limitata superiormente.

Essendo arrivati a una conclusione assurda vuol dire che è falsa l’ipotesi che la f non abbia minimo, quindi c’è l’ha. Analogo procedimento possiamo fare per dimostrare che ha anche il massimo.

Esempio 42

Vogliamo mostrare che entrambe le ipotesi di continuità e di definizione su un intervallo chiuso sono indispensabili per la validità del teorema di Weierstrass.

- La funzione $f(x)=\frac{1}{x}$ è definita in qualsiasi intervallo chiuso che contiene lo zero ma non è continua per $x = 0$ e si ha: $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty, \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$. Quindi la funzione non è limitata in ogni intervallo che contiene lo zero.
- La funzione $f(x) = x$ è continua in tutti i reali; se la definiamo in un intervallo non limitato, per esempio in $[1; +\infty)$, in essa ha minimo, per $x = 1$, ma non ha massimo, poiché $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$.
- Ovviamente possiamo anche avere funzioni non continue che invece hanno massimo e minimo, anche in intervalli non limitati. Per esempio la funzione $f(x)=sin\left(\frac{1}{x}\right)$, che non è continua in $x = 0$, ha minimo, che vale ovviamente -1, e massimo, che vale 1, in qualsiasi intervallo, limitato o illimitato, contenente o no, $x = 0$.

I protagonisti

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass nacque a Ostenfelde il 31/10/1815. Egli mostrò subito spiccata predisposizione per la matematica, nonostante facesse dei lavoretti per aiutare la famiglia. All'Università però, per volere paterno, si iscrisse a un corso che prevedeva sbocchi lavorativi nell'Amministrazione pubblica. Continuò ugualmente a studiare matematica in modo autonomo e dopo avere abbandonato gli studi stabiliti dal padre, si iscrisse all'accademia di Münster, dove nel 1840 conseguì l'abilitazione all'insegnamento nelle scuole secondarie. Cominciò a insegnare l'anno successivo. Nonostante pubblicasse abbastanza frequentemente articoli di alta matematica, rimase sconosciuto ai più, fino al 1854, anno in cui pubblicò un importante articolo di matematica superiore su una prestigiosa rivista. Solo allora cominciò a insegnare all'Università. Il teorema che oggi porta il suo nome è contenuto in lavori del 1859/60. Morì a Berlino il 19/02/1897 dopo 3 anni di invalidità quasi totale.

Un altro risultato intuitivo è quello che può essere la traduzione matematica dell'ovvio fatto che se passiamo dalla Francia all'Italia, dobbiamo passare per forza per il loro confine.

Teorema 28 (di esistenza degli zeri)

Se $f(x)$ è continua in $[a; b]$ e assume valori di segno contrario agli estremi, cioè $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora esiste almeno un valore c interno ad $[a; b]$ in cui la funzione si annulla, cioè $f(c) = 0$.
Dimostrazione omessa

Non abbiamo presentato la dimostrazione, ma nell'esempio seguente facciamo vedere come essa possa ottenersi.

Esempio 43

Consideriamo la funzione $f(x) = x^3 + x + 1$, in $[-1; 0]$. Si ha: $f(-1) = (-1)^3 + (-1) + 1 < 0$, mentre invece si ha $f(0) = 0^3 + 0 + 1 > 0$. Dato che dobbiamo passare da -1 a 1, dobbiamo ovviamente passare anche per lo zero. Dove potrebbe essere questo zero? Proviamo a cercarlo nel punto di mezzo del segmento: $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{2}+1=\frac{3}{8}>0$. Non lo abbiamo trovato, ma avendo ottenuto un valore positivo, possiamo restringere la nostra ricerca all'intervallo $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$, perché ancora una volta abbiamo un intervallo in cui si passa da un numero positivo, $\frac{3}{8}$, a uno negativo, -1. Proviamo ancora una volta a vedere cosa accade nel punto medio: $\dfrac{-1-\frac{1}{2}}{2}=-\dfrac{3}{4}, f\left(-\dfrac{3}{4}\right)=-\dfrac{11}{64}<0$. Ancora una volta non siamo riusciti a trovare lo zero, ma abbiamo di nuovo ridotto l'ampiezza dell'intervallo di ricerca, che adesso è $\left[-\frac{3}{4};-\frac{1}{2}\right]$. Ovviamente si potrebbe pensare che il procedimento non termini mai, ma è facile capire che stiamo effettuando un procedimento di limite, che può farsi grazie alla continuità della funzione, che ci farà arrivare allo zero con il grado di approssimazione voluto. Possiamo dire che per la soluzione x si ha: $-\frac{3}{4} = -0,75 < x < -\frac{1}{2} = -0,5$. Quindi x è un numero negativo la cui cifra intera è 0, mentre la sua prima cifra decimale è 5, 6 o 7. Continuando il procedimento possiamo determinare le successive cifre decimali, almeno in linea teorica, dato che sono infinite.

Il teorema precedente è importante proprio per risolvere equazioni che non sappiamo risolvere con metodi elementari. Ovviamente la risoluzione sarà approssimata. Nelle verifiche riprenderemo e chiariremo la questione. Una generalizzazione del teorema precedente è la seguente.

Teorema 29 (di esistenza dei valori intermedi)

Se $f(x)$ è continua in $[a; b]$, allora la funzione assume ogni valore compreso tra il suo minimo e il suo massimo, cioè comunque consideriamo $z \in \left[\min_{x\in[a,b]}, \max_{x\in[a,b]}\right]$ esiste almeno un c: $a < c < b$ per cui si ha $f(c) = z$.

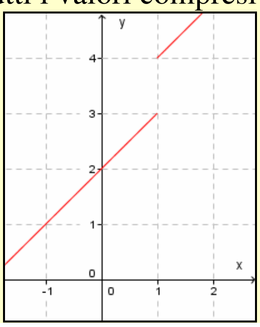
Dimostrazione

Per il teorema di Weierstrass la funzione ammette minimo, m, e massimo, M. Quindi vuol dire che esistono $x_1, x_2 \in [a; b]$, per cui si ha: $f(x_1) = m$ e $f(x_2) = M$, supponiamo che sia anche $x_1 < x_2$, il che non inficia la dimostrazione. Adesso consideriamo la funzione $f(x) - z$, in cui $z \in (m; M)$, questa ovviamente è continua in $[a; b]$, quindi anche in $[x_1; x_2]$. E si ha ovviamente $f(x_1) - z < 0$, e $f(x_2) - z > 0$, quindi possiamo applicare a essa il teorema di esistenza degli zeri nell'intervallo $[x_1; x_2]$. Perciò esiste $c \in [x_1; x_2] \subseteq [a; b]$, per cui si ha: $f(c) - z = 0 \Rightarrow f(c) = z$, che è proprio ciò che volevamo provare.

Ancora una volta vogliamo far vedere che le ipotesi del teorema sono tutte indispensabili.

Esempio 44

- Consideriamo di nuovo la funzione $f(x)=\frac{1}{x}$, per la quale si ha $f(-1) = -1 < 0$ e $f(2) = \frac{1}{2} > 0$, eppure è $\frac{1}{x} \neq 0, \forall x \neq 0$. Il teorema di esistenza degli zeri non può essere applicato perché la funzione non è continua in tutto $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$.
- Analogamente è indispensabile la condizione di continuità. Per esempio la funzione $f(x)=\begin{cases} x+2 & x<1 \\ 3+x & x\geq 1\end{cases}$, non è continua in $x = 1$, nell'intervallo $[0; 2]$, eppure ha ugualmente minimo, 2, e massimo, 5. Ma non è vero che assume tutti i valori compresi tra 2 e 5, come mostrato nel grafico.



Verifiche

Stabilire a quali delle seguenti funzioni si può applicare il teorema della permanenza del segno nel punto indicato

1. $f(x) = x^2 + x + 1$, $x_0 = 1$; $f(x) = x^2 + x$, $x_0 = 0$; $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}, x_0=1$; $f(x)=\sqrt{x+1}, x_0=-1$ [Sì; No ; No ; No]
2. $f(x) = sin(2x + 1)$, $x_0 = 0$; $f(x) = tan(x - 2)$, $x_0 = 2 + \pi/2$; $f(x) = ln(x^2 - 2)$, $x_0 = \sqrt{3}$ [Sì ; No ; No]
3. $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$, $x_0 = 0$; $f(x) = sin^{-1}(x + 1)$, $x_0 = 1$; $f(x)=\sqrt[3]{1-x^3}, x_0=-2$ [No ; No ; Sì]

Stabilire a quali delle seguenti funzioni si può applicare il teorema di Weierstrass, nell'intervallo indicato. Per quelle per le quali non è possibile, dire se hanno minimo o massimo assoluti

4. $f(x) = x^2 + x + 1$, $x \in [1; +\infty)$; $f(x) = \lceil x \rceil$, $x \in [2; 5]$ [(No; $x_m = 1$; no *Max*); (No; $x_m = 2$; $x_M = 5$)]
5. $f(x) = x + 2$, $x \in (1; 3)$ $f(x)=\frac{1}{x^2+1}, x\in[-2;2]$ [(No; No *min*, no *Max*) ; Sì]
6. $f(x)=sin\left(\frac{3x+1}{x-2}\right), x\in[1;3]$; $f(x)=\frac{1}{x^2-1}, x\in[2;3]$ [(No; $x_m = -1$, $x_M = 5$) ; Sì]
7. $f(x)=\frac{x+2}{x^2-4}, x\in[1;3]$; $f(x)=\frac{x+2}{x^2-4}, x\in[3;5]$ [(No; No *min*, no *Max*) ; Sì]
8. $f(x)=\frac{x+2}{x^2-4}, x\in[-3;-1]$; $f(x) = sin^{-1}(2x + 1)$, $x \in [-1; 0]$ [(No, $x_m = -1$; $x_M = -3$) ; Sì]

Stabilire a quali delle seguenti funzioni si può applicare il teorema di esistenza degli zeri, nell'intervallo indicato. Per quelle per le quali non è possibile, dire se ugualmente si annullano nel dato intervallo

9. $f(x) = x^2 + x$, $x \in [-1; 1]$; $f(x) = \lfloor x + 2 \rfloor$, $x \in [0; 5]$ [(No; $x_0 = -1$) ; (No; No)]
10. $f(x) = x^3 + 2x - 1$, $x \in [-2; 2]$; $f(x) = e^{2x+1}$, $x \in [-5000; 7000]$ [Sì ; (No; No)]
11. $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$, $x \in [-k; k]$, $k \neq 0$; $f(x)=\frac{x+1}{x^2-1}$, $x \in [-1; 2]$ [(No; No) ; (No; No)]
12. $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$, $x \in [-3; 3]$; $f(x) = (x + 1)^{x-1}$, $x \in [-1; 1]$ [(No; $x_0 = -2$) ; (No; No)]
13. $f(x) = log_2(x + 1)$, $x\in\left[-\frac{1}{2};1\right]$; $f(x) = log_{x+1}(2)$, $x\in\left[-\frac{1}{2};1\right]$ [Sì ; (No; No)]

Lavoriamo insieme

Data l'equazione $7x^3 - 2x^2 + 8x + 5 = 0$, vogliamo determinare una sua soluzione approssimata al primo decimale. Possiamo usare il teorema di esistenza degli zeri, cercando un intervallo in cui la funzione associata all'equazione assume valori di segno contrario. Si ha: $7 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) + 5 = -12 < 0$; $7 \cdot 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 + 5 = 5 > 0$, quindi una soluzione appartiene a $[-1; 0]$, cioè la sua parte intera è -0. Adesso dobbiamo trovare la sua prima cifra decimale. Calcoliamone il valore nel punto medio $x=-\frac{1}{2}: 7\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+5<0$. Quindi l'intervallo in cui la funzione assume valori di segno opposto è diventato: $\left[-\frac{1}{2};0\right]$. Consideriamo di nuovo il suo punto medio $x=-\frac{1}{4}: 7\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^3-2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+8\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+5>0$. Perciò adesso cerchiamo nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right]$. Avendo notato che il valore calcolato è "abbastanza" lontano da zero, piuttosto che cercare nel punto medio del segmento potremmo cercare in un valore più vicino all'estremo sinistro, per esempio in $-0,4$. Si vede che il valore calcolato è positivo perciò l'intervallo adesso è diventato $[-0,5; -0,4]$. Ma allora abbiamo finito, perché tutti i valori interni al dato intervallo hanno prima cifra decimale 4, quindi l'approssimazione cercata è $-0,4$. Continuando il procedimento si ottengono altre cifre decimali, così le prime 3 cifre esatte: $-0,474$.

Determinare una soluzione approssimata al primo decimale delle equazioni seguenti

Livello 2

14. $3x^3 - x^2 + x - 4 = 0$; $3x^3 + x^2 + 3x - 4 = 0$; $2x^3 + 4x^2 + 3x - 4 = 0$ [$x \approx 1,1$; $x \approx 0,7$; $x \approx 0,6$]
15. $2x^3 - 4x^2 + 3x - 5 = 0$; $4x^3 + x^2 - 3x - 5 = 0$; $5x^3 - 7x^2 - x - 5 = 0$ [$x \approx 1,9$; $x \approx 1,2$; $x \approx 1,8$]
16. $x^4 - x^2 - x - 5 = 0$; $x^4 + x^2 - 2x - 1 = 0$; $x^5 + x^3 - 1 = 0$; $x^5 - x^3 - x - 2 = 0$ [($x \approx -1,5 \vee x \approx 1,7$) ; ($x \approx -0,4 \vee x \approx 1,1$) ; $x \approx 0,8$; $x \approx 1,4$]

Livello 3

17. $x - sin(x - 1) = 0$; $x + ln(x + 2) = 0$; $x + 2 - e^x = 0$; $sin(x) = e^x$; $sin(x) = ln(x)$; $e^x + ln(x) - 4 = 0$ [$x \approx -0,9$; $x \approx -0,4$; ($x \approx -1,8 \vee x \approx 1,1$) ; $x \approx -3,1$; $x \approx 2,2$; $x \approx 1,3$]

I limiti notevoli

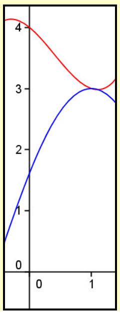
Il problema

Il seguente limite $\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}$ è una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$, eppure non riusciamo a trovare un fattore indeterminante come successo nel caso dei limiti del rapporto di polinomi, poiché la funzione al numeratore non è un polinomio. Come possiamo allora risolvere l'indeterminazione?

Il precedente problema può essere risolto con un semplice ragionamento.

Esempio 45

In figura abbiamo rappresentato due funzioni in un opportuno intorno di 1 . Entrambe le funzioni sono continue per $x = 1$ e si ha $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = 3$, ma allora se riuscissimo a "inserire" una terza funzione fra le due, in questo intorno, possiamo concludere che anche per essa si avrà $\lim_{x\to 1} h(x) = 3$?



La questione sollevata nell'esempio precedente è risolta dal seguente risultato.

Teorema 30 (del confronto)

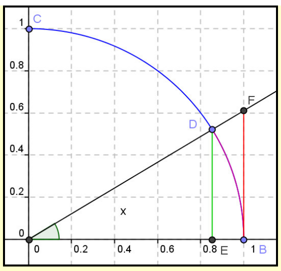
Siano $f(x)$, $h(x)$, $g(x)$ funzioni continue in $I_r(x_0)$ e $f(x) \le h(x) \le g(x)$ $\forall x \in I_r(x_0)$, si abbia inoltre $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, allora si avrà anche $\lim_{x\to x_0} h(x) = \ell$.

Dimostrazione

Consideriamo il caso che il limite sia finito, in modo analogo si procederà se infinito. Per ipotesi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $I_{r_1}(x_0)$: $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon, \forall x \in I_{r_1}(x_0)$ e $I_{r_2}(x_0)$: $\ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon, \forall x \in I_{r_2}(x_0)$ (*). Ma allora in $I_m(x_0) = I_{r_1}(x_0) \cap I_{r_2}(x_0) \cap I_r(x_0)$ valgono le (*) e la disuguaglianza dell'ipotesi, cioè: $\ell - \varepsilon < f(x) \le g(x) < \ell + \varepsilon \Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) \le h(x) \le g(x) < \ell + \varepsilon, \forall x \in I_m(x_0) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell$.

Vediamo un'applicazione di questo teorema.

Esempio 46



Come mostrato dalla preceeente figura si ha: $\overline{DE} = sin(x), \overset{\frown}{BD} = x, \overline{BF} = tan(x)$ che sono tutte funzioni continue in un intorno destro di 0. D'altro canto si ha anche $\overline{DE} \le \overline{BD} \le \overset{\frown}{BD} \le \overline{BF}$, cioè, trascurando il segmento BD, avremo: $sin(x) < x < tan(x)$. Le tre quantità sono positive, quindi dividendo per una qualsiasi di esse la disuguaglianza continua a essere valida. Dividiamo per *sin*(*x*). $1 < \frac{x}{sin(x)} < \frac{1}{cos(x)}$.

Poiché anche queste tre funzioni sono continue in un intorno destro di 0, e poiché $\lim_{x \to 0^+} 1 = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{cos(x)} = 1$,

siamo nelle ipotesi del teorema del confronto e possiamo dire allora che si ha anche: $\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{sin(x)} = 1$.

Osserviamo che il precedente limite è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Il precedente esempio permette di dimostrare facilmente il seguente risultato.

Teorema 31

Si ha: $\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$.

Dimostrazione

Per quanto visto nell'esempio e poiché $\lim_{x \to 0^+} \frac{sin(x)}{x} = \frac{1}{\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{sin(x)}} = 1$. Per quanto riguarda il limite sinistro abbiamo: $\lim_{x \to 0^-} \frac{sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{sin(-x)}{-x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-sin(x)}{-x} = 1$.

Il precedente limite viene detto *notevole* e può essere generalizzato al seguente risultato.

Teorema 32

$\lim_{x \to z} f(x) = 0, z \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{x \to z} \frac{sin[f(x)]}{f(x)} = 1$.

Dimostrazione

Basta applicare il precedente teorema e il teorema 14 sul limite delle funzioni composte.

Nel precedente teorema l'angolo deve essere misurato in radianti non in gradi sessagesimali. Cosa accade in caso contrario?

Esempio 47

Quanto fa $\lim_{x \to 0} \frac{sin(x°)}{x}$? Trasformiamo l'angolo da gradi sessagesimali a radianti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sin(x°)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{sin\left(x \cdot \frac{180}{\pi}\right)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{sin\left(x \cdot \frac{180}{\pi}\right)}{x \cdot \frac{180}{\pi}} \cdot \frac{\pi}{180} = 1 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180}$$

Osserviamo anche che il limite è calcolato per qualsiasi valore della retta reale, quindi anche per uno dei simboli più o meno infinito.

Esempio 48

Calcolare $\lim_{x \to +\infty} x \cdot sin\left(\frac{3}{x^2}\right)$. Così come è scritto abbiamo a che fare con una forma indeterminata del tipo

$\infty \cdot 0$, ma possiamo scrivere anche: $\lim_{x\to+\infty}\frac{sin\left(\frac{3}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}}$ che è adesso del tipo $\frac{0}{0}$ e rientra nelle ipotesi del teorema

32: $\lim_{x\to+\infty}\frac{sin\left(\frac{3}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{sin\left(\frac{3}{x^2}\right)}{\frac{3}{x^2}}\cdot\frac{3}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$. Per il calcolo abbiamo applicato il limite notevole al primo fattore.

Dal precedente seguono altri limiti notevoli.

Corollario 1

Si ha:

$$\lim_{x\to z}f(x)=0, z\in\overline{\mathbb{R}}\Rightarrow\lim_{x\to z}\frac{tan\left[f(x)\right]}{f(x)}=1;\lim_{x\to z}\frac{sin^{-1}\left[f(x)\right]}{f(x)}=1;$$
$$\lim_{x\to z}\frac{tan^{-1}\left[f(x)\right]}{f(x)}=1;\lim_{x\to z}\frac{1-cos\left[f(x)\right]}{f(x)}=0;\lim_{x\to z}\frac{1-cos\left[f(x)\right]}{\left[f(x)\right]^2}=\frac{1}{2}.$$

Dimostrazione

- Si ha facilmente $\lim_{x\to z}\frac{tan\left[f(x)\right]}{f(x)}=\lim_{x\to z}\frac{sin\left[f(x)\right]}{f(x)}\cdot\frac{1}{cos\left[f(x)\right]}=1$.
- $$\lim_{x\to z}\frac{1-cos\left[f(x)\right]}{f(x)}=\lim_{x\to z}\frac{1-cos^2\left[f(x)\right]}{f(x)}\cdot\frac{1}{1+cos\left[f(x)\right]}=\lim_{x\to z}\frac{sin^2\left[f(x)\right]}{f(x)}\cdot\frac{1}{1+cos\left[f(x)\right]}=$$
$$=\lim_{x\to z}\frac{sin\left[f(x)\right]}{f(x)}\cdot\frac{sin\left[f(x)\right]}{1+cos\left[f(x)\right]}=0;\lim_{x\to z}\frac{1-cos\left[f(x)\right]}{\left[f(x)\right]^2}=\lim_{x\to z}\frac{sin^2\left[f(x)\right]}{\left[f(x)\right]^2}\cdot\frac{1}{1+cos\left[f(x)\right]}=\frac{1}{2}$$
- Posto $sin^{-1}[f(x)] = t \Rightarrow f(x) = sin(t)$, per cui se al tendere di x a z si ha $f(x)$ che tende a zero, al tendere di t a zero avremo $sin(t)$ che tende a zero, e perciò: $\lim_{x\to z}\frac{sin^{-1}\left[f(x)\right]}{f(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{sin(t)}=1$.
- Lasciamo per esercizio il rimanente limite.

Vedremo altri esempi nelle verifiche. Vogliamo invece studiare altri limiti notevoli che possano aiutarci a risolvere altre forme indeterminate che non riusciamo a calcolare con le tecniche viste in precedenza.

Teorema 33

Si ha: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

Dimostrazione Omessa

Osserviamo che il precedente limite è una forma indeterminata del tipo 1^∞. Anche in questo caso abbiamo un risultato più generale.

Teorema 34

$$\lim_{x\to z}f(x)=\infty\Rightarrow\lim_{x\to z}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e, z\in\overline{\mathbb{R}}.$$

Esempio 49

Calcolare $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x^2}\right)^{2x}$. È una forma indeterminata del tipo 1^∞, che può essere fatta rientrare nelle ipotesi del teorema 34. Basta scrivere: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2}{3}}\right)^{2x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2}{3}}\right)^{\frac{x^2}{3}}\right]^{\frac{3}{x^2}\cdot 2x}$. La parte all'interno delle parentesi quadrate si calcola con il teorema 34, pertanto il limite da calcolare è lo stesso del seguente, più semplice: $\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{6}{x}}$ e poiché l'esponente tende a 0, avremo: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x^2}\right)^{2x}=e^0=1$.

Il limite del teorema 34, permette di stabilire un altro limite notevole.

Teorema 35

Si ha: $\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=1$

Dimostrazione

Possiamo scrivere: $\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot ln(1+x)\right]=\lim_{x\to 0}\left[ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$, utilizzando le proprietà dei logaritmi. Calcoliamo il limite dell'argomento, che rientra nelle ipotesi del teorema 34, poiché $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$ e $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}}=e$, quindi per il teorema 14, avremo: $\lim_{x\to 0}\left[ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=ln(e)=1$.

Il precedente limite è una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ e può essere esteso a logaritmi con base generica.

Teorema 36

Si ha: $\lim_{x\to 0}\frac{log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{ln(a)}$

Dimostrazione

Basta applicare il cambio di base: $\lim_{x\to 0}\frac{log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x\cdot ln(a)}==\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}\cdot\frac{1}{ln(a)}=\frac{1}{ln(a)}$.

Anche in questo caso vi è un risultato più generale, la cui dimostrazione lasciamo per esercizio

Teorema 37

$\lim_{x\to z}f(x)=0\Rightarrow\lim_{x\to z}\frac{log_a[1+f(x)]}{f(x)}=\frac{1}{ln(a)}, z\in\overline{\mathbb{R}}$

Esempio 50

Calcolare $\lim_{x\to 2}\frac{ln(3-x)}{x^2-4}$. È una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$, che può rientrare nelle ipotesi del teorema

36. Si ha: $\lim_{x\to 2}\frac{ln(3-x)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{ln[1+(2-x)]}{(2-x)\cdot(x+2)(-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{ln[1+(2-x)]}{(2-x)}\cdot\frac{-1}{x+2}=-\frac{1}{4}$.

Ancora un limite notevole.

Teorema 38

Si ha: $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=ln(a)$

Dimostrazione

Detto $\log_a(1+x)=p\Rightarrow 1+x=a^p\Rightarrow x=a^p-1$, quindi il risultato del teorema 36 diventa: $\lim_{p\to 0}\frac{p}{a^p-1}=\frac{1}{ln(a)}$, ovviamente il nome scelto per la variabile è puramente simbolico, quindi possiamo anche scrivere: $\lim_{x\to 0}\frac{x}{a^x-1}=\frac{1}{ln(a)}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=ln(a)$.

Come ovvia conseguenza si ha il seguente risultato.

Corollario 2

Si ha: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

Dimostrazione per esercizio

Il limite del Teorema 38 è una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Ecco il risultato più generale.

Teorema 39

$\lim_{x\to z}f(x)=0\Rightarrow\lim_{x\to z}\frac{a^{f(x)}-1}{f(x)}=ln(a), z\in\overline{\mathbb{R}}$.

Dimostrazione per esercizio

Esempio 51

Calcolare $\lim_{x\to 3}\frac{2^{x-3}-1}{x^2-2x-3}$. È una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$, che può rientrare nelle ipotesi del teorema 39. Si ha: $\lim_{x\to 3}\frac{2^{x-3}-1}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{2^{x-3}-1}{(x-3)}\cdot\frac{1}{x+1}=ln(2)\cdot\frac{1}{4}=\frac{ln(2)}{4}$.

Ancora un limite notevole.

Teorema 40

Si ha: $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x}=p$

Dimostrazione

Proponiamo la dimostrazione solo per p intero positivo. In questo caso sappiamo che possiamo scrivere (Teorema del binomio di Newton in unità 8.2.) $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^k$. Ricordiamo che il teorema 21 (principio di sostituzione degli infinitesimi), afferma che il limite di una somma fra infinitesimi è uguale al limite dell'infinitesimo di ordine inferiore. E sappiamo che fra x^k e x^h, è inferiore quello che ha esponente più piccolo, quindi vuol dire che $(1+x)^2 \approx 1+2x;(1+x)^3 \approx 1+3x;(1+x)^4 \approx 1+4x;...;(1+x)^p \approx 1+px$, dove con il simbolo ≈, che leggiamo *asintotico a*, intendiamo dire che le due espressioni hanno lo stesso limite, in questo caso per *x* che tende a zero. Quindi possiamo scrivere: $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1+px-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{p\cancel{x}}{\cancel{x}} = p$, che è la tesi.

Anche il precedente limite è una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$, e ha la sua generalizzazione.

Teorema 41

$\lim_{x\to z} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to z}\frac{[1+f(x)]^p-1}{f(x)} = p, z \in \overline{\mathbb{R}}$

Dimostrazione per esercizio

Esempio 52

Calcolare $\lim_{x\to -2}\frac{(x^2+x-1)^{12}-1}{3x^2+5x-2}$. È una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$, che può scriversi nel modo seguente:

$\lim_{x\to -2}\frac{\left[1+\left(x^2+x-2\right)\right]^{12}-1}{x^2+x-2}\cdot\frac{x^2+x-2}{3x^2+5x-2} = 12\cdot\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}\cdot(x-1)}{\cancel{(x+2)}\cdot(3x-1)} = 12\cdot\frac{-3}{-7} = \frac{36}{7}$.

Concludiamo il paragrafo con la raccomandazione che quanto qui presentato è valido solo per forme indeterminate, applicare i risultati per limiti che non rientrano "esattamente" nelle ipotesi dei teoremi ovviamente fornisce risultati errati.

Esempio 53

- $\lim_{x\to 2}\frac{ln(1+x)}{x}$ non è una forma indeterminata, ma vale $\lim_{x\to 2}\frac{ln(1+x)}{x} = \frac{ln(3)}{2}$. Se invece lo considerassimo, sbagliando, come un limite notevole, scrivendo $\lim_{x\to 2}\frac{ln(1+x)}{x} = 1$, ovviamente commetteremmo un grave errore.
- Si faccia attenzione che, come spesso accade in matematica, anche sbagliando si possono ottenere risultati corretti. Per esempio calcoliamo nel seguente modo $\lim_{x\to 0}\frac{sin(x+1)}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x} = \infty$, che è errato perché $\lim_{x\to 0}\frac{sin(x+1)}{x}$ non è una forma indeterminata e quindi non rientra nelle ipotesi del teorema 32. Eppure $\lim_{x\to 0}\frac{sin(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{sin(1)}{x} = \infty$. Ovviamente l'avere ottenuto un risultato corretto non fa sì che la procedura venga considerata corretta.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot tan(5x)-3x}{9\cdot sin^2(x)+6x}$. Abbiamo a che fare con una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Possiamo sfruttare il limite notevole $\lim_{x\to 0} f(x)=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{tan\left[f(x)\right]}{f(x)}=1$. Abbiamo allora

$$\lim_{x\to 0}\frac{4tan(5x)-3x}{9sin^2(x)+6x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\frac{tan(5x)}{5x}5x-3x}{9\frac{sin(x)}{x}\frac{sin(x)}{x}x^2+6x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot 1\cdot 5x-3x}{9\cdot 1\cdot 1\cdot x^2+6x}=\lim_{x\to 0}\frac{17x}{9x^2+6x}=\lim_{x\to 0}\frac{17}{9x+6}=\frac{17}{6}.$$

Calcolare i seguenti limiti, usando, laddove possibile, i limiti notevoli

Livello 1

1. $\lim_{x\to 0}\frac{sin(2x)}{3x}$; $\lim_{x\to -2}\frac{sin(x+2)}{x-2}$; $\lim_{x\to 2}\frac{sin(x-2)}{x^2-4}$; $\lim_{x\to 0^+}\frac{sin(x)}{x^2}$; $\lim_{x\to 3}\frac{sin^2(x-3)}{x-3}$; $\lim_{x\to 1^-}\frac{1-sin(x-1)}{x-1}$ $\left[\frac{2}{3};0;\frac{1}{4};+\infty;0;-\infty\right]$

2. $\lim_{x\to 0}\left[x\cdot sin\left(\frac{3}{x}\right)\right]$; $\lim_{x\to -1}\frac{sin(x^3+1)}{x+1}$; $\lim_{x\to 0}\frac{sin(5x)}{sin(7x)}$; $\lim_{x\to 0}\frac{sin^2\left(\sqrt{2}x\right)}{tan^2\left(\sqrt{3}x\right)}$; $\lim_{x\to 0}\frac{cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{x}$; $\lim_{x\to -3}(x+3)\cdot csc(x+3)$ $\left[3;3;\frac{5}{7};\frac{2}{3};1;1\right]$

3. $\lim_{x\to 1}\frac{sin(x-1)}{sin\left(x^2-1\right)}$; $\lim_{x\to -2}\frac{sin(x^2-4)}{sin(x+2)}$; $\lim_{x\to 2}\frac{sin(x^2-4)}{sin(x^3-8)}$; $\lim_{x\to -1^+}\frac{sin(x^3-1)}{sin(x^2-x-2)}$; $\lim_{x\to 5}\frac{sin(x-5)}{sin(x^2-x-20)}$ $\left[\frac{1}{2};-4;\frac{1}{3};+\infty;\frac{1}{9}\right]$

4. $\lim_{x\to 1}\frac{sin(x^3-2x+1)}{sin(4x^2-3x-1)}$; $\lim_{x\to -1}\frac{sin(2x^3+3x+5)}{sin(x^2-4x-5)}$; $\lim_{x\to 0}\frac{sin(x^2-2x-3)}{sin(2x^2-7x+3)}$; $\lim_{x\to \pi}\frac{sin(x)}{sin(x+\pi)}$; $\lim_{x\to \pi}\frac{sin(\pi-x)}{sin(x)}$ $\left[\frac{1}{5};-\frac{3}{2};-1;-1;1\right]$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{sin(15\pi x)}{sin(23\pi x)}$; $\lim_{x\to 0}\frac{cos\left(\frac{17}{2}\pi-x\right)}{cos\left(\frac{25}{2}\pi+x\right)}$; $\lim_{x\to 0}\frac{sin^{-1}(x)}{x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{tan^{-1}(x)}{x}$; $\lim_{x\to 0^-}\frac{cos^{-1}(x)}{x}$ $\left[\frac{15}{23};-1;1;1-\infty\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare $\lim_{x\to 4}\frac{sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{x-4}$, che è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Cerchiamo di ricondurla al limite notevole $\lim_{x\to 4}\frac{sin\left[f(x)\right]}{f(x)}=1$ se $f(x)$ tende a zero. Sappiamo che possiamo scrivere $sin(x) = sin(\pi - x)$, pertanto avremo: $\lim_{x\to 4}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}x\right)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\sin\left[\frac{\pi}{4}\cdot(4-x)\right]}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\sin\left[\frac{\pi}{4}\cdot(4-x)\right]}{\frac{\pi}{4}\cdot(4-x)}\cdot\frac{-\pi}{4}=\frac{-\pi}{4}$.

Calcolare i seguenti limiti, usando, laddove possibile, i limiti notevoli

Livello 2

6. $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{x-1}$ (si ha: $\sin(x)=\sin(\pi-x)$) ; $\lim_{x\to 2}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-2}$; $\lim_{x\to 0}\frac{-5\cdot\sin(x^2)-3x}{3\cdot\sin(5x)+2x}$ $\left[-\pi;-\frac{\pi}{2};-\frac{3}{17}\right]$

7. $\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\sin(2x)-4x}{7\cdot\sin(9x)+2x}$; $\lim_{x\to 0^+}\frac{-7\cdot\sin(9x)+3}{\sin(6x)+4x^2}$; $\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos(x)}{x^3}$; $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x-1)}{\sin(x^2-1)}$ $\left[\frac{2}{65};+\infty;+\infty;-\sin(1)\right]$

8. $\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot\sin(x)-3x}{-2\cdot\tan(9x)+5x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos(x)}}{x^2}$; $\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\sin(x^2)-x^2}{2\cdot\sin^2(5x)+2x^2}$ $\left[-\frac{1}{13};\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{13}\right]$

9. $\lim_{x\to 0}\frac{8\cdot\sin(2x)-3x}{-7\cdot\sin(5x)+1}$ $\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\sin^{-1}(4x)-x}{\sin(6x)+x^3}$ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3(x)-5x}{5\cdot\sin(3x)+7x}$ $\lim_{x\to 2}\frac{1-\cos(x^2-4)}{\sin(x-2)}$ $\left[0;\frac{11}{6};-\frac{5}{22};0\right]$

10. $\lim_{x\to 3}\frac{1-\cos^2(x^2-9)}{\sin(2x-6)}$; $\lim_{x\to 1^+}\frac{\sin(2x^2-2)}{1-\cos^2(x-1)}$; $\lim_{x\to 2}\frac{1-\cos^2(x-2)}{\sin(3x^2-4x-4)}$ [0 ; +∞ ; 0]

Livello 3

11. $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(2x-1)-\sin(x)}{x-1}$ (Applicare le formule di prostaferesi) ; $\lim_{x\to\pi/3}\frac{\sin(x)-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3x-\pi}$ $\left[\cos(1);\frac{1}{6}\right]$

12. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(3x)-\cos(4x)}{x^3}$; $\lim_{x\to 2}\frac{\cos(x)-\cos(2)}{x-2}$; $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(5x+\pi)+\cos(x)}{x}$ [+∞ ; –*sin*(2) ; 0]

13. $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cdot\sin(x)-\sqrt{3}}{\cos(x)-\frac{1}{2}}$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\cdot\sin(x)-\sqrt{2}}{\tan(x)-1}$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\cos(x)-1}$ $\left[-\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{3}}{6}\right]$

14. $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin(x)-\frac{1}{2}}{2\cdot\cos(x)-\sqrt{3}}$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin(x)}{\cot(x)}$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\tan(x)-1}$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2};0;-\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$

15. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan(x)-1}{2\cdot\sin(x)-\sqrt{2}}$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(x)-\cos(x)}{4x-\pi}$; $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin(x)}-\sqrt{1-\sin(x)}}{x+\sin(x)}$ $\left[\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{1}{2}\right]$

16. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sqrt{\sin(x)}}{\cos(x)}$; $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{3x^2+4x^3}$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\tan\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right)}$ $\left[0;-\frac{1}{6};-\frac{\pi}{4}\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{5}{13x^2}\right)^{\frac{4}{3}x^2}$. Abbiamo una forma indeterminata del tipo 1^∞, quindi cerchiamo di ricondurla alla forma $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$, in cui *f*(*x*) tende a infinito. Abbiamo allora:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{5}{13x^2}\right)^{\frac{4}{3}x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{13x^2}{5}}\right)^{\frac{13x^2}{5}}\right]^{\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{3}}=e^{\frac{20}{39}}$$

Calcolare i seguenti limiti, usando, laddove possibile, i limiti notevoli

Livello **1**

17. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{3x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$ $\left[e^2;e^2;e^{-1};e^{\frac{3}{5}};1\right]$

18. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x-2}\right)^{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)^{3x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{-5x}$ $\left[0;e;e;+\infty;e^{-\frac{10}{3}}\right]$

19. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{11x}\right)^{\frac{2}{3}x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{7}{4x}\right)^{3x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{3}{8x}\right)^{-2x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{37}{5x^2}\right)^{2x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{17}{3x}\right)^{-\frac{1}{2}x^2}$ $\left[e^{\frac{2}{11}};e^{-\frac{21}{4}};e^{\frac{3}{4}};1;+\infty\right]$

20. $\lim\limits_{x\to2^+}\left(1-\frac{x-2}{x+2}\right)^{-\frac{2}{3\cdot(x-2)}}$; $\lim\limits_{x\to-1^-}\left(1-\frac{x^3+1}{x-1}\right)^{\frac{3x}{x^2-1}}$; $\lim\limits_{x\to3^+}\left(1+\frac{13}{2x-5}\right)^{\frac{-5x}{x-3}}$; $\lim\limits_{x\to2^+}\left(1+\frac{x^2-4}{x^2-2}\right)^{\frac{x}{x^3-8}}$ $\left[e^{\frac{1}{6}};e^{\frac{9}{4}};0;e^{\frac{1}{3}}\right]$

21. $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\frac{\sin(x)}{x+2}\right)^{\frac{\pi}{x}}$; $\lim\limits_{x\to4}\left(1+\frac{x^2-16}{7x^2-1}\right)^{\frac{3}{5x-20}}$; $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{2}{x}}$; $\lim\limits_{x\to3}(2x-5)^{\frac{4}{x-3}}$; $\lim\limits_{x\to-2}\left(x^3+x^2-x+3\right)^{\frac{x+3}{x+2}}$

$\left[e^{-\frac{\pi^2}{2}};e^{\frac{8}{185}};e^2;e^8;e^7\right]$

Lavoriamo insieme

Calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5x^2-x+1}{5x^2+3}\right)^{\frac{3x^2+x-1}{4x-5}}$. Abbiamo $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x^2-x+1}{5x^2+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{5x^2}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+x-1}{4x-5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{4x}=+\infty$, quindi è una forma indeterminata di tipo 1^∞, pensiamo perciò di ricondurla a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$. Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x^2+3+(-x-2)}{5x^2+3}\right)^{\frac{3x^2+x-1}{4x-5}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x^2+3}{5x^2+3}+\frac{-x-2}{5x^2+3}\right)^{\frac{3x^2+x-1}{4x-5}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{5x^2+3}{-x-2}}\right)^{\frac{3x^2+x-1}{4x-5}}$$

, quindi adesso trasformiamo anche l'esponente: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{5x^2+3}{-x-2}}\right)^{\frac{5x^2+3}{-x-2}}\right]^{\frac{-x-2}{5x^2+3}\cdot\frac{3x^2+x-1}{4x-5}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{-x-2}{5x^2+3}\cdot\frac{3x^2+x-1}{4x-5}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{-3x^3}{20x^3}}=e^{-\frac{3}{20}}$.

Calcolare i seguenti limiti, usando, laddove possibile, i limiti notevoli

Livello 2

22. $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{x+4}}$; $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+1}{x^2-x-2}\right)^{\frac{x^2+3}{5x}}$; $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^3-x+1}{3x^3+x^2}\right)^{\frac{7x^2+x}{x-2}}$ $\left[\frac{1}{4};e^{-\frac{2}{5}};e^{-\frac{7}{3}}\right]$

23. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2-x}{3x^2+x+3}\right)^{\frac{5x^3+1}{x^2+1}}$; $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3-x^2-2}\right)^{\frac{3x^2+x-3}{5x+2}}$; $\lim_{x\to0^+}(1+sin(x))^{\frac{3x-1}{x^3}}$ $\left[\frac{1024}{1023};e^{\frac{3}{5}};0\right]$

24. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2+1}{4x^2-3x+5}\right)^{\frac{3x^2+2x-1}{4x-3}}$; $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{11x^2-3x+1}{11x^2+4x-3}\right)^{\frac{x^2+x+4}{5x+7}}$; $\lim_{x\to0}(cos(x))^{\frac{4x+1}{x^2}}$ $\left[e^{\frac{9}{16}};e^{-\frac{7}{55}};e^{-\frac{1}{2}}\right]$

Livello 3

25. $\lim_{x\to\pi}(1-sin(x))^{\frac{x^2}{tan(x)}}$; $\lim_{x\to2}\left(\frac{2x^2-5}{x+1}\right)^{\frac{x+2}{x-2}}$; $\lim_{x\to1}\left(\frac{4x^2-x+1}{x+3}\right)^{\frac{5x-1}{x-1}}$; $\lim_{x\to-2}\left(\frac{x^2+1}{x-7}\right)^{\frac{7x+1}{x+2}}$ $\left[e^{\pi^2};e^{\frac{28}{3}};e^6;\varnothing\right]$

26. ; $\lim_{x\to-2}\left(\frac{x^2+1}{x+7}\right)^{\frac{7x+1}{x+2}}$; $\lim_{x\to3}\left(\frac{2x^2+1}{x+16}\right)^{\frac{2x+5}{x-3}}$; $\lim_{x\to2}\left(\frac{5x+2}{x^2+8}\right)^{\frac{x+1}{x-2}}$; $\lim_{x\to-3}\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)^{\frac{4x+1}{x+3}}$: $\lim_{x\to0}\left[\frac{sin(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$

$\left[e^{-1};e^{13};e^{\frac{121}{19}};e^{\frac{1}{4}};e^{\frac{11}{5}}\right]$

27. $\lim_{x\to5}\left(\frac{x+1}{2x-4}\right)^{\frac{3x+1}{x-5}}$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[1-cos(x)]^{tan(x)}$; $\lim_{x\to2}\left[\frac{sin^2(x-2)}{(x-2)^2}\right]^{\frac{x+1}{x^3-8}}$; $\lim_{x\to0}\left[\frac{2-2\cdot cos(x)}{x^2}\right]^{csc(x^2)}$ $\left[e^{-\frac{8}{3}};1;1;e^{-\frac{1}{12}}\right]$

Lavoriamo insieme

Calcolare $\lim_{x\to-2}\frac{ln(x^2-x-5)}{x+2}$. Si ha $\lim_{x\to-2}(x^2-x-5)=1$, $\lim_{x\to-2}(x+2)=\infty$, quindi è un limite $\frac{0}{0}$, che *assomiglia* a un limite notevole del tipo $\lim_{x\to z}f(x)=0\Rightarrow\lim_{x\to z}\frac{ln[1+f(x)]}{f(x)}=1$. Operiamo le consuete trasformazioni formali: $\lim_{x\to-2}\frac{ln[1+(x^2-x-6)]}{x^2-x-6}\cdot\frac{x^2-x-6}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{x^2-x-6}{x+2}$, anche quest'ultimo limite è $\frac{0}{0}$, e si ha: $\lim_{x\to-2}\frac{x^2-x-6}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{\cancel{(x+2)}\cdot(x-3)}{\cancel{x+2}}=-5$.

Calcolare i seguenti limiti, usando, laddove possibile, i limiti notevoli

Livello 1

28. $\lim_{x\to3}\frac{ln(x^2-8)}{3-x^2}$; $\lim_{x\to0}\frac{ln(x+x^2+1)}{x-x^2}$; $\lim_{x\to-1^+}\frac{ln(2x^2+3x+1)}{x^3+1}$; $\lim_{x\to0}\frac{ln^2(1+4x)}{3x^2}$; $\lim_{x\to-1}\frac{ln(x^2)}{x^3+1}$

$\left[0;1;-\infty;\frac{16}{3};-\frac{2}{3}\right]$

29. $\lim_{x\to0}\frac{ln(2x^2-3x+1)}{4x^3}$; $\lim_{x\to0}\frac{ln(4x^2+1)}{5x^2-2x}$; $\lim_{x\to0}\frac{ln(1+2x^2)}{1-cos(x)}$; $\lim_{x\to1}\frac{ln(3x-2)}{sin(\pi x)}$; $\lim_{x\to0}\frac{log_{\sqrt{2}}(1+\pi x)}{e\cdot x}$

$\left[-\infty;0;4;-\frac{3}{\pi};\frac{2\pi}{e\cdot ln(2)}\right]$

30. $\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+2x)}{3x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x^2)}{x}$; $\lim_{x\to 0^+}\frac{ln(1+x)}{x^2}$; $\lim_{x\to 1}\frac{ln(x)}{x^2-1}$; $\lim_{x\to 2}\frac{ln(x^2-3)}{x-2}$; $\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{sin(x)}$ $\left[\frac{2}{3};0;+\infty;\frac{1}{2};4;1\right]$

31. $\lim_{x\to 0}\frac{log_2(x^2+1)}{x+x^2}$; $\lim_{x\to 0^+}\frac{log_3(x^2+x+1)}{x^2}$; $\lim_{x\to 0}\frac{log_{\frac{1}{2}}(1+\sqrt{2}x)}{\sqrt{3}x}$; $\lim_{x\to 1}\frac{log_2(x^2)}{x^2-1}$; $\lim_{x\to 0}\frac{log_\pi(x^2+2x+1)}{4x}$

$\left[0;+\infty;-\frac{\sqrt{6}}{ln(9)};\frac{1}{ln(2)};\frac{1}{ln(\pi^2)}\right]$

Livello 2

32. $\lim_{x\to 2}\frac{ln(5x^2-8x-3)}{x-2}$; $\lim_{x\to 1}\frac{ln(x^2-x+1)}{x-1}$; $\lim_{x\to -1}\frac{ln(4x^2+3x)}{x^3+2x^2-1}$; $\lim_{x\to -2}\frac{ln(x^2+3x+3)}{x^2-4}$ $\left[12;1;5;\frac{1}{4}\right]$

33. $\lim_{x\to -1}\frac{ln(7x^2+x-5)}{x+1}$; $\lim_{x\to 1}\frac{ln(7x^2-6x)}{x^3-1}$; $\lim_{x\to 1}\frac{ln(x^3+2x-2)}{x-1}$; $\lim_{x\to 2}\frac{ln(2x^2-4x+1)}{x-2}$; $\lim_{x\to 2}\frac{ln(4x^2-5x-5)}{x^2-4}$

$\left[-13;\frac{8}{3};5;4;\frac{11}{4}\right]$

34. $\lim_{x\to 1}\frac{ln(x^3+x^2-x)}{4x^3-x^2-3}$; $\lim_{x\to 1}\frac{ln(4x^3-x-2)}{x^3-2x^2+1}$; $\lim_{x\to 2}\frac{ln(x^3-4x+1)}{x^3+x^2+3x-18}$; $\lim_{x\to 2}\frac{log_2(x^3-3x-1)}{x^3-x^2-4}$ $\left[\frac{2}{5};-11;\frac{8}{19};\frac{9}{8\cdot ln(2)}\right]$

35. $\lim_{x\to 0}\frac{log_{\sqrt{2}}(x^4+1)}{\sqrt{3}\cdot x}$; $\lim_{x\to 2}\frac{log_\pi(x^3-7)}{x^2+x-6}$; $\lim_{x\to 1^+}\frac{log_{\frac{1}{\pi}}(x^2-1)}{x^2+x-2}$; $\lim_{x\to -1}\frac{log_4(x^3+4x+6)}{2x^3+3x+5}$

$\left[0;\frac{12}{5\cdot ln(\pi)};+\infty;\frac{7}{18\cdot ln(2)}\right]$

Livello 3

36. $\lim_{x\to 0^+}\frac{ln[1+sin(x)]}{1-cos(x)}$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{ln[2\cdot sin(x)]}{3\cdot tan(x)-\sqrt{3}}$; $\lim_{x\to 0}\frac{log_2[1-sin(x)]}{x}$; $\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}}\frac{log_{\frac{1}{3}}[tan(-x)]}{sin(x)+cos(x)}$

$\left[+\infty;\frac{\sqrt{3}}{4};-\frac{1}{ln(2)};\frac{\sqrt{2}}{ln(3)}\right]$

37. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ln[sin(x)]}{cos(x)}$; $\lim_{x\to 2}\frac{log_3(x^2-3)}{sin(x)-sin(2)}$; $\lim_{x\to 0}\frac{ln(x+1)}{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}$; $\lim_{x\to 2}\frac{ln(x^2-3)}{(x-1)^{\frac{1}{2-x}}-e}$ $\left[0;\frac{4}{cos(2)\cdot ln(3)};-\frac{2}{e};-\frac{8}{e}\right]$

Lavoriamo insieme

Calcolare $\lim_{x\to 1}\frac{e^{x^3-2x+1}-1}{x^4-x}$. Abbiamo una forma indeterminata $\frac{0}{0}$, che può rientrare nel limite notevole $\lim_{x\to z}f(x)=0\Rightarrow\lim_{x\to z}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}=1$. Vediamo di ricondurre il limite a questa forma.

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{x^3-2x+1}-1}{x^4-x}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x^3-2x+1}-1}{x^3-2x+1}\cdot\frac{x^3-2x+1}{x^4-x}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{x^4-x}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\cdot(x^2+x-1)}{\cancel{(x-1)}\cdot(x^3+x^2+x)}=\frac{1}{3}$$

Calcolare i seguenti limiti, usando, laddove possibile, i limiti notevoli

Livello 1

38. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x}$; $\lim_{x\to 0^+}\frac{5^x-1}{x^2}$; $\lim_{x\to 1^-}\frac{2^{2x}-2}{x-1}$; $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{3^{x^2}-1}{2x^2}$; $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{4x}$; $\lim_{x\to 3}\frac{e^{x+1}-e^4}{x^2+2x-14}$; $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{9^x-3}{4\cdot x^2-1}$
$\left[0;+\infty;-\infty;-1;ln\left(\sqrt{3}\right);\frac{3}{4};0;ln\left(\sqrt{27}\right)\right]$

39. $\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{x^2-1}$; $\lim_{x\to 2}\frac{4^{x^2-4}-1}{x^3-8}$; $\lim_{x\to -1}\frac{e^{x+1}-1}{x^4-1}$; $\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}$; $\lim_{x\to 0^+}\frac{\pi^{2x^2}-1}{x^3}$; $\lim_{x\to -\frac{1}{3}^-}\frac{e^x-\sqrt[3]{e}}{3x+1}$; $\lim_{x\to 1}\frac{4^{2x}-16}{x^2+x-2}$
$\left[\frac{3}{4};ln\left(\sqrt[3]{4}\right);-\frac{1}{4};e;+\infty;+\infty;64ln\left(\sqrt[3]{2}\right)\right]$

Livello 2

40. $\lim_{x\to -1}\frac{e^{x^2-x-2}-1}{x^3+1}$ $\lim_{x\to 1}\frac{e^{2x^2-x-1}-1}{x^3-1}$ $\lim_{x\to 1}\frac{e^{3x^3-2x-1}-1}{2x^3-x^2+4x-5}$ $\lim_{x\to 3}\frac{e^{x^2-4x+3}-1}{x^2-x-6}$ $\left[-1;1;\frac{1}{2};\frac{2}{5}\right]$

41. $\lim_{x\to 3}\frac{e^{3x^2-8x-3}-1}{x-3}$ $\lim_{x\to 1^+}\frac{2^{2x^2-3x-1}-1}{x^3-1}$ $\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{e}\right)^{2x^3-5x^2+4}-1}{x^2-3x+2}$ $\lim_{x\to 2}\frac{\pi^{3x^2-7x+2}-1}{2x^2-3x-2}$ [10 ; +∞ ; 2 ; $ln(\pi)$]

42. $\lim_{x\to -1}\frac{4^{x^3+2x+3}-1}{x^4-x^2+4x+4}$ $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3}^{2x^3-x^2+x-14}-1}{x^2-x-2}$ $\lim_{x\to -1}\frac{e^{x^2+5x+4}-1}{x+1}$ $\lim_{x\to \sqrt{2}}\frac{e^{x^2-2}-1}{x^4-4}$ $\left[ln(25);7ln\left(\sqrt{3}\right);3;\frac{1}{4}\right]$

Livello 3

43. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2-x}-1}{sin\left(x+x^2\right)}$; $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3-2x}-1}{ln\left(1+x^3\right)}$; $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x^2-4x}-1}{tan(2x)}$; $\lim_{x\to 1}\frac{2^{x^2+x}-4}{sin(x-1)}$; $\lim_{x\to -1}\frac{3^{2x^2-x}-27}{ln(-x)}$; $\lim_{x\to 2}\frac{3^{x^2-2x+1}-3}{sin(\pi x)}$
$\left[-1;-\infty;-2;12ln(2);135ln(3);\frac{6ln(3)}{\pi}\right]$

44. $\lim_{x\to \sqrt{3}}\frac{\sqrt{2}^{5-x^2}-2}{ln\left(x^2-2\right)}$; $\lim_{x\to -2}\frac{7^{x^2-x-4}-49}{sin(\pi x)+ln(3+x)}$; $\lim_{x\to 2}\frac{3^{x^2-2}-9}{log_{1/2}\left(x^2-3\right)+sin(x-2)}$; $\lim_{x\to -1}\frac{e^{x^4-x^2}-sin\left(-\frac{\pi}{2}\cdot x\right)}{cos^{-1}(x)+log_2\left(1+x+2^{-\pi}\right)}$
$\left[-ln(2);-\frac{245\cdot ln(7)}{\pi+1};\frac{36\cdot ln(2)\cdot ln(3)}{ln(2)-4};0\right]$

Lavoriamo insieme

Calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{(1+5x)^{12}-1}{4x^3}$. È una forma indeterminata $\frac{0}{0}$, che rientra nel limite notevole seguente: $\lim_{x\to z}f(x)=0\Rightarrow\lim_{x\to z}\frac{\left[1+f(x)\right]^k-1}{f(x)}=k$: $\lim_{x\to 0}\frac{(1+5x)^{12}-1}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+5x)^{12}-1}{5x}\cdot\frac{5}{4x^2}=\lim_{x\to 0}\left(12\cdot\frac{5}{4x^2}\right)=+\infty$.

Calcolare i seguenti limiti, usando, laddove possibile, i limiti notevoli

Livello 1

45. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+3x)^{42}-1}{2x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{(1+7x)^5-1}{-3x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{1+(4x)^5-1}{7x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{(1-2x)^{21}-1}{7x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{4}}-1}{5x^2}$
$\left[63;-\frac{35}{3};0;-6;\frac{3}{20}\right]$

46. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+6x^3}-1}{\sqrt{2x^3}}$; $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{(1+3x)^4}-1}{x^2}$; $\lim_{x\to 1}\frac{(4x-3)^4-1}{x-1}$; $\lim_{x\to -1}\frac{(3x^2-2)^6-1}{x^3+1}$ [0 ; +∞ ; 16 ; –12]

Livello 2

47. $\lim_{x\to 2}\frac{(3-x)^{\frac{2}{7}}-1}{\sqrt{3}\cdot(x-2)}$; $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}x\right)^3}-1}{x^3-27}$; $\lim_{x\to -2}\frac{(x^2-3)^7-1}{x^2+4}$; $\lim_{x\to -\sqrt{2}}\frac{(x^2-1)^{13}-1}{x^4-4}$ $\left[-\frac{2\cdot\sqrt{3}}{21};\frac{1}{405};0;\frac{13}{4}\right]$

48. $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{(4x-1)^{\frac{3}{8}}-1}{2x-1}$; $\lim_{x\to -\frac{3}{4}}\frac{(5+8x)^{\frac{4}{3}}-1}{16x^2-9}$; $\lim_{x\to 3}\frac{(5x-14)^8-1}{x^2-x-6}$; $\lim_{x\to 2}\frac{(3-x)^7-1}{x^2-4}$ $\left[\frac{3}{4};\varnothing;8;-\frac{7}{4}\right]$

49. $\lim_{x\to 1}\frac{(3x-2)^5-1}{x^4-1}$; $\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-3)^{10}-1}{2x^2-5x+2}$; $\lim_{x\to -2}\frac{(4x-7)^{15}-1}{x^2-4}$; $\lim_{x\to -2}\frac{(x^2-3)^7-1}{3x^2+4x-4}$ $\left[\frac{15}{4};\frac{40}{3};\infty;\frac{7}{2}\right]$

Livello 3

50. $\lim_{x\to -1}\frac{(4x+5)^9-1}{sin(x+1)}$; $\lim_{x\to 2}\frac{(3x-5)^{12}-1}{ln(x^4-15)}$; $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{(4x-7)^3}-1}{log_3(x^3-7)}$ $\left[36;\frac{9}{8};ln\left(\sqrt{3}\right)\right]$

51. $\lim_{x\to 3}\frac{(4-x)^{11}-1}{3^x-27}$; $\lim_{x\to -1}\frac{(5x+6)^{15}-1}{e^{-x}-e}$; $\lim_{x\to 2^+}\frac{(5x-9)^{12}-1}{1-cos(x^2-5x+6)}$ $\left[-\frac{11}{27\cdot ln(3)};-\frac{75}{e};+\infty\right]$

52. $\lim_{x\to 1}\frac{(2+x)^3-27}{4^x-4}$; $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{sin^3(x)-1}{ln[1+cos(x)]}$; $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{sin(2x)^7-1}{2^{sin(x)-cos(x)}-1}$ $\left[\frac{27}{8\cdot ln(2)};0;0\right]$

Lavoriamo insieme

Determinare e classificare i punti di discontinuità di $f(x)=\frac{x-\pi}{sin(x)}$, $x \in [0; 2\pi]$. L'insieme di esistenza è dato dalla condizione: $sin(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0, \pi, 2\pi$ Quindi dobbiamo studiare cosa accade negli intorni di questi valori. Distinguiamo i tre casi: $\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\pi}{sin(x)}=-\infty$, $\lim_{x\to 2\pi^-}\frac{x-\pi}{sin(x)}=-\infty$, quindi $x = 0$ e $x = 2\pi$, sono entrambi punti di discontinuità di II specie. Invece si ha: $\lim_{x\to\pi}\frac{x-\pi}{sin(x)}=\lim_{x\to\pi}\frac{x-\pi}{sin(\pi-x)}=\lim_{x\to\pi}\left(-\frac{\pi-x}{sin(\pi-x)}\right)=-1$.Quindi $x = \pi$, è un punto di discontinuità di III specie.

Determinare e classificare gli eventuali punti di discontinuità delle seguenti funzioni

Livello 2

53. $f(x)=(1+3x)^{\frac{1}{2x}}$; $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x-1}}$; $f(x)=\frac{1-cos^2(x)}{x^2}$; $f(x)=\frac{1-cos^2(x)}{x}$; $f(x)=\frac{1-cos^2(x+1)}{x^2-1}$

[0: III specie ; –1: III specie; 1: II; 0: III specie ; 0: III specie ; 0: I specie]

54. $f(x)=(x)^{\frac{1}{x-1}}$; $f(x)=\frac{sin(x)}{|x|}$; $f(x)=\frac{tan(3x)}{5x}, x\in[0,\pi]$; $f(x)=\frac{x-\frac{\pi}{2}}{cos(x)}; x\in[0,2\pi]$; $f(x)=\frac{sin(|x|)}{x}$

$\left[1: \text{III}; 1; \text{II}; \left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}: \text{II}; 0: \text{III}\right); \left(0,\frac{3\pi}{2}: \text{II}; \frac{\pi}{2}: \text{III}\right); 0: \text{I}\right]$

L'angolo di Geogebra

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quinto%20volume/Capitolo%209/9-1-1.exe scarichi un'applicazione che mostra come con Geogebra possiamo rappresentare funzioni con discontinuità e calcolare limiti di funzioni.
Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quinto%20volume/Capitolo%209/9-1-1.rar scarichi il relativo file Geogebra.

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

1. Una funzione monotòna può avere discontinuità di che tipo? Giustificare la risposta. [Solo di I specie]
2. La funzione somma di due funzioni discontinue può essere continua? Giustificare la risposta, fornendo un esempio se positiva. [Sì]
3. La funzione prodotto di due funzioni discontinue può essere continua? Giustificare la risposta, fornendo un esempio se positiva. [Sì]
4. Se $\exists \lim_{x \to z} |f(x)|, z \in \overline{\mathbb{R}}$, possiamo dire che $\exists \lim_{x \to z} f(x), z \in \overline{\mathbb{R}}$? Giustificare la risposta.
   [No, per esempio $\nexists \lim_{x \to 1}\left[(-1)^{\lceil x \rceil} \cdot x\right]$, ma $\lim_{x \to 1}\left|(-1)^{\lceil x \rceil} \cdot x\right| = \lim_{x \to 1} x = 1$]
5. Calcola $\lim_{x \to 0} \frac{sin(sin(sin(...sin(x))))}{x}$, dove i seni, uno dentro l'altro sono in numero di *n*. [1]
6. $\lim_{x \to -\sqrt{3}} \frac{4^{x^4-7} - 16}{6 \cdot cos^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - 5\pi}$ $\left[64 \cdot \sqrt{3} \cdot ln(2)\right]$ $\lim_{x \to 0} \frac{ln\left[e + sin(3x)\right] - 5^{3x^2 - x}}{tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}}$ $\left[\frac{ln(5) + 3 \cdot e^{-1}}{4}\right]$
7. Calcola al variare dei parametri $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + a^2} - a}{\sqrt{x^2 + b^2} - b}$. $\left[\begin{cases} \frac{a}{b} & a < 0, b < 0 \\ 0 & a > 0, b < 0 \\ +\infty & a < 0, b > 0 \\ \frac{b}{a} & a > 0, b > 0 \end{cases}\right]$
8. Calcola $\lim_{x \to +\infty}\left(\sqrt[n]{a_1 + a_2x + a_3x^2 + ... + a_nx^{n-1} + x^n} - x\right), n \in \mathbb{N}, n \ge 2, a_n \ne 0$. $\left[\frac{a_n}{n}\right]$
9. Calcola $\lim_{x \to \infty}\left(3^x + 3^{2x}\right)^{\frac{1}{x}}$. [9]
10. Se si ha: $\frac{x^2 + x - 2}{x + 3} \le \frac{f(x)}{x^2} \le \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 3}$, supposto che esista calcolare $\lim_{x \to -1^-} f(x)$. [–1]
11. Enuncia una condizione sufficiente che assicuri che se una funzione verifica il teorema di esistenza degli zeri ammetta un'unica soluzione. [La funzione sia strettamente monotòna]

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi
I temi completi dei Licei Scientifici per gli ultimi anni sono scaricabili, con soluzione, dal sito
http://matdidattica.altervista.org/esamidistato.htm

1. (Liceo scientifico 1989/90) Data una semicirconferenza di diametro $\overline{AC} = 2r$ e centro O, tracciare la semiretta uscente da A, perpendicolare ad AC e giacente rispetto ad AC, dalla stessa parte della semicirconferenza. Detto M un punto generico su tale semiretta, indicare con x la distanza di M da A. Da M staccare l'ulteriore tangente in B alla semicirconferenza. Detta K l'intersezione della semicirconferenza con il segmento OM, determinare l'area y del quadrilatero $ACBK$ in funzione di x. Determinare il valore di y per x tendente a $+\infty$. $\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{r^2x}{\sqrt{x^2+r^2}}+\frac{r^3x}{x^2+r^2}\right)=r^2\right]$
2. (Liceo scientifico 1991/92) Data una circonferenza γ di raggio unitario e centro O, tracciare una semiretta s uscente da O e intersecante γ in un punto Q. Indicato con P un generico punto di s esterno alla circonferenza γ, tracciare da esso le due tangenti alla circonferenza: siano A e B i punti di tangenza. Indicata con x la lunghezza del segmento PQ, trovare $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\overline{AQ}+\overline{QB}}{\overline{AB}}\right)$. $\left[\sqrt{2}\right]$
3. (Liceo scientifico 2000/01) Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, si sa che $f(x) \to \ell$ per $x \to a$, essendo ℓ ed a numeri reali. Dire se ciò è sufficiente per concludere che $f(a) = \ell$ e fornire un'esauriente spiegazione della risposta. [No, p.e. $\lim\limits_{x\to0}\frac{sin(x)}{x}=1$, ma $f(0)$ non esiste]
4. (Liceo scientifico 2000/01) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{sin(x)-cos(x)}{x}$ a) è uguale a 0; b) è uguale ad 1; c) è un valore diverso dai due precedenti; d) non è determinato. Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione. [a)]
5. (Liceo scientifico PNI 2001/02) Data la funzione $f(x) = e^x - sin(x) - 3x$ calcolarne i limiti per x tendente a $+\infty$ e $-\infty$ e provare che esiste un numero reale α con $0 < \alpha < 1$ in cui la funzione si annulla. [$+\infty$; $-\infty$]
6. (Liceo scientifico 2001/02) Si consideri la funzione: $f(x) = (2x - 1)^7 \cdot (4 - 2x)^5$. Stabilire se ammette massimo o minimo assoluti nell'intervallo $\frac{1}{2} \le x \le 2$. [Sì]
7. (Liceo scientifico 2003/04) Di una funzione $g(x)$, non costante, si sa che: $\lim\limits_{x\to2} g(x) = 3$ e $g(2) = 4$. Trovate una espressione di $g(x)$. $\left[\text{P.e.: } g(x)=\begin{cases}x^2-1 & x\ne2\\ 4 & x=2\end{cases}\right]$
8. (Liceo scientifico suppletiva 2004/05) Si consideri l'equazione $(k - 2) \cdot x^2 - (2k - 1) \cdot x + k + 1 = 0$, dove k è un parametro reale diverso da 2. Indicate con x' e x'' le sue radici, calcolare i limiti di $x' + x''$ quando k tende a 2, a $+\infty$ e a $-\infty$. [∞; 2; 2]
9. (Liceo scientifico suppletiva 2005/06) Il limite della funzione $f(x)=x\cdot sin\left(\frac{1}{x}\right)$ per x che tende a zero A) non esiste B) è 0 C) è un valore finito diverso da 0 D) è $+\infty$. Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata. [B]
10. (Liceo Scientifico 2005/06) La funzione $f(x) = tan(x)$ assume valori di segno opposto negli estremi dell'intervallo I=$\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$, eppure non esiste alcun $x \in$ I¸ tale che $f(x) = 0$. È così? Perché?
[Non si può applicare il T. di esistenza degli zeri perché la funzione non è continua in I]

11. (Liceo scientifico suppletiva 2005/06) Considerata la funzione reale di variabile reale $f(x)$, affermare che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ significa che, per ogni numero reale M, esiste un numero reale N tale che, per ogni x, se $x > N$, allora $f(x) > M$. È vero o falso? [Vero]

12. (Liceo scientifico suppletiva 2006/07) Si calcoli $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot cos(x)}{x^2 - sin^2(x)}$. [∞]

13. (Liceo scientifico 2007/08) Sia $f(x)=\frac{x^2-1}{|x-1|}$; esiste il $\lim_{x\to 1} f(x)$? Si giustifichi la risposta.
[No, limite sinistro diverso da limite destro]

14. (Liceo scientifico suppletiva 2007/08) Si calcoli $\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-cos(x)}{1-cos(x)}$. [3]

15. (Liceo scientifico 2008/09) Si calcoli $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. [–1]

16. (Liceo scientifico 2009/10) Si calcoli $\lim_{x\to\infty} 4x\cdot sin\left(\frac{1}{x}\right)$. [4]

17. (Liceo scientifico 2009/10) Per quale o quali valori di k la funzione seguente è continua in x = 4?
$h(x)=\begin{cases} 3x^2-11x-4 & x\le 4 \\ k\cdot x^2-2x-1 & x>4\end{cases}$. $\left[\frac{9}{16}\right]$

18. (Liceo scientifico PNI 2010/11) Si determini il limite di $f(x)=x+\ln(4)+\frac{2}{e^x+1}$ per x che tende a $+\infty$ e a $-\infty$. Si calcoli $f(x) + f(-x)$ e si spieghi perché dal risultato si deduce che $A \equiv (0; 1 + ln(4))$ è centro di simmetria di Γ. [+∞; –∞; 2 · [1 + ln(4)]]

19. (Liceo scientifico 2010/11) Si calcoli $\lim_{x\to a}\frac{tan(x)-tan(a)}{x-a}$. (Sugg. usare la formula di sottrazione della tangente) $\left[\frac{1}{cos^2(a)}\right]$

20. (Liceo scientifico Suppletiva 2010/11) La funzione: $f(x)=\frac{1}{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)^2}$ non è definita per x = 0, che è per essa un punto di discontinuità. Si precisi il tipo di questa discontinuità, dopo aver esaminato il limite della $f(x)$ per x tendente a zero da sinistra e per x tendente a zero da destra.
[I specie con salto di discontinuità 1]

21. (Liceo scientifico 2011/12) Si illustri il significato di *asintoto* e si fornisca un esempio di funzione $f(x)$ il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.
$\left[f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{(cx+d)\cdot(ex+f)}, a,c,e\ne 0; -\frac{d}{c}\ne-\frac{f}{e}\right]$

22. (Liceo scientifico PNI 2011/12) Si calcoli $\lim_{x\to 0^+}\frac{2^{3x}-3^{4x}}{x^2}$. [–∞]

23. (Liceo scientifico 2012/13) Si calcoli: $\lim_{x\to 0} 4\cdot\frac{sin(x)cos(x)-sin(x)}{x^2}$. [0]

24. (Liceo scientifico PNI 2012/13) Si mostri, che: $\lim_{x\to\pi}\frac{e^{sin(x)}-e^{sin(\pi)}}{x-\pi}=-1$.

25. (Liceo scientifico PNI 2013/14) Si stabilisca per quali valori reali di a e b, si ha: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+bx}-2}{x}=1$.
[a = b = 4]

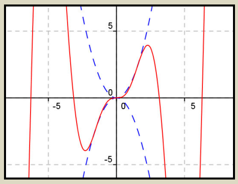
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.

AK = Arkansas State University
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
W = Wohascum county

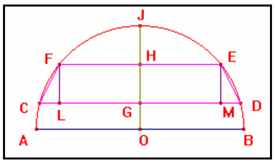
Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato dal Wohascum County del Minnesota. *Esistono funzioni definite in tutti i reali il cui grafico incontra infinite volte qualsiasi retta non parallela agli assi*?



La risposta è positiva, una di queste per esempio è $f(x) = x^2 \cdot sin(x)$, che vediamo in figura. Infatti la funzione è evidentemente asintotica alle parabole $y = \pm x^2$, dato che si ha: $-1 \leq sin(x) \leq 1$. Se consideriamo una qualsiasi retta non parallela agli assi, di equazione $y = mx + q$, vediamo che si ha: $\lim_{x\to\infty}\frac{mx+q}{x^2}=0$, quindi esisteranno opportuni valori di x a partire dai quali si avrà $\left|\frac{mx+q}{x^2}\right|<1 \Rightarrow -x^2 < mx+q < x^2$. Quindi anche la retta sarà contenuta dalle due parabole, perciò incontrerà infinite volte la funzione.

1. (AHSME 1969) Consideriamo l'ascissa $x(m)$ del punto intersezione della parabola $y = x^2 - 6$ e della retta $y = m$, con $-6 < m < 6$. Calcolare $\lim_{m\to 0}\frac{x(m)-x(-m)}{m}$. $\left[\frac{1}{\sqrt{6}}\right]$

2. (AHSME 1968) In figura  vi è una semicirconferenza di raggio a, H è punto medio di GJ. Indichiamo con K l'area del trapezio $CDEF$, con R quella del rettangolo $LMEF$. Determinare il limite del rapporto $\frac{K}{R}$ al tendere di $\overline{OG}$ ad a, in modo che H sia sempre punto medio di GJ. $\left[\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right]$

3. (HSMC 2001) Data $f(x) = 3x + 4$, trovare una funzione $g(x)$ tale che si abbia $f(g(x)) = 4x - 1$. $\left[\frac{4x-5}{3}\right]$

4. (HSMC 2002) Calcolare $\lim_{h\to 0}\frac{sin(\pi/3+h)-sin(\pi/3)}{cos(\pi/3+h)-cos(\pi/3)}$. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

5. (HSMC 2003) Calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-1}{x\cdot sin(2x)}$. $\left[-\frac{1}{4}\right]$

6. (HSMC 2005) Il polinomio x^3+x^2+x-20 ha un solo zero, trovarlo con una precisione di 0,5. [2,5 ± 0,5]

7. (HSMC 2009) Calcolare $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+4x^2+7x}-x\right)$. $\left[\frac{4}{3}\right]$

8. (AK 2009) Calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{|2x-1|-|2x+1|}{x}$. [–4]

9. (AK 2010) La funzione $f(x)=\begin{cases}\frac{7|x|+5x}{7|x|-5x} & x\neq 0\\ 6 & x=0\end{cases}$ è continua in tutto $\mathbb{R}$? [No]

10. (HSMC 2011) Calcolare $\lim_{x \to 0} \frac{cos(x) \cdot sin(x) - tan(x)}{x^2 \cdot sin(x)}$. [–1]

Questions in English

Working together

We wish to solve a question assigned at HSMC in 2005. *The cubic polynomial* $x^3 + x^2 + x - 20$ *has exactly one zero. Find it within* ± 0,5.
We have $f(2) = -6 < 0$ and $f(3) = 19 > 0$, so for the Intermediate Value Theorem, there is a zero in]2, 3[. The question is to find a value within 0,5 hence it is 2,5 ± 0,5.

11. (HSMC 1999) Compute the limit $\lim_{h \to 0} \frac{sin(1) \cdot cos(h) + cos(1) \cdot sin(h) - sin(1)}{h}$. [$cos(1)$]
12. (HSMC 2000) Suppose f is a positive continuous function on the interval [−2; 3] and $A(t)$ is the area of the region bounded by the graph of $y = f(x)$ and the lines $y = 0$; $x = -2$ and $x = t$ for t between −2 and 3. Compute $\lim_{x \to 3^-} \frac{A(3) - A(t)}{3 - t}$. [$f(3)$]
13. (HSMC 2003) Find all values of a such that $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + ax - 6}{x^2 + x - 2}$ exists and is finite. [$a = -1$]
14. (HSMC 2004) Compute the following limit $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x - \sqrt{x}} - \sqrt{x + \sqrt{x}} \right)$. [–1]
15. (HSMC 2008) Given $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{ax + b} - 2}{x} = 1$, find $a + b$. [8]
16. (AK 2009) Let $\lfloor x \rfloor$ be the largest integer less than or equal to x. Find $\lim_{x \to 2,5} \lfloor x + 3 \rfloor$. [5]
17. (AK 2009) Compute $\lim_{x \to 0} \frac{e^{tan(x)} - e^x}{tan(x) + x}$. [0]
18. (AK 2010) Find $h(2)$ such that the function $h(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}$ is continuous at $x = 2$. [7]
19. (AK 2010) For what values of x the function $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ is continuous? [$x = 0$]

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza) Data la funzione $f(x) = x^2 - 1$, si consideri la successione così definita: $a_1 = 0$, $a_2 = f(a_1)$, …, $a_{n+1} = f(a_n)$; per ogni numero naturale n. Quanto vale a_{64}?
A) –64 B) –1 C) 0 D) 63
2. (Scienze della formazione primaria, Università di Cagliari 2007–08) L'intervallo aperto (0; 2) comprende A) un solo numero un solo numero reale ma nessun numero naturale B) un solo numero relativo ma nessun numero reale C) infiniti numeri naturali D) un solo numero naturale ed infiniti numeri reali

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_5_9.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	2
B	E

10. Il calcolo differenziale

10.1 Le Derivate

Prerequisiti
- Sistema di riferimento cartesiano ortogonale
- Rappresentazione grafica di semplici funzioni
- Concetto di dominio e codominio di una funzione
- Concetto di infinito
- Invertibilità di una funzione
- Composizione di funzioni
- Continuità di una funzione
- Proprietà delle funzioni continue
- Limiti delle funzioni

Obiettivi
- Comprendere il concetto di derivabilità di una funzione
- Sapere calcolare derivate di funzioni elementari
- Significato geometrico e meccanico della derivata
- Sapere risolvere problemi che hanno a che fare con la derivazione delle funzioni

Contenuti
- Concetto di derivata di una funzione
- Derivate delle funzioni elementari
- Operazioni aritmetiche elementari con le derivate
- Derivate delle funzioni composte e delle funzioni inverse
- Derivate successive
- Teoremi del calcolo differenziale

Parole chiave
Derivata – Differenziale – Rapporto incrementale

Concetto di derivata di una funzione

E cosa sono queste flussioni? Le velocità di incrementi evanescenti? Non sono né quantità finite, né quantità infinitamente piccole, e neppure il niente. Dobbiamo chiamarle spettri o quantità scomparse?
George Berkeley, The Analyst

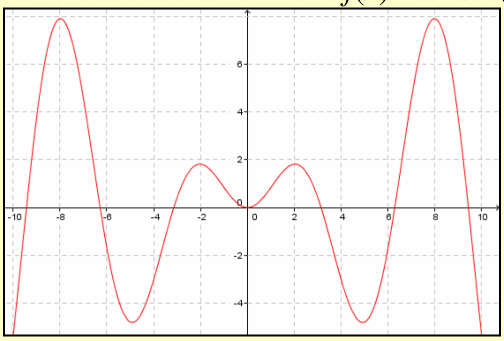
Il problema

Per tracciare il grafico di una funzione potremmo segnare alcuni dei suoi punti, ma, tranne in pochi casi particolari (retta, parabola, iperbole equilatera, …) non sappiamo come unire questi punti. Dobbiamo quindi vedere come si fa ad andare da un punto a un altro della funzione.

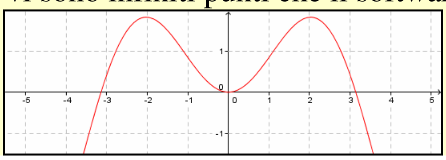
Il problema posto è fondamentale per il tracciamento delle funzioni, e permette anche di stabilire se una funzione tracciata con un software è effettivamente corretta.

Esempio 1

Usando il software Geogebra abbiamo tracciato la funzione $f(x) = x \cdot sin(x)$, ottenendo il grafico seguente.

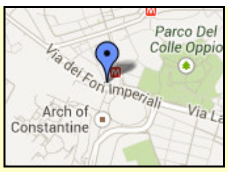


La prima domanda a cui dobbiamo rispondere è: chi ci assicura che quel che vediamo è "veramente" il grafico cercato? La seconda domanda è: il grafico è riferito all'intervallo [–10; 10] per le ascisse e [–5;8] per le ordinate, cosa possiamo dire per quel che accade all'esterno di esso? La prima domanda può sembrare strana e inutile, ma non lo è. Infatti ogni software grafico rappresenta solo un numero finito di punti, che dipendono dalla risoluzione scelta. Per esempio per una risoluzione 800 × 600, si tracciano un massimo di 800 punti, dato che alcuni dei punti calcolati possono avere ordinate che non rientrano nella schermata. Per esempio se il grafico precedente lo avessimo visualizzato per ascisse che rientrano nell'intervallo [– 5; 5] e ordinate in [–1; 1], sarebbe stato il seguente, in cui si vede che in esso "mancano" parecchi punti, rispetto al primo grafico tracciato in un intervallo più ampio. Allo stesso modo non sappiamo cosa accade fra un pixel e l'altro, dato che in effetti fra di essi vi sono infiniti punti che il software non può tracciare.

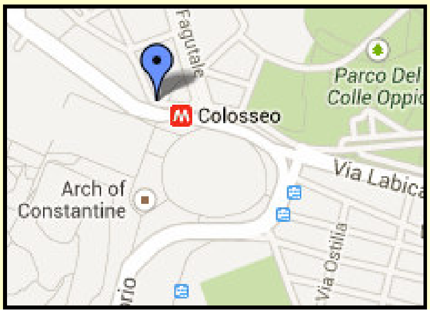


Quanto visto nel precedente esempio accade anche nelle mappe stradali, in cui, a causa della scala usata non vediamo, per esempio, tutte le curve presenti in una strada, ma solo un suo andamento che varia appunto dallo zoom usato.

Esempio 2

Con Google maps abbiamo cercato il Colosseo, ottenendo l'immagine a lato, 

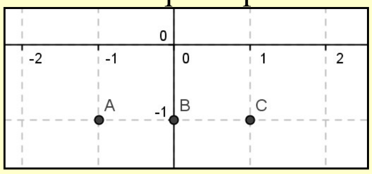
il ballon blu rappresenta la posizione del monumento. Adesso effettuiamo uno zoom, in figura seguente, e notiamo ovviamente cose che prima non si vedevano. Le strade hanno maggiori dettagli, alcune prima non si vedevano, altre sembravano più *dritte* e così via.



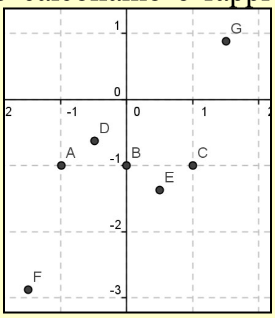
Tenuto conto dell'esempio precedente dobbiamo stabilire una condizione che ci permetta di tracciare con una certa sicurezza il grafico di una funzione.

Esempio 3

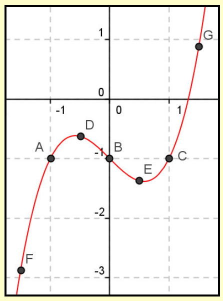
Consideriamo una funzione più semplice, per esempio $f(x) = x^3 - x - 1$, e supponiamo di volerla tracciare con un procedimento simile a quello dei software, ossia per punti. Calcoliamo quindi alcuni di questi punti. Per esempio abbiamo (–1; –1), (0; –1), (1; –1). Rappresentiamo questi 3 punti.



Curiosamente i punti hanno tutti la stessa ordinata, dobbiamo quindi capire come possiamo andare da un punto all'altro, perciò calcoliamo e rappresentiamo altri punti. Cosa ci dicono? Non molto che già non potessimo prevedere.



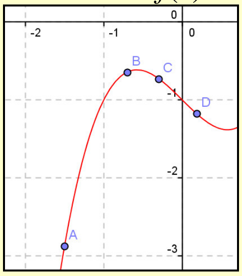
Il punto *D* dice che dovendo andare da *A* a *B* e non procedendo in linea retta, dobbiamo prima salire e poi scendere o viceversa. Lo stesso può dirsi per il punto *E*. I punti *F* e *G* non ci danno molte altre informazioni. Il problema è che continuiamo a non sapere cosa succede fra i successivi punti segnati, per esempio fra *A* e *D*. Ossia arriveremo da *A* a *D* crescendo oppure no? E lo stesso succede per gli altri punti. Per completezza proponiamo il grafico tracciato da Geogebra.



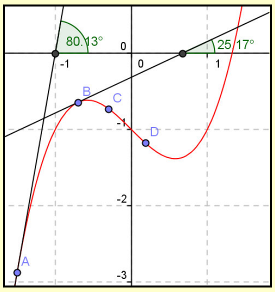
Quindi la questione che dobbiamo affrontare consiste nello stabilire quali sono gli intervalli in cui la funzione cresce e quelli in cui decresce, poiché se riusciamo a risolvere questo problema siamo in grado di rappresentare una funzione in modo accettabile. Nel senso che, con riferimento alla funzione dell'Esempio 3, potremmo disegnare un punto un po' più in alto o più in basso, se non ne calcoliamo le coordinate, però, siamo sicuri che, per esempio, andando dal punto *A* al punto *B* la curva cresce, raggiunge un punto (che non deve essere per forza D) dove la curva cambia crescenza, diventando decrescente per raggiungere *B*. Quindi la prima questione da affrontare è come si stabilisce che in un certo intervallo una funzione cresce o decresce.

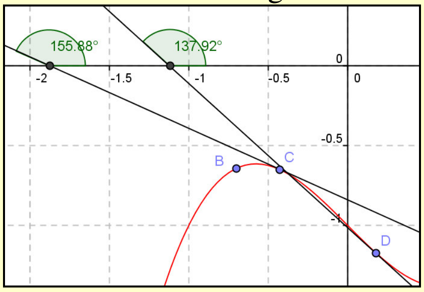
Esempio 4

Riprendiamo in considerazione la funzione $f(x) = x^3 - x - 1$ e il suo grafico tracciato da Geogebra in un intervallo che contiene (– 2; 0).

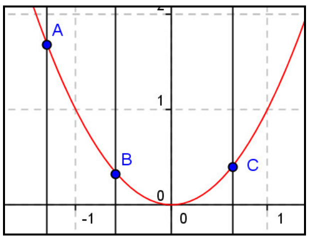


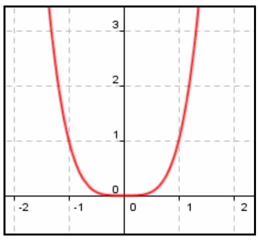
Vediamo che dal punto *A* al punto *B* la funzione cresce, mentre da *C* a *D* decresce. Come possiamo stabilire ciò senza tracciare il grafico, ossia senza ricadere nel circolo vizioso di dovere tracciare il grafico mediante informazioni che deve fornirci lo stesso grafico? Le due figure seguenti forniscono la risposta. Nella figura di sinistra abbiamo tracciato la retta tangente alla funzione dove essa cresce, e vediamo che in un generico punto dell'intervallo, tale tangente forma angoli acuti con il semiasse positivo delle ascisse, cioè ha coefficiente angolare positivo. Nella figura di destra invece la stessa cosa è fatta dove la funzione decresce e stavolta la detta tangente ha coefficiente angolare negativo.





Quanto osservato nell'esempio precedente non è *particolare*, nel senso che non succede solo per il grafico mostrato o per altri a essi simili, ma, come è facile capire, accade per tutte le funzioni *tracciabili*. Quindi il problema iniziale è ricondotto alla determinazione del coefficiente angolare della retta tangente a una funzione in un suo punto. Prima però dobbiamo chiarire cosa intendiamo con la dicitura *retta tangente a una curva*. Infatti siamo abituati a pensare che una retta sia tangente a una curva se la tocca in un solo punto, il che è ovviamente falso, come si vede nel caso della parabola mostrata nella prima delle seguenti figuri, in cui ogni retta parallela al suo asse di simmetria incontra la parabola in un punto, ma ovviamente non è ivi tangente. Allora potremmo dire che la retta è tangente se incontra la curva in un punto "doppio", ossia un punto in cui le soluzioni del sistema fra l'equazione della curva e l'equazione della retta sono due coincidenti. Ma anche questo non è vero perché per esempio la seconda curva in figura, la cui equazione è $y = x^4$, ha l'asse delle ascisse come retta tangente nell'origine, come mostrato nella figura seguente, ma le soluzioni del sistema $\begin{cases} y = x^4 \\ y = 0 \end{cases}$, sono 4 coincidenti e non 2. Dobbiamo quindi fornire una corretta definizione di retta tangente.





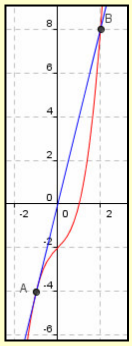
Definizione 1

Data una funzione $y = f(x)$, continua in un intorno completo di $P \equiv (x_0; f(x_0))$, diciamo che la retta di equazione $y = mx + q$ è a essa **tangente in *P*** se il sistema $\begin{cases} y = f(x) \\ y = mx + q \end{cases}$ ha fra le sue soluzioni $\begin{cases} x = x_0 \\ y = f(x_0) \end{cases}$ almeno due volte.

Ovviamente la definizione precedente non esclude che la tangente possa toccare la curva anche in altri punti diversi da quello di tangenza.

Esempio 5

La funzione $f(x) = x^3 + x - 2$ ha la retta $y = 4x$ come tangente nel punto $A \equiv (-1; 4)$, come mostrato in figura, infatti il sistema $\begin{cases} y = x^3 + x - 2 \\ y = 4x \end{cases} \Rightarrow x^3 + x - 2 = 4x \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 \cdot (x - 2) = 0$, ha la soluzione doppia $(-1; 4)$ ma ha anche la soluzione singola $(2; 8)$.



La nostra definizione quindi fornisce un punto di vista diverso da quello finora intuitivo di retta tangente, che ci conduce talvolta a risultati inattesi.

Esempio 6

La funzione $f(x) = |x|$ ha retta tangente nell'origine? Risolviamo il sistema $\begin{cases} y = |x| \\ y = m \cdot x \end{cases} \Rightarrow |x| = mx$, che riconduce alla risoluzione di due ulteriori sistemi: $\begin{cases} x = mx \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -x = mx \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m = -1 \\ x < 0 \end{cases}$, cioè non esiste una sola retta passante per l'origine che incontri la funzione almeno due volte nell'origine. Quindi la detta funzione non ha retta tangente nell'origine.

L'esempio precedente ci ha mostrato che possono esserci funzioni continue che in alcuni punti non hanno retta tangente.
Torniamo adesso al problema iniziale di trovare il coefficiente angolare della retta tangente a una funzione. La definizione 1 è troppo macchinosa, quindi ne forniamo un'altra a essa equivalente ma che usa i concetti del calcolo infinitesimale.

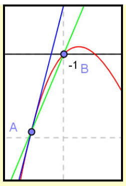
Definizione 2

Data una funzione $y = f(x)$, continua in un intorno completo $I_r(P)$, con $P \equiv (x_0; f(x_0))$, diciamo che essa è dotata di retta tangente in P, se, considerata una qualsiasi retta passante per P e per un punto Q di $I_r(P)$, che indichiamo con $r_{P,Q} : \frac{x - x_P}{x_Q - x_P} = \frac{y - y_P}{y_Q - y_P}$, esiste finito $\lim_{Q \to P} r_{P,Q}$.

Quindi la retta tangente è definita come il limite di una retta passante per due punti quando uno dei due punti tende a diventare l'altro. Ciò coincide con la precedente definizione *algebrica* in cui parlavamo di soluzione almeno doppia di un certo sistema di equazioni.

Esempio 7

In figura la retta tangente alla funzione nel punto A, indicata con il colore blu, è la posizione limite di una qualsiasi retta, tracciata in verde, passante per A e per un qualsiasi punto B diverso da A, quando B tende a



sovrapporsi ad A.

Vediamo allora di determinare il coefficiente angolare della retta tangente usando la definizione 2.

Esempio 8

Consideriamo il caso in cui la funzione è crescente in un punto $A \equiv (x_0; f(x_0))$, ciò ci permette di dire che se B è un punto che ha un'ascissa $x_0 + h$ ($h > 0$) maggiore di quella di A anche la sua ordinata lo è: $f(x_0 + h) > f(x_0)$. L'equazione della retta per A e B è:

$$r_{A,B} : \frac{x - x_0}{x_0 + h - x_0} = \frac{y - f(x_0)}{f(x_0 + h) - f(x_0)} \Rightarrow y = \frac{\left[f(x_0 + h) - f(x_0)\right] \cdot (x - x_0)}{h} + f(x_0)$$

Il coefficiente angolare è $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, secondo la definizione 2, allora il coefficiente angolare della retta tangente è $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Ciò però accade però solo se tale limite esiste.

In vista del precedente esempio poniamo alcune definizioni.

Definizione 3

Data una funzione $y = f(x)$, continua in un intorno completo $I_r(P)$, con $P \equiv (x_0; f(x_0))$, diciamo suo **rapporto incrementale di incremento *h* > 0**, la quantità $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Definizione 4

Data una funzione $y = f(x)$, continua in un intorno completo $I_r(P)$, con $P \equiv (x_0; f(x_0))$, diciamo che essa è **derivabile in $x = x_0$**, se esiste finito $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Il limite finito si chiama **derivata prima di $f(x)$ in x_0**.

Notazione 1

Se una funzione è derivabile in $x = x_0$, indichiamo la sua derivata prima con uno dei seguenti simboli equivalenti: $f'(x_0), \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x = x_0}, D\left[f(x)\right]_{x = x_0}$. Se vogliamo indicare la derivata per tutti gli x di un insieme scriveremo invece: $f'(x), \frac{df(x)}{dx}, D\left[f(x)\right]$.

Quindi dire che una funzione è derivabile in un suo punto, da un punto di vista geometrico vuol dire che essa ammette retta tangente nel dato punto. Tale retta però non deve essere parallela all'asse delle ordinate, per la condizione posta sulla finitezza del limite. Infatti le rette parallele all'asse y non hanno coefficiente angolare finito. Facilmente possiamo dire qual è l'equazione di questa tangente, quando esiste.

Teorema 1

L'equazione della retta tangente alla funzione $y = f(x)$, derivabile in x_0, nel punto $P \equiv (x_0; f(x_0))$ è

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

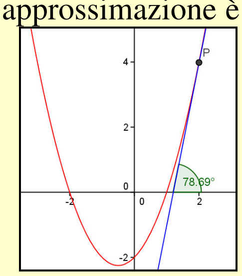
Dimostrazione Segue dai risultati precedenti.

Esempio 9

Vogliamo stabilire se la funzione $f(x) = x^2 + x - 2$ è derivabile per $x = 2$. Abbiamo: $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[(2+h)^2+(\cancel{2}+h)-\cancel{2}\right]-\left(2^2+\cancel{2-2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{4}+h^2+4h+h-\cancel{4}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^{\cancel{2}}+5\cancel{h}}{\cancel{h}} = = \lim_{h\to 0}(h+5) = 5.$$

Quindi la funzione è derivabile in $x = 2$ e la sua derivata è $f'(2) = 5$, e l'equazione della retta tangente alla funzione nel punto $(2; 4)$ è $y - 4 = 5 \cdot (x - 2) \Rightarrow y = 5x - 6$, e tale retta forma con il semiasse positivo delle ascisse un angolo acuto, come confermato dal grafico ottenuto con Geogebra. Ovviamente, da quel che sappiamo sul significato del coefficiente angolare vuol dire anche che $tan(78{,}69°) \approx 5$. L'approssimazione è dovuta al fatto che il valore calcolato da Geogebra è approssimato.



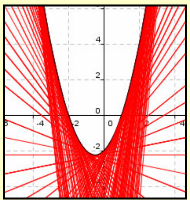
Possiamo dire che una curva derivabile può essere tracciata anche dall'insieme delle tangenti nei suoi punti.

Esempio 10

La funzione $f(x) = x^2 + x - 2$, è derivabile per ogni x reale, come è facile capire e come verifichiamo usando la definizione 4: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left[(x_0+h)^2+(\cancel{x_0}+h)-\cancel{2}\right]-\left(x_0^2+\cancel{x_0}-\cancel{2}\right)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x_0^2}+h^2+2x_0h+h-\cancel{x_0^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^{\cancel{2}}+2x_0\cancel{h}+\cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0}(h+2x_0+1) = 2x_0+1.$$

Quindi la funzione è derivabile in ogni punto $x = x_0$ e la sua derivata è $f'(x_0) = 2x_0 + 1$. Quindi l'equazione della retta tangente alla funzione nel punto $(x_0; x_0^2 + x_0 - 2)$ è $y - x_0^2 - x_0 + 2 = (2x_0 + 1) \cdot (x - x_0)$ che si semplifica in $y = (2x_0 + 1) \cdot x - x_0^2 + 2$. Pertanto al variare del punto, cioè della variabile x_0, avremo infinite rette che descrivono il contorno della funzione, come mostrato da Geogebra.



Le idee espresse nel precedente esempio meritano una definizione.

Definizione 5

Data una funzione $y = f(x)$, derivabile in tutti i punti del suo dominio, l'insieme delle sue rette tangenti si chiama **inviluppo della funzione**.

Per quanto premesso possiamo enunciare i seguenti risultati.

Teorema 2

- Una funzione $y = f(x)$, continua e derivabile in un intervallo $[a; b]$ è crescente in $[a; b]$ se e solo se si ha $f'(x) > 0, \forall x \in [a; b]$.
- Una funzione $y = f(x)$, continua e derivabile in un intervallo $[a; b]$ è decrescente in $[a; b]$ se e solo se si ha $f'(x) < 0, \forall x \in [a; b]$.

Dimostrazione immediata da tutto ciò che abbiamo detto finora.

Esempio 11

Consideriamo la funzione $f(x) = x^2 + x - 2$, che abbiamo già visto essere una parabola di vertice un punto di ascissa $-\frac{1}{2}$ e che volge la concavità verso l'alto. Noi sappiamo che tale funzione, in quanto parabola, è crescente per tutti i punti a destra del vertice, cioè quelli di ascissa maggiore di $-\frac{1}{2}$ e decrescente per quelli a sinistra del vertice. Verifichiamo il tutto con l'uso del Teorema 2. Abbiamo già calcolato la derivata della funzione in un suo punto generico x_0: $f'(x_0) = 2x_0 + 1$. Quindi, secondo il teorema 2 la funzione è crescente per $2x_0 + 1 > 0$, cioè per $x_0 > -\frac{1}{2}$, che è proprio quello che avevamo preannunciato. Ovviamente sarà decrescente per $x_0 < -\frac{1}{2}$.

Naturalmente, affinché una funzione sia derivabile essa deve anche essere continua.

Teorema 3

Una funzione $y = f(x)$, derivabile in un intervallo $[a; b]$ è anche continua in $[a; b]$.

Dimostrazione

Dire $y = f(x)$ continua in $x_0 \in [a; b]$ equivale a dire che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{x \to x_0}\left[f(x) - f(x_0)\right] = 0$.
Dall'ipotesi di derivabilità noi sappiamo che $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$, per ogni $h \neq 0$, quindi se consideriamo $h = x - x_0$, possiamo anche scrivere $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$. Ciò significa, per le proprietà dei limiti che si ha anche: $\lim_{x \to x_0}\left[f(x) - f(x_0)\right] = \lim_{x \to x_0} f'(x_0) \cdot (x - x_0) = 0$, cioè la tesi.

Come abbiamo già visto nell'esempio 6, invece non è detto che una funzione continua sia sempre derivabile.

Esempio 12

La funzione $f(x) = |x|$ pur essendo continua in $x = 0$, non è ivi derivabile. Infatti: $\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} =$
$= \lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$, e questo limite non esiste perché $x = 0$ è un punto di discontinuità di I specie, dato che $\lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$, $\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-h}{h} = -1$.

Una funzione non è derivabile se il limite del suo rapporto incrementale non esiste o non è finito. Poniamo allora tre distinte definizioni per le due eventualità.

Definizione 6

Data una funzione $y = f(x)$, continua in un intorno completo di $P \equiv (x_0; f(x_0))$, se

- $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ non esiste, e almeno uno dei due limiti sinistro o destro esiste finito, allora diciamo che la funzione ha in P un **punto angoloso**. I limiti destro e sinistro, se finiti, si dicono rispettivamente **derivata sinistra** e **derivata destra** della funzione.
- $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \pm\infty \vee \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \mp\infty$ allora diciamo che la funzione ha in P un **punto cuspidale**

- $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\pm\infty \vee \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\pm\infty$ allora diciamo che la funzione ha in P un **punto di flesso a tangente verticale**

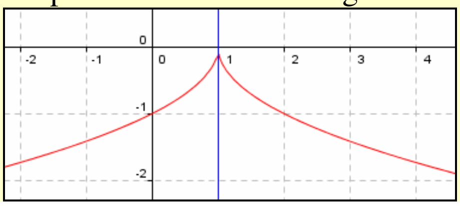
Notazione 2

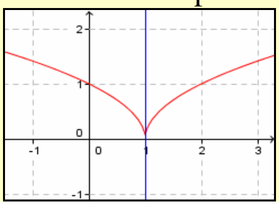
Le derivate sinistra e destra in $x = x_0$, di una funzione si indicano rispettivamente con: $f_-^{'}(x_0), f_+^{'}(x_0)$.

Osserviamo che abbiamo distinto il caso in cui i limiti sinistro e destro del rapporto incrementale siano infiniti dello stesso segno, da quello in cui invece hanno segni diversi. Vediamo di capire il perché. Prima osserviamo che la funzione $f(x) = |x|$ ha un punto angoloso in $x = 0$, quindi ha due distinte tangenti, ma ciò non è caratteristico dei punti angolosi, poiché accade anche per i punti cuspidali.

Esempio 13

La funzione $f(x)=\sqrt{|x-1|}$ è continua per ogni x, vediamo se è derivabile per $x = 1$. Abbiamo: $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{|h|}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{|h|}}{h}$, pertanto i due limiti sinistro e destro sono: $\lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{-h}}{h}=-\infty, \lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h}}{h}=+\infty$. Perciò per $x = 1$ abbiamo un punto cuspidale. Ovviamente dire che per $x = 1$ vi è una cuspide equivale a dire che la retta tangente alla funzione in tale punto ha coefficiente angolare infinito, quindi è una retta parallela all'asse delle ordinate, come mostrato nella prima figura seguente. Dato che i due coefficienti angolari hanno segno contrario vuol dire che da sinistra l'angolo è di –90° e da destra di +90°. Questo fa sì che la curva cambi crescenza, passando da una fase decrescente a una crescente. Ovviamente la funzione $f(x)=-\sqrt{|x-1|}$, nella seconda figura, si comporta esattamente al contrario, avendo prima una fase di crescita e poi di decrescita. Ma ugualmente si ha in $x = 1$ un punto cuspidale.





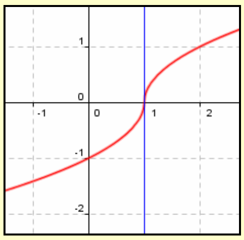
Invece i punti di flesso hanno la stessa tangente da entrambi i lati del punto, solo che questa tangente è verticale e quindi la funzione non è nel punto derivabile.

Esempio 14

La funzione $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1} & x\geq 1\\ -\sqrt{1-x} & x<1\end{cases}$ è continua per ogni x, ma non è derivabile per $x = 1$, infatti:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-\sqrt{-h}-0}{h}=+\infty; \lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h}-0}{h}=+\infty$$

Pertanto per $x = 1$ abbiamo un punto di flesso a tangente verticale. Facciamo rappresentare il grafico a Geogebra, in cui si vede appunto che la curva continua a crescere, e pertanto deve operare una "flessione" per poter fare sì che la retta tangente in $x = 1$ rimanga verticale.



Concludiamo osservando che se la funzione è definita solo in un intorno destro o sinistro del punto e la derivata è infinita, non possiamo distinguere se il punto è cuspidale o di flesso, diciamo quindi semplicemente che la funzione nel dato punto non è derivabile.

L'angolo storico

La nascita del calcolo differenziale è storicamente legata alla risoluzione dei seguenti quattro problemi:

1. trovare velocità ed accelerazione istantanea data la legge temporale dello spazio;
2. trovare la tangente a una curva;
3. trovare il massimo o il minimo di una funzione;
4. calcolare la lunghezza di una curva.

Il primo approccio che porta all'attuale concetto di derivata è ad opera di Pierre de Fermat che nel suo manoscritto del 1637, *Methodus ad disquirendam maximam et minimum* determina l'equazione della tangente a una curva con un metodo molto simile a quello del rapporto incrementale. Da allora molti altri si interessarono di questo problema. Ma i due maggiormente legati alla questione sono Isaac Newton che espone le sue idee in un'opera del 1671: *Methodus fluxionum et seriereum infinitum*, che però è pubblicata solo nel 1736 e Gottfried Wilhelm Leibniz. Questi, a differenza di Newton che era restio a pubblicare, faceva stampare ogni suo lavoro. E il primo in cui cominciò a parlare di queste nozioni è un articolo del 1684. Inoltre Leibniz ebbe anche il merito di essere stato un inventore di simboli matematici *duraturi* ed *efficaci*, il che permise la diffusione delle sue idee molto più rapidamente. Per secoli vi sono state infinite discussioni su chi dei due grandi scienziati debba essere considerato il "padre" del calcolo infinitesimale, la conclusione adesso accettata è che entrambi giunsero alle conclusioni più o meno nello stesso momento, ma solo il differente approccio alla diffusione stampata delle idee fece prevalere Leibniz su Newton.
Dal punto di vista della notazione Newton usava porre un puntino per indicare la derivata, che chiamava *flussione*, cioè $\dot{x}$. Invece Leibniz usava la scritta *dx*. In seguito Joseph Louis Lagrange nel 1797 riprendendo un simbolo usato da Johann Bernoulli qualche secolo prima, indicò la derivata con la lettera D.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x^3 - x + 1$ nel suo punto di ascissa $x_0 = 0$. Dobbiamo calcolare il seguente limite: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h^3 - h + 1 - 1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\cancel{h} \cdot (h^2 - 1)}{\cancel{h}} = -1$. Quindi $f'(0) = -1$.

Calcolare le derivate, se esistono, delle seguenti funzioni nei punti accanto indicati

Livello 1

1. $f(x) = x^2 + x$, $x_0 = -1$; $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$, $x_0 = 0$; $f(x) = 3x + 2$, $x_0 = 1$ [– 1; 3; 3]
2. $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$, $x_0 = \frac{1}{2}$; $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$; $f(x) = x^4 + x^2$, $x_0 = \sqrt{2}$ $\left[-\frac{5}{4}; \frac{1}{2}; 10 \cdot \sqrt{2}\right]$
3. $f(x) = -x^5 + x^3$, $x_0 = -\sqrt{2}$; $f(x) = 2x^3 - 1$, $x_0 = -\frac{1}{2}$; $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x_0 = 0$ $\left[-14; \frac{3}{2}; 0\right]$
4. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$; $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$. $x_0 = 1$; $f(x) = x^3 + x$, $x_0 = 2$ [$\varnothing$; 1 ; 13]

Livello 2

5. $f(x) = \frac{3x^2 - 5x}{7x + 1}$, $x_0 = 0$; $f(x) = \frac{5x^2 - 3}{9x^2 + 7x}$, $x_0 = 1$; $f(x) = ln(x)$, $x_0 = 2$; $f(x) = e^x$; $x_0 = 1$ $\left[-5; \frac{55}{128}; \frac{1}{2}; e\right]$
6. $f(x) = \frac{x + 2}{3x - 5}$, $x_0 = -1$; $f(x) = e^{2x}$, $x_0 = 0$; $f(x) = \frac{x - 5}{8x^2 - 3x + 5}$, $x_0 = \frac{1}{2}$ $\left[-\frac{11}{64}; 2; \frac{112}{121}\right]$
7. $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 5}{4x^2 + 1}$, $x_0 = 2$; $f(x) = \frac{7x^2 - 5}{5x^2 + 3x - 2}$, $x_0 = 2$; $f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{x - 1}$, $x_0 = \frac{1}{3}$ $\left[\frac{39}{289}; \frac{143}{576}; -\frac{9 + 6 \cdot \sqrt{3}}{4}\right]$

Livello 3

8. $f(x) = sin(x)$, $x_0 = 0$; $f(x) = cos(x)$, $x_0 = \pi$; $f(x) = sin(2x)$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$ [0 ; 0 ; 0]
9. $f(x) = cos\left(\frac{x}{2}\right)$, $x_0 = \pi$; $f(x) = sin^2(x)$, $x_0 = 1$; $f(x) = tan(x)$, $x_0 = 0$; $f(x) = sin(e^x)$, $x_0 = 0$ $\left[-\frac{1}{2}; sin(2); 1; cos(1)\right]$
10. $f(x) = \sqrt[3]{x} - sin(x)$, $x_0 = 0$; $f(x) = cos(x + 1) - ln(2x)$, $x_0 = 1$; $f(x) = e^{\sqrt{x}} + sin(x)$, $x_0 = 2$ $\left[\varnothing; -1 - sin(2) \frac{\sqrt{2} \cdot e^{\sqrt{2}} + 4 \cdot cos(2)}{4}\right]$

Lavoriamo insieme

Scrivere l'equazione della retta tangente alla funzione $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$ nel suo punto di ascissa $x_0 = 1$. Dobbiamo intanto calcolare il coefficiente angolare della retta, ossia la derivata della funzione, quindi effettuare il calcolo: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{2 \cdot (1+h)^4 - 3 \cdot (1+h)^2 + 1 - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 \cdot (2 + 2h^2 + 4h - 3) + 1}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 \cdot (2h^2 + 4h - 1) + 1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{2h^4 + 8h^3 + 9h^2 + 2h - 1 + 1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (2h^3 + 8h^2 + 9h + 2) = 2$. Ora possiamo scrivere l'equazione cercata: $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Rightarrow y - 0 = 2 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = 2x - 2$.

Scrivere, se esistono, le equazioni delle rette tangenti alle seguenti funzioni nei punti accanto indicati

Livello 1

11. $f(x) = 2x + 1$, $x_0 = 1$; $f(x) = 1 - x$, $x_0 = 3$; $f(x) = x^2 + 4x - 1$, $x_0 = 1$ [$y = 2x + 1$; $y = 1 - x$; $y = 6x - 2$]

12. $f(x) = 2x^3 + 3x^2$, $x_0 = -2$; $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$, $x_0 = -\frac{1}{2}$; $f(x) = x^4 - 1$, $x_0 = -\frac{2}{3}$; $f(x) = e^x$, $x_0 = 1$ $\left[y=12x+20; y=-\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}; y=-\frac{32}{27}x-\frac{43}{27}; y=ex\right]$

13. $f(x) = x^3 + x^2 + 1$, $x_0 = -1$; $f(x) = x^5 + x^3 + x$, $x_0 = \sqrt{2}$; $f(x) = ln(x)$, $x_0 = 1$ $\left[y=x+2; y=27x-20\cdot\sqrt{2}; y=x-1\right]$

14. $f(x)=\sqrt{x+1}$, $x_0 = 1$; $f(x)=\sqrt{2x^2+x+1}$, $x_0 = 0$ $\left[y=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot(x+3); y=\frac{1}{2}x+1\right]$

Livello 2

15. $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$, $x_0 = 0$; $f(x)=\frac{2x}{x+2}$, $x_0 = 1$; $f(x)=\frac{x+2}{x^2-1}$, $x_0 = 0$ $\left[y=2x-1; y=\frac{4}{9}x+\frac{2}{9}; y=x-2\right]$

16.

17. $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+1}$, $x_0 = 2$; $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-2}$, $x_0=-\frac{1}{3}$; $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+1}$, $x_0 = \frac{1}{2}$ $\left[y=\frac{1}{25}x+\frac{28}{25}; y=-\frac{22}{49}x-\frac{23}{49}; y=32x-20\right]$

Livello 3

18. $f(x) = cos(x)$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$; $f(x) = sin(x)$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$; $f(x) = sin(2x)$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$ $\left[y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}\pi}{6}+\frac{1}{2}; y=1; y=1\right]$

19. $f(x)=cos\left(\frac{x}{2}\right)$, $x_0 = 2\pi$; $f(x)=sin\left(\frac{2}{x}\right)$, $x_0=\frac{3}{\pi}$; $f(x)=cos\left(\frac{4}{x^2}\right)$, $x_0=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ $\left[y=-1; y=\frac{\pi^2}{9}x-\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{6}; y=1\right]$

20. Per quali punti la funzione $f(x) = x^2 + 4x$ ha derivata nulla? [(–2; –4)]

21. Per quali punti la funzione $f(x) = x^3 + x^2$ ha derivata nulla? $\left[(0;0),\left(-\frac{2}{3};\frac{4}{27}\right)\right]$

22. Per quali punti la funzione $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ è crescente? [$x > 0$]

23. Per quali punti la funzione $f(x)=\frac{x^2+4}{x^2-1}$ è decrescente? [$x > 0$]

24. In quali punti della funzione $f(x)=\sqrt{x+1}$ la funzione non è derivabile? [(–1; 0)]

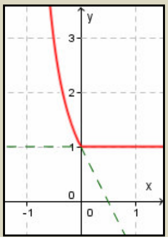
25. Dimostrare che se la funzione $f(x)$ è derivabile in x_0, allora anche $f(x) + k$ ($k\in\mathbb{R}$) lo è e si ha: $D\left[k+f(x)\right]_{x=x_0}=D\left[f(x)\right]_{x=x_0}$.

26. Dimostrare che se la funzione $f(x)$ è derivabile in x_0, allora anche $k \cdot f(x)$ ($k\in\mathbb{R}$) lo è e si ha: $D\left[k\cdot f(x)\right]_{x=x_0}=k\cdot D\left[f(x)\right]_{x=x_0}$

Lavoriamo insieme

Abbiamo visto che in generale una funzione che contiene dei valori assoluti non è derivabile nei punti che annullano il valore assoluto. Vediamo se ciò accade anche per la funzione $f(x)=\frac{|x|+1}{|x+1|}$. Intanto essa è definita solo per $x + 1 \neq 0$, cioè per $x \neq -1$. Inoltre può scriversi anche nel modo seguente:

$f(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{x+1}=1 & x\ge 0\\ \frac{1-x}{|x+1|} & x<0\end{cases}$. Quindi dobbiamo calcolare $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1-1}{h}=0$, cioè $f_+^{'}(0)=0$ e $\lim_{h\to 0^-}\frac{\frac{1-h}{1+h}-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{1-h-1-h}{h\cdot(1+h)}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-2h}{h\cdot(1+h)}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-2}{1+h}=-2$, quindi $f_-^{'}(0)=-2$. Perciò la funzione non è derivabile per $x = 0$, in cui vi è un punto angoloso, dato che la derivata sinistra e destra sono diverse ma finite. Rappresentiamo il tutto con Geogebra. Le due distinte tangenti sono tratteggiate e di colore verde.



Stabilire quali delle seguenti funzioni non sono derivabili nei punti accanto indicati, per quelle che non lo sono stabilire, se possibile, se il dato punto è angoloso, cuspidale o di flesso

Livello 2

27. $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0 = 0$; $f(x) = ln(x^2 + 1)$, $x_0 = 0$; $f(x)=\frac{|x|}{x-1}$, $x_0 = 0$; $f(x) = |2x + 1| – |2x – 1|$, $x_0 = \pm\frac{1}{2}$
[Non derivabile ; Derivabile ; Angoloso ; Angolosi]

28. $f(x)=\frac{|x|+|x+1|}{|x|-|x+1|}$, $x_0 = 0 \vee x_0 = -1$; $f(x) = ln(|x| + 1)$, $x_0 = 0$; $f(x) = |x – 2|$, $x_0 = 2$; $f(x)=\frac{x}{|x+1|}$, $x_0 = 0$
[Angolosi ; Angoloso; Angoloso ; Derivabile]

Livello 3

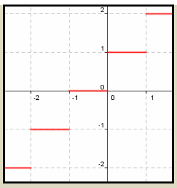
29. $f(x)=sin\left(\sqrt[3]{x}\right)$, $x_0 = 0$; $f(x)=\sqrt{|x|}$, $x_0 = 0$; $f(x) = sin(|x – \pi|)$, $x_0 = \pi$ [Flesso ; Cuspidale ; Angoloso]

30. $f(x) = cos(|x|)$, $x_0 = 0$; $f(x)=sin\left(\sqrt[3]{x^2}\right)$, $x_0 = 0$; $f(x)=sin\left(\sqrt[3]{x^4}\right)$, $x_0 = 0$
[Derivabile ; Cuspidale ; Derivabile]

31. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\ge 0\\ -\sqrt{-x} & x<0\end{cases}$, $x_0 = 0$; $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2} & x\ge 0\\ -\sqrt{x^2} & x<0\end{cases}$, $x_0 = 0$; $f(x)=\begin{cases}sin(|x|) & x\ge 0\\ cos\left(\left|x-\frac{\pi}{2}\right|\right) & x<0\end{cases}$, $x_0 = 0$
[Flesso ; Derivabile ; Derivabile]

32. $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x-1} & x\ge 0\\ \frac{-|x|}{x-1} & x<0\end{cases}$, $x_0 = 0$; $f(x)=\begin{cases}ln\left(\sqrt{x}\right) & x\ge 0\\ -ln\left(\sqrt{-x}\right) & x<0\end{cases}$, $x_0 = 0$; $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|} & x\ge 0\\ sin(|x|) & x<0\end{cases}$, $x_0 = 0$
[Derivabile ; Non continua ; Non derivabile]

Lavoriamo insieme

Consideriamo la funzione *ceiling*(x), che indichiamo con $f(x) = \lceil x\rceil$, che determina il massimo intero contenuto in x, che ha il grafico seguente, quello di una funzione con infiniti punti di discontinuità di I specie per tutte le x intere, con salto pari a 1 unità. Ovviamente dove la funzione non è continua non è neanche derivabile, ma dove è continua è invece derivabile e la sua derivata è ovviamente 0, dato che abbiamo a che fare con segmenti paralleli all'asse delle ascisse, le cui tangenti quindi sono gli stessi segmenti di coefficiente angolare zero. 

Dopo avere rappresentato le seguenti funzioni stabilire dove sono derivabili e quanto vale detta derivata. Ricordiamo le funzioni: floor(x) = $\lfloor x \rfloor$, cioè il minimo intero contenuto in x; $segno(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$***, round(x) è l'arrotondamento di x***

Livello 2

33. $f(x) = \lfloor x \rfloor$; $g(x) = segno(x)$; $h(x) = round(x)$; $m(x) = \lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil$

$[f'(x) = 0,\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; $g'(x) = 0,\ x \neq 0$; $h'(x) = 0,\ x \in \mathbb{R} : x - 0{,}5 \notin \mathbb{Z}$; $m'(x) = 0,\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}]$

34. $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x < 0 \\ 2x+1 & x \geq 0 \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} x-1 & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$; $h(x) = \begin{cases} 3x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$

$$\left[f'(x) = \begin{cases} 3 & x < 0 \\ 2 & x > 0 \end{cases}; g'(x) = 1, x \neq 0; h'(x) = \begin{cases} 3 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \right]$$

35. $f(x) = \begin{cases} 3x-9 & x < 2 \\ 1-2x & x \geq 2 \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$; $h(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$

$$\left[f'(x) = \begin{cases} 3 & x < 2 \\ -2 & x > 2 \end{cases}; g'(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}; h'(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \vee x > 1 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases} \right]$$

Livello 3

Giustificare le risposte alle seguenti domande

36. Se una funzione non è derivabile in x_0, possiamo dire che non ha tangente in x_0? [No]
37. Se una funzione non ha tangente in x_0, possiamo dire che non è derivabile in x_0? [Sì]

Derivate delle funzioni elementari

La matematica incomincia solamente quando il misuratore ed il calcolatore si interessano al funzionamento della loro tecnica e la istituzionalizzano come una specie di gioco le cui due idee direttrici sono l'invenzione e la dimostrazione. *Gilles Gaston Granger*

Il problema

Se volessimo calcolare la derivata della funzione $f(x) = x^{27} + 134x^{13} + sin(17x)$, applicando la definizione 4, avremmo da effettuare laboriosi calcoli, non solo, ma, una volta che la abbiamo calcolata, se dovessimo calcolare la derivata della funzione $f(x) = 3x^{27} - 3x^{13} + 5sin(17x)$, non possiamo sfruttare i calcoli precedenti?

La citazione proposta all'inizio di questo paragrafo è molto istruttiva e ci ricorda che il matematico, una volta che ha inventato una certa tecnica, vuole evitare di ripeterla, ma preferisce cercare una legge generale da applicare. Un po' quello che abbiamo fatto alle scuole elementari imparando a memoria le cosiddette tabelline. Una volta che abbiamo capito come si moltiplicano i numeri fra loro, cioè che dire 5×7 è lo stesso che dire $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$, è inutile ripeterlo ogni volta, impariamo *una volta per tutte*, che $5 \times 7 = 35$ e tutte le volte in cui ci servirà, useremo questa informazione. Lo stesso abbiamo fatto molte altre volte e così faremo anche stavolta, cioè impareremo come calcolare le derivate di alcune funzioni elementari, quindi impareremo come usare queste informazioni per calcoli più complessi.
Cominciamo intanto a calcolare qualche semplice derivata come funzione, non più quindi in un dato punto.

Esempio 15

Vogliamo stabilire se la funzione costante $f(x) = 3$ è derivabile e qual è la sua derivata. In questo caso possiamo procedere in due modi.

1. Geometricamente. Dato che la funzione non è altro che una retta e che la retta tangente a una retta è ovviamente la retta stessa, possiamo dire che la derivata è il coefficiente angolare di $y = 3$, cioè: $f'(x) = 0$.
2. Algebricamente. Calcoliamo il limite del rapporto incrementale nel generico punto di ascissa x, cioè:
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3-3}{h}=0$$
Ovviamente, essendo la funzione costante $f(x + h) = f(x) = 3$ per ogni x e per ogni h.

Dal precedente esempio segue immediato il risultato generale.

Teorema 4

La funzione costante $f(x) = k$ è derivabile per ogni x reale e si ha: $f'(x) = 0$.

Dimostrazione Sulla falsariga dell'esempio 15.

Tenuto conto dell'osservazione fatta nell'esempio 15 a proposito delle rette possiamo anche enunciare il seguente risultato.

Teorema 5

La funzione lineare $f(x) = ax + b$ è derivabile per ogni x reale e si ha: $f'(x) = a$.

Dimostrazione Sulla falsariga dell'esempio 15.

Segue abbastanza immediatamente il seguente risultato.

Corollario 1

Sia $f(x)$ derivabile in X e sia a un numero reale, allora $a \cdot f(x)$ è derivabile in X e si ha: $D[a \cdot f(x)] = a\cdot f'(x)$.

Dimostrazione Per esercizio

Adesso vogliamo considerare la funzione potenza $f(x) = x^n$, per n generico numero naturale.

Esempio 16

- Cominciamo con la funzione quadratica $f(x) = x^2$. L'approccio geometrico stavolta non è utile, poiché non è facile immaginare cosa accade per la retta tangente a una parabola. Conviene quindi usare il metodo algebrico: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$. Ovviamente otteniamo una forma indeterminata $\frac{0}{0}$, ricordiamo anzi che il limite del rapporto incrementale è **sempre** una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Eliminiamo l'indeterminazione: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2hx+h^2-\cancel{x^2}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\cdot(2x+h)}{\cancel{h}}=2x$. Quindi si ha: $D(x^2) = 2x$. A questo punto facilmente possiamo calcolare la derivata della funzione cubica $f(x) = x^3$. Si ha: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cancel{x^3}+3hx^2+3hx+h^3-\cancel{x^3}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\cdot(3x^2+3hx+h^2)}{\cancel{h}}=3x^2=2x$. Cioè: $D(x^3) = 3x^2$.

Usando un procedimento induttivo possiamo enunciare il seguente risultato generale.

Teorema 6

La funzione potenza $f(x) = x^n$ è derivabile per ogni x reale e ogni n naturale e si ha: $f'(x) = nx^{n-1}$.

Dimostrazione

Dobbiamo calcolare $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$, quindi dobbiamo sviluppare la potenza del binomio, che potremmo fare mediante lo sviluppo del binomio di Newton. In effetti ciò non è necessario, quello che a noi interessa sapere è che lo sviluppo di $(x + h)^n$ è un polinomio omogeneo di grado n, i cui termini possono scriversi in modo che le potenze di x decrescano da n a 0 e, contemporaneamente, le potenze di h crescano da 0 a n. Cioè $(x + h)^n = x^n + a_1 x^{n-1} h + a_2 x^{n-2} h^2 + \ldots + a_{n-1}xh^{n-1} + a_nh^n$, in cui $a_k=\binom{n}{k}$. In realtà a noi interessano solo i primi due addendi. Infatti il primo ci interessa perché si semplificherà con $-x^n$, e perciò eliminerà l'indeterminazione; il secondo ci interessa perché è l'unico che contiene h al primo grado. Tutti gli altri addendi invece conterranno potenze di h maggiori o uguali a 2, pertanto quando semplificheremo per h numeratore e denominatore tranne il secondo addendo tutti gli altri saranno infinitesimi. Chiariamo meglio:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^n}+nx^{n-1}h+a_2x^{n-2}h^2+\ldots+a_{n-1}h^n-\cancel{x^n}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\cdot\left(nx^{n-1}+a_2x^{n-2}h+\ldots+a_{n-1}h^{n-1}\right)}{\cancel{h}}=nx^{n-1}$$

Che è ciò che voleva dimostrarsi.

Esempio 17

Possiamo dire che si ha: $D(x^{24}) = 24x^{23}$; $D(x^{417}) = 417x^{416}$.

Il risultato precedente può generalizzarsi per una potenza a esponente reale.

Teorema 7

La funzione potenza $f(x) = x^p$ è derivabile per ogni x e ogni p reali e si ha: $f'(x) = p \cdot x^{p-1}$.

Dimostrazione

Dobbiamo calcolare $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^p-x^p}{h}$, dividiamo numeratore e denominatore per x^p ottenendo: $\lim\limits_{h\to 0}x^p\cdot\frac{(1+h/x)^p-1}{h}$, ci accorgiamo che il secondo fattore assomiglia a un limite notevole, lo modifichiamo opportunamente: $\lim\limits_{h\to 0} x^{p-1}\cdot\dfrac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^p-1}{\frac{h}{x}} = x^{p-1}\cdot p$, che è la tesi cercata.

Esempio 18

Possiamo dire che si ha: $D\left(\frac{1}{x}\right) = D\left(x^{-1}\right) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}; D\left(\sqrt{x}\right) = D\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; mentre $D\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) = D\left(x^{-\frac{2}{3}}\right) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x^5}}$; $D\left(x^{e+\pi}\right) = (e+\pi)\cdot x^{e+\pi-1}$.

Consideriamo qualche altra funzione elementare.

Teorema 8

La funzione esponenziale $f(x) = a^x$ è derivabile per ogni x reale e ogni $a > 0$ e si ha: $f'(x) = a^x \cdot ln(a)$.

Dimostrazione

Abbiamo: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{a^x\cdot\left(a^h-1\right)}{h}$. Otteniamo la tesi richiesta ricordando il limite notevole: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = ln(a)$.

Immediato segue il seguente risultato.

Corollario 2

La funzione esponenziale $f(x) = e^x$ è derivabile per ogni x reale e si ha: $f'(x) = e^x$

Esempio 19

Abbiamo: $D\left(2^x\right) = 2^x\cdot ln(2); D\left(\pi^x\right) = \pi^x\cdot ln(\pi)$.

Ancora una funzione elementare.

Teorema 9

La funzione logaritmica $f(x) = log_a(x)$ è derivabile per ogni x reale positivo e ogni $a > 0$ e diverso da 1 e si ha: $f'(x) = \frac{1}{x\cdot ln(a)}$.

Dimostrazione

Si ha: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{log_a(x+h)-log_a(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{log_a\frac{x+h}{x}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}$.

Otteniamo la tesi richiesta ricordando il limite notevole: $\lim\limits_{z\to 0}\frac{log_a(1+z)}{z} = \frac{1}{ln(a)}$.

Immediato è il seguente risultato.

Corollario 3

Si ha D[$ln(x)$] = 1/x.

Esempio 20

Abbiamo: $D\left[log_3(x)\right]=\dfrac{1}{x\cdot ln(3)};D\left[log_{\frac{2}{3}}(x)\right]=\dfrac{1}{x\cdot ln\left(\dfrac{2}{3}\right)}$.

Passiamo alle funzioni goniometriche.

Teorema 10

La funzione $f(x) = sin(x)$ è derivabile per ogni x reale e si ha: $f'(x) = cos(x)$.

Dimostrazione

Abbiamo: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{sin(x+h)-sin(x)}{h}$. Per eliminare l'indeterminazione applichiamo la formula di prostaferesi: $sin(p)-sin(q)=2\cdot sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cdot cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$, ottenendo così:

$$\lim_{h\to 0}\frac{2\cdot sin\left(\frac{h}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\cdot cos\left(\frac{2x+h}{2}\right).$$

Otteniamo la tesi richiesta ricordando il limite notevole: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin(x)}{x}=1$.

Analogo risultato per il coseno.

Teorema 11

La funzione $f(x) = cos(x)$ è derivabile per ogni x reale e si ha: $f'(x) = -\, sin(x)$.

Dimostrazione per esercizio

Nei successivi paragrafi calcoleremo derivate di altre funzioni più complesse, utilizzando altre tecniche.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo determinare la derivata della funzione $\sqrt[3]{x}$ applicando la formula determinata nel teorema 7. Abbiamo: $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$, quindi $D\left(\sqrt[3]{x}\right)=D\left(x^{\frac{1}{3}}\right)=\frac{1}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$.

Determinare le derivate delle seguenti funzioni, usando la formula stabilita dal teorema 7

Livello 1

1. x^{72} ; $x^{\sqrt{2}}$; x^e ; $\sqrt{x^5}$; $\sqrt[7]{x^3}$; $\sqrt[3]{x^{\sqrt{2}}}$; $\frac{1}{x^4}$ $\left[72x^{71};\frac{\sqrt{2}\cdot x^{\frac{\sqrt{2}-3}{3}}}{3};\sqrt{2}\cdot x^{\sqrt{2}-1};ex^{e-1};\frac{5}{2}\cdot\sqrt{x^3};\frac{3}{7\cdot\sqrt[7]{x^4}};-\frac{4}{x^5}\right]$

2. $\frac{1}{x^{e+1}}$; $\frac{1}{x^{\pi}}$; $\frac{1}{\sqrt{x}}$; $\frac{1}{\sqrt[6]{x^5}}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{x}}}$ $\left[-\frac{e+1}{x^{e+2}};-\frac{\pi}{x^{\pi+1}};\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^3}};-\frac{5}{6\cdot\sqrt[6]{x^{11}}};-\frac{1}{6\cdot\sqrt[6]{x^7}}\right]$

Livello 2

3. $\frac{x^e}{x^{\sqrt{2}}}$; $\frac{x^{\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{x}}$; $\frac{x^{e+\sqrt{2}}}{\sqrt{x^{1-\pi}}}$ $\left[\left(e-\sqrt{2}\right)\cdot x^{e-\sqrt{2}-1};\frac{3\cdot\sqrt{2}-1}{3}\cdot x^{\frac{3\cdot\sqrt{2}-4}{3}};\frac{2e+\pi+2\cdot\sqrt{2}-1}{2}\cdot x^{\frac{2e+\pi+2\sqrt{2}-3}{2}}\right]$

4. $\frac{\sqrt[e-1]{x^{e+1}}}{\sqrt{x^{e-1}}}$; $\sqrt{x^n}$; $\sqrt[m]{x^n}$; $\frac{1}{\sqrt{x^n}}$; $\frac{1}{\sqrt[m]{x^n}}$ $\left[\frac{e^2-4e-1}{2\cdot(1-e)}\cdot x^{\frac{e^2-2e-3}{2-2e}};\frac{n}{2}\cdot\sqrt{x^{n-2}};\frac{n}{m}\cdot\sqrt[m]{x^{n-m}};-\frac{n}{2\cdot\sqrt{x^{n+2}}};-\frac{n}{m\cdot\sqrt[m]{x^{n+m}}}\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo determinare la derivata della funzione $log_4(x^3)$ applicando la formula stabilita dal teorema 9. Applichiamo le proprietà dei logaritmi, scrivendo $3 \cdot log_4(x)$, quindi: $D\left[log_4\left(x^3\right)\right]=D\left[3\cdot log_4(x)\right]=\frac{3}{x\cdot ln(4)}$.

Determinare le derivate delle seguenti funzioni, usando le formule stabilite dai teoremi 8 e 9

Livello 1

5. $4e^x$; e^{x+1} ; e^{x-2} ; 2^{x-1} ; $3^{x+\sqrt{2}}$; $\frac{1}{3^x}$; $log_3\left(\frac{1}{x^4}\right)$ $\left[4e^x;e^{x+1};e^{x-2};2^{x-1}\cdot ln(2);3^{x+\sqrt{2}}\cdot ln(3);-\frac{ln(3)}{3^x};-\frac{4}{x\cdot ln(3)}\right]$

6. $log_5\left(\sqrt{x}\right)$; $ln\left(\frac{1}{x^e}\right)$; $log_3(x) + log_3(5x)$; $log_7(3x) - log_7(x^2)$ $\left[\frac{1}{2x\cdot ln(5)};-\frac{e}{x};\frac{2}{x\cdot ln(3)};-\frac{1}{x\cdot ln(7)}\right]$

Livello 2

7. $\frac{2^x}{4^{x-1}}$; $\frac{3^x}{9^{x-1}}$; $\frac{4^x}{8^{x+1}}$; $\frac{25^x}{5^{x-2}}$ $[-2^{2-x}\cdot ln(2) ; -3^{2-x}\cdot ln(3) ; -2^{-x-3}\cdot ln(2) ; 5^{2+x}\cdot ln(5)]$

8. $log_2(x)\cdot log_x(4)$, $x > 0, x \neq 1$; $\frac{log_2(x)}{log_4\left(x^2\right)}$, $x > 0$; $ln^2(x)\cdot log_x(3)$, $x > 0, x \neq 1$ $\left[0;0;\frac{ln(3)}{x}\right]$

9. $log_5^2\left(x^3\right)\cdot log_x(3)$, $x > 0, x \neq 1$; e^{x+n} ; a^{x+n} $\left[\frac{9log_5(3)}{x\cdot ln(5)};e^{x+n};a^{x+n}\cdot ln(a)\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo determinare la derivata della funzione $\frac{x+1}{x-1}$. Non abbiamo ancora determinato una regola che possa applicarsi, quindi dobbiamo calcolare il limite del rapporto incrementale. $\lim\limits_{h\to0}\frac{\frac{x+h+1}{x+h-1}-\frac{x+1}{x-1}}{h}=$

$$=\lim_{h\to0}\frac{(x+h+1)\cdot(x-1)-(x+1)\cdot(x+h-1)}{h\cdot(x+h-1)\cdot(x-1)}=\lim_{h\to0}\frac{\cancel{x^2}-\cancel{x}+\cancel{hx}-h+\cancel{x}-\cancel{1}-\cancel{x^2}-\cancel{hx}+\cancel{x}-\cancel{x}-h+\cancel{1}}{h\cdot(x+h-1)\cdot(x-1)}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{-2\cancel{h}}{\cancel{h}\cdot(x+h-1)\cdot(x-1)}=-\frac{2}{(x-1)^2}$$

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

Livello 1

10. $f(x)=\frac{3x^2-5x}{7x+1}$; $f(x)=\frac{5x^2-3}{9x^2+7x}$; $f(x)=\frac{2x}{3x+1}$ $\left[\frac{21x^2+6x-5}{(7x+1)^2};\frac{35x^2+54x+21}{x^2\cdot(9x+7)^2};\frac{2}{(3x+1)^2}\right]$

11. $f(x)=\frac{7x-5}{6x^2+3x+1}$; $f(x)=\frac{ax+b}{ax-b}$; $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ $\left[\frac{-42x^2+60x+22}{\left(6x^2+3x+1\right)^2};\frac{-2ab}{(ax-b)^2};\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}\right]$

12. $f(x) = sin(3x)$; $f(x)=cos\left(\frac{x}{2}\right)$; $f(x) = (2x + 5)^3$ $\left[3cos(3x);-\frac{1}{2}sin\left(\frac{x}{2}\right);6\cdot(2x+5)^2;4cos^2(x)-2\right]$

13. $f(x) = [sin(x) + cos(x)]^2$; $f(x) = sin^2(17x) + cos^2(17x)$; $f(x) = sec(25x)\cdot cos(25x)$ [0 ; 0 ; 0]

Livello 2

14. $f(x) = sin(nx)$; $f(x) = cos(nx)$ $[n\cdot cos(nx) ;-n\cdot sin(nx)]$

15. Trovare l'errore nella seguente procedura di calcolo della derivata della funzione $sin(2x)$

$$\lim_{h\to0}\frac{sin(2x+h)-sin(2x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2\cdot sin\left(\frac{2x+h-2x}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{2x+h+2x}{2}\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{sin\left(\frac{hx}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{4x+h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}=\lim_{h\to0}\frac{sin\left(\frac{hx}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to0}cos\left(\frac{4x+h}{2}\right)=\lim_{h\to0}cos\left(\frac{4x+h}{2}\right)=cos(2x)$$

Operazioni aritmetiche elementari con le derivate

Il problema

Sappiamo derivare la funzione *sin*(x) e la funzione *ln*(x). Queste sole conoscenze ci permettono di dire che le funzioni *sin*(x) + *ln*(x), *sin*(x) – *ln*(x), *sin*(x) · *ln*(x), $\frac{sin(x)}{ln(x)}$, sono anch'esse derivabili? E se lo sono quali sono le loro derivate? Dipendono da quelle delle singole funzioni operande?

La prima idea che ci viene per risolvere il problema posto è che certamente tutte le funzioni che si ottengono mediante le quattro operazioni aritmetiche elementari siano derivabili e che le derivate si ottengono semplicemente derivando e poi applicando l'operazione. Cioè che sia per esempio D[*sin*(x) + *ln*(x)] = *cos*(x) + $\frac{1}{x}$, D[*sin*(x) – *ln*(x)] = *cos*(x) – $\frac{1}{x}$, D[*sin*(x) · *ln*(x)] = $\frac{cos(x)}{x}$, $D\left[\frac{sin(x)}{ln(x)}\right]$ = *cos*(x) · x. Chiaramente questa *intuizione* non è verità, per stabilire se ha ragione di essere, possiamo cominciare a controllarla applicandola ad esempi particolari dei quali sappiamo calcolare il risultato utilizzando altre procedure certamente corrette.

Esempio 21

- Si ha: $5x = 2x + 3x$. È vero che D($5x$) = D($3x$) + D($2x$)? Sì infatti: D($5x$) = 5 e D($3x$) + D($2x$) = 3 + 2.
- Allo stesso modo si ha: D($5x$) = D($7x$) – D($2x$), dato che D($7x$) = 7 e D($5x$) – D($2x$) = 7 – 2.
- Si ha: $x^2 = x \cdot x$. Ma stavolta D(x^2) = $2x$ mentre D(x) · D(x) = 1 · 1. Quindi la regola *intuitiva* della derivata di un prodotto non è valida.
- Analogamente non vale la *pretesa* regola per il quoziente, dato che si ha $x = \frac{x^2}{x}$, Ma D(x) = 1 mentre $\frac{D(x^2)}{D(x)} = \frac{2x}{1} = 2x$.

L'esempio precedente ci fa quindi immediatamente escludere la validità delle regole intuitive per il prodotto e per la divisione, mentre ci convince della validità del seguente risultato, che deve però ugualmente essere dimostrato.

Teorema 12

Siano $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ derivabili in un certo insieme X, e siano a_1, a_2, …, a_n, numeri reali, allora anche la funzione **combinazione lineare** $\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot f_k(x) = a_1 \cdot f_1(x) + a_2 \cdot f_2(x) + ... + a_n \cdot f_n(x)$ è derivabile in X e si ha: $D\left[\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot f_k(x)\right] = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot f_k^{'}(x)$.

Dimostrazione

Per ipotesi esistono finiti i limiti di tutti i rapporti incrementali delle singole funzioni in un generico punto x_0 di X, cioè: $\lim_{h \to 0} \frac{f_1(x_0+h) - f_1(x_0)}{h} = f_1^{'}(x); \lim_{h \to 0} \frac{f_2(x_0+h) - f_2(x_0)}{h} = f_2^{'}(x); ...; \lim_{h \to 0} \frac{f_n(x_0+h) - f_n(x_0)}{h} = f_n^{'}(x)$.

Del resto già sappiamo che D[$a \cdot f(x)$] = $a \cdot f'(x)$, quindi, dato che il denominatore è comune, immediatamente segue la tesi.

Esempio 22

- Abbiamo quindi effettivamente D[*sin*(x) + *ln*(x)] = *cos*(x) + $\frac{1}{x}$, D[*sin*(x) – *ln*(x)] = *cos*(x) – $\frac{1}{x}$.

- Abbiamo anche D[7*sin*(*x*) + 5*ln*(*x*)] = 7*cos*(*x*) + $\frac{5}{x}$, $D\left[\frac{sin(x)}{5}-4ln(x)+3e^x\right]=\frac{cos(x)}{5}-\frac{4}{x}+3e^x$.

Dobbiamo adesso cercare una regola per il calcolo della derivata di un prodotto.

Teorema 13

Siano $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ derivabili in un certo insieme *X*, allora anche la funzione **prodotto**: $\prod_{k=1}^{n} f_k(x) = f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot ...\cdot f_n(x)$ è derivabile in *X* e la sua derivata è la somma dei prodotti i cui addendi sono il prodotto della derivata di ciascuna funzione per le rimanenti, cioè

$$D\left[\prod_{k=1}^{n} f_k(x)\right] = f_1'(x)\cdot f_2(x)\cdot ...\cdot f_n(x) + f_1(x)\cdot f_2'(x)\cdot ...\cdot f_n(x) + ... + f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot ...\cdot f_n'(x)$$

Dimostrazione

Dimostriamo il caso *n* = 2, lasciando per esercizio il caso generale. Per ipotesi si ha, per un generico punto di ascissa x_0 appartenente a *X*: $\lim_{h\to 0}\frac{f_1(x_0+h)-f_1(x_0)}{h} = f_1'(x_0); \lim_{h\to 0}\frac{f_2(x_0+h)-f_2(x_0)}{h} = f_2'(x_0)$. Noi dobbiamo invece calcolare $\lim_{h\to 0}\frac{f_1(x_0+h)\cdot f_2(x_0+h)-f_1(x_0)\cdot f_2(x_0)}{h}$ (*). Cerchiamo di sfruttare le ipotesi, e per far ciò, al numeratore aggiungiamo e togliamo il fattore $f_1(x_0+h)\cdot f_2(x_0)$ o, che è lo stesso, il fattore $f_2(x_0+h)\cdot f_1(x_0)$. Ciò serve a ottenere, dal limite (*) termini simili a quelli delle ipotesi. Infatti abbiamo:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_1(x_0+h)\cdot f_2(x_0+h)-f_1(x_0+h)\cdot f_2(x_0)+f_1(x_0+h)\cdot f_2(x_0)-f_1(x_0)\cdot f_2(x_0)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f_1(x_0+h)\cdot\left[f_2(x_0+h)-f_2(x_0)\right]+f_2(x_0)\cdot\left[f_1(x_0+h)-f_1(x_0)\right]}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}f_1(x_0+h)\cdot\frac{f_2(x_0+h)-f_2(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}f_2(x_0)\cdot\frac{f_1(x_0+h)-f_1(x_0)}{h}=$$
$$=f_1(x_0)\cdot f_2'(x_0)+f_2(x_0)\cdot f_1'(x_0)$$

Che è proprio la tesi.

Spesso il risultato del teorema precedente, per il caso di due fattori viene, erroneamente, trasposto nella formula: derivata della prima funzione per la *non derivata* della seconda e così via. Il termine *funzione non derivata* è privo di significato. Abbiamo le funzioni e, se sono derivabili, le loro derivate, ma non abbiamo le *non derivate*. In genere si cercano le proprietà che verifica un certo oggetto, matematico o no e non quelle che tale oggetto non verifica. Per esempio parliamo di esseri viventi e non di esseri non morenti.

Esempio 23

- Si ha: D[*sin*(*x*) · *ln*(*x*)] = D[*sin*(*x*)] · *ln*(*x*) + *sin*(*x*) · D[*ln*(*x*)] = *cos*(*x*) · *ln*(*x*) + *sin*(*x*) · $\frac{1}{x}$.
- Abbiamo anche D(x^5) = D($x^2 \cdot x^3$) = $2x \cdot x^3 + x^2 \cdot 3x^2 = 5x^4$.
- D[*x* · *sin*(*x*) · e^x] = D(*x*) · *sin*(*x*) · e^x + *x* · D[*sin*(*x*)] · e^x + *x* · *sin*(*x*) · D(e^x) = *sin*(*x*) · e^x + *x* · *cos*(*x*) · e^x + + *x* · *sin*(*x*) · e^x.

Come applicazione immediata del Teorema precedente abbiamo la validità dei seguenti risultati.

Corollario 4

Ogni polinomio è derivabile in $\mathbb{R}$ e la sua derivata è un polinomio di grado a esso inferiore di una unità.
Dimostrazione immediata, tenendo anche conto del Corollario 1.

Esempio 24

Il polinomio di quinto grado: $2x^5 + x^4 - 3x^3 + x - 2$, è derivabile per ogni x, e la sua derivata è il polinomio di quarto grado $10x^4 + 4x^3 - 9x^2 + 1$.

Corollario 5

Se la funzione $f(x)$ è derivabile in un certo insieme X, allora anche la funzione **potenza, $[f(x)]^n$** è derivabile in X e la sua derivata è $n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$.

Dimostrazione

Nel caso in cui n è un numero naturale, basta tenere conto che, $[f(x)]^n = f(x) \cdot f(x) \cdot \ldots \cdot f(x)$, quindi applicando il Teorema 13, otterremo n addendi tutti uguali a $D[f(x)] \cdot f^{n-1}(x)$. Nel caso in cui n è un numero reale, invece, come già fatto in precedenza, non dimostriamo la tesi, ma ci limitiamo ad applicare il principio di generalizzazione.

Esempio 25

- Si ha: $D[sin^5(x)] = 5 \cdot D[sin(x)] \cdot sin^4(x) = 5 \cdot cos(x) \cdot sin^4(x)$.
- Per calcolare $D\left[\sqrt[3]{ln^4(x)}\right]$, scriviamo: $D\left[ln^{\frac{4}{3}}(x)\right] = \frac{4}{3} \cdot D[ln(x)] \cdot ln^{\frac{1}{3}}(x) = \frac{4}{3x} \cdot \sqrt[3]{ln(x)}$

Ci rimane solo da risolvere la questione del quoziente.

Teorema 14

Se la funzione $f(x)$ è derivabile in un certo insieme X, e si ha $f(x) \neq 0 \ \forall \ x \in X$, allora anche la funzione **reciproca**, $\frac{1}{f(x)}$ è derivabile in X e la sua derivata è $-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$.

Dimostrazione

Per ipotesi si ha, per un generico punto di ascissa x_0 appartenente a X: $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$. Noi dobbiamo invece calcolare $\lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{f(x_0+h)} - \frac{1}{f(x_0)}}{h}$. Effettuiamo il minimo comune denominatore: $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0+h)}{h \cdot f(x_0) \cdot f(x_0+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0+h)}{h} \cdot \frac{1}{f(x_0) \cdot f(x_0+h)}$. In questo modo il primo fattore è l'opposto dell'ipotesi e quindi basta passare al limite per ottenere la tesi.

Esempio 26

Si ha: $D\left(\frac{1}{ln(x)}\right) = -\frac{D[ln(x)]}{[ln(x)]^2} = -\frac{1}{x \cdot ln^2(x)}$.

Come applicazione immediata del Teorema precedente abbiamo la validità del seguente risultato.

Corollario 6

Se le funzioni $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono derivabili in un certo insieme X, e si ha $f_2(x) \neq 0 \ \forall \ x \in X$, allora anche la funzione **quoziente,** $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ è derivabile in X e la sua derivata è $\frac{f_1'(x) \cdot f_2(x) - f_1(x) \cdot f_2'(x)}{[f_2(x)]^2}$.

Dimostrazione

Basta applicare i risultati dei teoremi 13 e 14, dato che è $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = f_1(x) \cdot \frac{1}{f_2(x)}$. Quindi, per il teorema 13 si ha: $D\left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right] = D\left[f_1(x) \cdot \frac{1}{f_2(x)}\right] = D\left[f_1(x)\right] \cdot \frac{1}{f_2(x)} + f_1(x) \cdot D\left[\frac{1}{f_2(x)}\right] == \frac{f_1'(x)}{f_2(x)} + f_1(x) \cdot \frac{-f_2'(x)}{\left[f_2(x)\right]^2} =$
$= \frac{f_1'(x) \cdot f_2(x) - f_1(x) \cdot f_2'(x)}{\left[f_2(x)\right]^2}$.

Esempio 27

$D\left[tan(x)\right] = D\left[\frac{sin(x)}{cos(x)}\right] = \frac{D\left[sin(x)\right] \cdot cos(x) - sin(x) \cdot D\left[cos(x)\right]}{\left[cos(x)\right]^2} = \frac{cos(x) \cdot cos(x) - sin(x) \cdot (-sin(x))}{cos^2(x)} =$

$= \frac{cos^2(x) + sin^2(x)}{cos^2(x)}$. Il risultato possiamo scriverlo in uno dei tre modi equivalenti seguenti:

$$\frac{cos^2(x) + sin^2(x)}{cos^2(x)} = \prec \begin{array}{l} \frac{1}{cos^2(x)} = sec^2(x) \\ \frac{cos^2(x)}{cos^2(x)} + \frac{sin^2(x)}{cos^2(x)} = 1 + tan^2(x) \end{array}.$$

Prima di chiudere il paragrafo accenniamo al fatto, citato nelle notizie storiche che la derivata fu inventata da Newton per risolvere problemi fisici. In effetti la derivata della funzione spazio rispetto al tempo altri non è che la cosiddetta *velocità istantanea*. Analogamente possiamo dire che l'accelerazione istantanea è la derivata prima della velocità.

Esempio 28

Consideriamo la legge di un moto uniformemente accelerato $s(t) = 2t^2 - 3t + 1$, se volessimo determinare il valore della velocità nell'istante $t = 1$, basta calcolare $v(t) = s'(t) = 4t - 3$ e poi calcolarne il valore per $t = 1$, quindi $v(1) = (4 - 3) = 1$ *m/s*. Mentre l'accelerazione in questo caso è ovviamente costante ed è $a(t) = v'(t) = 4$ m/s^2.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare la derivata della funzione $\left(\sqrt[3]{x^5}-\frac{2}{x^7}\right)\cdot\left(4x^6+2\,ln(x)\right)$. Applichiamo la regola del prodotto, scrivendo prima in modo diverso l'espressione: $\left(x^{\frac{5}{3}}-2x^{-7}\right)\cdot\left(4x^6+2ln(x)\right)$. Quindi:

$$D=\left(\frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1}-2\cdot(-7)x^{-8}\right)\cdot\left(4x^6+2ln(x)\right)+\left(x^{\frac{5}{3}}-2x^{-7}\right)\cdot\left(4\cdot 6x^5+\frac{2}{x}\right)=\left(\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}+14x^{-8}\right)\cdot\left(4x^6+2ln(x)\right)+$$

$$+\left(x^{\frac{5}{3}}-2x^{-7}\right)\cdot\left(24x^5+\frac{2}{x}\right)=\frac{20}{3}x^{\frac{20}{3}}+\frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}}\cdot ln(x)+56x^{-2}+28x^{-8}\cdot ln(x)+24x^{\frac{20}{3}}+2x^{\frac{2}{3}}-48x^{-2}-4x^{-8}=$$

$$=\frac{92}{3}x^{\frac{20}{3}}+\frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}}\cdot ln(x)+8x^{-2}+28x^{-8}\cdot ln(x)+2x^{\frac{2}{3}}-4x^{-8}=\frac{92}{3}\sqrt[3]{x^{20}}+\frac{10}{3}\sqrt[3]{x^2}\cdot ln(x)+\frac{8}{x^2}+\frac{28}{x^8}\cdot ln(x)+$$

$$+2\sqrt[3]{x^2}-\frac{4}{x^8}$$

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

Livello **1**

1. $e^x\cdot(x^4-4x^3+12x^2-24x+24)$; $e^x\cdot(sin(x)-cos(x))$; $x^3\cdot(3ln(x)-1)$ [$x^4\cdot e^x$; $2\,sin(x)\cdot e^x$; $9x^2\cdot ln(x)$]

2. $2x\cdot sin(x)-x^2\cdot cos(x)+2cos(x)$; $sin(x)-x\cdot cos(x)$; $\frac{x^2}{4}\cdot\left[2ln(x)-1\right]$ [$x^2\cdot sin(x)$; $x\cdot sin(x)$; $x\cdot ln(x)$]

3. $x\cdot ln^3(x)-3\,x\cdot ln^2(x)+6x\cdot ln(x)-6x$; $x-sin(x)\cdot cos(x)$; $\frac{x^3}{9}\cdot\left[3ln(x)-1\right]$ [$ln^3(x)$; $2\cdot sin^2(x)$; $x^2\cdot ln(x)$]

4. $sin(x)\cdot(2x^5-x^3+2x^2-1)$ [$cos(x)\cdot(2x^5-x^3+2x^2-1)+sin(x)\cdot(10x^5-3x^2+4x)$]

5. $cos(x)\cdot(2x^3-x^4+x^2-3x)$ [$cos(x)\cdot(6x^2-4x^3+2x-3)-sin(x)\cdot(2x^3-x^4+x^2-3x)$]

6. $7x^3\cdot[cos(x)-2ln(x)]$ $\left[21x^2\cdot\left(cos(x)-2ln(x)\right)+7x^3\cdot\left(-sin(x)-\frac{2}{x}\right)\right]$

7. $-2x^6\cdot[4sin(x)+6ln(x)]$; $(2-x^2)\cdot cos(x)+2x\cdot sin(x)$ $\left[-12x^5\cdot\left(4sin(x)+6ln(x)\right)-2x^6\cdot\left(4cos(x)+\frac{6}{x}\right);x^2\cdot sin(x)\right]$

8. $3\cdot(x^2-2)\cdot cos(x)+(x^3-6x)\cdot sin(x)$ [$x^3\cdot cos(x)$] $5e^x\cdot\left(\frac{1}{x^{23}}+3\cdot\sqrt{x^7}\right)$ $\left[e^x\cdot\left(15\cdot\sqrt{x^7}+\frac{5}{x^{23}}+\frac{105}{2}\sqrt{x^5}-\frac{115}{x^{24}}\right)\right]$

9. $2cos(x)\cdot\left(\frac{12}{x^4}-5\cdot\sqrt[4]{3x}\right)$ $\left[cos(x)\cdot\left(\frac{96}{x^5}-\frac{15}{2\cdot\sqrt[4]{27x^3}}\right)+sin(x)\cdot\left(10\cdot\sqrt[4]{3x}-\frac{24}{x^4}\right)\right]$

10. $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\cdot\left[-cos(x)+2ln(x)\right]$ $\left[\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^4}}\cdot\left[cos(x)-2ln(x)+6\right]+\frac{sin(x)}{\sqrt[3]{x}}\right]$

11. $\left(3x+\sqrt[5]{x^3}\right)\cdot\left[sin(x)+ln(x)\right]$ $\left[\left(3x+\sqrt[5]{x^3}\right)\cdot cos(x)+\sqrt[3]{x^2}+3+\left(\frac{5}{3}\cdot\sqrt[3]{x^2}+3\right)\left(sin(x)+ln(x)\right)\right]$

12. $(x+1)\cdot[ln(x)+x^2]$; $(x^2-2x+1)\cdot(x^3-x^2+x-1)$ $\left[ln(x)+3x^2+2x+1+\frac{1}{x};5x^4-12x^3+12x^2-8x+3\right]$

13. $\left(x^3+x-1\right)\cdot\left[ln(x)+\frac{1}{x^2}\right]$; $(e^x + 1) \cdot (e^x - 4)$ $\left[ln(x)\cdot\left(3x^2+1\right)+x^2+2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3};2e^{2x}-3e^x\right]$

Livello 2

14. $x \cdot sin(x) \cdot e^x$; $x^2 \cdot ln(x) \cdot e^x$ $[e^x \cdot (x \cdot sin(x) + x \cdot cos(x) + sin(x))$; $x \cdot e^x \cdot ((x + 2) \cdot ln(x) + 1)]$

15. $x^2 \cdot cos(x) \cdot ln(x)$; $(e^x + 1)^4$ $[x \cdot (2cos(x) \cdot ln(x) - x \cdot sin(x) \cdot ln(x) + cos(x))$; $4 \cdot e^{4x} + 12 \cdot e^{3x} + 12 \cdot e^{2x} + 4 \cdot e^x]$

16. $2\cdot\sqrt[3]{x}\cdot cos(x)\cdot e^x$; $(e^x + 1) \cdot (e^x - 2) \cdot e^x$ $\left[2\cdot e^x\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\left[\frac{cos(x)}{3x}+cos(x)-sin(x)\right];3e^{3x}-2e^{2x}-2e^x\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare la derivata della funzione $cos^3(x)$. Basta considerare il risultato del corollario 5, secondo il quale $D[f^n(x)] = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$ ottenendo: $D[cos^3(x)] = 3 \cdot cos^2(x) \cdot D[cos(x)] = -3cos^2(x) \cdot sin(x)$.

Calcolare la derivata delle seguenti potenze

Livello 1

17. $sin^5(x)$; $cos^7(x)$; $ln^6(x)$; e^{4x} ; $\sqrt{cos(x)}$ $\left[5sin^4(x)cos(x);-7sin(x)cos^6(x);\frac{6ln^5(x)}{x};4e^{4x};\frac{-sin(x)}{2\cdot\sqrt{cos(x)}}\right]$

18. $ln^{\pi}(x)$ $\sqrt{4x+1}$ $\sqrt{9x+1}$ $\sqrt[3]{x^2+x-1}$ $\left[\frac{\pi\cdot ln^{\pi-1}(x)}{x};\frac{2}{\sqrt{4x+1}};\frac{9}{2\cdot\sqrt{9x+1}};\frac{2x+1}{3\cdot\sqrt[3]{\left(x^2+x-1\right)^2}}\right]$

19. $\sqrt[5]{cos^4(x)}$; $\sqrt[8]{sec^3(x)}$; $\sqrt[3]{\left(sin(x)+2\right)^4}$; $\sqrt[4]{\left[e^x+ln(x)\right]^3}$

$\left[-\frac{4\cdot sin(x)}{5\cdot\sqrt[5]{cos(x)}};\frac{3\cdot sin(x)}{8\cdot\sqrt[8]{cos^{11}(x)}};\frac{4\cdot\sqrt[3]{sin(x)+2}}{3}\cdot cos(x);\frac{3\cdot\left(x\cdot e^x+1\right)}{4\cdot\sqrt[4]{e^x+ln(x)}}\right]$

Livello 2

20. $[x \cdot sin(x)]^8$; $\left[\sqrt{x}\cdot ln(x)\right]^{12}$ $[8x^7 \cdot sin^7(x) \cdot (x \cdot cos(x) + sin(x))$; $6x^5 \cdot ln^{11}(x) \cdot (ln(x) + 2)]$

21. $\left[\sqrt{x}\cdot\cos(x)\right]^5$; $[x^{14} \cdot ln(x)]^6$ $\left[\frac{5}{2}\cdot\sqrt{x^3}\cdot cos^4(x)\cdot\left[cos(x)-2x\cdot sin(x)\right];6x^{83}\cdot ln^5(x)\cdot\left(14ln(x)+1\right)\right]$

22. $[sin(x) \cdot cos(x)]^5$; $[x^7 \cdot cos(x)]^9$ $[5sin^4(x) \cdot cos^4(x) \cdot cos(2x)$; $9x^{62} \cdot cos^8(x) \cdot (7cos(x) - x \cdot sin(x))]$

23. $\left(\sqrt[3]{x^4}\cdot e^x\right)^7$; $[sin(x) \cdot e^x]^{13}$ $\left[\frac{7}{3}\cdot\sqrt[3]{x^{25}}\cdot e^{7x}\left(3\cdot x+4\right);13sin^{12}(x)\cdot^{13x}\cdot\left(sin(x)+cos(x)\right)\right]$

24. $[cos(x) \cdot e^x]^{14} \cdot [ln(x) \cdot e^x]^4$ $\left[2e^{18x}\cdot ln^3(x)\cdot cos^{13}(x)\cdot\left[9ln(x)\cdot cos(x)-7sin(x)\cdot ln(x)+\frac{2cos(x)}{x}\right]\right]$

25. $-\frac{cos(x)}{3}\cdot\left[sin^2(x)+2\right]$; $\frac{e^{4x}\cdot\left[4sin(x)-cos(x)\right]}{17}$ $[sin^3(x)$; $e^{4x} \cdot sin(x)]$

26. $x \cdot ln^3(x) - 3x \cdot ln^2(x) + 6x \cdot ln(x) - 6x$; $-\frac{1}{3}cos(x) \cdot [sin^2(x) + 2]$ $[-3ln^2(x) + 3ln(x) + 3$; $sin^3(x)]$

27. $x \cdot ln^2(x) - 2x \cdot ln(x) + 2x$; $x \cdot ln^3(x) - 3x \cdot ln^2(x) + 6x \cdot ln(x) - 6x$ $[ln^2(x)$; $ln^3(x)]$

Lavoriamo insieme

Derivare la funzione $\frac{x+e^{3x}}{x-ln(x)}$. Basta applicare la regola per la derivata del quoziente, ottenendo:

$$\frac{D\left(x+e^{3x}\right)\cdot\left[x-ln(x)\right]-\left(x+e^{3x}\right)\cdot D\left[x-ln(x)\right]}{\left[x-ln(x)\right]^2}=\frac{\left(1+3e^{3x}\right)\cdot\left[x-ln(x)\right]-\left(x+e^{3x}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\left[x-ln(x)\right]^2}=$$

$$=\frac{\cancel{x}-ln(x)+3x\cdot e^{3x}-3e^{3x}\cdot ln(x)-\cancel{x}+1-e^{3x}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\left[x-ln(x)\right]^2}=\frac{e^{3x}\cdot\left[3x^2-3x\cdot ln(x)-x+1\right]+x-x\cdot ln(x)}{x\cdot\left[x-ln(x)\right]^2}$$

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni usando la regola di derivazione di un quoziente

Livello 1

28. $cot(x)$; $sec(x)$; $csc(x)$; $\frac{x+1}{x^2+1}$; $\frac{x^2-1}{x^2}$ $\left[-csc^2(x);tan(x)\cdot sec(x);-cot(x)\cdot csc(x);\frac{-x^2-2x+1}{\left(x^2+1\right)^2};\frac{2}{x^3}\right]$

29. $\frac{11x+3}{4x^2-1}$ $\frac{x^3}{1+x^2}$ $\frac{x+sin(x)}{x-sin(x)}$ $\frac{x+e^x}{x-e^x}$ $\left[\frac{-44x^2-24x+11}{\left(4x^2-1\right)^2};\frac{x^2\cdot\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2};\frac{2x\cdot cos(x)-sin(x)}{\left[x-sin(x)\right]^2};\frac{2\cdot e^x\cdot(x-1)}{\left(x-e^x\right)^2}\right]$

30.

31. $\frac{x+ln(x)}{x-ln(x)};\frac{2x-1}{4x^2-91};\frac{x-cos(x)}{x+sin(x)}$ $\left[\frac{2\cdot\left[1+ln(x)\right]}{\left[x-ln(x)\right]^2};\frac{2\cdot\left(-4x^2+4x-91\right)}{\left(4x^2-91\right)^2};\frac{(1-x)\cdot cos(x)+(1+x)\cdot sin(x)-1}{\left[x+sin(x)\right]^2}\right]$

32. $\frac{x^2+x-2}{x^2-x+2};\frac{e^x+x}{1+x^2};\frac{sin(x)+1}{sin(x)-1}$ $\left[\frac{2x\cdot(4-x)}{\left(x^2-x+2\right)^2};\frac{(x-1)\cdot\left[e^x\cdot(x-1)-x-1\right]}{\left(x^2+1\right)^2};-\frac{2\cdot cos(x)}{\left[sin(x)-1\right]^2}\right]$

33. $\frac{x^3+1}{x^2-2}$; $\frac{x^4-x^2}{2x^2-3}$; $\frac{sin(x)+cos(x)}{sin(x)-cos(x)}$ $\left[\frac{x\cdot\left(x^3-6x-2\right)}{\left(x^2-2\right)^2};\frac{2x\cdot\left(2x^4-6x^2+3\right)}{\left(2x^2-3\right)^2};-\frac{2}{\left[sin(x)-cos(x)\right]^2}\right]$

34. $\frac{e^x}{e^x-2}$; $\frac{1+ln(x)}{1-log_2(x)}$; $\frac{e^x+ln(x)}{e^x-log_3(x)}$ $\left[\frac{-2\cdot e^x}{\left(e^x-2\right)^2};\frac{ln(2)\cdot\left[1+ln(2)\right]}{x\cdot ln^2\left(\frac{x}{2}\right)};\frac{e^x\cdot ln(3)\cdot\left[1+ln(3)\right]\cdot\left[1-x\cdot ln(x)\right]}{x\cdot\left[e^x\cdot ln(3)-ln(x)\right]^2}\right]$

Livello 2

35. $\frac{x^2\cdot ln(x)}{ln(x)-1}$; $\frac{x\cdot ln(x)-2}{x}$; $\frac{sin(x)\cdot cos(x)}{sin^2(x)+1}$ $\left[\frac{x\cdot\left[2\cdot ln^2(x)-2\cdot ln(x)-1\right]}{\left[ln(x)-1\right]^2};\frac{x+2}{x^2};\frac{1-3\cdot sin^2(x)}{\left[sin^2(x)+1\right]^2}\right]$

36. $\frac{x\cdot e^x}{x\cdot e^x-1}$; $\frac{x^2\cdot e^x-1}{x\cdot e^x+1}$; $\frac{sin^2(x)}{cos^3(x)}$ $\left[-\frac{e^x\cdot(x+1)}{\left(x\cdot e^x-1\right)^2};\frac{e^x\cdot\left(x^2\cdot e^x+x^2+3x+1\right)}{\left(x\cdot e^x+1\right)^2};\frac{sin(x)\cdot\left[1+sin^2(x)\right]}{cos^4(x)}\right]$

37. $\frac{ax+b}{ax-b}$; $\frac{ax^2+bx+c}{ax^2-bx+c}$; $\frac{a+sin(x)}{b-cos(x)}$ $\left[\frac{-2ab}{(ax-b)^2};\frac{2b\cdot\left(c-ax^2\right)}{\left(ax^2-bx+c\right)^2};\frac{b\cdot cos(x)-a\cdot sin(x)-1}{\left[b-cos(x)\right]^2}\right]$

38. $\frac{a\cdot sin(x)+b\cdot cos(x)}{a\cdot cos(x)-b\cdot sin(x)}$; $\frac{a+e^x}{b-e^x}$; $\frac{a+b\cdot ln(x)}{b-a\cdot ln(x)}$ $\left[\frac{a^2+b^2}{\left[a\cdot cos(x)-b\cdot sin(x)\right]^2};\frac{e^x\cdot(a+b)}{\left(b-e^x\right)^2};\frac{a^2+b^2}{x\cdot\left[b-a\cdot ln(x)\right]^2}\right]$

39. $\frac{a+e^{ax}}{b+e^{bx}}$; $\frac{x\cdot ln(x)}{x+a\cdot ln(x)}$ $\left[\frac{e^{ax}\cdot\left[e^{bx}\cdot(a-b)+ab-ab\cdot e^{(b-a)\cdot x}\right]}{\left(b+e^{bx}\right)^2};\frac{a\cdot ln^2(x)+x}{\left[x+a\cdot ln(x)\right]^2}\right]$

Utilizzando le regole sulla derivazione del prodotto o del quoziente e opportune identità, calcolare le derivate delle seguenti funzioni

Livello 2

40. $sin(2x)$; $sin(3x)$; $sin(4x)$; $cos(2x)$; $cos(3x)$; $cos(4x)$
[$2cos(2x)$; $3cos(3x)$; $4cos(4x)$; $-2sin(2x)$; $-3sin(3x)$; $-4sin(4x)$]

41. $tan(2x)$; $tan(3x)$; $tan(4x)$; $ln(2x)$; $ln(3x)$; $ln(4x)$ $\left[\frac{2}{cos^2(2x)};\frac{3}{cos^2(3x)};\frac{4}{cos^2(4x)};\frac{1}{x};\frac{1}{x};\frac{1}{x}\right]$

42. Tenuto conto degli esercizi precedenti, congetturare il valore delle seguenti derivate, $n \in \mathbb{N}$.

D[$sin(nx)$] ; D[$cos(nx)$] ; D[$tan(nx)$] ; D[$ln(nx)$] $\left[n\cdot cos(nx);-n\cdot sin(nx);\frac{n}{cos^2(nx)};\frac{1}{x}\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo determinare l'equazione della tangente alla curva di equazione $f(x) = x^3 - 5x^2 + 1$, nel suo punto di ascissa 3. Già sappiamo che l'equazione richiesta è $y - f(3) = f'(3)\cdot(x-3)$. Dato che $f'(x) = 3x^2 - 10x$ e $f'(3) = 27 - 30 = -3$, la retta richiesta è $y - (27 - 45 + 1) = -3 \cdot (x - 3)$, cioè $y = -3x - 9$.

Determinare l'equazione della tangente alla seguenti curve di cui è fornita l'equazione, nel punto di ascissa indicata

Livello 1

43. $y = x^2 + 4x + 1$, $x_A = -2$; $y = 6x^3 + 4x + x$, $x_B = -2$; $y = 3x^4 - x + 1$, $x_C = -1$
[$y = -3$; $y = 77x + 96$; $y = -13x - 8$]

44. $y = sin(x)$, $x_D = 0$; $y = sin(x) + cos(x)$, $x_E = \pi$; $y = sin(x)\cdot cos(x) - 3$, $x_F = \frac{\pi}{2}$
$\left[y = x; y = -x+\pi-1; y = \frac{\pi}{2}-x\right]$

45. $y = x\cdot e^x$, $x_G = 0$; $y = x\cdot ln(x)$, $x_H = 1$; $y = x\cdot sin(x)$, $x_I = \pi$; $y = x^2\cdot sin(x)$, $x_J = \frac{\pi}{2}$
$\left[y = x; y = x-1; y = -\pi+\pi^2; y = \pi x-\frac{\pi^2}{4}\right]$

Nelle seguenti famiglie di curve, determinare gli eventuali valori del parametro reale m, per cui la tangente nel punto di ascissa x_0, risulti parallela alla retta r indicata

Livello 2

46. $y = m\cdot x^3 - 5x^2 + 13$, $x_0 = 3$, $r : x - 5y + 2 = 0$ $\left[\frac{151}{135}\right]$

47. $y = 3x^3 + m\cdot x^2 - 3$, $x_0 = 2$, $r : 7x - 2y + 1 = 0$ $\left[-\frac{65}{8}\right]$

48. $y = m + x^3\cdot sin(x)$, $x_0 = -1$, $r : 8x + 3y - 1 = 0$ [$\varnothing$]

49. $y = x^3 - m\cdot x\cdot e^x$, $x_0 = 4$, $r : 7x - 5y + 2 = 0$ $\left[\frac{233}{25e^4}\right]$

50. $y = x + m\cdot x\cdot ln(x)$, $x_0 = -1$, $r : 8x + y + 2 = 0$ [Il problema non ha senso, perché?]

51. $y = \frac{mx+1}{mx-1}$, $x_0 = 2$, $r : 4x - y + 1 = 0$; $y = \frac{x+m}{x-m}$, $x_0 = 3$, $r : 3x + 5y + 2 = 0$ $\left[\varnothing;\frac{14\pm\sqrt{115}}{3}\right]$

52. $y = \frac{x + sin(x)}{mx}$, $x_0 = 0$, $r : 2x - 3y + 2 = 0$ $\left[\frac{3cos(3) - sin(3)}{6}\right]$

53. $y = \frac{e^x + m}{e^x - m}$, $x_0 = -2$, $r : 7x + y + 2 = 0$ $\left[\frac{8 \pm \sqrt{15}}{7e^2}\right]$

Livello 3

Studiare al variare del parametro reale k, quante tangenti orizzontali hanno le seguenti curve

54. $y = x^3 + kx^2 + x - 1$; $y = x^4 + kx^2 - 1$; $y = x^4 - (k + 1) \cdot x^3 + 1$; $y = \frac{x^2 + k}{x - k}$

$$\left[\begin{cases} 0 & -\sqrt{3} < k < \sqrt{3} \\ 1 & k = \pm\sqrt{3} \\ 2 & k < -\sqrt{3} \vee k > \sqrt{3} \end{cases}; 1, \forall k \in \mathbb{R}; \begin{cases} 1 & k \neq -1 \\ 2 & k = -1 \end{cases}; \begin{cases} 0 & -1 < k < 0 \\ 1 & k = -1 \vee 0 \\ 2 & k < -1 \vee k > 0 \end{cases}\right]$$

Livello 3

16. Data la legge del moto uniformemente accelerato: $s(t) = s_0 + v_0\, t + \frac{1}{2}\, at^2$, determinare il valore della velocità. $[v\,(t) = v_0 + at]$
17. L'equazione oraria di un punto materiale è $s(t) = 4t^2 - 3t + 5$, determinare la velocità del punto dopo $4s$. $[29m/s]$
18. Con riferimento al problema precedente, dopo quanti secondi quando la velocità si annulla? [0,375]
19. L'equazione oraria della velocità di un punto materiale è $v(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t - 1$, determinare l'accelerazione del punto dopo $3s$. $[-1m/s^2]$
20. Con riferimento al problema precedente, quando l'accelerazione è negativa? [Fra 2 e 4 secondi]
21. Una particella si muove nel piano seguendo le leggi orarie $\begin{cases} x(t) = 2t^3 - 3t \\ y(t) = 4 - 3t^2 \end{cases}$, determinare il modulo della sua velocità dopo 2 s. (Si ricorda che il modulo del vettore $(a; b)$ è $\sqrt{a^2 + b^2}$) $\left[3 \cdot \sqrt{65} m/s\right]$
22. Con riferimento al precedente quesito determinare il modulo dell'accelerazione dopo $2s$. Ci sono istanti in cui l'accelerazione è nulla? Giustificare la risposta. $\left[6 \cdot \sqrt{17} m/s^2; no\right]$

Derivate delle funzioni composte e delle funzioni inverse

Il problema

Abbiamo calcolato, usando opportune identità ed artifici le derivate di alcune funzioni composte, come per esempio $sin(2x)$ o $\sqrt{e^x+1}$. Vogliamo adesso risolvere il problema per la generica funzione composta.

Cominciamo a cercare di risolvere il problema in modo intuitivo, riprendendo quelle derivate che abbiamo calcolato.

Esempio 29

Nel Corollario 5 abbiamo visto che $D[f(x)]^n = n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$; negli esercizi che $D[sin(nx)] = n \cdot cos(nx)$. Questi esempi ci fanno pensare che per derivare una funzione composta si possa utilizzare una regola di derivazione del "tipo" di funzione, cioè la derivata di un seno è un coseno, per esempio, e poi andiamo a moltiplicare per la derivata della stessa funzione.

In vista delle osservazioni precedenti enunciamo il seguente risultato.

Teorema 15

Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni derivabili in X ed esista la funzione composta $f[g(x)]$ in X, allora possiamo dire che $f[g(x)]$ è derivabile in X e che $D\{f[g(x)]\} = f'[g(x)] \cdot g'(x)$.

Dimostrazione omessa

Esempio 30

Tenuto conto del precedente risultato abbiamo: $D\left\{sin\left[ln(x)\right]\right\} = cos\left[ln(x)\right] \cdot D\left[ln(x)\right] = \dfrac{cos\left[ln(x)\right]}{x}$.

Ovviamente la regola precedente può applicarsi anche alla composizione di più di due funzioni.

Esempio 31

Vogliamo derivare la funzione $\sqrt{ln\left[cos\left(3x^2+1\right)\right]}$, prima di potere applicare la generalizzazione della regola determiniamo quante sono le funzioni componenti. Possiamo scrivere: $f\left\{g\left[h\left(m(x)\right)\right]\right\}$, in cui le funzioni componenti sono: $m(x) = 3x^2+1; h(x) = cos(x), g(x) = ln(x), f(x) = \sqrt{x}$, quindi dobbiamo avere: $D\left[f\left\{g\left[h\left(m(x)\right)\right]\right\}\right] = f'\left\{g\left[h\left(m(x)\right)\right]\right\} \cdot g'\left[h\left(m(x)\right)\right] \cdot h'\left(m(x)\right) \cdot m'(x)$, perciò:

$$D\left[\sqrt{ln\left[cos\left(3x^2+1\right)\right]}\right] = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{ln\left[cos\left(3x^2+1\right)\right]}} \cdot \frac{1}{cos\left(3x^2+1\right)} \cdot \left[-sin\left(3x^2+1\right)\right] \cdot 6x = \frac{-3x \cdot tan\left(3x^2+1\right)}{\sqrt{ln\left[cos\left(3x^2+1\right)\right]}}$$

La regola si applica anche a particolari funzioni.

Esempio 32

Vogliamo derivare la funzione $x^{sin(x)}$, non possiamo applicare la derivata delle potenze, perché l'esponente non è costante, né la regola dell'esponenziale perché la base non è costante. Quindi dobbiamo operare una trasformazione. Possiamo scrivere $a^b = e^{b \cdot ln(a)}$, quindi $x^{sin(x)} = e^{sin(x) \cdot ln(x)}$, quindi $D[x^{sin(x)}] = D[e^{sin(x) \cdot ln(x)}] =$
$= x^{sin(x)} = e^{sin(x) \cdot ln(x)} \cdot D[sin(x) \cdot ln(x)] = e^{sin(x) \cdot ln(x)} \cdot \left[cos(x) \cdot ln(x) + \dfrac{sin(x)}{x}\right] = x^{sin(x)} \cdot \left[cos(x) \cdot ln(x) + \dfrac{sin(x)}{x}\right]$

Vale quindi il seguente risultato.

Corollario 7

Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni derivabili in X e sia $f(x) > 0$ in X, allora $f(x)^{g(x)}$ è derivabile in X e si ha:

$$D\left[f(x)^{g(x)}\right] = f(x)^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \cdot ln\left[f(x)\right] + \frac{f'(x) \cdot g(x)}{f(x)}\right]$$

Dimostrazione per esercizio

Adesso vogliamo risolvere il problema della derivazione delle funzioni inverse.

Esempio 33

La funzione $f(x) = x^3$ è sicuramente invertibile perché è non decrescente, dato che si ha $f'(x) = 3x^2$, che è sempre non negativa. La sua funzione inversa è $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. Mettiamo a raffronto le due derivate:

$$D\left(x^3\right) = 3x^2; D\left(\sqrt[3]{x}\right) = D\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}.$$

Tenuto conto dell'esempio precedente, apparentemente non si vede una regola, però se scriviamo nel seguente modo: $\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3 \cdot \left[f^{-1}{}'(x)\right]^2}$, la regola si vede ed è quella di seguito enunciata.

Teorema 16

Sia $f(x)$ una funzione derivabile in X ed invertibile in $Y \subseteq X$, e sia $f'(x) \neq 0\ \forall\ x \in X$, allora anche la funzione inversa $f^{-1}(y)$ è derivabile in Y, e $\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

Dimostrazione Omessa

Facciamo molta attenzione ad applicare il precedente teorema.

Esempio 34

La funzione $f(x) = sin(x)$ è invertibile nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ e la sua funzione inversa si indica con $sin^{-1}(x)$. Possiamo allora dire che: $D\left[sin^{-1}(x)\right] = \frac{1}{D\left[sin(x)\right]} = \frac{1}{cos(x)}$? No, perché quando passiamo da una funzione alla propria inversa scambiamo anche le variabili, quindi in effetti dovremmo scrivere: $D\left[sin^{-1}(x)\right] = \frac{1}{D\left[sin(y)\right]} = \frac{1}{cos(y)}$. Ma non ha senso che la derivata di una funzione contenga una variabile diversa. Quindi dobbiamo stabilire che relazione c'è fra x e y. Si ha: $y = sin^{-1}(x) \Rightarrow x = sin(y)$. Del resto sappiamo che si ha: $sin^2(y) + cos^2(y) = 1 \Rightarrow cos(y) = \sqrt{1 - sin^2(y)} = \sqrt{1 - x^2}$. Quindi possiamo dire che si ha: $D\left[sin^{-1}(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Poiché le funzioni goniometriche inverse sono particolarmente importanti, enunciamo il seguente risultato.

Corollario 8

Le funzioni goniometriche inverse sono derivabili nel loro dominio e si ha:

$$D\left[sin^{-1}(x)\right]=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};D\left[cos^{-1}(x)\right]=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};D\left[tan^{-1}(x)\right]=\frac{1}{1+x^2};$$

$$D\left[cot^{-1}(x)\right]=-\frac{1}{1+x^2};D\left[sec^{-1}(x)\right]=\frac{1}{|x|\cdot\sqrt{x^2-1}};D\left[csc^{-1}(x)\right]=\frac{-1}{|x|\cdot\sqrt{x^2-1}};$$

Dimostrazione per esercizio

Concludiamo con un esempio.

Esempio 35

Vogliamo derivare la funzione $sin^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$. Prima dobbiamo stabilire il dominio della funzione. Dato che si ha $-1\le\sqrt{1-x^2}\le 1$, il dominio è pari a quello del radicando, cioè [–1; 1]. Possiamo derivare tenendo conto che abbiamo a che fare con una funzione composta:

$$D\left[sin^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)=\frac{1}{\sqrt{1-1+x^2}}\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{|x|}\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-segno(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Dove la funzione $segno(x)=\begin{cases}1 & se\,x>0\\ 0 & se\,x=0\\ -1 & se\,x<0\end{cases}$. Il risultato ottenuto ci permette anche di dire che $sin^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ non è derivabile per $x = 0, \pm 1$.

Può essere utile, talvolta, effettuare derivate successive, per esempio in fisica sappiamo che la derivata della funzione spazio rispetto al tempo rappresenta la velocità istantanea. E poiché la derivata della velocità rispetto al tempo rappresenta l'accelerazione istantanea, ciò significa che l'accelerazione istantanea può interpretarsi come la derivata seconda della funzione spazio rispetto al tempo.

Definizione 7

Data una funzione $y = f(x)$, derivabile in un insieme X, se anche la sua funzione derivata prima è derivabile diciamo che $f(x)$ è dotata di **derivata seconda**. In generale se una funzione è derivabile e le sue derivate sono a loro volta funzioni derivabili fino all'ordine n, diciamo che $f(x)$ è dotata di **derivata *n*–esima**.

Notazione 3

La derivata ennesima di una funzione si indica con uno dei seguenti simboli $f^n(x),\frac{df(x)}{dx^n},D^n\left[f(x)\right]$.

A volte si possono anche usare i numeri romani, per esempio può scriversi $f^{\mathrm{IV}}(x)$.

Esempio 36

Sappiamo che $D[sin(x)] = cos(x)$ e $D[cos(x)] = -sin(x)$; quindi possiamo dire che $D^2[sin(x)] = -sin(x)$. Possiamo anche continuare dicendo che $D^3[sin(x)] = -cos(x)$, $D^4[sin(x)] = sin(x)$. A questo punto siamo ritornati alla funzione di partenza, pertanto avremo un "periodo" formato da quattro soli risultati, che possiamo racchiudere nel seguente schema: $D^n\left[sin(x)\right]=\begin{cases}sin(x) & n=4k\\ cos(x) & n=4k+1\\ -sin(x) & n=4k+2\\ -cos(x) & n=4k+3\end{cases}$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo derivare $\frac{1}{2}\cdot[x^2 - ln(x^2 + 1)]$. Riconosciamo la funzione composta $ln(x^2 + 1)$, composta dalle funzioni $ln(x)$ e $x^2 + 1$. Allora: $D\left\{\frac{1}{2}\cdot\left[x^2 - ln\left(1+x^2\right)\right]\right\} = \frac{1}{2}\cdot[D(x^2) - D[ln(x^2 + 1)]] = = \frac{1}{2}\cdot\left(2x - \frac{2x}{x^2+1}\right)$ $= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\left(\frac{\cancel{2}x^3 + \cancel{2x} - \cancel{2x}}{x^2+1}\right) = \frac{x^3}{x^2+1}$.

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

Livello 1

1. $3x\cdot(2 - ln(x^3 - 2x + 1))$; $ln\left(\sqrt{x-2}\right)$; $log_4\left(x+\sqrt{x}\right)$ $\left[-3ln\left(x^3-2x+1\right)-3\cdot\frac{x^3+2x-2}{x^3-2x+1};\frac{1}{2(x-2)};\frac{2\cdot\sqrt{x}+1}{4x\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)\cdot ln(2)}\right]$
2. $x\cdot(cos^2(x^2 - 1))$; $ln\left[ln\left(\sqrt{sin(x)}\right)\right]$ $\left[cos^2\left(x^2-1\right)-2x^2\cdot sin\left(2x^2-2\right);\frac{cot(x)}{ln[sin(x)]}\right]$
3. $ln(sin(x^2))$; $\frac{sin(2x^2-2)+2x^2}{8}$; $ln(ln(x + 1))$ $\left[2x\cdot cot\left(x^2\right);\frac{x\cdot cos\left(2x^2-2\right)+x}{2};\frac{1}{(x+1)\cdot ln(x+1)}\right]$
4. e^{x^2+3x-1} ; $sin\left(cos\left(\sqrt{x}\right)\right)$; $sin(ln(x^2))$ $\left[e^{x^2+3x-1}\cdot(2x+3);\frac{-sin\left(\sqrt{x}\right)\cdot cos\left[cos\left(\sqrt{x}\right)\right]}{2\cdot\sqrt{x}};\frac{2\cdot cos\left[ln\left(x^2\right)\right]}{x}\right]$
5. $\frac{2x^3-sin(2x^3-2)}{12}$; $2^{x+ln\left(x^2\right)}$; $e^{cos(x)}$ $\left[\frac{x^2\cdot\left[1-cos\left(2x^3-2\right)\right]}{2};2^{x+ln\left(x^2\right)}\cdot\left(\frac{2}{x}+1\right)\cdot ln(2);-e^{cos(x)}\cdot sin(x)\right]$
6. $sin\left(x^3+x^2-x+1\right)$; $ln\{sin[cos(x)]\}$ $\left[cos\left(x^3+x^2-x+1\right)\cdot\left(3x^2+2x-1\right);-sin(x)\cdot cot[cos(x)]\right]$
7. $sin\{ln[cos(x)]\}$; $sin\{cos[ln(x)]\}$ $\left[-tan(x)\cdot cos\{ln[cos(x)]\};-\frac{sin[ln(x)]\cdot cos\{cos[ln(x)]\}}{x}\right]$

Livello 2

8. $(sin(3x)\cdot cos(4x))^5$ $[5sin^4(3x)\cdot cos^4(4x)\cdot(3cos(4x)\cdot cos(3x) - 4sin(3x)\cdot sin(4x))]$
9. $\left(e^{x^2}\cdot sin(x)\right)^6$; $\left[\sqrt[4]{x^3}\cdot ln\left(x^3\right)\right]^4$ $\left[6\cdot e^{6x^2}\cdot sin^5(x)\cdot\left[cos(x)+2\cdot x\cdot sin(x)\right];3x^2\cdot ln^3\left(x^3\right)\cdot\left(ln(x)+4\right)\right]$
10. $(ln(x^2)\cdot sin(x))^4$; $ln\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)$ $\left[\frac{4\cdot sin^3(x)\cdot ln^3\left(x^2\right)\left[x\cdot cos(x)\cdot ln\left(x^2\right)+2\cdot sin(x)\right]}{x};\frac{1-x}{2x\cdot(x+1)}\right]$
11. $(x^2 - 1)\cdot[x + ln(x^2 - 2x)]$; $\sqrt{\left(x\cdot e^{2x}\right)^3}$ $\left[2x\cdot ln\left(x^2-2x\right)+\frac{3x^4-4x^3-3x^2+2}{x^2-2x};\frac{3e^{3x}\cdot\sqrt{x}\cdot(2x+1)}{2}\right]$
12. $-\frac{cos(4x)}{12}\cdot\left(sin^2(4x)+2\right)$; $\frac{sin(6x)}{48}\cdot\left(2cos^2(3x)+3\right)+\frac{3}{8}x$ $[sin^3(4x)$; $cos^4(3x)]$

13. $ln\left[ln\left(\frac{3x}{5x+1}\right)\right]$; $ln\left[sin\left(\frac{x^2+3}{x+1}\right)\right]$ $\left[\frac{1}{(5x^2+x)\cdot ln\left(\frac{3x}{5x+1}\right)};\frac{(x^2+2x-3)\cdot cot\left(\frac{x^3+2}{x+1}\right)}{(x+1)^2}\right]$

14. $ln\left[tan\left(\frac{3x-1}{x^2+2}\right)\right]$; $tan\left[ln\left(\frac{x+3}{2x-5}\right)\right]$ $\left[\frac{6x^2-4x-12}{(x^2+2)^2}\cdot csc\left(\frac{6x-2}{x^2+2}\right);\frac{11\cdot tan\left[ln\left(\frac{x+3}{2x-5}\right)\right]}{(x+3)\cdot(5-2x)}\right]$

15. $\sqrt{\left[ln\left(\frac{2x^2+1}{x^2-1}\right)\right]^3}$; $sin\left(e^{\frac{x+1}{x-1}}\right)$ $\left[\frac{9x\cdot\sqrt{ln\left(\frac{2x^2+1}{x^2-1}\right)}}{(1-x^2)\cdot(2x^2+1)};\frac{-2\cdot e^{\frac{x+1}{x-1}}\cdot cos\left(e^{\frac{x+1}{x-1}}\right)}{(x-1)^2}\right]$

16. $\frac{x+e^{nx}}{x-e^{nx}}, n\in\mathbb{N}$; $sin(x^n)\cdot cos(nx), n\in\mathbb{N}$ $\left[\frac{2e^{nx}\cdot(nx-1)}{(e^{nx}-x)^2};nx^{n-1}\cdot cos(x^n)\cdot cos(nx)-n\cdot sin(x^n)\cdot sin(nx)\right]$

Lavoriamo insieme

Sia $f(x)$ continua e derivabile e sia $f(2) = 1, f'(2) = 3$; $h(x) = [f(x)]^3$. Vogliamo sapere quanto vale $h'(2)$.
Intanto osserviamo che anche $h(x)$ è continua e derivabile e inoltre si ha: $h'(x) = 3\cdot[f(x)]^2\cdot f'(x)$, quindi si avrà anche $h'(2) = 3\cdot[f(2)]^2\cdot f'(2) = 3\cdot 1^2\cdot 3 = 9$.

Livello 2

Sia f (x) derivabile per ogni x reale, che verifica le seguenti proprietà, h(x) composta mediante f(x) calcolare quanto richiesto

17. $f(0) = 1, f'(0) = 2;\ h(x)=\frac{1}{f(x)}$, $h'(0)$ = ? [–2]

18. $f(x) \ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(1) = 0, f'(1) = 1; h(x) = ln[f(x)], h'(1)$ = ? [Funzione non derivabile in $x = 1$]

19. $f(2) = \frac{\pi}{3}, f'(2) = 2; h(x) = sin[f(x)], h'(2)$ = ? [1]

20. $f(0) = 2, f'(0) = 1; h(x) = e^{f(x)}, h'(0)$ = ? [e^2]

Livello 3

21. $f(x) \ge 0, \forall x\in\mathbb{R}, f(0) = 3, f'(0) = 1, f''(0) = 2;\ h(x)=\sqrt{f(x)}$, $h''(0)$ = ? $\left[\frac{11\cdot\sqrt{3}}{36}\right]$

22. $f(1)=\frac{\pi}{4}, f'(1)=\frac{1}{2}, f''(1)=\frac{1}{4}, h(x)=cos[f(x)]$, $h''(1)$ = ? $\left[-\frac{9\cdot\sqrt{2}}{8}\right]$

23. $f(x) > 0,\ \forall x\in\mathbb{R}, f(4) = 1, f'(4) = -2;\ h(x)=sin\{ln[f(x)]\}$, $h'(4)$ = ? [–2]

24. $f(x) > 0,\ \forall x\in\mathbb{R}, f(0) = 2, f'(0) = 1; h(x) = ln[f(x)], g(x) = e^{h(x)+x}, g'(0)$ = ? [3]

25. Provare che la forza è la derivata della quantità di moto ($p = mv$) rispetto al tempo.
26. L'intensità di corrente può considerarsi come la derivata della carica elettrica al variare del tempo. Sapendo che la carica elettrica che attraversa la sezione di un conduttore è $q(t) = 1 - e^{3-t}$, determinare dopo quanti secondi nel conduttore passano 2 A. [≈ 2,3 s]

27. La legge del moto armonico semplice è $x(t) = r \cdot cos(\omega t + \phi)$. Determinare la legge della velocità e dell'accelerazione. $[x'(t) = -\omega r \cdot sin(\omega t + \phi);\ x''(t) = -\omega^2 r \cdot cos(\omega t + \phi)]$
28. Un punto si muove di moto armonico seguendo la legge oraria del moto $x(t) = 1,35 \cdot cos(5,8t)$. Determinare la velocità e l'accelerazione dopo 4 s. $[\approx 7.3\ m/s;\ \approx 16,1\ m/s^2]$
29. Con riferimento al precedente problema, per quali valori del tempo la velocità si annulla? Per quali l'accelerazione è positiva? $\left[t = \frac{5k\pi}{29}s; \frac{5\pi\cdot(4k+1)}{58}s < t < \frac{5\pi\cdot(4k+3)}{58}s, k \in \mathbb{N}_0\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare la derivata di x^x. Riscriviamo nella forma $e^{x\cdot ln(x)}$ e deriviamo, ottenendo:

$$e^{x\cdot ln(x)} \cdot \left[ln(x) + x\cdot\frac{1}{x}\right] = e^{x\cdot ln(x)} \cdot [ln(x) + 1]$$

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

Livello 1

30. $tan(x)^{ln(x+1)}$; $ln(x)^{ln(x)}$ $\left[tan(x)^{ln(x+1)}\cdot\left\{\frac{ln[tan(x)]}{x+1}+\frac{2\cdot ln(x+1)}{sin(2x)}\right\}; ln(x)^{ln(x)}\cdot\frac{ln[ln(x)]+1}{x}\right]$
31. $sin(x)^{cos(x)}$; x^{3x+1} $\left[sin(x)^{cos(x)-1}\cdot\left\{cos^2(x)-sin^2(x)\cdot ln[sin(x)]\right\}; x^{3x}\cdot(3x\cdot ln(x)+3x+1)\right]$
32. $ln(x)^{sin(x)}$ $\left[ln(x)^{sin(x)-1}\cdot\frac{x\cdot cos(x)\cdot ln(x)\cdot ln[ln(x)]+sin(x)}{x}\right]$
33. $sin(x)^{ln(x)}$ $\left[sin(x)^{ln(x)-1}\cdot\frac{sin(x)\cdot ln[sin(x)]+x\cdot cos(x)\cdot ln(x)}{x}\right]$
34. $sin(x)^x$; $ln(x)^x$ $[sin(x)^{x-1}\cdot\{sin(x)\cdot ln[sin(x)] + x\cdot cos(x)\}\ ;\ ln(x)^{x-1}\cdot\{ln(x)\cdot ln[ln(x)] + 1\}]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare la derivata di $tan^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$. Abbiamo a che fare con una funzione inversa, ma dobbiamo anche applicare le regole per la derivata delle funzioni composte. Quindi si ha:

$$D\left[tan^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\right] = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}\cdot D\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \frac{1}{\frac{(x^2+1)^2+(x^2-1)^2}{\cancel{(x^2+1)^2}}}\cdot\frac{2x\cdot(\cancel{x^2}+1)-2x\cdot(\cancel{x^2}-1)}{\cancel{(x^2+1)^2}} =$$

$$= \frac{4x}{x^4+\cancel{2x^2}+1+x^4-\cancel{2x^2}+1} = \frac{4x}{2x^4+2} = \frac{2x}{x^4+1}$$

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

Livello 2

35. $sec^{-1}(x)$; $csc^{-1}(x)$; $\frac{x^3}{3}\cdot sin^{-1}(x)+\frac{\sqrt{1-x^2}\cdot(2+x^2)}{9}$ $\left[\frac{1}{|x|\cdot\sqrt{x^2-1}}; \frac{-1}{|x|\cdot\sqrt{x^2-1}}; x^2\cdot sin^{-1}(x)\right]$
36. $\frac{(1-x^4)}{4}\cdot tan^{-1}(x)+\frac{x\cdot(3\pi x^3+2x^2-6)}{24}$; $x\cdot cot^{-1}(x)+\frac{ln(x^2+1)}{2}$ $[x^3\cdot cot^{-1}(x)\ ;\ cot^{-1}(x)]$

37. $-\frac{1}{9}\cdot\left[3\cdot\sqrt{3}\cdot tan^{-1}\left(\sqrt{3}\cdot x\right)+ln\left(3x^2+1\right)-3x^2\right]$; $x\cdot sin^{-1}(x)+\sqrt{1-x^2}$ $\left[\frac{2x^3-1}{1+3x^2};sin^{-1}(x)\right]$

38. $\frac{\left(2x^2-1\right)\cdot sin^{-1}(x)+x\cdot\sqrt{1-x^2}}{4}$; $\frac{x^3}{3}\cdot tan^{-1}(x)+\frac{ln\left(x^2+1\right)-x^2}{6}$ $[x\cdot sin^{-1}(x)\ ;\ x^2\cdot tan^{-1}(x)]$

39. $\frac{x^2+1}{2}\cdot tan^{-1}(x)-\frac{x}{2}$; $\frac{x^5}{5}\cdot cos^{-1}(x)-\frac{\sqrt{1-x^2}\cdot\left(3x^4+4x^2+8\right)}{75}$ $[x\cdot tan^{-1}(x)\ ;\ x^4\cdot cos^{-1}(x)]$

40. $sin^{-1}[sin(x)], x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; $sin^{-1}[sin(x)],\ x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ $[1\ ;-1]$

41. $sin^{-1}[cos^{-1}(x)], x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; $tan^{-1}[cot(x)],\ x\in[0,\pi]$ $\left[-1;\frac{\pi}{2}\right]$

Livello 3

42. $tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$; $tan^{-1}\left(\frac{x^2+3}{x^2-2}\right)$; $sin^{-1}\left(\frac{x^2-3}{x^2+5}\right)$ $\left[\frac{-1}{1+x^2};\frac{-10x}{2x^4+2x^2+13};\frac{4x}{\left(x^2+5\right)\cdot\sqrt{x^2+1}}\right]$

43. $tan^{-1}\left(\frac{3x^2+2}{2x^2+3}\right)$; $tan^{-1}(x)^{tan^{-1}(x)}$ $\left[\frac{10x}{13x^4+24x^2+13};tan^{-1}(x)^{tan^{-1}(x)}\cdot\frac{ln\left[tan^{-1}(x)\right]+1}{x^2+1}\right]$

44. $cos^{-1}\left(\frac{3x^2-x}{x+1}\right)$; $cot^{-1}\left(\frac{x+3}{5x^2-2}\right)$ $\left[\frac{3x^2+6x-1}{|x+1|\cdot\sqrt{-9x^4+6x^3+2x+1}};\frac{5x^2+30x+2}{25x^4-19x^2+6x+13}\right]$

45. $sin^{-1}(x)^{sin^{-1}(x)}$; $sin^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $\left[\frac{-2}{x\cdot\sqrt{x^4-1}};sin^{-1}(x)^{sin^{-1}(x)}\cdot\frac{ln\left[sin^{-1}(x)\right]+1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

Lavoriamo insieme

La funzione $f(x) = x\cdot ln^2(x) - 2x\cdot ln(x) + 3x$ è certamente invertibile, poiché la sua derivata è

$$f'(x) = ln^2(x) + x\cdot 2ln(x)\cdot\frac{1}{x} - 2\cdot ln(x) - 2x\cdot\frac{1}{x} + 3 = ln^2(x) + 2ln(x) - 2ln(x) - 2 + 3 = ln^2(x) + 1$$

che è sempre positiva nel suo insieme di definizione, quindi la funzione è crescente, perciò invertibile. Risulta molto difficile però determinare tale inversa poiché dovremmo risolvere un'equazione complicata. Siamo però in grado di trovare facilmente la derivata della funzione inversa almeno in punti particolari. Per esempio possiamo determinare $D[f^{-1}(3)]$, infatti per il teorema 16 si ha: $\frac{d}{dy}f^{-1}(y)=\frac{1}{f'(x)}$, e quindi: $D\left[f^{-1}(3)\right]=\frac{1}{f'\left[f^{-1}(3)\right]}$. Dobbiamo calcolare $f^{-1}(3)$, cioè dobbiamo risolvere $x\cdot ln^2(x)-2x\cdot ln(x)+3x=3$, che facilmente si vede avere come una delle sue soluzioni $x = 1$, e dato che abbiamo detto che la funzione è crescente è anche l'unica soluzione. Quindi abbiamo: $f'^{-1}(3)=\frac{1}{f'[1]}=\frac{1}{ln^2(1)+1}=1$. Ovviamente non sappiamo risolvere il problema per qualsiasi valore, ma solo per quelli per cui l'equazione logaritmica ha una soluzione facilmente ottenibile.

Calcolare le derivate richieste

Livello 3

46. $(f(x) = x^3 + x$; $D[f^{-1}(0)]=?$, $D[f^{-1}(2)] = ?)$; $(f(x) = x^5 + x$; $D[f^{-1}(0)] = ?$, $D[f^{-1}(-2)] = ?)$ $\left[\left(1;\frac{1}{4}\right);\left(1;\frac{1}{6}\right)\right]$

47. $f(-1) = 1, f'(-1) = 3; h(x) = tan^{-1}[f(x)], h'(-1) = ?$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

48. $(f(x) = x^5 + x^3, D[f^{-1}(2)] = ?, D[f^{-1}(0)] = ?); f(x) = x^7 + x - 2, D[f^{-1}(0)] = ?, D[f^{-1}(-2)] = ?$ $\left[\left(\frac{1}{8};\varnothing\right);\left(\frac{1}{8};1\right)\right]$

49. $(f(x) = x \cdot e^{2x}, x > 0, D[f^{-1}(e^2)] = ?)$; $\left(f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}sin^2(2x)\right.$; $D[f^{-1}(0)] = ?)$ $\left[\frac{e^{-2}}{3};\frac{2}{3}\right]$

Lavoriamo insieme

Determinare la derivata di ordine 75 della funzione $sin^2(x)$. Piuttosto che effettuare tutte le derivate, cerchiamo una eventuale legge che esse verificano. Cominciamo perciò a calcolare derivate dei primi ordini: $D[sin^2(x)]=2sin(x)cos(x)=sin(2x)$; $D^2[sin^2(x)] = D[sin(2x)] = 2cos(2x)$; $D^3[sin^2(x)] = D[2cos(2x)] = -4sin(2x)$; $D^4[sin^2(x)] = D[-4sin(2x)] = -8cos(2x)$; $D^5[sin^2(x)] = D[-8cos(2x)] = 16sin(2x)$. A questo punto non è difficile trovare una regola generale. Notiamo infatti che nei risultati alterniamo $sin(2x)$ e $cos(2x)$, inoltre alterniamo anche i segni secondo la quaterna (+, + , – , –). Infine il coefficiente in valore assoluto è una potenza di 2 di esponente uno in meno dell'ordine della derivata. Quindi possiamo enunciare la seguente regola generale: $D^n\left[sin^2(x)\right] = \begin{cases} -2^{n-1}\cdot cos(2x) & n=4k \\ 2^{n-1}\cdot sin(2x) & n=4k+1 \\ 2^{n-1}\cdot cos(2x) & n=4k+2 \\ -2^{n-1}\cdot sin(2x) & n=4k+3 \end{cases}$. Poiché 75 = 4 · 18 + 3, $D^{75}[sin^2(x)] = -2^{74}\cdot sin(2x)$. Per concludere osserviamo che la regola non vale per $n = 0$, infatti in tal caso dovrebbe aversi: $-2^{-1}\cdot cos(2x) = -\frac{1}{2}\cdot[1 - 2\cdot sin^2(x)] = sin^2(x) - \frac{1}{2}$, mentre $D^0[sin^2(x)] = sin^2(x)$.

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni, senza effettuare tutte le derivazioni (nelle risposte $D_{n,k}$ indica le disposizioni di n oggetti a gruppi di k)

Livello 1

50. $D^{14}(sin(x) + e^x)$; $D^{20}(x \cdot cos(x))$; $D^5(x \cdot ln(x))$ $\left[e^x - sin(x); x\cdot cos(x) + 20sin(x); -\frac{6}{x^4}\right]$

51. $D^8(cos^2(x))$; $D^{16}(sin(x) \cdot cos(x))$ $[256 - 128 \cdot cos^2(x) ; 2^{16}sin(x) \cdot cos(x)]$

52. $D^{10}(x^2 \cdot sin(x))$; $D^8(x \cdot e^x)$; $D^{104}(e^{4x})$ $[20x \cdot cos(x) + (90 - x^2) \cdot sin(x) ; e^x \cdot (x + 8) ; 2^{208} \cdot e^{4x}]$

53. $D^{24}(sin(3x) + cos(3x))$; $D^{32}(cos(2x))$ $[3^{24} \cdot (sin(3x) + cos(3x)) ; 2^{32} \cdot cos(2x)]$

Livello 2

54. $D^{2014}(x^{2013})$; $D^{2014}(x^{2014})$; $D^{2014}(x^{2015})$; $D^{2014}(x^{2016})$; $D^{2014}(x^{2050})$
$\left[0; 2014!; 2015!\cdot x; \frac{2016!}{2}\cdot x^2; D_{2050,2014}\cdot x^{36}\right]$

55. $D^n(cos(x))$; $D^n(cos(5x))$ $\left[\begin{cases} cos(x) & n=4k \\ -sin(x) & n=4k+1 \\ -cos(x) & n=4k+2 \\ sin(x) & n=4k+3 \end{cases}; \begin{cases} 5^n\cdot cos(5x) & n=4k \\ -5^n\cdot sin(5x) & n=4k+1 \\ -5^n\cdot cos(5x) & n=4k+2 \\ 5^n\cdot sin(5x) & n=4k+3 \end{cases}\right]$

56. $D^n(e^{3x})$; $D^n(x \cdot e^x)$; $D^n(sin(x) \cdot cos(x))$ $\left[3^n e^{3x}; e^x\cdot(x+n); \begin{cases} 2^{n-1}\cdot sin(2x) & n=4k \\ 2^{n-1}\cdot cos(2x) & n=4k+1 \\ -2^{n-1}\cdot sin(2x) & n=4k+2 \\ -2^{n-1}\cdot cos(2x) & n=4k+3 \end{cases}\right]$

57. $D^n(x^{2014})$; $D^{2014}(x^n)$ $\left[\begin{cases} D_{2014,n}\cdot x^{2014-n} & 1\le n<2014 \\ 0 & n\ge 2014\end{cases};\begin{cases} D_{2014,n}\cdot x^{2014-n} & n\ge 2014 \\ 0 & 1\le n<2014\end{cases}\right]$

58. $D^n(x\cdot cos(x))$; $D^n(x\cdot e^{2x})$ $\left[\begin{cases} x\cdot cos(x)+n\cdot sin(x) & n=4k \\ n\cdot cos(x)-x\cdot sin(x) & n=4k+1 \\ -n\cdot sin(x)-x\cdot cos(x) & n=4k+2 \\ x\cdot sin(x)-n\cdot cos(x) & n=4k+3\end{cases};2^n\cdot e^{2x}\cdot\left(x+\frac{n}{2}\right)\right]$

Livello 3

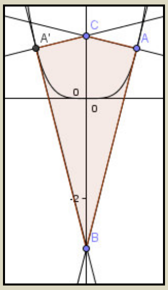
59. $D^n\ (x\cdot ln(x)),\ n>1$; $D^n(x\cdot e^x)$ $\left[\frac{(-1)^{n+1}\cdot n!}{x^{n-1}};e^x\cdot\left(x^2+2nx+n^2-n\right)\right]$

60. $D^n\ [x^2\cdot ln(x)],\ n>1$; $D^n\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ $\left[\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2\cdot(n-3)!}{x^{n-2}}\ \frac{2\cdot n!}{(1-x)^{n+1}}\right]$

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato agli HSMC del 2004.
Una particella si muove lungo l'asse delle ascisse a partire dall'origine, alla velocità di 0,5 *unità al secondo. Quando la particella si trova in* $x = a$, *costruiamo un quadrilatero prendendo le tangenti e le normali (perpendicolari alle tangenti) alla curva* $y = x^4$ *nei punti* $(a; a^4)$ e $(-a; a^4)$. *Quanto varia l'area del quadrilatero dopo un secondo*?

Rappresentiamo il quadrilatero generico.



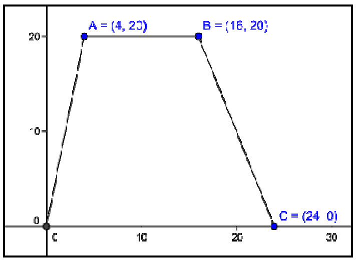
La tangente alla curva in $x = a$ ha equazione $y-a^4=\left[\frac{dx^4}{dx}\right]_{x=a}\cdot(x-a)\Rightarrow y=a^4+4a^3\cdot(x-a)$ e incontra l'asse y in $(0; -3a^4)$. La normale ha equazione $y-a^4=-\frac{1}{\left[\frac{dx^4}{dx}\right]_{x=a}}\cdot(x-a)\Rightarrow y=a^4-\frac{1}{4a^3}\cdot(x-a)$ e incontra l'asse y in $\left(0;\frac{1}{4a^2}+a^4\right)$. L'asse y divide il quadrilatero in 2 triangoli isometrici di area $\frac{1}{2}\cdot a\cdot\left(\frac{1}{4a^2}+a^4+3a^4\right)=\frac{1}{8a}+2a^5$. Quindi l'area del quadrilatero è $\frac{1}{4a}+4a^5$, la sua variazione è ovviamente la sua derivata rispetto al tempo, tenendo conto che $a = a(t)$, cioè è funzione del tempo t: $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4a}+4a^5\right)=-\frac{1}{4a^2}\frac{da}{dt}+20a^4\frac{da}{dt}$. Dopo 1 secondo si ha: $a=0,5;\frac{da}{dt}=0,5$, quindi $-\frac{1}{4a^2}\frac{da}{dt}+20a^4\frac{da}{dt}\Rightarrow-\frac{1}{4(0,5)^2}\cdot 0,5+20\cdot(0,5)^4\cdot 0,5=\frac{1}{8}$ unità quadrate al secondo.

Livello 3

61. $f(x)$ è definita in $\mathbb{R}$, derivabile fino al secondo ordine, con $f(0) = 2$, $f'(0) = -4$, $f''(0) = 3$. a) Sia

$g(x) = e^{2x} + f(x), \forall x \in R$. Determinare $g'(0)$ e $g''(0)$. b) Sia $h(x) = cos(x) \cdot f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Determinare l'equazione della tangente al grafico di $h(x)$ in $x = 0$. [a) –2; 7; b) $y = -4x + 2$]

62. In figura abbiamo rappresentato la velocità di una macchina, in *m*/*s*, per 24 secondi. Tenuto conto che l'accelerazione è la derivata della velocità al variare del tempo, scrivi una funzione per l'accelerazione.



$$\left[a(t) = \begin{cases} 5 & 0 < t < 4 \\ 0 & 4 < t < 16 \\ -2,5 & 16 < t < 24 \end{cases} \right]$$

63. La funzione $f(t) = 3 + cos\left(\frac{t}{8}\right) + 4 \cdot sin\left(\frac{6}{35}t\right)$, serve a fornire un modello matematico per la velocità di un piccolo aereo che vola in linea retta in *Km* al minuto, al variare del tempo *t*. Secondo questo modello quanto vale l'accelerazione dell'aereo per $t = 18$? [≈ – 0,782 Km/min^2]

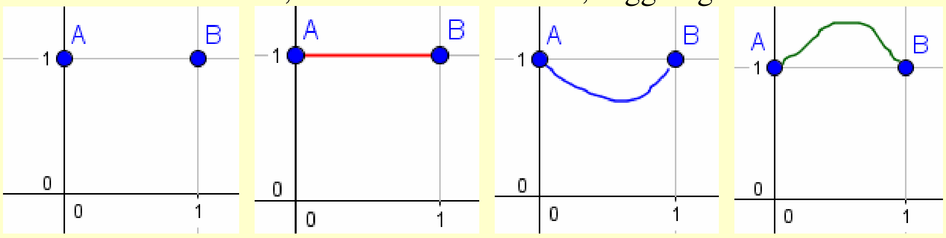
64. Una particella si muove lungo l'asse *y*, in modo che la legge $v(t) = 1 - tan^{-1}(e^t)$ descriva la sua velocità. All'inizio del suo cammino la particella si trova in $y = -1$. Determina l'accelerazione della particella dopo 2 secondi. In quell'istante la velocità aumenta o diminuisce? [≈ –0,133 m/s^2; aumenta]

Teoremi del calcolo differenziale

Cominciamo a considerare una semplice questione.

Esempio 37

Supponiamo di avere una funzione continua e derivabile nell'intervallo (0; 1) di cui sappiamo solo che $f(0) = f(1) = 1$. Cosa possiamo dire di questa funzione? Vi sono due possibilità. O tutte le ascisse comprese tra 0 e 1 hanno la stessa ordinata di A e di B, cioè la funzione è costante; oppure per andare da A a B, la funzione "almeno una volta" deve assumere ordinate superiori o inferiori a 1, cioè deve salire, raggiungere un valore massimo e poi tornare indietro verso B, o viceversa scendere, raggiungere un valore minimo e poi tornare indietro verso B.



L'esempio precedente ci suggerisce di enunciare il seguente risultato.

Teorema 17 (di Rolle)

Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a; b]$ e derivabile in $(a; b)$. Sia inoltre $f(a) = f(b)$. Allora esiste almeno un $c \in (a; b)$ tale che si abbia $f'(c) = 0$.

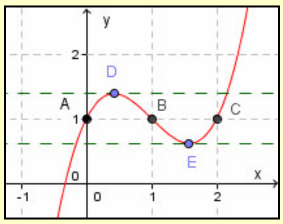
Dimostrazione

Se siamo nella prima ipotesi considerata nell'esempio, cioè in cui si ha $f(x) = k$, $\forall\ x \in (a; b)$, allora evidentemente i punti c cercati sono infiniti, dato che si ha $f'(x) = 0$, $\forall\ x \in (a; b)$. Se invece ciò non accade allora se fosse $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a; b)$ la funzione dovrebbe essere crescente in $(a; b)$ e perciò $f(a) > f(b)$, che non è vero. Analogo ragionamento se fosse $f'(x) < 0$, $\forall\ x \in (a; b)$. Quindi deve esserci almeno un punto in cui $f'(x) = 0$.

Da un punto di vista geometrico il precedente teorema implica che in almeno un punto la retta tangente alla funzione ha coefficiente angolare nullo, quindi è parallela all'asse x.

Esempio 38

La funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ verifica le ipotesi del Teorema di Rolle sia nell'intervallo (0; 1) che in (1; 2). Infatti è certamente continua e derivabile e inoltre si ha: $f(0) = f(1) = f(2) = 1$. Quindi possiamo dire con certezza che vi sono almeno due ascisse in (0; 2) per cui $f'(x) = 0$. Infatti si ha $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$. E si ha $3x^2 - 6x + 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$ ed effettivamente $0 < \dfrac{3-\sqrt{3}}{3} < 1 < \dfrac{3+\sqrt{3}}{3} < 2$.



Possiamo dire che se una funzione continua e derivabile in un intervallo $(a; b)$ ha derivata che non si annulla mai in $(a; b)$, allora non sarà mai $f(a) = f(b)$. Invece se la funzione non è continua o non è derivabile in un intervallo $(a; b)$ **non possiamo dire** che la sua derivata non si annulla mai in $(a; b)$.

Esempio 39

- La funzione $f(x) = x^2 + 2x + 1$ non verifica le ipotesi del Teorema di Rolle in $\left(-\frac{3}{2};0\right)$, perché $f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{4}\neq 1=f(0)$ eppure si ha $f'(-1) = 0$, infatti $f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow f'(-1) = -2 + 2 = 0$.
- La funzione $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x}$ non verifica le ipotesi del Teorema di Rolle in (–2; 1), perché non è continua per $x = 0$, eppure si ha $f'(x)=\frac{x^2-2}{x^2}$, che si annulla per $x=-\sqrt{2}\in(-2;1)$.

Dal precedente esempio e dal Teorema di Rolle, segue questo immediato risultato.

Corollario 9

Se $p(x)$ è un polinomio di grado almeno 2, allora se ha almeno due zeri a e b, $p'(x)$ ha almeno uno zero compreso in $(a; b)$.

Possiamo generalizzare il Teorema di Rolle.

Teorema 18 (di Lagrange o della media)

Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a; b]$ e derivabile in $(a; b)$. Allora esiste almeno un $c \in (a; b)$ tale che si abbia $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

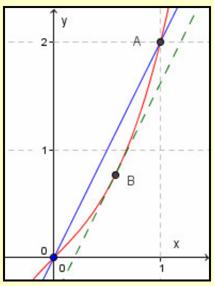
Dimostrazione

Consideriamo la funzione $g(x) = x \cdot [f(b) - f(a)] - f(x) \cdot (b - a)$, che è continua e derivabile in $(a; b)$ e inoltre si ha: $g(a) = a \cdot [f(b) - f(a)] - f(a) \cdot (b - a) = g(x) = a \cdot f(b) - b \cdot f(a)$; $g(b) = b \cdot [f(b) - f(a)] - f(b) \cdot (b - a) = = a \cdot f(b) - b \cdot f(a)$; quindi verifica le ipotesi del teorema di Rolle. Pertanto esiste almeno un $c \in (a; b)$ per cui si ha $g'(c) = 0$. Poiché $g'(x) = f(b) - f(a) - f'(x) \cdot (b - a)$, si ha $g'(c) = f(b) - f(a) - f'(c) \cdot (b - a) = 0$, da cui, ricavando $f'(c)$, abbiamo la tesi cercata.

Geometricamente il Teorema di Lagrange implica l'esistenza di un punto della funzione in cui la tangente alla detta funzione è parallela alla retta che passa per gli estremi dell'intervallo. Infatti $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è proprio il coefficiente angolare della retta passante per i punti $(a; f(a))$ $(b; f(b))$.

Esempio 40

La funzione $f(x) = x^3 + x$ verifica le ipotesi del Teorema di Lagrange in qualsiasi intervallo, per esempio in (0; 1). Deve allora aversi $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Leftrightarrow 3c^2+1=\frac{1+1-0}{1-0}\Leftrightarrow 3c^2=1\Leftrightarrow c=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Dei due valori solo quello positivo rientra in (0; 1).



Anche il Teorema di Lagrange come quello di Rolle è una condizione sufficiente ma non necessaria. Quindi

possono esserci funzioni non continue o non derivabili in un dato intervallo per le quali ugualmente si ha $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Il teorema è anche detto della media, poiché fornisce un valore medio della funzione nel dato intervallo. Infatti, come si calcola la media aritmetica di un numero finito di valori numerici? Sommando tutti i valori e dividendo per quanti sono. Questo ovviamente non può essere fatto per le funzioni, dato che i valori sono infiniti; perciò in questo caso si considera il rapporto fra la differenza delle ordinate e quella delle ascisse, che è una procedura simile a quella applicabile nel caso di insiemi numerici finiti.
Il teorema di Lagrange ha delle immediate conseguenze.

Corollario 10

Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a; b]$ e derivabile in $(a; b)$, con $f'(x) = 0$, $\forall\, x \in (a; b)$. allora $f(x)$ è costante in $(a; b)$.

Dimostrazione

Applicando il Teorema di Lagrange alla data funzione deve esistere un $c \in (a; b)$ tale che si abbia $f'(c)=0=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Rightarrow f(b)=f(a)$. Del resto il teorema possiamo applicarlo per ogni intervallo contenuto in $(a; b)$ e quindi la funzione assume in tutti punti di $(a; b)$ lo stesso valore, cioè è costante.

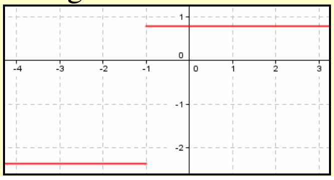
Esempio 41

La funzione $f(x) = tan(x) \cdot cot(x)$ è continua e derivabile in $\mathbb{R}\setminus\left\{k\cdot\frac{\pi}{2}\right\},k\in\mathbb{Z}$. Inoltre si ha: $f'(x)=\frac{1}{cos^{\cancel{2}}(x)}\cdot\frac{\cancel{cos(x)}}{sin(x)}-\frac{\cancel{sin(x)}}{cos(x)}\frac{1}{sin^{\cancel{2}}(x)}=0$, quindi per il corollario precedente deve essere costante in ciascuno degli intervalli $\left(k\cdot\frac{\pi}{2};k\cdot\pi\right)$. Ovviamente ciò non significa che è costante nel proprio dominio, poiché il corollario 10 ci assicura solo che è costante laddove è continua. In effetti però noi sappiamo che si ha $tan(x) \cdot cot(x) = 1$ in tutto il dominio.

Si faccia attenzione a controllare la validità di tutte le ipotesi.

Esempio 42

Agli esami di stato di liceo scientifico del 2004/05 fu assegnato il seguente testo: *Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione* $f(x)=tan^{-1}(x)-tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ *è costante, indi si calcoli il valore di tale costante*. Il quesito è errato, infatti nonostante si abbia $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\cdot\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}+1}{(x+1)^2}=\frac{1}{1+x^2}-$ $-\frac{1}{\frac{x^2+\cancel{2x}+1+x^2-\cancel{2x}+1}{\cancel{(x+1)^2}}}\cdot\frac{2}{\cancel{(x+1)^2}}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{2}{2+2x^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$ la funzione non verifica le ipotesi del Corollario 10, poiché non è continua per $x = -1$. Quindi si può applicare singolarmente in $(-\infty; -1)$ e in $(-1; +\infty)$, e dire che la funzione è costante in ciascuno dei due intervalli, ma non nella loro unione. A differenza di quanto visto nell'esempio precedente, i valori costanti potrebbero essere fra loro diversi. Come facciamo a determinare il valore di tali costanti? Basta calcolare la funzione in valori a caso dei rispettivi intervalli. Ovviamente, se non vogliamo ricorrere alle calcolatrici cerchiamo di scegliere valori per cui sappiamo calcolare la funzione. Per $x = 0$ si ha: $f\left(0\right)=tan^{-1}\left(0\right)-tan^{-1}\left(-1\right)=0-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$, questo valore è perciò assunto per ogni $x > -1$. Consideriamo adesso un valore appartenente all'altro intervallo: $f\left(-\sqrt{3}\right)=tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)-tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}-1}{-\sqrt{3}+1}\right)=-\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{12}=-\frac{9\pi}{12}=-\frac{3\pi}{4}$. Quindi effettivamente i valori costanti sono diversi e la funzione è costante a tratti. Il grafico ottenuto con Geogebra è quello seguente.



Un risultato più generale ancora è il seguente.

Corollario 11

Siano $f(x)$ e $g(x)$, continue in $[a; b]$ e derivabili in $(a; b)$, con $f'(x) = g'(x)$, $\forall\, x \in (a; b)$. allora $f(x)$ e $g(x)$ differiscono per una costante in $(a; b)$.

Dimostrazione Basta applicare il Corollario 10 alla funzione $f(x) - g(x)$.

Vediamo un esempio.

Esempio 43

Si ha: $D\left[tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right]=\frac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-\frac{x}{\cancel{2}\cdot\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(-\cancel{2}x\right)}{1-x^2}=\frac{1}{\frac{1-\cancel{x^2}+\cancel{x^2}}{\cancel{1-x^2}}}\cdot\frac{\frac{1-\cancel{x^2}+\cancel{x^2}}{\sqrt{1-x^2}}}{\cancel{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

ma questa è anche la derivata della funzione $sin^{-1}(x)$, quindi per il Corollario 11 possiamo dire che esiste un numero reale k, che adesso troveremo, per cui $tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=sin^{-1}\left(x\right)+k$. Per determinare k sostituiamo un qualsiasi valore a x, appartenente al dominio di entrambe le funzioni, per esempio $x = 0$. Abbiamo: $tan^{-1}\left(0\right)=sin^{-1}\left(0\right)+k\Rightarrow k=0$. Quindi $tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=sin^{-1}\left(x\right),\forall x\in\left(-1,1\right)$.

Generalizziamo anche il Teorema di Lagrange.

Teorema 19 (di Cauchy o della media)

Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni continue in $[a; b]$ e derivabili in $(a; b)$, tali che si abbia $g(a) \neq g(b)$, inoltre $f'(x)$ e $g'(x)$ non si annullano per lo stesso valore. Allora esiste almeno un $c \in (a; b)$ per cui $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Dimostrazione

Consideriamo la funzione $h\left(x\right)=f\left(b\right)-f\left(x\right)-\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{g\left(b\right)-g\left(a\right)}\cdot\left[g\left(b\right)-g\left(x\right)\right]$, che verifica le ipotesi del Teorema di Rolle, dato che $h\left(a\right)=f\left(b\right)-f\left(a\right)-\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{\cancel{g\left(b\right)-g\left(a\right)}}\cdot\left[\cancel{g\left(b\right)-g\left(a\right)}\right]=0$; e $h(b) = f(b) - f(b) - \frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{g\left(b\right)-g\left(a\right)}\cdot\left[g\left(b\right)-g\left(a\right)\right]=0$. Quindi possiamo dire che esiste $c \in (a; b)$: $h'(c) = 0 \Rightarrow -f'(c) +$

$$+\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)=0 \Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Consideriamo un esempio.

Esempio 44

- Le funzioni $f(x) = x^2 + x$ e $g(x) = x$, verificano le ipotesi del Teorema di Cauchy nell'intervallo (–1; 1). Infatti entrambe le funzioni sono continue e derivabili addirittura in tutto $\mathbb{R}$; inoltre $g(-1) \neq g(1)$ e infine $f'(x) = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$, mentre $g'(x) = 1$. Possiamo allora dire che esiste $c \in (-1, 1)$ per cui si ha: $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)} \Rightarrow \frac{2c+1}{1}=\frac{2-0}{1-(-1)} \Rightarrow c=-\frac{1}{2}\in(-1;1)$.
- Il teorema non può applicarsi alle funzioni $f(x) = x^2 + x$ e $g(x) = cos(x)$ in (–1, 1), perché $cos(-1) = cos(1)$.
- Né a $f(x) = x^2$ e $g(x) = sin(x)$ in (–1, 1), perché $f'(x) = 2x$ e $g'(x) = -sin(x)$ e $f'(0) = g'(0) = 0$.

In questo caso la media determinata dal Teorema di Cauchy è quella delle due funzioni.

Possiamo stabilire anche per le derivate un teorema simile a quello sull'esistenza dei valori intermedi.

Teorema 20 (di Darboux)

Sia $f(x)$ una funzione derivabile in $[a; b]$ tale che $f'(a) = \alpha$, $f'(b) = \beta$. Allora per ogni γ: $\alpha < \gamma < \beta$ esiste almeno un $c \in (a; b)$ tale che si abbia $f'(c) = \gamma$.

Dimostrazione

Scelto un γ: $\alpha < \gamma < \beta$, consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - \gamma \cdot (x - a)$. Questa funzione è derivabile in $[a; b]$ e si ha: $g'(a) = f'(a) - \gamma = \alpha - \gamma < 0$ e $g'(b) = f'(b) - \gamma = \beta - \gamma > 0$. Quindi, per il teorema di esistenza degli zeri deve esistere $c \in (a; b)$ tale che si abbia $g'(c) = 0$, cioè $f'(c) - \gamma = 0$, ossia la tesi.

Esempio 45

La funzione $f(x) = x^3 + x + 1$ verifica le ipotesi del Teorema di Darboux nell'intervallo (0; 1), quindi, poiché $f'(x) = 3x^2 + 1$, si ha $f'(0) = 0$ e $f'(1) = 3 + 1 = 4$, possiamo dire che l'equazione $f'(x) = m$, ha soluzioni reali per ogni $0 \leq x \leq 1$ e ogni $0 \leq m \leq 4$.

Adesso vogliamo considerare un importante risultato che permette di calcolare i limiti di alcune forme indeterminate.

Teorema 21 (di de L'Hôpital – Bernoulli)

Siano $f(x)$ e $g(x)$ continue e derivabili in X, con $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in X$. Sia $\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c} g(x)=0 \vee \lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c} g(x)=\infty$, $c \in X \cup \{-\infty; \infty\}$. Allora se esiste $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, si ha: $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$.

Dimostrazione omessa

Noi abbiamo enunciato un solo Teorema di de L'Hôpital – Bernoulli, racchiudendo in esso i diversi casi possibili. In pratica questo teorema permette, quando applicabile, il calcolo di limiti di forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$.

Esempio 46

- Sappiamo calcolare facilmente $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{3x^2+1}$ con il principio di sostituzione degli infiniti. Vogliamo invece calcolarlo con il Teorema di de L'Hôpital – Bernoulli. Verifichiamo le ipotesi. Entrambe le funzioni sono continue e derivabili per ogni x, dobbiamo quindi solo vedere se esiste il limite del rapporto delle derivate (*non della derivata del rapporto*). Abbiamo $\lim_{x\to\infty}\frac{D\left[x^2-3x+2\right]}{D\left[3x^2+1\right]}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{6x}$, che è ancora una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, alla quale possiamo applicare nuovamente il teorema. Abbiamo perciò $\lim_{x\to\infty}\frac{D[2x-3]}{D[6x]}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. Possiamo quindi concludere che $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{3x^2+1}=\frac{1}{3}$.
- Possiamo calcolare $\lim_{x\to 1}\frac{sin(x)}{x}$ con il teorema di de L'Hôpital – Bernoulli? No, perché non abbiamo a che fare con una forma indeterminata. Semplicemente abbiamo $\lim_{x\to 1}\frac{sin(x)}{x}=sin(1)$. Cosa accade se invece applichiamo il teorema? $\lim_{x\to 1}\frac{D\left[sin(x)\right]}{D[x]}=\lim_{x\to 1}\frac{cos(x)}{1}=cos(1)$. Un risultato ovviamente sbagliato.

Abbiamo appena visto che il teorema di de L'Hôpital – Bernoulli, come ogni teorema, può applicarsi, fornendo risultati corretti, solo se sono verificate tutte le ipotesi.

Esempio 47

Non possiamo applicare il teorema di de L'Hôpital – Bernoulli per calcolare $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, anche se abbiamo una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ e se numeratore e denominatore sono entrambe continue e derivabili per ogni x. Infatti il limite del rapporto delle derivate è $\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, che è ancora una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, e se riapplichiamo il teorema otteniamo di nuovo $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, cioè il limite di partenza. Entriamo quindi in un circolo vizioso. Usando il principio di sostituzione degli infiniti avremmo facilmente calcolato: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$.

Il Teorema di de L'Hôpital – Bernoulli si applica solo a forme indeterminate $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, se abbiamo quindi altre forme indeterminate prima di applicare il teorema dobbiamo cercare di ricondurle a una di queste.

Esempio 48

- Per calcolare $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-csc(x)\right)$ non possiamo applicare il teorema di de L'Hôpital – Bernoulli perché abbiamo a che fare con una forma indeterminata $+\infty-\infty$. Però possiamo scrivere:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-csc(x)\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{sin(x)}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{sin(x)-x}{x\cdot sin(x)}$$

In questo modo il limite adesso è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$, alla quale si può applicare il teorema: $\lim_{x\to 0^+}\frac{D[x-sin(x)]}{D[x\cdot sin(x)]}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-cos(x)}{sin(x)+x\cdot cos(x)}$, che è ancora una forma indeterminata $\frac{0}{0}$, a cui possiamo applicare ancora il teorema: $\lim_{x\to 0^+}\frac{D[1-cos(x)]}{D[sin(x)+x\cdot cos(x)]}=\lim_{x\to 0^+}\frac{sin(x)}{cos(x)+cos(x)-x\cdot sin(x)}=0$, che è il limite cercato.

- $\lim_{x\to 0^+}[x\cdot cot(x)]$ è una forma indeterminata $0\cdot\infty$, che possiamo scrivere: $\lim_{x\to 0^+}[x\cdot cot(x)]=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{tan(x)}$ in questo modo è diventata una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Adesso possiamo applicare il teorema: $\lim_{x\to 0^+}\frac{D(x)}{D[tan(x)]}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+tan^2(x)}=1$.

Quanto visto nell'esempio precedente può essere proposto in forma generale.

Teorema 22

Valgono le seguenti identità $f-g=\dfrac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{f\cdot g}}$; $f\cdot g=\dfrac{f}{\frac{1}{g}}=\dfrac{g}{\frac{1}{f}}$, purché le espressioni abbiano significato.

Dimostrazione per esercizio

Concludiamo l'unità considerando un risultato che ci permette di capire come sia possibile che una calcolatrice o un software, che sanno solo effettuare somme, riescano a calcolare valori ottimamente approssimati di funzioni trascendenti come gli esponenziali, i logaritmi e così via. Basterebbe riuscire a ricondurre ogni funzione a un polinomio, che appunto contiene solo somme e prodotti. E in effetti vale il seguente fondamentale risultato.

Teorema 23 (Formula di Taylor)

Sia $f(x)$ continua e derivabile fino all'ordine n in $(a; b)$, sia $c \in (a; b)$ ed esista $f^n(c)$, allora si ha:

$$f(x)=f(c)+f'(c)\cdot(x-c)+f''(c)\cdot\frac{(x-c)^2}{2!}+\ldots+f^{n-1}(c)\cdot\frac{(x-c)^{n-1}}{(n-1)!}+\left[f^n(c)+h(x)\right]\cdot\frac{(x-c)^n}{n!},$$ con $h(x)$ infinitesimo dello stesso ordine di x^n.

Grazie al precedente risultato le calcolatrici riescono a ricondurre ogni operazione matematica solo a somme e prodotti (ma i prodotti sono particolari somme), calcolando in pochissimo tempo complicate espressioni.
Vi è da dire che la scelta del punto c riesce spesso a semplificare i calcoli, e non è difficile capire che $c = 0$ è spesso la migliore scelta.

Definizione 8

Data una funzione $y = f(x)$, alla quale può applicarsi il Teorema 23, allora il polinomio presente nella tesi del teorema si chiama **polinomio di Taylor della funzione**. Se $c = 0$, il detto polinomio si chiama **polinomio di Mac Laurin della funzione**.

Esempio 49

La funzione $f(x) = e^x$ è esprimibile mediante un polinomio di Taylor, o meglio di Mac Laurin? Sì poiché la funzione è dotata di derivate di qualsiasi ordine. Quindi possiamo scrivere

$$e^x = e^0 + e^0 \cdot x + e^0 \cdot \frac{x^2}{2} + e^0 \cdot \frac{x^3}{3!} + \ldots + e^0 \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \left[e^0 + h(x)\right] \cdot \frac{x^n}{n!} =$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \left[1 + h(x)\right] \cdot \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + h(x) \cdot \frac{x^n}{n!}.$$

Come possiamo quindi calcolare un valore approssimato del numero e? Usando il suo polinomio di Mac Laurin, ovviamente più termini sommiamo e migliore è il risultato ottenuto.

Esempio 50

Abbiamo $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}$, costruiamo una tabella, con Derive o con altro software o calcolatrice, dello sviluppo di e con diversi valori di n.

```
                        n    1
#1:   maclaurin(n) := 2 + Σ  ──
                       k=2  k!

#2:   VECTOR(maclaurin(n), n, 2, 10)

#3:   [2.5, 2.666666666, 2.708333333, 2.716666666, 2.718055555, 2.718253968, 2.718278769, 2.718281525, 2.718281801]
```

Osserviamo che man mano che calcoliamo più addendi i valori si "assomigliano" sempre di più, le cifre decimali tendono così a stabilizzarsi. Possiamo perciò dire per esempio che un'approssimazione di e con 5 cifre decimali esatte è 2,71828.

Di seguito forniamo gli sviluppi di Mac Laurin di alcune funzioni.

Teorema 24

Valgono i seguenti sviluppi di Mac Laurin:

$$sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!};$$

$$cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!};$$

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k;$$

$$(1+x)^h \approx 1 + k \cdot x + \binom{k}{2} \cdot x^2 + \binom{k}{3} \cdot x^2 + \ldots + \binom{k}{n} \cdot x^n;$$

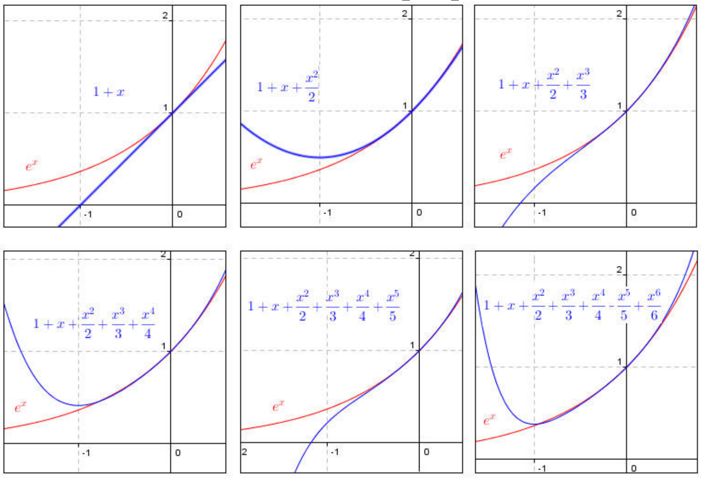
$$tan^{-1}(x) \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^{2k-1}}{2k-1};$$

$$ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k},\ con\ |x| < 1;$$

Dimostrazione per esercizio

Possiamo notare che $sin(x)$ contiene solo potenze a esponente dispari, il che giustifica il fatto che è una funzione dispari e analogamente, $cos(x)$ contiene solo potenze pari. Quindi in effetti le funzioni pari (dispari) sono *solo quelle che contengono potenze pari (dispari) di* x, anche se, come nel caso di seno e coseno queste potenze sono *nascoste*.

Il risultato precedente, da un punto di vista grafico, come mostrato di seguito per e^x, implica che per ogni successiva approssimazione si ottiene una curva che è sempre più simile alla funzione da sviluppare.



Possiamo usare lo sviluppo di Taylor anche per il calcolo dei limiti.

Esempio 51

Vogliamo calcolare il limite notevole $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}$, sviluppando $sin(x)$ con il polinomio di Mac Laurin possiamo scrivere: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots}{x}$, ma ovviamente fra tutti gli infiniti addendi x è l'infinitesimo di ordine superiore, pertanto possiamo scrivere semplicemente: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$, che è ciò che già sapevamo.

Concludiamo il capitolo considerando un ultimo problema. Dato un polinomio, vogliamo stabilire delle relazioni fra i suoi zeri e le sue derivate.

Esempio 52

- Sia $p(x) = x \cdot (x + 1) \cdot (x - 3)$, che ha ovviamente i 3 zeri: 0, – 1, + 3. Cosa possiamo dire della sua derivata prima? $p'(x) = (x + 1) \cdot (x - 3) + x \cdot (x - 3) - x \cdot (x + 1)$. Ovviamente non si annulla per alcuno dei tre zeri di $p(x)$, dato che annulla due dei tre addendi ma non il terzo.
- Sia adesso $p(x) = x \cdot (x - 1)^3$, che ha ovviamente i 2 zeri: 0, + 1 (con molteplicità 3). $p'(x) = (x - 1)^3 + 3x \cdot (x - 1)^2 = (x - 1)^2 \cdot (x - 1 + 3x) = (x - 1)^2 \cdot (4x - 1)$. Stavolta la derivata prima si annulla nello zero triplo di $p(x)$, anzi si annulla 2 volte in questo valore. Il che significa che anche la derivata seconda si annullerà per $x = 1$. Infatti $p''(x) = 2 \cdot (x - 1) \cdot (4x - 1) + 4 \cdot (x - 1)^2 = (x - 1) \cdot (8x - 2 + 4) = (x - 1) \cdot (7x + 2)$. Invece non si annulla la derivata terza: $P'''(x) = -(7x + 2) + 7 \cdot (x - 1)$.

I risultati dell'esempio precedente ci convincono della validità del seguente risultato.

Teorema 25

Sia $p(x)$ un polinomio di grado n e si abbia $p(a) = p'(a) = p''(a) = \ldots = p^{k-1}(a) = 0$ e $p^k(a) \neq 0$, $k \leq n$. Allora a è uno zero di $p(x)$ di molteplicità esattamente k e viceversa.
Dimostrazione Per esercizio

Esempio 53

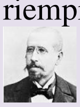
Di un polinomio $p(x)$ sappiamo che $p(1) = p'(1) = p''(1) = 0$. possiamo dire che $p(x) = (x - 1)^3 \cdot q(x)$, dove $q(x)$ è un polinomio.

I Protagonisti

 **Michel Rolle** nacque il 21 Aprile 1652 ad Ambert in Basse–Auvergne. Non fu mai un matematico di prim a grandezza e il suo risultato più noto è appunto il Teorema che porta il suo nome, pubblicato nel 1691 in un libriccino dalla scarsa diffusione scientifica, intitolato *Démonstration d'une Méthode pour résoudre les Egalitez de tous les degrez*. Il teorema fu associato al suo nome dall'italiano Giusto Bellavitis nel 1846. Del resto egli stesso aveva scarsa fiducia nel nascente calcolo infinitesimale, che definì *una raccolta di fallaci ingenuità*. Per lo più si interessò di problemi di teoria dei numeri. Morì l'8 Novembre 1719 a Parigi.

 **Giuseppe Ludovico Lagrange** nacque a Torino il 25 Gennaio 1736, quindi è da considerarsi a tutti gli effetti un matematico italiano, anche se erano appena sedici anni che Torino era diventata capitale del Regno di Sardegna e che negli ultimi 26 anni della sua vita visse in Francia. Studiò a Torino senza amare molto la matematica, ma predisponendosi a una carriera giuridica. Cominciò a studiare matematica da autodidatta, e già nel 1754 ottenne interessanti risultati, considerati i primi del cosiddetto Calcolo delle Variazioni. Anche per questo, ad appena 19 anni fu nominato professore di matematica presso la Scuola di Artiglieria Reale di Torino. Su proposta di Eulero fu eletto all'Accademia di Berlino il 2 Settembre 1756, dove nel 1766 fu incaricato di dirigere il settore matematico. Vi rimase per 20 anni, interessandosi di astronomia, fluidomeccanica, probabilità, teoria dei numeri ed analisi matematica, ottenendo in ogni settore risultati fondamentali. Nel 1787 lasciò Berlino per Parigi, nel 1788 fu pubblicato il suo importantissimo lavoro *Mécanique analytique*. Nel 1790 fu nominato membro dell'Académie des Sciences per standardizzare i pesi e le misure. Nel 1793, nei cosiddetti anni del Terrore, fu approvata una legge per imprigionare tutti gli stranieri nati in nazioni nemiche della Francia (il Piemonte lo era) e la confisca dei loro beni. Grazie all'interesse del grande chimico Lavoisier, si fece un'eccezione per Lagrange. Paradossalmente l'8 Maggio 1794, il tribunale rivoluzionario condannò a morte Lavoisier, ma lasciò indenne Lagrange, che al proposito disse: *è bastato un attimo per far cadere quella testa* (di Lavoisier), *ma ne bisogneranno un centinaio per produrne una simile.* Nel 1797 pubblicò il primo testo sulla teoria delle funzioni di una variabile reale: *Théorie des fonctions analytiques*. Napoleone gli conferì la Legion d'Onore e lo nominò Conte dell'Impero nel 1808. Morì il 10 Aprile 1813 a Parigi.

 **Augustin Louis Cauchy** nacque il 21 Agosto 1789 a Parigi. Frequentò famose scuole in cui si distinse per le sue capacità nelle discipline scientifiche. Nel 1807 fu ammesso alla scuola ingegneristica École des Ponts et Chaussées dove si laureò. Nel 1810 gli fu assegnato il primo incarico: rafforzare le difese del porto di Cherbourg per contrastare un'eventuale invasione inglese. Nonostante questo impegno continuò a studiare matematica teorica, in particolare i poliedri. Nel 1814 pubblicò una memoria che è considerata la base della teoria delle funzioni complesse. Nel 1821 scrisse *Cours d'analyse*, che divenne libro di testo per gli studenti dell'École Polytechnique. A causa delle lotte del 1830 lasciò Parigi e andò prima in Svizzera e poi a Torino, dove insegnò fisica teorica. Nel 1833 si spostò a Praga come precettore del nipote di Carlo X. Ritornò a Parigi nel 1838, dove per ragioni politiche e religiose non riuscì ad insegnare in Accademie o Università. In effetti ebbe sempre rapporti tormentati con le Istituzioni, ma la sua posizione nella Matematica è di primo piano. Scrisse 789 articoli quasi tutti di primo livello, le sue opere complete riempiono 27 volumi. Morì il 23 Maggio 1857 a Sceaux vicino Parigi.

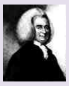
 **Jean Gaston Darboux** nacque il 14 Agosto 1842 a Nimes. Sin da studente mostrò le sue attitudini matematiche, pubblicando un primo lavoro sulle superfici ortogonali. Dopo il dottorato conseguito nel 1866, cominciò a insegnare nei licei e dal 1873 alla Sorbonne. Fra il 1887 e il 1896 scrisse un'importante opera in quattro volumi sulla geometria infinitesimale: *Leçons sur la théorie général des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal.* Morì il 23 Febbraio 1917 a Parigi.

 **Guillaume François Antoine, Marchese de L'Hôpital** nacque a Parigi nel 1661, dove morì nel 1704. Essendo un nobile ricco per passare il tempo, dalla fine del 1691 al Luglio del 1692 assunse il grande matematico Johann Bernoulli, facendogli sottoscrivere un bizzarro contratto, in cui quest'ultimo era obbligato a comunicargli qualsiasi risultato avesse scoperto nel periodo. Del risultato il marchese poteva disporre a proprio piacere. Vi è da precisare che de L'Hôpital non era del tutto digiuno di matematica. Ma fu

soprattutto grazie alle lezioni e ai risultati di Bernoulli che poté pubblicare, nel 1696, il libro *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, che fu il primo libro di testo sul calcolo differenziale. In tale libro è presente il teorema che porta il suo nome e che, nonostante fosse stato scoperto da Bernoulli, viene presentato come una sua opera.


Johann Bernoulli nacque a Basilea il 27 Luglio 1667. La sua famiglia è probabilmente quella più "prolifica" nell'ambito scientifico. Decine di suoi familiari raggiunsero brillanti risultati nella varie branche matematico–scientifiche. In particolare suo fratello Jacob, di dodici anni maggiore, con il quale, nonostante egli fosse iscritto a Medicina, studiò matematica all'Università di Basilea. Solo nel 1922 si stabilì che il libro pubblicato dal marchese de L'Hôpital era per gran parte opera sua. Durante la sua vita fu spesso in competizione con il fratello Jacob. Parecchi importanti risultati in matematica e fisica gli sono dovuti. Morì a Basilea il 01 Gennaio 1748.


Brook Taylor nacque il 18 Agosto 1685 a Edmonton in Inghilterra. Si laureò in matematica nel 1709. Nel 1712 fu eletto alla Royal Society. Nel 1715 pubblicò un importante testo di analisi: *Methodus incrementorum directa et inversa*, in cui, fra le altre cose, comparve la serie associata al suo nome, anche se James Gregory, prima di lui aveva scoperto la validità della seguente uguaglianza: $tan^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{2n-1}$. Solo nel 1772 Lagrange proclamò che questo era il principio base del calcolo differenziale. Il termine serie di Taylor fu usato per la prima volta da Lhuilier nel 1786. Morì il 29 Dicembre 1731 a Somerset House nei pressi di Londra.


Colin Maclaurin nacque nel 1698 a Kilmodan in Scozia. Ad appena 11 anni fu ammesso all'Università di Glasgow, in quei tempi, in Scozia, anche le Università educavano studenti così giovani non per forza geniali. Comunque egli mostrò ben presto le sue attitudini matematiche ed a 14 anni conseguì la laurea. Rimase nell'Università a studiare religione, con l'intenzione di entrare nella chiesa presbiteriana. Ma nel 1717 fu nominato professore di matematica al Marischal College dell'Università di Aberdeen. Passò poi all'Università di Edimburgo nel 1725. Si occupò di parecchie cose, molto importante è il suo trattato del 1742 in 2 volumi: *Treatise of fluxions*, in cui presentò le idee di Newton sul calcolo differenziale. In tale testo è presente lo sviluppo in serie che porta il suo nome. Morì il 14 Giugno 1746 a Edimburgo

Verifiche

Lavoriamo insieme

Possiamo applicare il teorema di Rolle alla funzione $y = x^2 - \sqrt{-3x^2+1}, x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$? La funzione è continua se $-3x^2+1 \ge 0 \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{3}}$, e derivabile se $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$, poiché $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, le prime due ipotesi sono verificate. La funzione è pari, perciò assume lo stesso valore per ascisse opposte, quindi è verificata anche la terza ipotesi. Determiniamo allora i valori in cui la derivata prima si annulla. $y' = 2x - \frac{-\cancel{6}^3 x}{\cancel{2}\sqrt{-3x^2+1}} = \frac{2x \cdot \sqrt{-3x^2+1} + 3x}{\sqrt{-3x^2+1}} \Rightarrow 2x \cdot \sqrt{-3x^2+1} + 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee 2 \cdot \sqrt{-3x^2+1} + 3 = 0$, la seconda equazione non ha soluzioni reali. Quindi l'ascissa cercata è $x = 0$.

Verificare la validità del teorema di Rolle per le seguenti funzioni, nell'intervallo a lato indicato, determinando i valori in cui la derivata prima si annulla

Livello **1**

1. $y = 1 + \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$, $x \in [-3; 1]$; $y = 4 - \sqrt{-x^2 + 5x + 6}$, $x \in [2; 3]$ $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$
2. $y = 5 + \sqrt{-x^2 + 7x - 10}$, $x \in [2; 5]$; $y = -5 + \sqrt{-x^2 - 2x + 8}$, $x \in [-4; 2]$ $\left[\frac{7}{2}; -1\right]$
3. $y = \sqrt{3x^2 - 15x + 21}$, $x \in [1; 4]$; $y = \sqrt{-x^2 + x + 1}$, $x \in [0; 1]$ $\left[\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right]$
4. $y = x + \sqrt{-x^2 - x + 2}$, $x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$; $y = \frac{x^2+4}{x^2+1}, x \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$ $\left[\frac{3 \cdot \sqrt{2} - 2}{4}; 0\right]$
5. $y = sin(x) + cos(x)$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; $y = sin(x) - cos(x)$, $x \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$

Livello **2**

6. Se una funzione è pari, continua in $[-a, a]$ e derivabile in $(-a, a)$, il teorema di Rolle può sempre applicarsi. Questa affermazione è corretta? Giustificare la risposta. [Sì]
7. Se una funzione è dispari, continua in $[-a, a]$ e derivabile in $(-a, a)$, il teorema di Rolle non può mai applicarsi. Questa affermazione è corretta? Giustificare la risposta. [Sì]

Trovare i valori dei parametri reali, se esistono, per i quali possa applicarsi il teorema di Rolle, alle seguenti funzioni negli intervalli indicati; quindi determinare i punti in cui si annulla la derivata

8. $f(x) = ax^3 + x^2$, $x \in [0; 1]$; $f(x) = x^2 + 1$, $x \in [0; a]$ $\left[\left(a = 1, c = \frac{2}{3}\right); \varnothing\right]$
9. $f(x) = ax^2 + x + 1$, $x \in [0; 1]$; $f(x) = e^{ax}$, $x \in [0; 1]$ $\left[\left(a = -1, c = \frac{1}{2}\right); \varnothing\right]$
10. $f(x) = x^3 + ax^2 - x + 1$, $x \in [0; 1]$; $f(x) = x^4 + x^2 + a$, $x \in [-1; 1]$ $\left[\left(a = 0, c = \frac{\sqrt{3}}{3}\right); \left(\forall a \in \mathbb{R}, c = 0\right)\right]$

Stabilire per quali motivi alle seguenti funzioni non può applicarsi il teorema di Rolle, quindi stabilire se, ciononostante, esiste c interno all'intervallo indicato in cui f ′(c)= 0. Nelle risposte N.C. = non continua; N.D. = non derivabile

Livello **2**

11. $y = x + \sqrt{x^2 - x}, x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$; $y = \sqrt{x^2 - x}, x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ $\left[(\text{N.C.}, \varnothing); \left(\text{N.C.}, c = \frac{1}{2}\right)\right]$

12. $y = |x|, x \in [-1; 1]$; $y = sin(x), x \in [-2; 2]$ $\left[(\text{N.D. in } x = 0, \text{no } c) ; \left(y(-2) \neq y(2), c = \frac{\pi}{2}\right)\right]$

13. $y = x \cdot |x|, x \in [-1; 1]$; $y = \sqrt[3]{x^2}, x \in [-1;1]$ $[(y(-1) \neq y(1), c = 0) ; (\text{N.D. in } x = 0; \text{non esiste } c)]$

14. $y = cot(x), x \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$; $y = ln(x), x \in [0; 1]$ $[(\text{N.C. in } x = \pi; \text{no } c) ; (\text{N.C. in } x = 0; \text{no } c)]$

Verificare la validità del teorema di Lagrange per le seguenti funzioni, nell'intervallo a lato indicato, determinando i valori per i quali si trova il valore medio

Livello 1

15. $y = \frac{x+1}{x-1}, x \in [2;3]$; $y = \frac{x^2+1}{x+1}, x \in [0;1]$; $y = e^x, x \in [-1;2]$ $\left[\sqrt{2}+1; \sqrt{2}-1; ln\left(\frac{e^3-1}{3}\right)-1\right]$

16. $y = ln(x), x \in [1; e]$; $y = sin(x), x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; $y = \sqrt{x}, x \in [0;1]$ $\left[e-1; \left(sin^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right) \vee cos^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)\right); \frac{1}{4}\right]$

17. $y = x^2 + x, x \in [-1; 1]$; $y = x^3 + x + 1, x \in [-1; 0]$; $y = \frac{x}{x^2-1}, x \in [2;3]$ $\left[0; -\frac{\sqrt{3}}{3}; \sqrt{\frac{4\cdot\sqrt{30}+19}{7}}\right]$

18. $y = \frac{x+\sqrt{x}}{x}, x \in [1;2]$; $y = \frac{sin(x)}{cos(x)+1}, x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ $\left[\sqrt[3]{\frac{2\cdot\sqrt{2}+3}{2}}; \left(sin^{-1}\left(\frac{\pi-2}{2}\right) \vee cos^{-1}\left(\frac{\pi-2}{2}\right)\right)\right]$

Livello 2

19. $y = sin^{-1}(x), x \in [-1, 1]$ $\left[\pm\frac{\sqrt{\pi^2-4}}{\pi}\right]$

20. $y = ax^2 + bx + d, x \in [m, p], a; b, c, m, p \in \mathbb{R}$ $\left[\frac{m+p}{2}, a \neq 0\right]$

21. $y = ax^3 + x + b, x \in [m, p], a; b, m, p \in \mathbb{R}$ $\left[\pm\frac{\sqrt{3\cdot(m^2+mp+p^2)}}{3}, a \neq 0\right]$

Livello 3

22. $y = \frac{a^2+x}{x-a^2}, x \in [0;1], a^2 \neq 1$ $\left[\begin{cases} a^2+|a|\cdot\sqrt{a^2-1} & se\ |a|>1 \\ a^2-|a|\cdot\sqrt{a^2-1} & se\ |a|<1 \end{cases}\right]$

Trovare i valori dei parametri reali, se esistono, per i quali possa applicarsi il teorema di Lagrange, alle seguenti funzioni negli intervalli indicati; quindi determinare i punti in cui si applica

23. $f(x) = ax^3 + x, x \in [0; 1]$; $f(x) = ax^2 + x + 1, x \in [0; 1]$ $\left[\left(\forall a \in \mathbb{R}, c = \frac{\sqrt{3}}{3}\right); \left(\forall a \in \mathbb{R}; c = \frac{1}{2}\right)\right]$

24. $f(x) = x^2 + 1, x \in [0; a]$; $f(x) = e^{ax}, x \in [0; 1]$ $\left[\left(\forall a \in \mathbb{R}, c = \frac{a-1}{2}\right); \left(a \neq 0, c = \frac{1}{a}\cdot ln\left(\frac{a-1}{a}\right)\right)\right]$

25. $f(x) = x^3 + ax^2 - x + 1, x \in [0; 1]$; $f(x) = x^4 + x^2 + a, x \in [-1; 1]$
$\left[\left(\forall a \in \mathbb{R}, c = \frac{\sqrt{a^2+3a+1}-a}{3}\right); \left(\forall a \in \mathbb{R}, c = -\frac{1}{2} \vee 0\right)\right]$

Stabilire per quali motivi alle seguenti funzioni non può applicarsi il teorema di Lagrange, quindi stabilire se, ciononostante, esiste c interno all'intervallo indicato in cui si ha la media

Livello 2

26. $y = x + \sqrt{x}, x \in [-1;0]$; $y = \dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}, x \in [0;1]$ [(N.C., no *c*) ; (N.C., no *c*)]

27. $y = |x - 2|$, $x \in [0; 3]$; $y = cot(x)$, $x \in \left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{4\pi}{3}\right]$ [(N.D. in $x = 2$) ; (N.C. in $x = \pi$, no *c*)]

Livello 3

28. Sia una funzione derivabile fino al secondo ordine tale che si abbia $f(2) = 5$ e $f(5) = 2$. Dimostrare che esiste $c \in (2; 5)$ per cui si ha $f'(c) = -1$. Sia $g(x) = f[f(x)]$. Dimostrare che $g'(2) = g'(5)$ e usare tale fatto per dimostrare che esiste almeno un $k \in (2; 5)$ per cui si ha $g''(k) = 0$. Sia poi $h(x) = f(x) - x$, dimostrare che esiste $m \in (2; 5)$ per cui $h(m) = 0$.

29. Nella tabella a lato indichiamo alcune informazioni relative a due funzioni continue e derivabili su tutto $\mathbb{R}$, con *g* strettamente crescente.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
1	6	4	2	5
2	9	2	3	1
3	10	–4	4	2
4	–1	3	6	7

Definiamo la funzione $h(x) = f[g(x)]$. a) Dimostrare che esiste *c*: $1 < c < 3$, $h(c) = -5$; b) Dimostrare che esiste *c*: $1 < c < 3$, $h'(c) = -5$; c) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $y = g^{-1}(x)$, per $x = 2$. [$x - 5y + 3 = 0$]

Lavoriamo insieme

Possiamo dire che la funzione $sin^{-1}[cos(x)]$ è costante? Intanto determiniamo il suo insieme di esistenza. Deve essere $-1 \le cos(x) \le 1$, che è sempre vera. Adesso calcoliamo la derivata, che sappiamo esserci: $D\{sin^{-1}[cos(x)]\} = = \dfrac{1}{\sqrt{1-cos^2(x)}}\cdot(-sin(x)) = \dfrac{-sin(x)}{|sin(x)|} = \begin{cases} 1 & se \ \ sin(x) < 0 \\ -1 & se \ \ sin(x) > 0 \end{cases}$, che non è zero, quindi possiamo dire che la funzione $sin^{-1}[cos(x)]$ non è costante.

Stabilire quali delle seguenti funzioni sono costanti e, nel caso, calcolarne il valore

Livello 2

30. $sin^{-1}(x) + cos^{-1}(x)$; $sin^{-1}[cos(x)] - x$; $tan^{-1}(x) + cot^{-1}(x)$; $tan^{-1}[cot(x)]$ $\left[\dfrac{\pi}{2};\text{No};\dfrac{\pi}{2};\text{No}\right]$

31. $sin^{-1}[cos(x)] - x, x \in [-\pi; 0]$; $sin^{-1}[cos(x)] - x, x \in [0; \pi]$; $sin^{-1}[cos(x)] + x, x \in [0; \pi]$; $sin^{-1}[cos^{-1}(x)]$ $\left[\dfrac{\pi}{2};\text{No};\dfrac{\pi}{2};\text{No}\right]$

Mostrare che si ha la validità delle seguenti uguaglianze, determinando il valore del parametro k.

32. $sin^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = cos^{-1}(x) + k$; $sin^{-1}(x) = cos^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right) + k$; $tan^{-1}[cot(x)] = k - x$ [0 ; 0 ; 0]

33. $tan^{-1}\left(x - \sqrt{1-x^2}\right) = \dfrac{1}{2}\cdot tan^{-1}(x) + k$; $tan^{-1}\left(\sqrt{x}\right) = sin^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}\right) + k$ $\left[-\dfrac{\pi}{4};0\right]$

34. $tan^{-1}(x) = cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) + k$; $2\cdot tan^{-1}(x) = tan^{-1}\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right) + k$; $tan[cot^{-1}(x)] = ln(x) + k$ [0 ; 0 ; 0]

Livello 3

35. $tan^{-1}\left(\dfrac{2x\cdot\sqrt{1-x^2}}{2x^2-1}\right) = sin^{-1}\left(2x\cdot\sqrt{1-x^2}\right) + k$; $tan^{-1}(x) + tan^{-1}(x^2) = tan^{-1}\left(\dfrac{x+x^2}{1-x^3}\right) + k$ [0; 0]

Lavoriamo insieme

Possiamo applicare il Teorema di Cauchy alle funzioni $f(x) = x^2 + x - 1; g(x) = \frac{x+1}{x-1}$, nell'intervallo [0, 1]? No, perché la funzione $g(x)$ non è continua per $x = 1$. E nell'intervallo [–1,0]? Sì, perché entrambe le funzioni sono continue e derivabili. Inoltre $g(-1) = 0, g(0) = -1$. Calcoliamo la derivata di $g(x)$: $g'(x) = \frac{\cancel{x} - 1 - \cancel{x} - 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \neq 0, \forall x \neq 1$. Quindi possiamo applicare il teorema:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(0) - f(-1)}{g(0) - g(-1)} \Rightarrow \frac{2c+1}{\frac{-2}{(c-1)^2}} = \frac{-1-(-1)}{-1-0} \Rightarrow \frac{(2c+1)\cdot(c-1)^2}{-2} = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{2} \vee c = 1$$

Solo il primo valore è accettabile perché compreso in (–1,0) .

Verificare la validità del teorema di Cauchy per le seguenti coppie di funzioni, nell'intervallo indicato, determinando i valori per i quali si trova il valore medio

Livello 1

36. $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = 2x - 1$,[0; 1] ; $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = x^2 + 1$, [–1; 1] $\left[\frac{1}{2};0\right]$

37. $f(x) = \frac{x}{x+1}, g(x) = x$,[0; 1] ; $f(x) = x, g(x) = \frac{x}{x+1}$,[0; 1] $\left[\sqrt{2}-1;\sqrt{2}-1\right]$

38. $f(x) = ln(x)$, $g(x) = 2x + 1$, [1; e] ; $f(x) = ln(x^2)$, $g(x) = x^2 + 1$, [1; e] $\left[e-1;\sqrt{\frac{e^2-1}{2}}\right]$

39. $f(x) = ln(x)$, $g(x) = ln^2(x)$, [e; e^2] ; $f(x) = e^x$, $g(x) = x$, [0; 1] $\left[\sqrt{e^3};ln(e-1)\right]$

40. $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^3 - x$, [–2; 1] ; $f(x) = \frac{x}{x-1}, g(x) = \frac{x-1}{x}$,[2; 3] $\left[-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}+3}{2}\right]$

Livello 2

41. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}, g(x) = x$,[0;2] ; $f(x) = \frac{x}{x^2+1}, g(x) = \frac{x^2+1}{x}$, [1;2] $\left[\sqrt{\frac{\sqrt{65}-7}{2}};\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$

42. $f(x) = sin(x)$, $g(x) = cos(x)$, $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$; $f(x) = tan(x)$, $g(x) = cot(x)$, $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]$ $\left[\frac{\pi}{4};tan^{-1}\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2\right)\right]$

Livello 3

43. $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = mx^2 + nx + p$, [0; 2] ; $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = mx + n$, [–4; 2] [1; –2]

44. Se possiamo applicare il teorema di Cauchy alle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sia scegliendo f come funzione al numeratore, sia come funzione al denominatore, possiamo dire che il valore c trovato è sempre lo stesso? Giustificare la risposta. [Sì]

45. Se $g(x)$ è una funzione pari il teorema di Cauchy non può applicarsi in nessun intervallo simmetrico (–a; a). l'affermazione è corretta? giustificare la risposta. [Sì]

Stabilire per quali motivi alle seguenti coppie di funzioni non può applicarsi il teorema di Cauchy, quindi determinare se, ciononostante, esiste c interno all'intervallo indicato in cui si ha la media

Livello 2

46. $f(x) = \frac{x}{x^2-1}, g(x) = x$,[0; 2] ; $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$, [–1; 1] [(f NC, $x = 1$, no c) ; ($g(-1) = g(1)$, no c)]

47. $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$, [–1; 2] ; $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, [–2; 1] $\left[\left(g \text{ ND}, x = 0, \text{ no } c\right);\left(g'(0) = 0, c = -\frac{2}{9}\right)\right]$

48. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}, g(x)=x,[-1;2]$ [f non è derivabile in $x = 0$, non esiste c]

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare il seguente $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4+x^2}}{4+x^2}$, che risulta una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Piuttosto che applicare il principio di sostituzione degli infiniti, possiamo applicare il teorema di de L'Hôpital–Bernoulli? Le funzioni sono continue e derivabili entrambe, vediamo se esiste il limite del rapporto delle derivate. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\cancel{2}x}{2\cdot\sqrt{4+x^2}}}{\cancel{2}x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2\cdot\sqrt{4+x^2}}=0$. Possiamo allora dire che anche il limite di partenza vale zero.

Utilizzando, dove possibile, il teorema di de L'Hôpital – Bernoulli calcolare i seguenti limiti

Livello 1

49. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{sin(x)+sin(2x)}{1-cos(4x)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+ln(x)}{e^x+1}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^3+x^2}$; $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x+ln(x)}{x+sin(x)}$ [+∞ ; 0 ; 0, No F.I. ; –∞]

50. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{2x+ln(x)}$; $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-x^3-3x^2+5x-2}{x^4-2x^3+2x-1}$; $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt{x^5}+4\cdot\sqrt{x^3}+4\cdot\sqrt{x}}{x^3-6x^2+12x-8}$ [0 ; 1 ; 0, No F.I.]

51. $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+}\frac{ln(x^2-2)}{cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)}$; $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{ln(x^2-4)}{tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)}$; $\lim\limits_{x\to3}\frac{cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)}{tan\left(\frac{\pi}{3}x\right)}$; $\lim\limits_{x\to-1}\frac{ln(x^2)}{e^x-e}$; $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{sin(x)}{sin^{-1}(\pi-x)}$ $\left[\infty;0;\frac{1}{2};0;1\right]$

52. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{3\cdot tan^{-1}(x)-\pi}{x^2-3}$; $\lim\limits_{x\to e}\frac{ln(x^2)-2}{sin(x-e)}$; $\lim\limits_{x\to e}\frac{1-ln(x)}{e^x-\sqrt{e}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+ln(x)}{e^{2x}-ln(x^2)}$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{8};2e^{-1};0,\text{No F.I.};0\right]$

53. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\cdot tan^{-1}(x)-\pi}{e^{-4x}+1}$; $\lim\limits_{x\to2}\frac{e^x-e^2}{tan(x-2)}$; $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{2x}}{x+\ln(x^2)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x+ln(x^2)}$ [0 ; +∞; 0, No F.I. ; e^2]

54. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{tan^{-1}(x^2)}$; $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{sin(x^4-2x+1)}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{sin^{-1}(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{sin^{-1}(x)}{sin(x)}$ [+∞, No F.I. ;–1 ; 1 ; 1]

Livello 2

55.

56. $\lim\limits_{x\to0}\frac{ln(2+x)}{sin(x+1)+(x+1)\cdot cos(x)}$; $\lim\limits_{x\to3}\frac{ln(10-x^2)}{1-cos(x-3)+2x\cdot sin(x^2-9)}$ $\left[\frac{ln(2)}{sin(1)+1},\text{No F.I.};-\frac{1}{6}\right]$

57. $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{ln\left(1+\sqrt{x-2}\right)}{(x-1)\cdot sin(x^3-8)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\cdot ln(x+3)}{\sqrt{x^3-17x+1}}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}+1}{5x^4-x-12}$ [+∞ ; 0 ; +∞]

58. $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{tan\left(x+\frac{\pi}{2}-1\right)}$; $\lim\limits_{x\to4^-}\frac{1-\sqrt{x-3}}{e^{\frac{x}{x-4}}}$; $\lim\limits_{x\to5}\frac{sin\left(\sqrt{x-4}-1\right)}{x\cdot ln(x^2-24)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7x+ln(x^2)}{5x+ln(3x^3)}$ $\left[-\infty;+\infty;\frac{1}{100};\frac{7}{5}\right]$

59. $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x\cdot ln(x^2)}{sin\left(\sqrt{2x-1}-1\right)}$; $\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-1)^5-1}{ln(x^2-3)}$; $\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{sin\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{(x^2-1)^2}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{ln[cos(3x)]}{4\cdot sin(3x)-6\cdot sin(8x)}$ $\left[6;\frac{5}{4};+\infty;0\right]$

60. $\lim\limits_{x\to3}\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)}{sin(x^2-x-6)}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{sin^{-1}(x)-x}{x-tan^{-1}(x)}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^3-1}{sin(2x)}$ $\left[\frac{1}{20};\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare il seguente $\lim_{x\to 0^+} x^x$, che risulta una forma indeterminata 0^0 che non è del tipo alla quale possiamo applicare il teorema di de L'Hôpital–Bernoulli. Però possiamo scrivere $\lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot ln(x)} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\cdot ln(x)}$. In questo modo dobbiamo calcolare un limite del tipo $0 \cdot \infty$, che può anche scriversi: $\lim_{x\to 0^+} x\cdot ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{ln(x)}{\frac{1}{x}}$, che è forma indeterminata a cui può applicarsi il teorema. Si ha perciò:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\cancel{x}}}{-\frac{1}{x^{\cancel{2}}}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0. \text{ Infine } \lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1.$$

Trasformando le forme indeterminate in modo da utilizzare il teorema di de L'Hôpital – Bernoulli calcolare i seguenti limiti

Livello 2

61. $\lim_{x\to -\infty} e^{-x}\cdot x$; $\lim_{x\to 0} sin^{-1}(x)\cdot ln(x)$; $\lim_{x\to 0^+} ln(x)\cdot sin(x)$; $\lim_{x\to +\infty}\left[e^x - \sqrt{x}\right]$ [$-\infty$; 0 ; 0 ; $+\infty$]

62. $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x+1}{3x+2}\right)^{5x+3}$; $\lim_{x\to 0^+}\left[sin(x)\right]^{ln(x)}$; $\lim_{x\to 2^+}\left[\sqrt{x-2}\cdot tan\left(\frac{\pi}{x}\right)\right]$; $\lim_{x\to +\infty} x^x$ [e^5 ; $+\infty$; $+\infty$; $+\infty$, No F.I.]

63. $\lim_{x\to 1} sin^{-1}(x)\cdot tan^{-1}(\pi x)$; $\lim_{x\to 0^+}\left[ln(x)\right]^{sin(x)}$; $\lim_{x\to\infty}\frac{e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{ln(x)}$ $\left[\frac{\pi\cdot tan^{-1}(\pi)}{2}\text{, No F.I.; 1; 0}\right]$

64. $\lim_{x\to \pi/2^+}\left[\sqrt{2x-\pi}\cdot tan(x)\right]$; $\lim_{x\to 0^+} cot(x)\cdot ln(x)$; $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{5x^2+3x-1}{x^2+x+5}\right)^{ln(x-1)}$ [$-\infty$; $-\infty$; 1]

65. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{sin(x)}-\frac{1}{x}\right)$; $\lim_{x\to 1^+}\left(x^2-1\right)\cdot tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$; $\lim_{x\to 2^+} ln(x-1)\cdot ln(x-2)$ $\left[0;-\frac{4}{\pi};0\right]$

66. $\lim_{x\to 1^+}\left[\left(\frac{1}{sin(x-1)}-\frac{1}{ln(x)}\right)\right]$; $\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$; $\lim_{x\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{3^{\frac{1}{x}}-1}$ $\left[-\frac{1}{2};1;\frac{ln(2)}{ln(3)}\right]$

67. Usando il teorema di de L'Hôpital–Bernoulli provare che e^x è infinito di ordine superiore a x^n, per x che tende a $+\infty$ e per ogni n reale.

68. Usando il teorema di de L'Hôpital–Bernoulli provare che x è infinito di ordine superiore a $ln(x)$, per x che tende a $+\infty$.

Livello 3

69. $\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}, n\neq 0, a\neq 0$; $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}, m\neq 0$; $\lim_{x\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}-1}{b^{\frac{1}{x}}-1}$ $\left[\frac{m}{n}\cdot a^{m-n};m;\frac{ln(a)}{ln(b)}\right]$

70. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x^2}, m\neq 0$; $\lim_{x\to +\infty} x^n\cdot sin\left(\frac{a}{x}\right), n>0, a\neq 0$; $\lim_{x\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{n}{x}}-1}$ $\left[\begin{cases}+\infty & m>0\\ -\infty & m<0\end{cases};\begin{cases}+\infty & n>0, a>0\\ -\infty & n>0, a<0\\ 0 & n<0\end{cases};\frac{1}{n}\right]$

Stabilire se possiamo calcolare i seguenti limiti usando il teorema di de L'Hôpital–Bernoulli. Giustificare le risposte, calcolando in ogni caso il limite

71. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot sin\left(\frac{1}{x}\right)}{sin(x)}$; $\lim_{x\to\infty}\frac{x-sin(x)}{x+sin(x)}$ [(No; 0) ; (No; 1)]

72. Se non esiste il limite del rapporto delle derivate possiamo dire che non esiste neanche il limite del rapporto delle funzioni? Giustificare la risposta. [No]

Lavoriamo insieme

Vogliamo sviluppare e^{2x} in forma polinomiale di Mac Laurin. Noi conosciamo quella di e^x, che è $e^x \approx 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}$. Possiamo semplicemente sostituire $2x$ al posto di x? Sì perché e^{2x} è continua e derivabile, così come lo è $2x$. Abbiamo quindi:

$$e^{2x}\approx 1+2x+\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3!}+\ldots+\frac{(2x)^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2x)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^k x^k}{k!}$$

perciò possiamo trovare un valore approssimato di e^2 con una precisione per esempio di 10^{-3}, cioè con 3 cifre decimali esatte. Abbiamo: $e^2\approx\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^k}{k!}$ costruiamo la tabella seguente

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
e^2	3	5	≈6,3333	7	≈7,2666	≈7,3555	≈7,3809	≈7,3873	≈7,3887	≈7,3889

Poiché al decimo passo le prime 3 cifre decimali possiamo dire con alta probabilità che esse siano esatte, quindi $e^2 \approx 7{,}388$.

Sviluppare con i polinomi di Mac Laurin le seguenti funzioni

Livello 2

73. e^{-x}; e^{3x}; $e^{\sqrt{x}}$; e^{x^2}; $sin(2x)$; $sin(3x)$; $sin\left(\frac{x}{2}\right)$; $sin\left(\sqrt{x}\right)$

74. $cos(2x)$; $cos\left(\frac{x}{3}\right)$; $cos(x^2)$; $cos\left(\sqrt[3]{x}\right)$; $ln(2x)$; $ln\left(\frac{x}{4}\right)$; $ln(x^2)$; $ln\left(\sqrt{x}\right)$

75. $tan^{-1}(2x)$; $tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$; $tan^{-1}(x^3)$; $tan^{-1}\left(\frac{x^2+1}{2}\right)$; e^x+e^{-x}; $sin(x)-cos(x)$

Livello 3

76. $sinh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ (Seno iperbolico) ; $cosh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ (Coseno iperbolico)

Determinare approssimazioni dei seguenti numeri usando il polinomio di Mac Laurin con una precisione di 10^{-3}

Livello 2

77. e^3 ; $\sqrt{e}$; e^{-1} ; $sin(1)$; $sin(2)$; $sin\left(\sqrt{2}\right)$ [20,085 ; 1,648 ; 0,367 ; 0,841 ; 0,909 ; 0,987]

78. $cos(2)$; $cos\left(\sqrt{3}\right)$; $cos\left(\frac{1}{2}\right)$; $ln(2)$; $ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ [–0,416 ; –0,160 ; 0,887; 0,693; 0,881]

79. $ln\left(\frac{1}{5}\right)$; $tan^{-1}(3)$; $tan^{-1}\left(\sqrt{2}\right)$; $tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ [–1,609 ; 1,249 ; 0,955 ; 0,588]

Livello 3

80. $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[5]{17}$; $2^{\sqrt{2}}$; π^2 ; $\left(\sqrt{3}\right)^{1,2}$ [1,732 ; 1,259 ; 1,762 ; 2,665 ; 9,869 ; 1,933]

Usando il polinomio di Mac Laurin calcolare i seguenti limiti.

81. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin(2x)}{3x}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(1+4x)}{3x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tan^{-1}(x)}{2x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin(x^2)}{ln(1+3x^2)}$ $\left[\dfrac{2}{3};+\infty;\dfrac{4}{3};\dfrac{1}{2};1\right]$

82. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{tan^{-1}(2x)}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{sin(3x^2)}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(1+\sqrt{x})}{tan^{-1}(1+\sqrt[3]{x})}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{tan^{-1}(1-x)}{e^x-e}$ $\left[\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{3};0;-1\right]$

Determinare i polinomi p(x) di grado n tale che valga quanto detto. Suggerimento: scrivere il polinomio con coefficienti generici, quindi applicare le condizioni e risolvere il sistema ottenuto

Livello 2

83. $n = 2; p(0) = 1, p'(0) = 1, p''(0) = 1$ $\left[\dfrac{x^2}{2}+x+1\right]$

84. $n = 3; p(0) = 1, p'(0) = 1, p''(0) = 1, p'''(0) = 1$ $\left[\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2}{2}+x+1\right]$

85. $n = 3; p(0) = 0, p'(1) = 1, p''(-1) = 1, p'''(0) = 1$ $\left[\dfrac{x^3}{6}+x^2-\dfrac{3}{2}x+1\right]$

86. $n = 4; p(0) = 1, p'(0) = 0, p''(0) = -1, p'''(0) = 0, p^{IV}(0) = 1$ $\left[\dfrac{x^4}{24}-\dfrac{x^2}{2}+1\right]$

Determinare il grado di molteplicità degli zeri dati, rispetto ai polinomi P(x)

87. $x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1; x = 1$ [2]
88. $x^6 - 3x^5 + 10x^3 - 15x^2 + 9x - 2, x = 1$ [5]
89. $x^7 - x^6 - 21x^5 + 5x^4 + 160x^3 + 72x^2 - 432x - 432, x = 3$ [3]
90. $x^7 - x^6 - 21x^5 + 5x^4 + 160x^3 + 72x^2 - 432x - 432, x = -2$ [4]
91. $x^6 + 10x^5 + 41x^4 + 88x^3 + 104x^2 + 64x + 16, x = -1$ [2]

L'angolo di Derive

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quinto%20volume/Capitolo%2010/10-1-1.exe trovi un'applicazione che mostra come Derive tratta il calcolo delle derivate. Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quinto%20volume/Capitolo%2010/10-1-1.exe scarichi il relativo file.

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

1. Possiamo dire che se $f(x)$ è una funzione continua in $[a; b]$ tale che si abbia $f(x_0) = 0$, per $x_0 \in [a; b]$, allora $|f(x)|$ non è derivabile in x_0? Giustificare la risposta. [Sì]
2. Osserviamo che $sin(x)$ è una funzione dispari e la sua derivata, $cos(x)$ è una funzione pari. Analogamente la derivata della funzione pari $cos(x)$ è la funzione dispari $-sin(x)$. Possiamo dire che è sempre vero che la derivata di una funzione pari è dispari e viceversa? Giustificare la risposta. [Sì]
3. Sempre con riferimento all'esercizio precedente sia $sin(x)$ che $cos(x)$ sono funzioni periodiche. Possiamo dire che la derivata di una funzione periodica e derivabile è ancora periodica? E il periodo della derivata è lo stesso della funzione? Giustificare la risposta. [Sì]

4. Sia f una funzione che verifica le proprietà: $f(1) = 3$, $f(3) = 1$, $f'(1) = -4$ e $f'(3) = 2$. Determinare la pendenza della retta tangente alla funzione $g(x)=\frac{1}{f^{-1}(x)}$, per $x = 1$. $\left[-\frac{1}{18}\right]$
5. Calcolare la derivata ennesima di $x^3 \cdot e^x$. $[e^x \cdot [x^3 + 3n \cdot x^2 + 3n \cdot (n - 1) \cdot x + n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)]]$
6. Calcolare la derivata ennesima di $x^2 \cdot sin(x)$. $\left[\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}+1}\cdot\left\{\left(n^2-n-x^2\right)\cdot sin(x)+2n\cdot x\cdot cos(x)\right\} & n\ pari\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\left\{\left(x^2-n^2+n\right)\cdot cos(x)+2n\cdot x\cdot cos(x)\right\} & n\ dispari\end{cases}\right]$
7. A una classe di funzioni continue e derivabili dappertutto non è possibile applicare il teorema di Rolle in nessun intervallo, dire quali sono e motivare la risposta. [Funzioni iniettive]
8. Per quali funzioni il teorema della media di Lagrange ha come valore medio il punto medio dell'intervallo $(a; b)$? [Polinomi di II grado]
9. Per quali funzioni il teorema di Cauchy ha come valore medio il punto medio dell'intervallo $(a; b)$? [Uno almeno dei due polinomio di II grado, l'altro polinomio al massimo di II grado]
10. Una massa di 1 Kg è sospesa all'estremo di una molla ed oscilla seguendo la legge $x = 2\ cos(\omega t)$, sapendo che la costante elastica della molla è 0,25 N/m, determinare ω. Un dato non è necessario, quale? [ω = 0,5 rad/s; l'ampiezza di oscillazione (2)]

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi.
I temi completi dei Licei Scientifici per gli ultimi anni sono scaricabili, con soluzione, dal sito
http://matdidattica.altervista.org/esamidistato.htm

1. (Liceo scientifico 1992/93) Sia $f(x)=\begin{cases}-3x^2+Hx & x\le 1\\ \frac{K}{x^2} & x>1\end{cases}$. Determinare le costanti H e K in modo che la funzione $y = f(x)$ e la sua derivata siano continue in $x = 1$. [$H = 4$, $K = 1$]
2. (Liceo Scientifico 2000/01) Si consideri la funzione $\frac{x+sin(x)}{x-cos(x)}$. Stabilire se si può calcolarne il limite per $x\to +\infty$ e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al teorema di de L'Hôpital. [1; No, perché non esiste il limite del rapporto delle derivate]
3. (Liceo Scientifico 2001/02) In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva k di equazione $y = f(x)$, dove è: $f(x)=\frac{x^2+2}{x^3+2}$. a) determinare per quali valori di x essa è situata nel semipiano $y > 0$ e per quali nel semipiano $y < 0$. b) Trovare l'equazione della parabola passante per l'origine O degli assi e avente l'asse di simmetria parallelo all'asse y, sapendo che essa incide ortogonalmente la curva k nel punto di ascissa -1. (*N.B. : si dice che una curva incide ortogonalmente un'altra in un punto se le rette tangenti le due curve in quel punto sono perpendicolari*). c) Stabilire se la retta tangente alla curva k nel punto di ascissa -1 ha in comune con k altri punti oltre a quello di tangenza. d) Determinare per quanti punti la curva k ha per tangente una retta parallela all'asse x. e) Enunciare il teorema di Lagrange e dire se sono soddisfatte le condizioni perché esso si possa applicare alla funzione $f(x)$ assegnata, relativamente all'intervallo $-\sqrt{2}\le x\le 0$.
$\left[\text{a) } +: x>-\sqrt[3]{2}; -: x<-\sqrt[3]{2}; \text{b) } y=-\frac{34}{11}x^2-\frac{67}{11}x;\ \text{c) No; d) 2; e) No}\right]$
4. (Liceo Scientifico 2001/02) La funzione reale di variabile reale $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato [1; 3] e derivabile nell'intervallo aperto (1; 3). Si sa che $f(1) = 1$ e inoltre $0\le f'(x)\le 2$ per ogni x dell'intervallo (1; 3). Spiegare in maniera esauriente perché risulta $1\le f(3)\le 5$. (*Suggerimento* Usare il Teorema di Lagrange)

5. (Liceo Scientifico PNI 2001/02) Utilizzando il teorema di Rolle, si verifichi che il polinomio $x^n + px + q$ $(p, q \in \mathbb{R})$, se n è pari ha al più due radici reali, se n è dispari ha al più tre radici reali.

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente problema, assegnato agli esami di stato del Liceo scientifico nell' a.s. 2003/04. *Dimostrate che l'equazione* $e^x + 3x = 0$ *ammette una e una sola soluzione reale.*
La derivata prima $e^x + 3 > 0$ per ogni x, quindi la funzione è crescente, il che vuol dire che se l'equazione ha una soluzione questa è unica. Del resto si ha per esempio $e^{-1} - 3 < 0$ e $e^0 = 1 > 0$, quindi per il teorema di esistenza degli zeri l'equazione ha almeno una soluzione compresa tra – 1 e 0. Con un metodo a piacere, per esempio quello di bisezione si trova che la detta soluzione è ≈ –0,257.

6. (Liceo Scientifico PNI 2001/02) Verificare che la funzione $3x + ln(x)$ è strettamente crescente. Detta g la funzione inversa, calcolare $g'(3)$. $\left[\frac{1}{4}\right]$
7. (Liceo Scientifico PNI 2002/03) Dare un esempio di polinomio $P(x)$ il cui grafico tagli la retta $y = 2$ quattro volte. [$(x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c) \cdot (x - d) + 2$, a; b, c, d reali distinti]
8. (Liceo Scientifico PNI 2002/03) Dimostrare, usando il teorema di Rolle, che se l'equazione: $x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + + a_0 = 0$, ammette radici reali, allora fra due di esse giace almeno una radice dell'equazione: $n \cdot x^{n-1} + (n - 1) \cdot a_{n-1} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_1 = 0$.
9. (Liceo Scientifico PNI 2002/03) Si vuole che l'equazione $x^3 - b \cdot x - 7 = 0$ abbia tre radici reali. Quale è un possibile valore di b? $\left[b < -3 \cdot \sqrt[3]{\frac{49}{4}}\right]$
10. (Liceo Scientifico PNI 2002/03) Verificare che l'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$ ammette tre radici reali. Di una di esse, quella compresa tra 0 e 1, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati. [≈ 0,347]
11. (Liceo Scientifico 2002/03) La funzione $2x^3 - 3x^2 + 2$ ha un solo zero reale, vale a dire che il suo grafico interseca una sola volta l'asse delle ascisse. Fornire un'esauriente dimostrazione di questo fatto e stabilire se lo zero della funzione è positivo o negativo. [Negativa]
12. (Liceo Scientifico 2002/03) È assegnata la funzione $f(x) = \frac{2x+1}{x^2 + m + |m|}$, dove m è un parametro reale. a) Determinare il suo dominio di derivabilità. b) Calcolare per quale valore di m la funzione ammette una derivata che risulti nulla per $x = 1$. [a) $x \neq 0$, $m \leq 0$; b) $m = 1$]
13. (Liceo Scientifico 2003/04) Verificate che le due funzioni $f(x) = 3ln(x)$ e $g(x) = ln(2x)^3$ hanno la stessa derivata. Quale giustificazione ne date? [Differiscono di una costante]

Lavoriamo insieme

Consideriamo un problema assegnato agli esami di stato del Liceo Scientifico nell' a.s. 2004/05.

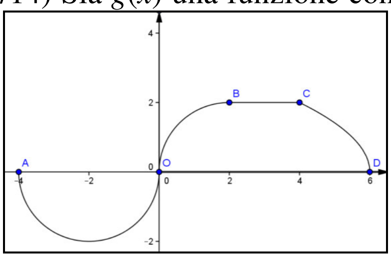
Si consideri la funzione f definita sull'intervallo $[0;+\infty[$ *da:* $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot [3 - 2ln(x)] + 1 \quad se \quad x > 0 \end{cases}$, *si stabilisca se f* è *continua* e *derivabile* in 0.

- Verifichiamo la continuità. $\lim_{x \to 0^+}\left(\frac{1}{2}x^2 \cdot [3 - 2ln(x)] + 1\right)$ è una forma indeterminata $0 \cdot \infty$, trasformiamola in una $\frac{\infty}{\infty}$, in modo da potere applicare il Teorema di De L'Hôpital: $\lim_{x \to 0^+}\left(\frac{3 - 2ln(x)}{\frac{2}{x^2}} + 1\right) =$

$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-\frac{\cancel{2}}{\cancel{x}}}{-\frac{\cancel{4}^2}{x\cancel{^3}^2}}+1\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2}{2}+1\right)=1=f(0)$. La funzione è continua in 0.

- Passiamo alla derivabilità. $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{2}x^2\cdot[3-2ln(x)]+\cancel{1}-\cancel{1}}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2}x\cdot[3-2ln(x)]=0$, abbiamo usato il precedente limite. Quindi la funzione è anche derivabile a destra per $x = 0$ e la sua derivata è 0.

14. (Liceo scientifico 2004/05) Si consideri la funzione $f(x)=\begin{cases}1 & se\, x=0\\ \frac{1}{2}x^2\left[3-2log(x)\right]+1 & se\, x>0\end{cases}$ definita sull'intervallo [0; + ∞[. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha, su [0, +∞) un'unica radice reale. [≈ 4,69]
15. (Liceo scientifico PNI 2006/07) Si dimostri che l'equazione $2x^3-3x^2+6x+6=0$ ha un'unica radice reale e si trovi il valore con una precisione di due cifre significative. [–0,69]
16. (Liceo Scientifico 2004/05) Si dimostri che la curva $y = x \cdot sin(x)$ è tangente alla retta $y = x$ quando $sin(x) = 1$ ed è tangente alla retta $y = -x$ quando $sin(x) = -1$.
17. (Liceo Scientifico 2004/05) Se $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3$ per quanti numeri reali k è $f(k) = 2$? Si illustri il ragionamento seguito. [0]
18. (Liceo Scientifico PNI 2004/05) Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche $x = e^t + 2$ e $y = e^{-t} + 3$ nel suo punto di coordinate (3; 4). [$x = 3 + t$, $y = 4 - t$]
19. (Liceo Scientifico 2005/06) La funzione $f(x)=x^3-2x^2$ soddisfa le condizioni del teorema di Lagrange nell'intervallo [0,1]? Se si, trova il punto che compare nella formula. $\left[\frac{1}{3}\right]$
20. (Liceo Scientifico PNI 2005/06) Si dimostri che l'equazione $sin(x) = x - 1$ ha una e una sola radice α e, utilizzando una calcolatrice tascabile, se ne dia una stima. Si descriva altresì una procedura di calcolo che consenta di approssimare α con la precisione voluta. [≈ 1,93]
21. (Liceo Scientifico 2006/07) Si mostri che la funzione $y = x^3 + 8$ soddisfa le condizioni del teorema del valor medio (o teorema di Lagrange) sull'intervallo [–2; 2]. Si determinino i valori medi forniti dal teorema e se ne illustri il significato geometrico. [4]
22. (Liceo Scientifico suppletiva 2006/07) Sia la funzione: $f(x)=\begin{cases}x\cdot tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$. Si dica se essa è continua e derivabile nel punto di ascissa 0. [Continua, non derivabile]
23. (Liceo Scientifico PNI 2007/08) Si esponga la regola del marchese de L'Hôpital (1661 – 1704) e la si applichi per dimostrare che $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2008}}{2^x}=0$.
24. (Liceo scientifico PNI 2007/08) Sia f la funzione definita da $f(x)=\pi^x-x^\pi$. Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x = \pi$. [$\mathbb{R}^+, f', f'' > 0$]
25. (Liceo Scientifico 2008/09) Per quale o quali valori di k la curva d'equazione $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ ha una sola tangente orizzontale? [$k = \pm 3$]
26. (Liceo scientifico 2008/09) Si provi che l'equazione: $x^{2009} + 2009x + 1 = 0$ ha una sola radice compresa fra –1 e 0.
27. (Liceo scientifico 2010/11) Si provi che l'equazione $x^{2011}+2011x+12=0$ ha una sola radice compresa tra –1 e 0.

28. (Liceo scientifico PNI 2010/11) Sia $f(x)=x+ln(4)+\frac{2}{e^x+1}$. Si provi che, per tutti i reali *m*, l'equazione *f*(*x*) = *m* ammette una e una sola soluzione in $\mathbb{R}$. Sia α soluzione dell'equazione *f*(*x*) = 3; per quale *m*, (–α) è soluzione dell'equazione *f*(*x*) = *m*? [2*ln*(4) – 1]
29. (Liceo Scientifico PNI 2010/11) Per il progetto di una piscina, un architetto si ispira alle funzioni *f* e g definite, per tutti gli *x* reali, da: $f(x)=x^3-16x, g(x)=sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. L'architetto rappresenta la superficie libera dell'acqua nella piscina con la regione R delimitata dai grafici di *f* e *g* sull'intervallo [0; 4]. Ai bordi della piscina, nei punti di intersezione del contorno di R con le rette *y* = – 15 e *y* = – 5, l'architetto progetta di collocare dei fari per illuminare la superficie dell'acqua. Si calcolino le ascisse di tali punti (è sufficiente un'approssimazione a meno di 10^{-1}). $\left[\left(1;\frac{\sqrt{61}-1}{2}\right),(0,3;3,8)\right]$
30. (Liceo Scientifico 2010/11) Si calcoli $\lim_{x\to a}\frac{tan(x)-tan(a)}{x-a}$. $\left[\frac{1}{cos^2(a)}\right]$
31. (Liceo Scientifico 2011/12) Si scrivano le equazioni delle rette *r* e *s* tangenti, rispettivamente, alle funzioni *f*(*x*) = $|27x^3|$ e *g*(*x*) = $sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$ nel punto di ascissa *x* = $\frac{1}{3}$. Qual è l'ampiezza, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto formato da *r* e da *s*? [*y* = 9*x* – 2; *y* = 1; ≈ 83°39'35"]
32. (Liceo Scientifico 2011/12) Cosa rappresenta $\lim_{h\to 0}\frac{5\cdot\left(\frac{1}{2}+h\right)^4-5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4}{h}$ e qual è il suo valore?
[Derivata della funzione $5x^4$ in $x=\frac{1}{2};\frac{5}{2}$]
33. (Liceo Scientifico 2011/12) La posizione di una particella è data da $s(t)=20\cdot\left(2\cdot e^{-\frac{t}{2}}+t-2\right)$. Qual è la sua accelerazione al tempo *t* = 4? [$a(4) = 10\cdot e^{-2}$]
34. (Liceo Scientifico 2011/12) Si calcoli *f'*(*x*), per *f*(*x*) = 5*sin*(*x*) · *cos*(*x*) + $cos^2(x)$ – $sin^2(x)$ – $\frac{5}{2}$ *sin*(2*x*) – *cos*(2*x*) – 17. [0]
35. (Liceo Scientifico 2011/12) Qual è il valor medio di *f*(*x*) = $\frac{1}{x}$ da *x* = 1 a *x* = *e*? $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$
36. (Liceo Scientifico PNI 2011/12) Sia *f*(*x*) = 3^x . Per quale valore di *x*, approssimato a meno di 10^{-3}, la pendenza della retta tangente alla curva nel punto (*x*, *f*(*x*)) è uguale a 1? [≈ –0,0856]
37. (Liceo Scientifico PNI 2012/13) Se la funzione *f* (*x*) – *f* (2*x*) ha derivata 5 in *x* = 1 e derivata 7 in *x* = 2, qual è la derivata di *f* (*x*) – *f* (4*x*) in *x* = 1? [19]
38. (Liceo Scientifico 2013/14) Il valor medio della funzione *f*(*x*) = x^3, sull'intervallo chiuso [0, *k*] è 9. Si determini *k*. $\left[3\cdot\sqrt[6]{3}\right]$
39. (Liceo Scientifico PNI 2013/14) Sia *g*(*x*) una funzione continua sull'intervallo chiuso [– 4, 6]. Il grafico di *g*(*x*), disegnato a lato, 

passa per i punti *A* ≡ (– 4; 0), *O* ≡ (0; 0), *B* ≡ (2; 2), *C* ≡ (4; 2), *D* ≡ (6; 0) e consiste della semicirconferenza di diametro *AO*, dell'arco, quarto di circonferenza, di estremi *O* e *B*, del segmento *BC* e dell'arco *CD* di una parabola avente per asse di simmetria l'asse x. Si dica, giustificando la risposta, se $g(x)$ è derivabile nei punti A, O, B, C, D. [Solo in B]

40. (Liceo Scientifico PNI 2014/15) Data la funzione $f(x)=\begin{cases} x^3 & 0\le x\le 1 \\ x^2-kx+k & 1<x\le 2\end{cases}$ determinare il parametro k in modo che nell'intervallo [0; 2] sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto in cui la tesi del teorema assicura l'esistenza. $\left[k=-1, c=\sqrt{\frac{5}{6}}\right]$

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.

AK = Arkansas State University

CEEB = College Entrance Examination Board

HSMC = University High School Mathematics Contest

RICE = Rice University Mathematics Tournament

Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnato agli HSMC del 2004.

Supponiamo che f sia una funzione derivabile tale che si abbia f(x + y) = f(x) + f(y) + 5xy per ogni x e y reali, inoltre sia f '(0) = 3. Trovare f '(x).

Possiamo scrivere $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) + 5(0)(0) = 2\cdot f(0)$, ciò significa che si ha $f(0) = 0$. Calcoliamo $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=3$. Adesso calcoliamo $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+\cancel{f(x)}+5\cdot x\cdot h-\cancel{f(x)}}{h}$. Abbiamo sostituito ad $f(x + h)$ la sua espressione mediante quanto detto nel testo del quesito, in cui $y = h$. Possiamo allora scrivere: $f'(0)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(h)}{h}+\frac{5x\cdot\cancel{h}}{\cancel{h}}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(h)}{h}+5x\right)=3+5x$.

1. (HSMC 2003) Determinare il minimo valore di k per cui la retta di equazione $y = x$, incontra la curva di equazione $y=e^{\frac{x^2}{k}}$. [$2e$]
2. (HSMC 2003) Determinare le ascisse di tutti i punti della funzione $f(x)=\frac{x}{x+1}$, la cui tangente passa anche per (1; 2). $\left[-2\pm\sqrt{3}\right]$
3. (HSMC 2004) Sia f una funzione derivabile tale che $f(x + y) = f(x) + f(y) + 5xy$ $\forall$ x e y e $f'(0) = 3$. Calcolare $f'(x)$. [$3 + 5x$]
4. (HSMC 2005) Se gonfiamo una palla sferica a un tasso di 16 cm^3 al secondo, a che tasso aumenta il raggio quando è 4 cm? $\left[\frac{1}{4\pi}\right]$
5. (Rice 2006) Chiamiamo tangente iperbolica la funzione $tanh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, calcolare $\frac{d}{dx}tanh^{-1}\left[tan(x)\right]$. [$sec(2x)$]
6. (Rice 2008) Determinare il valore della n–esima derivata di $f(x) = sin^n(x)$, in $x = 0$. [$n!$]
7. (HSMC 2008) Sia una funzione f che verifica $f(x + y) = f(x) + f(y) + 3x^2y + 3xy^2 + 2xy$ e $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$. Calcolare $f'(x)$. [$3x^2 + 2x$]

Lavoriamo insieme

Ecco un quesito degli HSMC del 2002. *Sia la funzione* $f(x) = (x^2 + 4x + 5)^2$, *qual è il minimo intero positivo* n *per cui* $f'(n) > 2002$?
La richiesta equivale alla risoluzione della seguente disequazione
$2 \cdot (2n + 4) \cdot (n^2 + 4n + 5) > 2002 \Rightarrow 2 \cdot (n + 2) \cdot [(n + 2)^2 + 1] > 1001 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 \cdot (n + 2)^3 + 2 \cdot (n + 2) > 1001 \Rightarrow (n + 2)^3 + (n + 2) > 500{,}5$
Deve perciò essere $(n + 2)^3 > 500$, dato che $n + 2$ è piccolo in confronto con $(n + 2)^3$. Il minimo n per cui accade è 6 (dato che $8^3 = 512$); verifichiamo che 5 non verifica la richiesta, quindi il minimo è proprio 6.

8. (Rice 2008) Calcolare $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n!}$. Suggerimento: Moltiplicare per 2 e osservare che il termine generale è derivata ennesima di … $\left[\frac{1}{2}e^2\right]$
9. (HSMC 2008) Trovare la derivata di ordine 2008 di $f(x) = x^{2007} \cdot ln(x)$. $\left[\frac{2007!}{x}\right]$
10. (AK 2008) Se $x^n + y^n = 1$, per qualche numero reale non nullo n, calcolare y''. $\left[(1-n)\cdot\frac{x^{n-2}}{y^{2n-1}}\right]$
11. (HSMC 2009) Sia una funzione tale che si abbia $f(1) = 3$, $f(3) = 1$, $f'(1) = -4$ e $f'(3) = 2$. Determinare la pendenza della tangente a $\frac{1}{f^{-1}(x)}$ in $x = 1$. $\left[-\frac{1}{18}\right]$
12. (HSMC 2009) Calcolare la derivata 50–esima di $f(x) = \frac{x^{50}}{1-x}$ in $x = 0$. [50!]
13. (Rice 2010) Calcolare $\lim_{t\to 0}\left[tan^{-1}\left(\frac{1}{x+t}\right) - tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right]$. $\left[-\frac{1}{1+x^2}\right]$
14. (AK 2010) $y(x)$ verifica l'equazione $ln(x + y) - e^{2xy} + 1 = 0$. Calcolare $y'(0)$. [1]
15. (HSMC 2011) Determinare la somma di tutti i numeri c che rendono la seguente funzione derivabile in $x = 1$: $f(x) = \begin{cases} x^2 + c^2 \cdot x - 1 & x \le 1 \\ c \cdot x^2 + 5x + 1 & x > 1 \end{cases}$. [3]

Questions in english

Working together

This is a question assigned at HSMC in 2002. *Suppose that f and g are differentiable*[1] *functions such that* $f(0) = 3$, $f'(0) = 2$, $g(0) = 7$, *and* $g'(0) = -1$. *Assuming that the function h given by* $h(x) = f(x) = g(x)$ *is well–defined and differentiable everywhere, what is the value of* $h'(0)$?
By the Quotient Rule, we have $h'(0) = \frac{f'(0)\cdot g(0) - f(0)\cdot g'(0)}{[g(0)]^2} = \frac{2\cdot 7 - 3\cdot(-1)}{7^2} = \frac{17}{49}$.

16. (HSMC 2000) Let $f(x)$ be a differentiable function and suppose a is a real number such that $f(a) > 0$ and $f'(a) > 0$: Let P be the point $(a; f(a))$; let Q be the point $(a; 0)$ and let R be the point where the tangent line to the graph of $f(x)$ at P intersects the x–axis. Give a formula for the area of the triangle with vertices PQR. $\left[\frac{[f(a)]^2}{2\cdot f'(a)}\right]$

[1] derivabili

17. (HSMC 2001) Find $f'(0)$ if $f(x) = x + f(-x)$ for all x. $\left[\frac{1}{2}\right]$

18. (HSMC 2001) Let f be infinitely differentiable and suppose that $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{n^2}{n^2+1}, \forall n\in\mathbb{N}$. Find $f^{IV}(0)$. [24]

19. (HSMC 2001) Suppose that $g(x)=f\left\{x^3+f\left[x^2+f(x)\right]\right\}$, where $f(1) = 1$; $f(2) = 2$; $f'(1) = 1$; $f'(2) = 2$ and $f'(3) = 3$. Then $g'(1)$ is? [27]

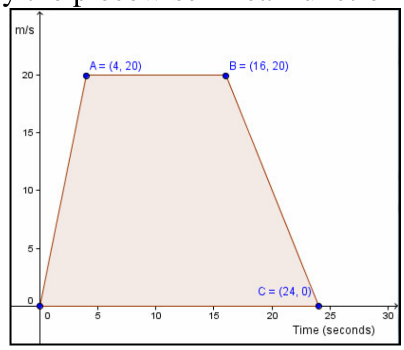
20. (HSMC 2002) The tangent line to the graph of the equation $y = x^2 + 7x + 11$ at the point (3; 41) crosses the y-axis at the point (0; a), where a is a real number. What is the value of a? [2]

21. (HSMC 2002) Define a function f by $f(x)=\frac{x^{2002}-1}{x-1}$, for all $x \neq 1$. Compute the limit $\lim\limits_{x\to 1} f'(x)$. [2003001]

22. (HSMC 2003) Let f and g be differentiable functions with some values of the functions and their derivatives given in the chart below. What is the derivative of $f[g(x)]$ at $x = 2$? [16]

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	4	3	1
$f'(x)$	4	3	2	1
$g(x)$	3	1	4	2
$g'(x)$	2	4	1	3

23. (CEEB 2005) A car is travelling on a straight road. For $0 \le t \le 24$ seconds, the car's velocity $v(t)$, in meters per second, is modelled by the piecewise-linear function defined by the following graph



a) For each of $v'(4)$ and $v'(20)$, find the value or explain why it does not exist. [$v'(4)$ does not exist; $v'(20) = -2{,}5$ m/s^2] b) Let $a(t)$ be the car's acceleration at time t, in m/s^2, For $0 < t < 24$, write a piecewise-defined function for $a(t)$. c) Find the average rate of change of v over the interval $8 \le t \le 20$. Does the Mean Value Theorem guarantee a value of c, for $8 < c < 20$, such that $v'(c)$ is equal to this average rate of change?

$$\left[\text{a) } a(t)=\begin{cases}5 & 0<t<4\\ 0 & 4<t<16\\ -5/2 & 16<t<24\end{cases}\text{; b) } -5/6\ m/s^2\text{; The MVT does not apply in [8; 20]}\right]$$

24. (HSMC 2006) Find all values of the parameter a, if any, such that the smallest value of the function $y = x^2 + (a + 4)x + 2a + 3$ in the interval [0,2] is equal to –4. [–3,5]

25. (AK 2008) If $f(x)=\frac{2}{x}, g(x)=\frac{x}{x^2+1}$, compute $D[f[g(x)]]$. $\left[\frac{2x^2-2}{x^2}\right]$

26. (AK 2009) Let y be a function of x which satisfies $ln(x + y) - 2xy = 0$ and $y(0) = 1$. Find $y'(0)$. [1]

27. (AK 2010) For what values of a and b will $f(x)=\begin{cases}ax & x<2\\ ax^2-bx+3 & x\ge 2\end{cases}$ be differentiable for all val-

ues of x? $\left[a = \frac{3}{4}; b = \frac{9}{4}\right]$

28. (Rice 2011) Tangent lines are drawn at the points of injection for the function $f(x) = cos(x)$ on [0; 2π]. The lines intersect with the x–axis so as to form a triangle. What is the area of this triangle? $\left[\frac{\pi^2}{4}\right]$

29. (HSMC 2011) Let $h(x) = x \cdot f^{-1}(x)$. Use the table of values below to find $h'(5)$. $\left[\frac{11}{2}\right]$

x	$f(x)$	$f'(x)$
2	4	–1
3	5	2
5	1	3

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Odontoiatria 1997) La derivata prima della funzione $f(x)= x \cdot (3x – 2)$ è:
A) $3x – 2$ B) $6x – 2$ C) $–2x$ D) x E) nessuna delle risposte proposte e' corretta
2. (Medicina 1997) La derivata della funzione $f(x)= 5x + 2ln(x)$ è:
A) $5 + 2x$ B) $\frac{2}{x}$ C) $5 + \frac{2ln(x)}{x}$ D) $5 + \frac{2}{x}$ E) nessuna di quelle delle precedenti risposte

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_5_10.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	**2**
B	**D**

10. Il calcolo differenziale

10.2 Rappresentazione grafica delle funzioni

Prerequisiti

- Sistema di riferimento cartesiano ortogonale
- Rappresentazione grafica di semplici funzioni
- Concetto di dominio e codominio di una funzione
- Concetto di infinito
- Gli insiemi numerici fondamentali e le loro proprietà
- Concetto di derivabilità
- Regole del calcolo differenziale

Obiettivi

- Riuscire a rappresentare in modo qualitativo una funzione
- Riuscire a stabilire l'andamento di una curva anche in punti singolari
- Risolvere problemi di massimo e minimo

Contenuti

- Estremi relativi di una funzione
- Rappresentazione grafica di una funzione

Parole chiave

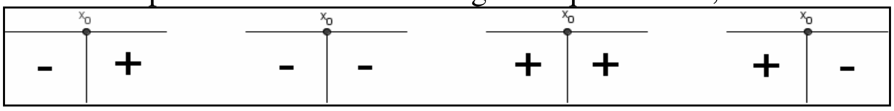
Asintoto obliquo – Concavità – Convessità – Estremo relativo – Flesso

Estremi relativi di una funzione

Il problema

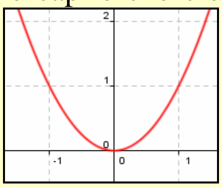
Abbiamo visto che laddove la derivata prima è positiva la funzione cresce, dove è negativa decresce. Cosa accade dove è nulla?

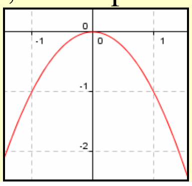
Il Teorema 2 dell'unità 10.1 ci dice cosa accade quando la derivata di una funzione è positiva o negativa. Cosa potrebbe accadere quando la derivata prima è nulla? Dobbiamo distinguere due casi. Se la derivata prima è nulla in un intero intervallo, il Corollario 10 della citata unità afferma che la funzione è costante. Cosa accade invece se la funzione ha derivata prima nulla solo in $x = x_0$ mentre è diversa da zero, e ovviamente esiste, in un intorno del detto punto? Sono possibili ovviamente i seguenti quattro casi, che abbiamo



rappresentato in figura.
Cosa accade in ciascuno di questi casi? Consideriamo un esempio.

Esempio 1

- Consideriamo la funzione $y = x^2$, la sua derivata prima è $2x$, che si annulla per $x = 0$, è positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$. Siamo quindi nel caso rappresentato per quarto nel precedente diagramma. Poiché abbiamo a che fare con una parabola, facilmente rappresentiamo la curva. Il punto è ovviamente il vertice ed è anche il minimo assoluto della funzione. Noi però dobbiamo concentrarci solo nell'intorno di zero. Localmente il punto di ascissa zero è perciò il minimo nel suo intorno. Non è difficile capire che ciò accade per tutte le funzioni che hanno questo diagramma del segno della derivata prima. 
- Così come non è difficile capire che il caso rappresentato dal diagramma, che ovviamente si ha per la funzione $y = – x^2$, , è esattamente il contrario, cioè il punto stavolta è un massimo nell'intorno.



Sulla base del precedente esempio poniamo alcune definizioni.

Definizione 1

Un punto $P \equiv (x_0; f(x_0))$, per la funzione $y = f(x)$, si dice di

- **minimo relativo** se esiste $I_r(P)$, in cui $f(x_0) \le f(x)$, $\forall\ x \in I_r(P)$;
- **massimo relativo** se esiste $I_r(P)$in cui $f(x_0) \ge f(x)$, $\forall\ x \in I_r(P)$;

Se non vogliamo specificare che un punto è di massimo o di minimo relativo lo diciamo di estremo relativo. Se la funzione è derivabile in x_0 e in un suo intorno, è ovvio che deve accadere quanto riportato dal seguente risultato.

Teorema 1 (di Fermat)

Condizione necessaria affinché la funzione derivabile $y = f(x)$, abbia in $P \equiv (x_0; f(x_0))$ un punto di estremo relativo è che si abbia $f'(x_0) = 0$.

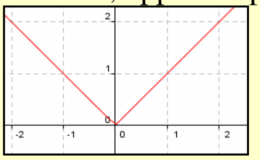
Dimostrazione

Ovvia, dato che un punto di estremo relativo è un punto di cambiamento della crescenza della funzione, che così passa dalla crescenza alla decrescenza (massimo relativo) o dalla decrescenza alla crescenza (minimo).

Prima di far vedere che la precedente condizione non è sufficiente, osserviamo che essa vale ovviamente solo per funzioni derivabili.

Esempio 2

Abbiamo già considerato la funzione $y = |x|$, come esempio di funzione continua ma non derivabile in $x = 0$. Quindi non possiamo applicare il criterio di Fermat, eppure il punto (0; 0) è ovviamente di minimo relativo, addirittura assoluto, per la funzione.



I protagonisti

Pierre de Fermat, nacque il 17 Agosto 1601 a Beaumont-de-Lomagne. Di ricca famiglia, pur studiando legge, si interessò sempre di matematica, tanto da esser definito dallo storico Bell come *il principe dei dilettanti*. Nel 1631 divenne avvocato e ufficiale governativo a Tolosa e perciò aggiunse il prefisso nobiliare *de* al proprio cognome che era solo *Fermat*. Nonostante la propria attività professionale continuò a effettuare ricerche matematiche autonomamente, corrispondendo con matematici professionisti come Carcavi o Mersenne. In particolare in una lettera a quest'ultimo del 26 Aprile 1636 proponeva due problemi sui massimi delle funzioni (anche se il concetto di funzione non era ancora stabile, non essendo, come abbiamo visto, stabilizzata neanche la geometria analitica). Dato che nessuno riuscì a risolvere i problemi proposti, Fermat mandò loro la propria opera: *Methodus ad disquierendam maximam et minimam*. Questo lavoro non era stato pubblicato e fu causa di molte dispute fra l'autore e parecchi matematici importanti, come Descartes. Nel seguito della sua vita si occupò soprattutto di teoria dei numeri in cui ottenne importanti risultati e propose forse il più noto problema della matematica moderna, chiamato ultimo Teorema di Fermat, secondo il quale l'equazione $x^n + y^n = z^n$ non ha soluzioni intere non nulle per $n > 2$. Solo nel 1994 l'inglese Andrew Wiles ne riuscì a pubblicare una dimostrazione completa e complicatissima. Dobbiamo ricordare anche la sua corrispondenza con Blaise Pascal, in cui i due posero le basi del moderno Calcolo delle Probabilità. Morì il 12 Gennaio 1665 a Castres.

Il criterio di Fermat non è una condizione sufficiente, dato che possono accadere anche il secondo e terzo caso mostrati nel diagramma. Enunciamo invece una condizione sufficiente.

Teorema 2

Condizione sufficiente affinché la funzione derivabile $y = f(x)$, abbia in $P \equiv (x_0; f(x_0))$ un punto di estremo relativo è che esista un intorno di x_0, in cui la derivata prima è diversa da zero e cambia di segno passando dall'intorno destro al sinistro. In simboli, $\exists\ \delta > 0: f'(x^*) \cdot f'(x°) < 0,\ \forall\ x^* \in (x_0 - \delta; x_0),\ \forall\ x° \in (x_0; x_0 + \delta)$.

Dimostrazione Per esercizio

Come conseguenza del precedente risultato abbiamo che i punti cuspidali sono punti di estremo relativo. La condizione precedente non è però necessaria.

Esempio 3

La funzione $f(x) = \begin{cases} 2 & x = 1 \\ 1 & x \neq 1 \end{cases}$, ha per $x = 1$ ovviamente un punto di massimo relativo, e anche assoluto, eppure in qualsiasi intorno di 1, la derivata prima è zero. La condizione del Teorema 2 non è necessaria neanche se la funzione è derivabile nel punto. Per esempio le funzioni costanti sono derivabili dappertutto e ogni loro punto è perciò da considerarsi sia massimo che minimo relativo e assoluto, ma in nessun intorno di nessun punto vi è un cambio di crescenza.

Vediamo allora di enunciare una condizione necessaria e sufficiente.

Teorema 3

Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $y = f(x)$, derivabile e non costante in X, abbia nel punto $P \equiv (x_0; f(x_0))$, $x_0 \in X$, un punto di massimo (rispettivamente minimo) relativo è che

$\exists\, \delta > 0: f'(x) > 0, \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0)$ e $f'(x) < 0, \forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta)$ [rispettivamente $f'(x) < 0, \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0)$ e $f'(x) > 0, \forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta)$]

Dimostrazione Per esercizio

Quindi gli estremi relativi di una funzione si cercano fra i punti in cui la derivata prima si annulla, ma anche fra quelli in cui la funzione è continua ma non derivabile.

Esempio 4

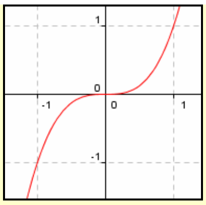
Vogliamo determinare gli estremi della funzione $y = sin^2(x) + cos(x) + 1$. Essendo periodica di periodo 2π, la studiamo solo in $[0; 2\pi]$ Calcoliamo la derivata prima: $y'(x) = 2sin(x) \cdot cos(x) - sin(x)$. Adesso la annulliamo, ottenendo le soluzioni $sin(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$; $cos(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \vee \frac{5\pi}{3}$. Abbiamo quindi dei *candidati* a essere estremi relativi, vediamo quali di essi lo sono. Rappresentiamo il segno.

	0	π/3	π	5/3π	2π
sin(x)	+	+	-	-	
2cos(x)-1	+	-	-	+	
f'(x)	+ ↗	- ↘	+ ↗	- ↘	

Quindi, grazie al Teorema 3, possiamo dire che i punti di ascissa $x = \frac{\pi}{3} \vee \frac{5\pi}{3}$ sono di massimo relativo, mentre quello di ascissa π è di minimo relativo.

Consideriamo adesso gli altri due casi previsti dal diagramma del segno della derivata prima. Ovviamente in questi due casi non vi è cambio di crescenza e perciò non vi può essere alcun estremo relativo. Quindi l'annullarsi della derivata prima che cosa *modifica* nell'andamento della funzione?

Esempio 5

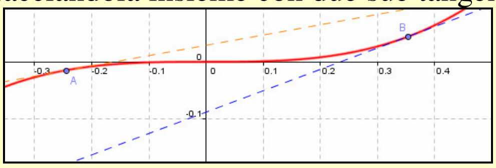


La funzione $y = x^3$ verifica il terzo caso del diagramma, dato che la sua derivata prima è $3x^2$ che è una quantità positiva in ogni intorno di zero, escluso lo stesso zero. Rappresentiamo la funzione con Geogebra. Come si vede, la funzione è crescente sia per $x < 0$ che per $x > 0$. In $x = 0$ non si ha un cambio di crescenza, ma la curva, rispetto all'asse delle ascisse, che rappresenta la retta tangente alla funzione, si comporta in modo per così dire opposto. Infatti per $x < 0$ la curva è al disotto della tangente, mentre per $x > 0$ è al di sopra. Questo crea un cambiamento di *punto di vista*. Nel senso che, se immaginiamo di percorrere la curva mantenendo i nostri piedi attaccati alla tangente alla curva, allora per $x < 0$ la nostra testa sarà *al disopra* della curva, mentre per $x > 0$ sarà al *disotto*.

In pratica la forma della curva è legata alle relazioni che la funzione ha con la propria tangente.

Esempio 6

Riconsideriamo la funzione $y = x^3$, tracciandola insieme con due sue tangenti in punti in cui il grafico si presenta in modo diverso.



Come si vede, in A la tangente è al di sopra della funzione, in B è al disotto.

Vediamo di definire in modo appropriato quanto detto finora in modo intuitivo.

Definizione 2

Data la funzione $y = f(x)$, derivabile nell'insieme X, detta t la retta tangente alla funzione nel suo punto $P \equiv (x_0; f(x_0))$, e detto $P' \equiv (x^*; y^*) \in t$, con x^* appartenente a un conveniente intorno I di x_0, se si ha

- $f(x^*) \leq y^*$, $\forall\, x^* \in I$, allora $f(x)$ volge la **concavità verso il basso** in x_0;
- $f(x^*) \geq y^*$, $\forall\, x^* \in I$, allora $f(x)$ volge la **concavità verso l'alto** in x_0.

Vale il seguente risultato.

Teorema 4

Una funzione $y = f(x)$, derivabile in x_0, volge la concavità verso il basso (rispettivamente verso l'alto) in x_0, se esiste un intorno I di x_0, per cui si ha

$$f(x^*) \leq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x^* - x_0),\ \forall x^* \in I \quad (\text{rispettivamente } f(x^*) \geq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x^* - x_0),\ \forall x^* \in I)$$

Dimostrazione

L'equazione della retta t tangente a $f(x)$ in x_0 è $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Quindi se la funzione volge la concavità verso il basso in x_0, deve aversi $f(x^*) \leq y^*$, per ogni x^* appartenente a un certo intorno I di x_0. Ma $y^* = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x^* - x_0)$, quindi, sostituendo, la disuguaglianza diventa $f(x^*) \leq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x^* - x_0)$, che è quello che voleva provarsi. Analoga dimostrazione quando la concavità è rivolta verso l'alto.

Esempio 7

Data la funzione $y = x^3$, consideriamo il suo punto di ascissa $x = -1$, in cui la concavità, come vediamo nel grafico già tracciato, è rivolta verso il basso. Verifichiamo tale affermazione. Deve esistere un intorno I di -1, in cui deve aversi $f(x) \leq f(-1) + f'(-1) \cdot (x + 1)$, $\forall x \in I \Rightarrow x^3 \leq -1 + 3 \cdot (x + 1) \Rightarrow x^3 + 1 \leq 3 \cdot (x + 1) \Rightarrow (x + 1) \cdot (x^2 - x + 1) \leq 3 \cdot (x + 1)$. Adesso, se siamo in un intorno sinistro di $x = -1$, si ha $x + 1 < 0$, quindi la disuguaglianza diventa $x^2 - x + 1 \geq 3 \Rightarrow x^2 - x - 2 \geq 0$, che ha soluzioni: $x \leq -1 \vee x \geq 2$. Dato che siamo nell'ipotesi $x \leq -1$, essa è verificata sempre. Se siamo in un intorno destro di -1, si ha $x + 1 > 0$, e la disuguaglianza diventa $x^2 - x + 1 \leq 3 \Rightarrow x^2 - x - 4 \leq 0$, che ha soluzioni: $\frac{1-\sqrt{17}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{17}}{2}$. Questa soluzione contiene un intorno destro di -1, quindi anche questa è verificata. Effettivamente la funzione nel punto di ascissa $x = -1$ volge la concavità verso il basso.

Definizione 3

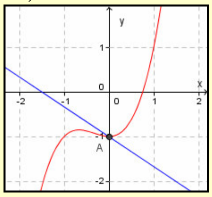
Data $y = f(x)$, definita in $x = x_0$, se esiste un intorno I di x_0, in cui la funzione cambia il verso della propria concavità passando dall'intorno sinistro al destro allora $P \equiv (x_0; f(x_0))$, si dice **punto di flesso** per $f(x)$.

Definizione 4

Data la funzione $y = f(x)$ derivabile in un intorno di un punto di flesso $P \equiv (x_0; f(x_0))$, allora P si dice **punto di flesso a tangente orizzontale** se $f'(x_0) = 0$ (**a tangente obliqua** se $f'(x_0) \neq 0$).

Esempio 8

- $O \equiv (0; 0)$ è un punto di flesso a tangente orizzontale per la funzione $y = x^3$, con retta tangente $y = 0$.
- $A \equiv (0; -1)$ è un punto di flesso a tangente obliqua per la funzione in figura, $y = x^3 + x^2 - 1$, con retta tangente $2x + 3y + 3 = 0$. Vedremo in seguito come si fa a stabilire ciò.



Come possiamo determinare i punti di flesso a tangente obliqua? Enunciamo un risultato generale, che mette in gioco anche la determinazione dei punti di estremo relativo.

Teorema 5

Una funzione $y = f(x)$, derivabile almeno fino all'ordine n in X, per la quale $f^h(x_0) = 0$, $\forall h : 1 \leq h \leq (n-1)$, e $f^n(x_0) \neq 0$, ha in $P \equiv (x_0; f(x_0))$ un punto di

- massimo relativo, se n è pari e $f^n(x_0) < 0$;
- minimo relativo, se n è pari e $f^n(x_0) > 0$;
- flesso, se n è dispari.

Dimostrazione

La funzione verifica le ipotesi del teorema di Taylor, quindi può esprimersi mediante il polinomio di Taylor di punto iniziale x_0:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f''(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2!} + ... + f^{n-1}(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \left[f^n(x_0) + h(x)\right]\cdot\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

In cui ricordiamo che si ha: $\lim_{x\to x_0} h(x) = 0$. Tenuto conto delle ipotesi la precedente si semplifica in: $f(x) = f(x_0) + \left[f^n(x_0) + h(x)\right]\cdot\frac{(x-x_0)^n}{n!} \Rightarrow f(x) - f(x_0) = \left[f^n(x_0) + h(x)\right]\cdot\frac{(x-x_0)^n}{n!}$. Del resto si ha anche $\lim_{x\to x_0}\left[f^n(x_0) + h(x)\right] = f^n(x_0) \neq 0$. Quindi per il teorema della permanenza del segno vi è un intorno completo di x_0 in cui $f(x) - f(x_0)$ ha lo stesso segno di $f^n(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^n}{n!}$. Perciò se n è dispari, passando dall'intorno destro a quello sinistro vi è un cambio di segno, dato che $x - x_0$ cambia segno mentre la derivata ennesima no. Perciò abbiamo un flesso.

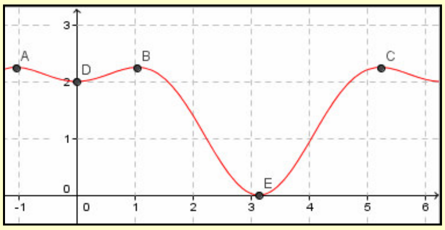
Se invece n è pari, $f(x) - f(x_0)$ ha lo stesso segno di $f^n(x)$, e quindi se esso è positivo avremo un intorno completo di x_0 in cui si ha $f(x) > f(x_0)$, cioè in x_0 si ha un minimo relativo; se invece è negativo avremo un intorno completo di x_0 in cui si ha $f(x) < f(x_0)$, cioè in x_0 si ha un massimo relativo.

Il precedente risultato permette la determinazione di tutti gli estremi relativi e i punti di flesso per le funzioni derivabili. Risulta particolarmente comodo per funzioni per le quali è complicato studiare il segno della derivata prima.

Esempio 9

Riprendiamo in considerazione la funzione $y = sin^2(x) + cos(x) + 1$, di cui abbiamo già determinato gli estremi relativi, vogliamo ottenere gli stessi risultati con il metodo delle derivate successive. Ricordiamo che la derivata prima è $y'(x) = 2sin(x) \cdot cos(x) - sin(x)$, che in $[0; 2\pi]$ si annulla per $x = 0 \vee \frac{\pi}{3} \vee \pi \vee \frac{5\pi}{3} \vee 2\pi$.

Calcoliamo la derivata seconda: $y''(x) = 2cos^2(x) - 2sin^2(x) - cos(x) = 2cos(2x) - cos(x)$. Sostituiamole gli zeri della derivata prima: $y''(0) = y''(2\pi) = 2 - 1$, $y''(\pi) = 2 + 1$, otteniamo valori positivi, quindi per il teorema 5 i punti di ascissa 0, π e 2π sono di minimo relativo. Sostituiamo gli altri valori: $y''\left(\frac{\pi}{3}\right) = y''\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2}$. Perciò la derivata seconda è negativa, quindi per il teorema 5 i punti di ascissa $\frac{\pi}{3} \vee \frac{5}{3}\pi$, sono di massimo relativo. In effetti possiamo estendere quanto trovato a tutta la periodicità della curva. Con Geogebra tracciamo il grafico per confermare quanto trovato.



Chiudiamo enunciando dei risultati relativi alla concavità di una funzione e alla determinazione dei punti di flesso.

Teorema 6

Condizione necessaria affinché una funzione $y = f(x)$, derivabile almeno fino all'ordine 2 in X, abbia un punto di flesso in $P \equiv (x_0; f(x_0))$ è che si abbia $f''(x_0) = 0$.

Dimostrazione omessa

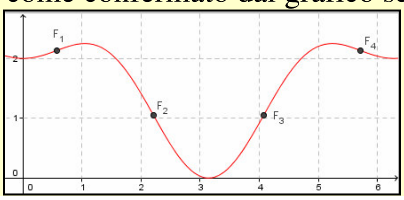
Teorema 7

Data una funzione $y = f(x)$, derivabile almeno fino all'ordine 2 in X, se $f''(x) > 0$ [risp. < 0] $\forall\ x \in X$, la funzione volge la concavità verso l'alto [risp. verso il basso] in X.

Dimostrazione omessa

Esempio 10

Vogliamo determinare i punti di flesso della funzione $y = sin^2(x) + cos(x) + 1$ per $0 \le x \le 2\pi$. Nell'esempio 9 abbiamo già calcolato la derivata seconda: $y''(x) = 2cos(2x) - cos(x) = 4cos^2(x) - cos(x) - 2$. Annulliamola: $cos(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$. Quindi i flessi hanno ascisse $cos^{-1}\left(\frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}\right) \approx 0{,}57 \vee \approx 2{,}20; \approx 4{,}08; \approx 5{,}71$. Studiando il segno della derivata seconda abbiamo che la funzione volge la concavità verso l'alto fra due flessi successivi e corrispondenti alle stesse ordinate e volge la concavità verso il basso fra due flessi successivi e relativi a diverse ordinate, come confermato dal grafico seguente ottenuto con Geogebra.

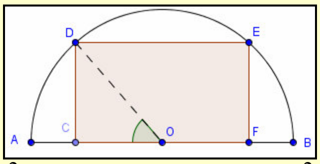


La ricerca di estremi relativi o assoluti può essere utile anche nella risoluzione di problemi matematici o scientifici in generale.

Esempio 11

In una semicirconferenza di raggio r possiamo inscrivere infiniti rettangoli. Fra questi ve ne è uno la cui area è massima? Uno la cui area è minima? Uno il cui perimetro è massimo? Il cui perimetro è minimo? Consideriamo la figura. Il rettangolo si può determinare in vari modi, per esempio mediante la posizione di uno qualsiasi dei suoi quattro vertici, per esempio D. Questi a sua volta determina l'angolo variabile $D\widehat{O}C = x$. Determiniamo quindi l'area del generico rettangolo al variare di tale angolo. Abbiamo

$\overline{DC} = \overline{OD} \cdot sin(x) = r \cdot sin(x); \overline{OC} = \overline{OD} \cdot cos(x) = r \cdot cos(x)$.

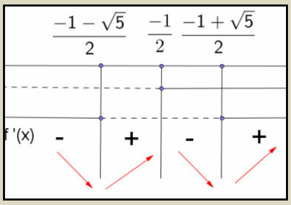


Quindi l'area, al variare di x misura: $2r^2 \cdot sin(x) \cdot cos(x) = r^2 \cdot sin(2x)$. Dobbiamo perciò determinare massimo e minimo di questa funzione nell'intervallo: $0° < x < 90°$. In questo caso potremmo fare a meno di usare il calcolo differenziale, poiché il massimo si ha quando è massimo il seno, cioè se $2x = 90° \Rightarrow x = 45°$, mentre il minimo non ci sarà perché il valore $x = 0°$ non è accettabile. Usiamo invece il calcolo differenziale: $y' = r^2 \cdot 2 \cdot cos(2x) \Rightarrow cos(2x) = 0 \Rightarrow 2x = 90° \Rightarrow x = 45°$. Applichiamo il metodo delle derivate successive: $y'' = -r^2 \cdot 4sin(2x) \Rightarrow y''(45°) = -r^2 \cdot 4sin(2\cdot45°) = -4 < 0$. Quindi effettivamente il massimo si ha quando l'angolo è 45°. In questo caso avremo che l'area massima misura $r^2 \cdot sin(90°) = r^2$, mentre i lati sono l'uno, FC, doppio dell'altro CD.
Vediamo cosa accade del perimetro: $2p = 2r \cdot sin(x) + 4r \cdot cos(x) = 2r \cdot [sin(x) + 2 \cdot cos(x)]$. Calcoliamo la derivata prima: $2r \cdot [cos(x) - 2 \cdot sin(x)]$. Annulliamo: $cos(x) - 2 \cdot sin(x) = 0 \Rightarrow cot(x) = 2 \Rightarrow x = cot^{-1}(2)$. Calcoliamo la derivata seconda: $2r \cdot [-sin(x) - 2 \cdot cos(x)]$. Osserviamo che $cot^{-1}(2)$ appartiene al primo quadrante. Quindi sostituendo nella derivata seconda otterremo un valore negativo, cioè il perimetro ha un massimo, che si ottiene per $x = cot^{-1}(2) \approx 26°33'54''$ e che vale circa $4{,}47r$. Invece non ha un minimo, tranne nel caso degenere in cui sparisce il rettangolo, ed è ovviamente zero.

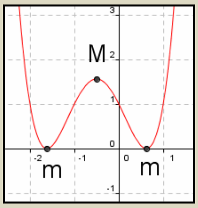
Verifiche

Lavoriamo insieme

Per alcune funzioni gli estremi relativi e assoluti possono determinarsi anche senza bisogno del calcolo differenziale. Per esempio per la funzione $f(x) = (x^2 + x - 1)^2$, che è sempre non negativa, è ovvio che le ascisse che annullano la base sono minimi assoluti. Cioè $x^2+x-1=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Cercando invece con il metodo della derivata prima abbiamo: $f'(x)=(2x-1)\cdot(x^2+x-1)=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \vee x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.



Cioè troviamo un ulteriore valore, per il quale si ha ovviamente un punto di massimo, dato che dopo un minimo, in una funzione continua, se vi è un estremo deve esserci per forza un massimo. Tracciamo il grafico con Geogebra per conferma.



Senza usare il calcolo differenziale determinare gli eventuali estremi relativi o assoluti delle funzioni seguenti. Nelle risposte M indica massimo, m indica minimo

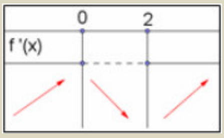
Livello 1

1. $f(x)=\sqrt{x^2-1}$; $f(x)=\frac{x^4}{x^3+1}$; $f(x) = (x^2 + 1)^3$ [($m \equiv (-1; 0)$, $m \equiv (1; 0)$) ; $m \equiv (0; 0)$; $m \equiv (0; 1)$]
2. $f(x) = (x^2 - 4)^6$; $f(x) = |x - 1| + |2 - x|$; $f(x) = 25 - (x^2 + 3)^3$
[($m \equiv (-2; 0)$, $m \equiv (2; 0)$) ; ($m \equiv (x; 1)$, $1 \le x \le 2$) ; $M \equiv (0; -2)$]
3. $f(x) = |x + 1| - |x|$; $f(x) = |2x + 1| + |x|$ $\left[\left(m\equiv(x;-1), x\le -1, M\equiv(x;1), x\ge 1\right);\left(m\equiv\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), m\equiv(0;1)\right)\right]$
4. $f(x) = sin(x^2 + x)$
$\left[m\equiv\left(-\frac{1}{2};sin^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)\right), M_k\equiv\left(\frac{-1\pm\sqrt{8k\pi+2\pi+1}}{2};1\right), m_k\equiv\left(\frac{-1\pm\sqrt{8k\pi+6\pi+1}}{2};-1\right), k\ge 0\right]$
5. $f(x) = sin^{-1}(x^2)$; $f(x)=\frac{1}{e^{x^2+1}+1}$ $\left[\left(M_{1,2}\equiv\left(\pm 1;\frac{\pi}{2}\right), m\equiv(0;0)\right); M\equiv\left(0;\frac{1}{e+1}\right)\right]$
6. $f(x) = |2 - x| - |2x + 3|$; $f(x) = 3 - (x^2 + 1)^4$ $\left[\left(M\equiv\left(-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right), m\equiv(2;-7)\right); M\equiv(0;2)\right]$

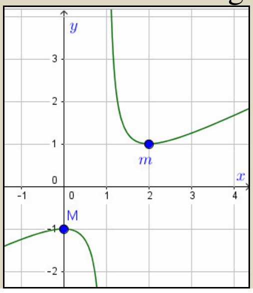
Lavoriamo insieme

Vogliamo determinare gli eventuali estremi relativi della funzione $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{2x-2}$. Calcoliamo la derivata: $f'(x)=\frac{(2x-2)\cdot(2x-2)-(x^2-2x+2)\cdot 2}{(2x-2)^2}= \quad =\frac{4x^2-8x+4-2x^2+4x-4}{(2x-2)^2}=$

$\frac{2x^2-4x}{4\cdot(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{2\cdot(x-1)^2}$. Determiniamo gli zeri: $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2$. Costruiamo il grafico del segno della derivata.



Quindi possiamo dire che $M \equiv (0; -1)$ è un massimo relativo, mentre $m \equiv (2; 1)$ è un minimo relativo. Tracciamo il grafico con Geogebra per conferma.



Determinare gli eventuali estremi relativi delle funzioni seguenti. Nelle risposte M indica massimo, m indica minimo e F indica flesso a tangente orizzontale

Livello 1

7. $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}$; $f(x)=\frac{x^3}{3}+x$; $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+6x$; $f(x)=\frac{x^3}{3}+3x^2+9x+9$

$\left[M\equiv(0;0),m\equiv\left(1;-\frac{1}{6}\right);\text{Sempre crescente};M\equiv\left(2;\frac{14}{3}\right),m\equiv\left(3;\frac{9}{2}\right);F\equiv(-3;0)\right]$

8. $f(x)=-\frac{x^5}{5}-\frac{4}{3}x^3-3x$; $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}$; $f(x)=\frac{4x}{3}-\frac{7\cdot ln(3x+1)}{9}$; $f(x)=\frac{x^4}{4}+x^3+\frac{x^2}{2}+3x$

$\left[\text{Sempre decrescente; } M\equiv(0;0),m_{12}\equiv\left(\pm1;\frac{1}{2}\right);m\equiv\left(\frac{1}{4};\frac{3-7\cdot ln\left(\frac{7}{4}\right)}{9}\right);m\equiv\left(-3;-\frac{45}{4}\right)\right]$

9. $f(x)=\frac{6x^5}{5}-\frac{13x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2$; $f(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{2}+\frac{2x^3}{3}-x^2+x-\frac{11}{30}$; $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$

$\left[M_1\equiv\left(-\frac{1}{3};\frac{29}{540}\right),m_1\equiv(0;0),M_2\equiv\left(\frac{1}{2};\frac{121}{960}\right),m_2\equiv\left(2;-\frac{104}{15}\right);m\equiv(1;0);\text{Sempre decrescente}\right]$

10. $f(x)=\frac{x^3}{2}+2x+3ln(x-2)$; $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x$; $f(x) = x - 2tan^{-1}(x)$; $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + x$

$\left[\text{Sempre crescente; Sempre crescente; } M\equiv\left(-1;\frac{\pi}{2}-1\right),m\equiv\left(1;1-\frac{\pi}{2}\right);F\equiv\left(0;-\frac{3}{2}\right)\right]$

11. $f(x)=\frac{2x-3\cdot ln(x-1)+3\cdot ln(x+1)}{2}$; $f(x) = sin(x) - cos(x)$, $x \in [0; 2\pi]$; $f(x) = e^x - e^{-x}$

$\left[M\equiv\left(-2;-\frac{4+ln(27)}{2}\right),m\equiv\left(2;\frac{4+ln(27)}{2}\right);M\equiv\left(\frac{3}{4}\pi;\sqrt{2}\right),m\equiv\left(\frac{7}{4}\pi;-\sqrt{2}\right);\text{Sempre crescente}\right]$

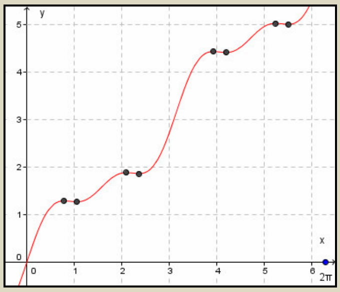
12. $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$; $f(x) = x\cdot ln(x^2 - x) - ln(x - 1) - 2x$; $f(x) = e^x + e^{-x}$

$\left[M\equiv\left(1-\sqrt{2};2-2\cdot\sqrt{2}\right),m\equiv\left(1+\sqrt{2};2+2\cdot\sqrt{2}\right);m\equiv\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};-ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)-\sqrt{5}-1\right);m\equiv(0;2)\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo determinare gli eventuali estremi relativi della funzione $f(x) = 2sin(x) \cdot cos^3(x) + x$, $x \in [0, 2\pi]$.
$f'(x) = 2cos(x) \cdot cos^3(x) + 2sin(x) \cdot 3cos^2(x) \cdot [-sin(x)] + 1 = 2cos^4(x) - 6sin^2(x) \cdot cos^2(x) + 1 = 2cos^4(x) - 6cos^2(x) + 6cos^4(x) + 1 = 8cos^4(x) - 6cos^2(x) + 1$. $f'(x)=0 \Rightarrow cos^2(x)=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{8}=\begin{cases}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}\end{cases} \Rightarrow cos(x)=\begin{cases}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \pm\frac{1}{2}\end{cases}$

Quindi: $cos(x)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}\vee x=\frac{3\pi}{4}\vee x=\frac{5\pi}{4}\vee x=\frac{7\pi}{4}; cos(x)=\pm\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}\vee x=\frac{2\pi}{3}\vee x=\frac{4\pi}{3}\vee x=\frac{5\pi}{3}$.
Adesso piuttosto che studiare il segno della derivata prima, applichiamo il metodo delle derivate successive.
$f''(x) = -32cos^3(x)\cdot sin(x) + 12\, cos(x)\cdot sin(x) = -4cos(x)\cdot sin(x) \cdot [-8cos^2(x) + 3] = -2sin(2x) \cdot [-8cos^2(x) + 3]$.
Sostituiamo i valori: $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cdot sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left[-8\cdot cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)+3\right]=2\cdot\left[-8\cdot\frac{1}{2}+3\right]=-2<0$, quindi il punto di ascissa $\frac{\pi}{4}$ è di massimo relativo. Allo stesso modo si vede che sono massimi anche i punti di ascisse: $\frac{5\pi}{4},\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$; mentre sono minimi relativi i punti di ascisse $\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}$. Ecco il grafico:



Livello 2

13. $f(x)=\sqrt{(4x-5)^3}$; $f(x) = |x + 1| + |x^2 + x|$ $\left[m\equiv\left(\frac{5}{4};0\right);\left(m\equiv(-1;0),M\equiv(0;1)\right)\right]$

14. $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$; $f(x) = |x - 1| - |x^2 - 3x + 2|$ [$(m \equiv (2; 0), m \equiv (3; 0))$; $(m \equiv (-1; 0), M \equiv (2; 1))$]

15. $f(x) = |x^2 - 5x + 6| - |x^2 - 4x + 3|$; $f(x) = ln(x^2 - 1)$ [$(m \equiv (2; -1), M \equiv (3; 0))$; Nessun estremo]

16. $f(x) = sin^2(x) + sin(x)cos(x) + x$, $x \in [0; 2\pi]$ $\left[M_1\equiv\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}+1\right),m\equiv\left(\frac{3\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right),M_2\equiv\left(\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}+1\right)\right]$

17. $f(x) = ln(x^2 + x - 1)$; $f(x) = ln(x^2 + x + 1)$ $\left[\text{Nessun estremo; } m\equiv\left(-\frac{1}{2};ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)\right]$

18. $f(x)=\frac{|x^2-1|}{x^2+1}$; $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$ [$(m \equiv (\pm1; 0), M \equiv (0; 1))$; Nessun estremo]

19. $f(x)=sin^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$; $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$; $f(x)=sin^{-1}[cos(x)]$
$\left[m\equiv\left(0;-\frac{\pi}{2}\right);F\equiv(0;0);\left(m\equiv\left(\pi+2k\pi;-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),M\equiv\left(2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)\right]$

Determinare gli eventuali estremi relativi delle funzioni seguenti al variare dei parametri
Livello 3

20. $f(x) = a \cdot sin(x) + b \cdot cos(x)$, $b > 0$, $x \in [0, 2\pi]$ $\left[m\equiv\left(tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right);\dots\right),M\equiv\left(tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)-\pi;\dots\right)\right]$

21. $f(x)=\dfrac{x}{x+a}$; $f(x)=\dfrac{x}{\left(x^2-a^2\right)}$ [Nessun estremo ; Nessun estremo]

22. $f(x)=\left(x^2+ax+1\right)^2$ $\left[\begin{cases} m\equiv\left(-\dfrac{a}{2};\ldots\right) & -2\le a\le 2 \\ m\equiv\left(\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4}}{2};\ldots\right), M\equiv\left(-\dfrac{a}{2};\ldots\right) & a<-2\vee a>2 \end{cases}\right]$

23. $f(x)=x^3+ax^2+x+1$ $\left[\begin{cases} m\equiv\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3};\ldots\right) & a=\pm\sqrt{3} \\ m:\equiv\left(\dfrac{-a+\sqrt{a^2-3}}{3};\ldots\right), M\equiv\left(\dfrac{-a-\sqrt{a^2-3}}{3};\ldots\right) & a<-\sqrt{3}\vee a>\sqrt{3} \end{cases}\right]$

24. $f(x)=\sqrt{x^2+ax+1}$ $\left[m\equiv\left(-\dfrac{a}{2};\ldots\right) \text{ se } -2\le a\le 2\right]$

25. Sia $f(x)=k\cdot\sqrt{x}-\ln x, x>0, k\in\mathbb{R}$. Determinare per quali valori di *k*, si ha un estremo relativo per *x* = 1, stabilendo che tipo di estremo è. [Minimo per *k* = 2]

Rispondere alle seguenti domande giustificando la risposta

Livello 3

26. Un polinomio di quinto grado quanti estremi relativi può avere al massimo? [4]
27. Un polinomio di terzo grado quanti estremi relativi può avere al massimo? [2]
28. Un polinomio di quinto grado può avere solo due massimi relativi? [No]
29. Una funzione continua può avere solo due massimi relativi o solo due minimi relativi? [No]
30. Una funzione non continua può avere solo due massimi relativi o solo due minimi relativi? [Sì]
31. Una funzione simmetrica rispetto all'asse *y* può avere 2 massimi relativi e un minimo relativo? [Sì, solo se il minimo ha ascissa zero]
32. Una funzione simmetrica rispetto all'origine può avere 2 massimi relativi e un minimo relativo? [Sì, solo se il minimo ha ascissa zero]
33. Una funzione simmetrica rispetto all'asse *y* ma non definita per *x* = 0, può avere un numero dispari di massimi relativi? [No]
34. Una funzione simmetrica rispetto all'origine ma non definita per *x* = 0, se ha 3 massimi relativi, quanti minimi relativi ha? [3]

Lavoriamo insieme

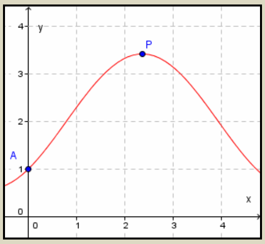
Data la funzione *y* = *a* + *b* · *sin*(*x*) + *c* · *cos*(*x*), vogliamo determinare i valori dei parametri *a, b* e *c* in modo che essa abbia $P\equiv\left(\dfrac{3\pi}{4}:2+\sqrt{2}\right)$ come estremo relativo e passi per il punto *A* ≡ (0; 1). Dobbiamo determinare 3 parametri, quindi abbiamo bisogno di 3 informazioni. Imponiamo le condizioni relative a ciascuna di esse. La condizione necessaria per l'esistenza di un estremo relativo è che la derivata prima sia nulla. Dato che si ha: *y*′ = *b* · *cos*(*x*) – *c* · *sin*(*x*), deve aversi:

$$b\cdot cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)-c\cdot sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow-\frac{\sqrt{2}}{2}b-\frac{\sqrt{2}}{2}c=0\Leftrightarrow-b-c=0\Leftrightarrow b=-c$$

Le altre due condizioni si trovano imponendo l'appartenenza dei punti, si ha così il sistema:

$$\begin{cases} b=-c \\ a+b\cdot sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)+c\cdot cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}+2 \\ a+b\cdot sin(0)+c\cdot cos(0)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-c \\ a+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot b-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot c=\sqrt{2}+2 \\ a+c=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b=-c \\ 1-c-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot c-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot c=\sqrt{2}+2 \\ a=1-c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-c \\ \left(-1-\sqrt{2}\right)\cdot c=\sqrt{2}+1 \\ a=1-c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ c=-1 \\ a=2 \end{cases}$$. Quindi si ha: $y = 2 + sin(x) - cos(x)$. A lato vi è il grafico di conferma.



Date le seguenti funzioni, determinare i valori dei parametri reali, se esistono, che verificano le condizioni indicate

Livello 2

35. $y = ax^3 + bx^2 + x$; ha estremi relativi per $x = 1$; $x = 2$ $\left[a=\frac{1}{6}, b=-\frac{3}{4}\right]$

36. $y = ax^3 + x^2 + bx + 1$; ha estremi relativi per $x = 0$; $x = 1$ $\left[a=-\frac{2}{3}, b=0\right]$

37. $y = ax^3 + bx^2 + x - 1$; ha estremo relativo in $E \equiv (1; 2)$ $[a = -5; b = 7]$

38. $y = ax + ln(bx)$; passa per il punto $P \equiv (e; e-1)$; estremo relativo per $x = 1$ $[a = -1; b = e^{2e-2}]$

39. $y=\frac{a\cdot x+1}{x-b}$; passa per il punto $P \equiv (1; -1)$; estremo relativo per $x = 0$ $[\varnothing]$

40. $y=\frac{a\cdot x^2+1}{x^2-b}$; estremo relativo in $\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ $[a \neq 0, b = 2]$

41. $y=\frac{x^2+ax+b}{x^2-ax+b}$; estremo relativo in $E\equiv\left(2;\frac{5}{3}\right)$ $[a = 1, b = 4]$

Livello 3

42. $y=\frac{x^2+ax+b}{x^2-x+c}$; estremo relativo in $E\equiv\left(\frac{1}{2};\frac{7}{11}\right)$, passa per $A\equiv\left(0;\frac{2}{3}\right)$ $[a = -1, b = 2, c = 3]$

43. $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$; estremo relativo in $E\equiv\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, passa per $A \equiv (0; 1)$ $[a = b = c = 1]$

44. $y=ln\left(ax^2+bx+c\right)$; estremo relativo in $E\equiv\left(\frac{1}{2};ln\left(\frac{11}{4}\right)\right)$,passa per $A \equiv (1; ln(3))$ $[a = 1, b = -1, c = 3]$

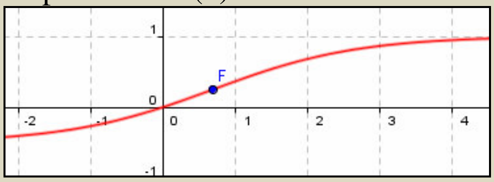
45. $y=\frac{2a\cdot x^2-x+b}{3x+2c}$; passa per $P \equiv (1; 2)$; estremi relativi per $x = 2$ e $x = 3$ $\left[a=\frac{21}{20}, b=-\frac{101}{100}, c=-\frac{15}{4}\right]$

Lavoriamo insieme

Consideriamo la funzione $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+2}$, vogliamo stabilire se ha punti di flesso e quindi vogliamo studiare la sua concavità. Abbiamo: $f'(x)=\dfrac{e^x\cdot\left(e^x+2\right)-\left(e^x-1\right)\cdot e^x}{\left(e^x+2\right)^2}=\dfrac{e^x\cdot\left(e^x+2-e^x+1\right)}{\left(e^x+2\right)^2}=\dfrac{3e^x}{\left(e^x+2\right)^2}$;

$$f''(x)=\frac{3e^x\cdot\left(e^x+2\right)^{\cancel{2}}-2\cdot\cancel{\left(e^x+2\right)}\cdot e^x\cdot 3e^x}{\left(e^x+2\right)^{\cancel{4}\,3}}=\frac{e^x\cdot\left(3e^x+6-6e^x\right)}{\left(e^x+2\right)^3}=\frac{3e^x\cdot\left(2-e^x\right)}{\left(e^x+2\right)^3}.$$

Azzeriamo la derivata seconda: $e^x = 2$. Quindi abbiamo un flesso per $x = ln(2)$. La cui ordinata è



$f\left[ln(2)\right]=\dfrac{e^{ln(2)}-1}{e^{ln(2)}+2}=\dfrac{2-1}{2+2}=\dfrac{1}{4}$. A lato il grafico di conferma.

Determinare gli eventuali punti di flesso a tangente obliqua delle funzioni seguenti

Livello 1

46. $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{2x-2}$; $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$; $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+2}$ $\left[\varnothing;\left(-\dfrac{2}{9};\dfrac{205}{243}\right);\varnothing;\left(\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3};-\dfrac{1}{8}\right)\right]$

47. $f(x) = x^4 + x^2 + 1$; $f(x)=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2}{2}+1$; $f(x)=\dfrac{x^4}{12}-\dfrac{x^3}{6}-x+2$ $\left[\varnothing;\left(-1;\dfrac{4}{3}\right);\left((0;2),\left(1;\dfrac{11}{12}\right)\right)\right]$

48. $f(x)=\dfrac{x^4}{12}-\dfrac{5x^3}{6}+3x^2+2x-1$; $f(x)=(x-3)\cdot e^x$ $\left[\left(\left(2;\dfrac{29}{3}\right),\left(3;\dfrac{65}{4}\right)\right);(1;-2e)\right]$

49. $f(x)=\left(\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x}{2}-\dfrac{5}{8}\right)\cdot e^{2x}$; $f(x)=x^2\cdot ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ $\left[\left(\left(2;-\dfrac{5e^4}{8}\right),\left(-2;\dfrac{11}{8e^4}\right)\right);\left(\pm\sqrt{\dfrac{1}{e^3}};\dfrac{3}{e^3}\right)\right]$

Livello 2

50. $f(x)=\left(\dfrac{x^4}{12}+\dfrac{x^3}{6}\right)\cdot ln(x)-\dfrac{7x^4+20x^3}{144}$; $f(x)=\dfrac{x^4}{x^3+1}$ $\left[\left(1;-\dfrac{3}{16}\right);\left(\sqrt[3]{2};\dfrac{2\cdot\sqrt[3]{2}}{3}\right)\right]$

51. $f(x) = (3 - x)\cdot sin(x) - 2cos(x) + x - 1$, $x \in[0, 2\pi]$ $[(3; 2 - 2cos(3)), (0; -3), (\pi; \pi + 1), (2\pi; 2\pi - 3)]$

52. $f(x)=\dfrac{4\cdot\sqrt{(x-1)^5}\cdot(3x+4)}{105}$; $f(x)=\dfrac{4\cdot\sqrt{(x+1)^5}\cdot(3x-4)}{105}$ $\left[\varnothing;\left(0;-\dfrac{16}{105}\right)\right]$

Determinare gli eventuali punti di flesso a tangente obliqua delle funzioni seguenti, al variare dei parametri reali

Livello 3

53. $f(x)=\dfrac{ax^3}{6}+\dfrac{bx^2}{2}+c$; $f(x) = (x - a - 2)\cdot e^x$ $\left[\left(-\dfrac{b}{a};\dfrac{b^3+3a^2c}{3a^2}\right),a\neq 0;\left(a;-2e^a\right)\right]$

54. $f(x)=\dfrac{ax^3}{6}+\dfrac{bx^2}{2}+cx+d$ $\left[\left(-\dfrac{b}{a};\dfrac{b^3-3abc+3a^2d}{3a^2}\right),a\neq 0\right]$

55. $f(x)=\dfrac{x^4}{12}-\dfrac{(a+b)}{6}x^3+\dfrac{ab}{2}x^2+cx+d$ $\left[\left(a;\dfrac{-a^4+4a^3b+12ac+12d}{12}\right),\left(b;\dfrac{-b^4+4ab^3+12bc+12d}{12}\right)\right]$

56. $f(x) = (a - x)\cdot sin(x) - 2cos(x)$ $[(a; -2cos(a)), (2k\pi; -2), (2k\pi - 1; 2))]$

57. $f(x) = [x^2 - (a + b + 4)\cdot x + ab + 2a + 2b + 6]\cdot e^{2x}$ $[(a; - 2(a - b - 3)\cdot e^a), (b; 2(a - b + 3)\cdot e^b)]$

Giustificare le risposte ai questi seguenti

Livello 3

58. Sia $f(x) = k \cdot \sqrt{x} - ln(x), x > 0, k \in \mathbb{R}$. Determinare per quali valori di k la funzione ha punti di flesso. [$4 \cdot e^{-2}$]

59. La funzione $f(x) = \dfrac{x \cdot (x^2+3) \cdot tan^{-1}(x)}{6} - \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{ln(x^2+1)}{6}$, ha derivata seconda che si annulla per $x = 0$, possiamo dire che per tale valore la funzione ha un flesso? [No. Ha un minimo]

60. Una particella si muove lungo l'asse x in modo che la sua posizione, al variare del tempo t, verifichi la legge $x(t) = e^{-t} \cdot sin(t), 0 \le t \le 2\pi$. In quale istante la particella si trova più a sinistra? $\left[t = \dfrac{5\pi}{4}\right]$

61. Un polinomio di III grado ha sempre almeno un punto di flesso? [Sì]

62. Un polinomio di III grado può avere più di un punto di flesso? [No]

63. Un polinomio di grado dispari ha sempre almeno un punto di flesso? [Sì]

64. Un polinomio di grado pari ha sempre almeno un punto di flesso? [No]

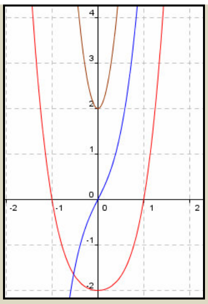
65. Se una funzione ha un massimo relativo per $x = 1$ e un minimo relativo per $x = 2$, possiamo dire che sicuramente ha un punto di flesso la cui ascissa è compresa tra 1 e 2? [Solo se è continua in (1; 2)]

66. Se una funzione ha un massimo e un minimo relativo, cosa deve accadere perché sicuramente abbia anche un punto di flesso? [Deve essere continua nell'intervallo che ha per estremi gli estremi relativi]

67. È possibile che una funzione continua in [0; 4] abbia minimo relativo in (1; 5) e massimo relativo in (2; 3)? Giustificare la risposta. [Sì]

68. Con riferimento al precedente quesito, se la risposta è positiva, quanti altri estremi relativi minimo ci saranno in (1; 2)? [Nell'ordine: flesso, massimo, flesso, minimo, flesso]

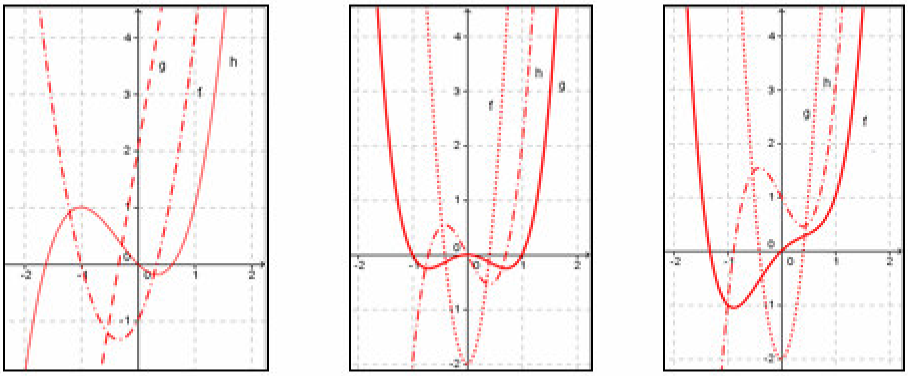
Lavoriamo insieme

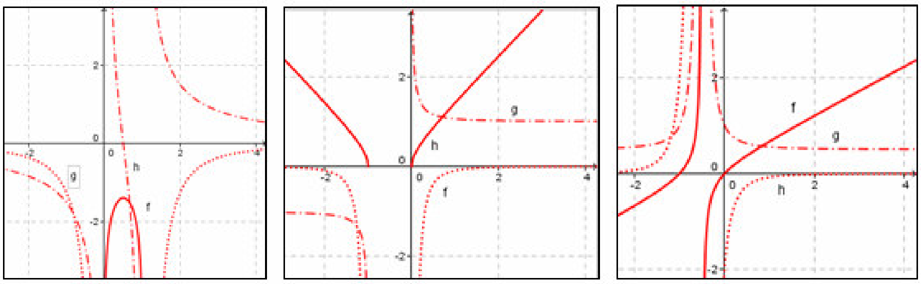


In figura abbiamo rappresentato, con l'aiuto di Geogebra, il grafico di una funzione e delle proprie derivate prima e seconda. Come facciamo a capire quale grafico si riferisce alla funzione e quale alla derivata? Sappiamo che le derivate determinano gli intervalli di crescenza e decrescenza, nonché gli estremi relativi. Quindi la derivata prima sarà positiva laddove il grafico della funzione cresce, negativa laddove decresce, incontrerà l'asse delle ascisse dove la funzione ha estremi relativi. La derivata seconda invece è legata alla concavità della funzione, quindi è positiva dove la funzione volge la concavità verso l'alto negativa altrimenti. Incontra l'asse delle ascisse dove la funzione ha un flesso. Tenuto conto di ciò possiamo dire che la funzione di partenza è quella rossa, crescente per $x > 0$ e decrescente per $x < 0$. La derivata prima è la funzione blu, che appunto è positiva dove la rossa cresce, negativa altrimenti e incontra l'asse delle x dove la curva rossa ha un minimo relativo. Infine la funzione marrone rappresenta la derivata seconda, poiché è sempre positiva, dato che la funzione rossa volge sempre la concavità verso l'alto.

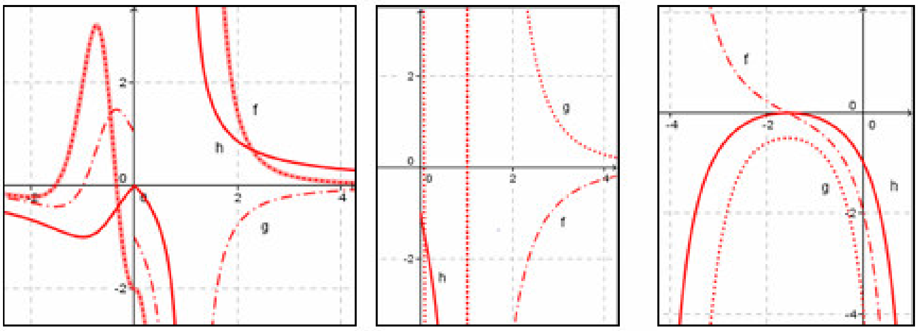
Nei grafici seguenti sono rappresentati una funzione e le sue derivate, prima e seconda. Associare ciascun grafico alla corretta funzione. Nelle risposte la funzione, la derivata prima e la derivata seconda

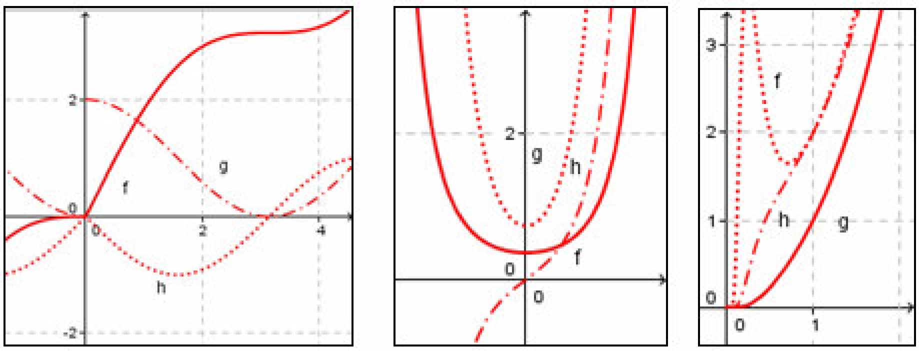
Livello 2

69.  [(*h*, *f*, *g*) ; (*g*, *h*, *f*) ; (*f*, *h*, *g*)]

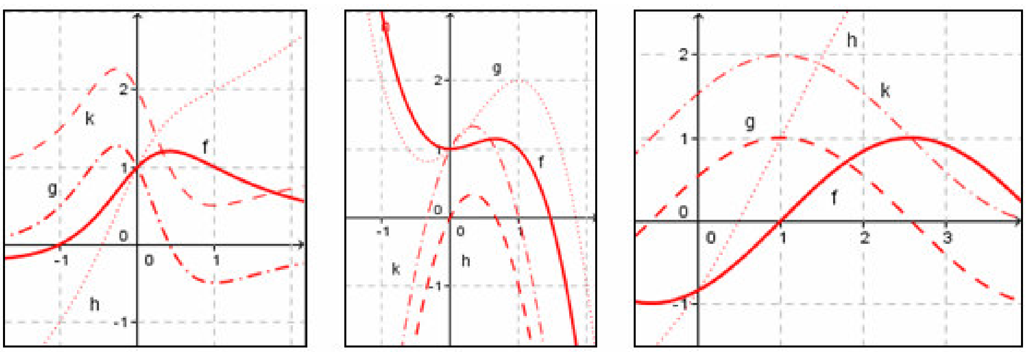
70.  [(*f*, *h*, *g*) ; (*h*, *g*, *f*) ; (*f*, *g*, *h*)]

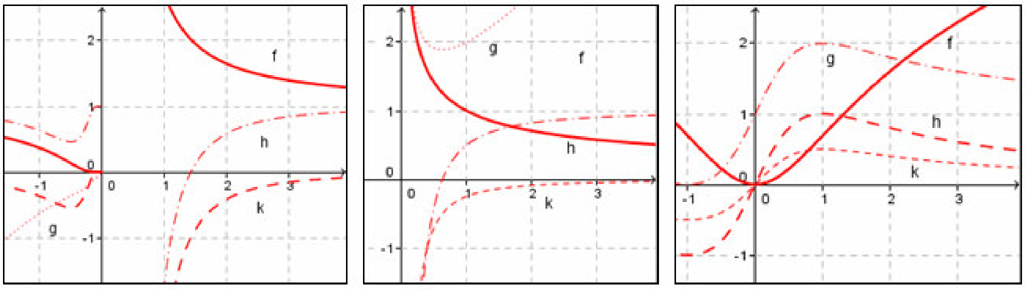
Livello 3

71.  [(*h*, *g*, *f*) ; (*h*, *f*, *g*) ; (*h*, *f*, *g*)]

72.  [(*f*, *g*, *h*) ; (*f*, *h*, *g*) ; (*g*, *h*, *f*)]

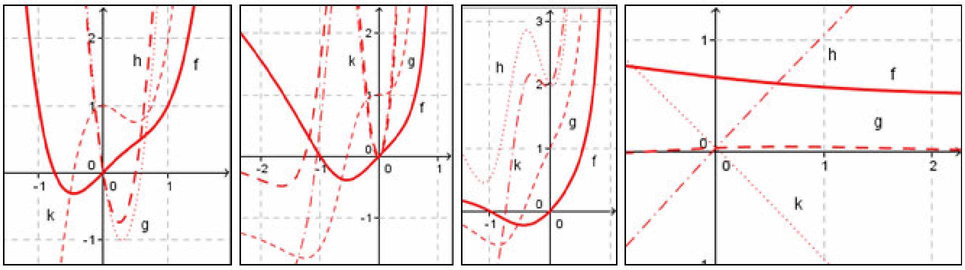
Nei grafici seguenti sono rappresentati la funzione f e alcune altre funzioni. Determinate fra esse, se esiste, quale rappresenta la sua derivata prima

73.  [*g* ; *h* ; *g*]



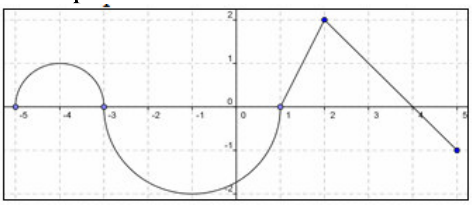
74. [k ; ∅ ; h]

Nei grafici seguenti sono rappresentati la funzione f e alcune altre funzioni. Determinate fra esse, se esiste, quale rappresenta la sua derivata seconda



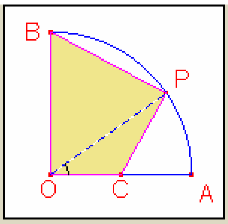
75. [h ; k ; ∅ ; g]

76. In figura è rappresentato il grafico della derivata di una funzione $f(x)$ per cui si ha $f(1) = 3$. Tenuto conto di esso determinare gli eventuali punti di estremo relativo e di flesso di $f(x)$.



[Massimo per $x = -3$ e $x = 4$; Flessi per $x = -4, -1, 2$]

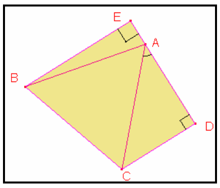
Lavoriamo insieme



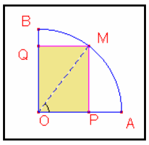
In figura vi è un quarto di cerchio di raggio 1 *cm*, determinare, se esistono, i valori che deve assumere l'angolo segnato, di vertice O, in modo che il quadrilatero $OCPB$, con C punto medio di OA, abbia area massima o minima.Indichiamo con x la misura dell'angolo segnato. Ovviamente si ha: $0° < x < 90°$. In figura per trovare l'area del quadrilatero lo abbiamo diviso in due triangoli. Ricordiamo che l'area di un triangolo può determinarsi come semiprodotto delle misure di due lati per il seno dell'angolo che comprendono. Quindi l'area di OCP è $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \frac{1}{2}\cdot sin(x) = \frac{1}{4}\cdot sin(x)$. Quella di OPB: $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 \cdot sin(90° - x) = \frac{1}{2}\cdot cos(x)$. Quindi l'area del quadrilatero, che è la funzione da massimizzare, è $y = \frac{1}{4}\cdot sin(x) + \frac{1}{2}\cdot cos(x)$. Determiniamo la derivata prima: $y' = \frac{1}{4}\cdot cos(x) - \frac{1}{2}\cdot sin(x)$. Uguagliamo a zero, dividendo per $cos(x)$, dato che $cos(x) = 0$ non è soluzione: $tan(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$. Adesso la derivata seconda: $y'' = -\frac{1}{4}\cdot sin(x) - \frac{1}{2}\cdot cos(x)$, che per $x = tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ è una quantità negativa. Pertanto il detto valore è quello per cui si ha la massima area, e tale massimo è $\frac{1}{4}\cdot sin\left[tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}\cdot cos\left[tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right] \approx 0{,}56\ cm^2$.

Livello 2

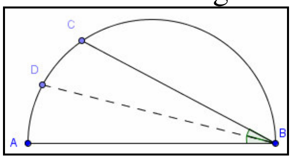
77. Sia M un punto su una semicirconferenza di centro O e diametro AB. Determinare, se esistono, i valori di $M\hat{A}B$ in modo che $3 \cdot \overline{AM} + 2 \cdot \overline{BM}$ abbia il massimo valore possibile. $\left[tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right]$

78. 

In figura ABC è un triangolo equilatero di perimetro 3 cm, determinare, se esistono, i valori che deve assumere l'angolo segnato, di vertice A, in modo che il trapezio rettangolo $BCDE$ abbia area massima. [60°]

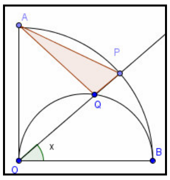
79. 

In figura vi è un quarto di cerchio di raggio 1 cm, determinare, se esistono, i valori che deve assumere l'angolo segnato, di vertice O, in modo che il rettangolo $OPMQ$ abbia area massima. [45°]

80. 

In figura, il punto C è scelto su una semicirconferenza di raggio 1 cm, AD è bisettrice dell'angolo segnato di vertice A. Determinare, se esistono, le misure di tale angolo che rendono la somma fra AC e AD massima o minima. [Non ne esistono]

81. Fra tutti i cilindri retti che hanno volume di 1 m^3 determinare, se esistono, quelli che hanno massima o minima superficie totale. $\left[\text{Nessun massimo; Minimo se il raggio è } \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right]$

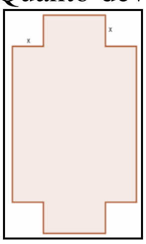
82. 

In figura OAB è un quarto di circonferenza di raggio r, su OB è costruita una semicirconferenza. La semiretta per O incontra l'arco AB in P e la semicirconferenza in Q. Determinare la misura dell'angolo $A\hat{O}P$ in modo che il triangolo APQ abbia area massima. [30°]

83. Determinare il massimo rettangolo che può formarsi con un perimetro lungo x. [Quadrato di lato $x/4$]

84. Determinare il quadrato di area minima inscrivibile in un quadrato di lato lungo x. Inscrivere un quadrato in un altro significa fare in modo che i vertici del quadrato inscritto appartengano ai diversi lati del quadrato. [Quadrato con i vertici nei punti medi dei lati]

85. Fra tutti i rettangoli di diagonale data, determinare quello di perimetro massimo. [Quadrato]

86. Per costruire una scatola a forma di parallelepipedo rettangolo consideriamo un cartone rettangolare di dimensioni lunghe 70 cm e 40 cm, quindi ritagliamo da ogni angolo un quadrato, ottenendo la figura mostrata di seguito. Incolliamo i suoi bordi e otteniamo la scatola. Quanto deve essere lungo il lato x dei quadrati eliminati per ottenere una scatola di volume massimo? 

$\left[\frac{55 - 5\cdot\sqrt{37}}{3} cm\right]$

87. Determinare il minimo valore che può assumere la somma di un numero positivo con il proprio reciproco. [2]

88. Siano due numeri reali la cui somma è 2013, qual è il massimo valore che può assumere il prodotto dei due numeri? E quale il minimo? [Max: 1013042,25; min: non esiste]

89. Siano due numeri reali la somma dei cui quadrati è 2013, qual è il massimo valore che può assumere il

prodotto dei due numeri? E quale il minimo? [Max: 1006,5; min: – 1006,5]

90. Siano due numeri reali la somma dei cui quadrati è 2013, qual è il massimo valore che può assumere la loro somma? E quale il minimo? [Max: $\sqrt{4026}$; min: non esiste]

91. Fra tutti i rettangoli di diagonale assegnata, determinare quello di area massima. [Il quadrato]

92. Fra tutti i rettangoli inscritti in una circonferenza di raggio *r* determinare quello di area massima. [Il quadrato]

93. Dato un rettangolo inscriverlo in un altro rettangolo, determinare quando quest'ultimo ha area massima. [Quando i 4 triangoli determinati in esso dal rettangolo inscritto sono isosceli]

94. Fra tutti i triangoli rettangoli di ipotenusa fissata determinare quello con la massima altezza relativa all'ipotenusa. [Il triangolo isoscele]

95. Fra tutti i triangoli rettangoli di area data determinare quello con l'ipotenusa minima. [Il triangolo isoscele]

96. Dati i punti $A \equiv (1; 2)$, $B \equiv (-1; 3)$, $C \equiv (x; 0)$, determinare *x* per cui $\overline{AC}+\overline{BC}$ è minima. $\left[\frac{1}{5}\right]$

97. Fra tutti i rettangoli con lati paralleli agli assi coordinati e inscritti nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, determinare quelli che hanno l'area massima e quelli che hanno il perimetro massimo. $\left[A_M=12; 2p_M=4\cdot\sqrt{13}\right]$

98. Fra tutti i trapezi isosceli aventi una base sull'asse focale e inscritti nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, determinare quelli che hanno l'area massima e quelli che hanno il perimetro massimo. $\left[A_M=\frac{9\cdot\sqrt{3}}{2}; 2p_M=\frac{29}{10}\right]$

Livello 3

99. Generalizzare il precedente problema all'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. $\left[A_M=\frac{3\sqrt{3}\cdot a\cdot b}{4}; 2p_M=\frac{2a^2+2ab+b^2}{2\cdot(a+b)}\right]$

100. Generalizzare il problema del rettangolo inscritto nell'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. $\left[A_M=2ab; 2p_M=4\cdot\sqrt{a^2+b^2}\right]$

101. Determinare il minimo valore che può assumere la somma di due numeri il cui prodotto è *p*. $\left[2\cdot\sqrt{p}\right]$

102. Data una semicirconferenza di raggio *r*, sul suo diametro *AB* scegliamo un punto *P* e costruiamo le semicirconferenze di diametro *AP* e *PB*. Chiamiamo *arbelos* la parte di semicerchio esterna ai due semicerchi più piccoli. Determinare la posizione di *P* in modo che *l'arbelos* abbia area massima. [*P* è centro della semicirconferenza]

103. Dati i punti $A \equiv (a; b)$, $B \equiv (c; d)$, $C \equiv (x; 0)$, determinare il valore di *x* per cui $\overline{AC}+\overline{BC}$ è minimo. Questo è il cosiddetto problema di Erone. $\left[\frac{bd\cdot|a-c|-ad^2+b^2c}{b^2-d^2}\right]$

104. Generalizzare il problema 94 per un cartone rettangolare di dimensioni lunghe *a* e *b*. $\left[\frac{a+b-\sqrt{a^2+ab+b^2}}{6}\right]$

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi. Nelle soluzioni il pedice m indica minimo e il pedice M massimo. I temi completi dei Licei Scientifici per gli ultimi anni sono scaricabili, con soluzione, dal sito http://matdidattica.altervista.org/esamidistato.htm

1. (Liceo scientifico 1969/70) Data la funzione: $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, si trovino i coefficienti sapendo che: essa si annulla per $x = 0$; la sua derivata prima si annulla per $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$; il suo grafico, in un riferimento cartesiano ortogonale O(x; y), ha, nel punto di ascissa $x = -1$, la tangente parallela alla retta di equazione $y = -x$. $\left[a=\frac{1}{24}, b=-\frac{1}{6}, c=\frac{1}{6}, d=e=0\right]$
2. (Liceo scientifico suppletiva 1970/71) Tra i coni circolari retti inscritti in una sfera di raggio r, determinare quello per il quale è massima l'area della superficie totale, dopo averne trovata l'espressione in funzione della semiapertura x di un generico cono. Suggerimento: si determini la sezione ottenuta con un piano per il vertice e perpendicolare alla base del cono.
$$\left[f(x)=4\pi r^2\cdot\left[-sin^4(x)-sin^3(2x)+sin^2(x)+sin(x)\right]; x_M = sin^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right)\right]$$
3. (Liceo scientifico 1970/71) Fra i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio assegnato, si determini quello per cui è massima la somma dell'altezza e del doppio della base. Sia r la misura del raggio e $2x$ quella dell'angolo al vertice. $\left[y = 2r\, cos^2(x) + 4r\, sin(2x),\ 0 < x < \frac{\pi}{2};\ x_M = \frac{1}{2}\ tan^{-1}(4)\right]$
4. (Liceo scientifico 1971/72) Si determini l'altezza e il raggio di base del cono di volume minimo circoscritto a una data sfera di raggio r. Si dimostri che il suddetto cono è anche quello minima superficie totale. Suggerimento: si determini la sezione ottenuta con un piano per il vertice e perpendicolare alla base del cono. Sia x la misura del raggio di base del cono. $\left[y=\frac{2\pi}{3}rx\cdot\frac{x^4}{x^2-r^2}; x_m=\sqrt{2}\right]$
5. (Liceo scientifico suppletiva 1971/72) Si studi la variazione di $y = tan(x) - 2\ sin(x)$ nell'intervallo $\left[1-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{3}\right]$. $\left[x_M=-cos^{-1}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right), x_m=cos^{-1}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)\right]$
6. (Liceo scientifico 1972/73) Si studi la variazione della funzione $y = 3\ cos(2x) - 4\ cos(x)$ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$. $\left[x_M=\pi; x_m=cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\vee 2\pi-cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]$
7. (Liceo scientifico suppletiva 1972/73) Si studi la variazione di $y = sin(2x) - tan(x)$ per $0 \le x \le \pi$.
$$\left[x_M=cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}\right), x_m=\pi-cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}\right)\right]$$
8. (Liceo scientifico 1973/74) Assegnata la funzione $y = sin(x) + a\cdot cos(x) + b$ $(-\pi \le x \le \pi)$, si determinino i valori di a e di b in modo che ammetta un massimo relativo $y = 0$ in $x = \frac{\pi}{6}$. $\left[a=\sqrt{3},\quad b=-2\right]$
9. (Liceo scientifico 1973/74) Sono assegnate due circonferenze C e C' esterne tra loro e rispettivamente di centri O e O' e raggi r e $\frac{r}{2}$. Sul segmento $\overline{OO'}=a$, si prenda un generico punto P non interno alle due circonferenze e si conducano da esso le rette tangenti a C e C'. Gli archi aventi per estremi i punti di contatto e intersecanti il segmento OO' generano, in una rotazione di 180° attorno a OO', due calotte sferiche. Posto $\overline{OP}=x$ si determini la posizione di P in corrispondenza della quale risulta massima la somma delle aree delle due calotte. $\left[2\pi r^2\cdot\left(\frac{5}{4}-\frac{r}{x}-\frac{r}{8\cdot(a-x)}\right), r\le x\le a-\frac{r}{2}, a\ge\frac{3}{2}r, x_M=2a\cdot\frac{4-\sqrt{2}}{7}\right]$

10. (Liceo scientifico suppletiva 1973/74) Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = ax^2 + bx + c$ in modo che la parabola da essa rappresentata sia tangente alle tre rette rispettivamente di equazione: $2x + y - 3 = 0$, $4x - y - 12 = 0$, $y = 0$. Detti A, B, C i rispettivi punti di contatto si determini sull'arco ACB il punto P tale che risulti massima l'area del triangolo APB. $\left[y = x^2 - 4x + 4;\ S_M = \frac{1}{4}\right]$

11. (Liceo scientifico 1974/75) Si conduca internamente a un angolo retto $A\hat{O}B$ una semiretta OC che forma con OA un angolo $A\hat{O}C = x$; presi rispettivamente su OA e OB due punti M e N tali che $\overline{OM} = 1, \overline{ON} = \sqrt{3}$, siano M' e N' le rispettive proiezioni di M e N su OC. Detto P il punto medio di $M'N'$ si determini x in modo che risulti massima l'area del triangolo NOP.
$$\left[\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot cos(x) \cdot \left[cos(x) + \sqrt{3} \cdot sin(x)\right]; x_M = \frac{\pi}{6}\right]$$

12. (Liceo scientifico suppletiva 1974/75) Assegnato un riferimento cartesiano xOy, si consideri la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$. Detto AB l'arco di essa contenuto nel I quadrante, si determini su tale arco un punto P tale che, indicati con Q il punto di intersezione della retta tangente alla circonferenza per P con l'asse delle ascisse e con S quello di intersezione della retta OP con la retta $y = 2$, con $Q\hat{O}P = x$, l'area del triangolo QPS risulti minima. $\left[y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 - sin(x)}{cos(x)}; x_m = \frac{\pi}{6}\right]$

13. (Liceo scientifico suppletiva 1974/75) In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, si conduca una corda AC tale che $C\hat{A}B = 2x$. Detto D il punto medio dell'arco BC, si determini x in modo che l'area del quadrilatero $ABCD$ risulti massima. $\left[2r^2 \cdot sin(x) \cdot cos(x) \cdot [1 + cos(2x)];\ x_M = \frac{\pi}{6}\right]$

14. (Liceo scientifico 1975/76) In un cono circolare retto avente per raggio di base e per altezza rispettivamente i segmenti r e hr, si inscriva il cilindro avente la base sul piano di base del cono e il volume massimo. Per quale valore di h tale cilindro risulta anche equilatero? In questo caso particolare si trovi anche il cilindro inscritto per il quale è massima la superficie totale.
$$\left[V(x) = h \cdot \left(-x^3 + rx^2\right), 0 < x < r, x_M = \frac{2}{3}, h = 4, S(x) = 2\pi \cdot \left(4xr - 3x^2\right), x_M = \frac{2}{3}r\right]$$

15. (Liceo scientifico suppletiva 1975/76) In un sistema di assi cartesiani si considerino le parabole rappresentate dalle equazioni: $y = ax^2 - 2x + 2$, $y = 2ax^2 - 2x + 1$ e si determini il valore del parametro reale a in modo che risulti minima la distanza tra i due vertici. $\left[f(a) = \frac{2a^2 - 2a + 1}{2a^2}; a_m = 1\right]$

16. (Liceo scientifico 1976/77) In un sistema di assi coordinati cartesiani si considerino le parabole rappresentate dalle equazioni: $y = 3x - x^2, y = x^2 - 2x$. Nella regione finita di piano delimitata dalle due curve si determini il triangolo avente un vertice nel punto comune alle due curve diverso dall'origine e il lato opposto parallelo all'asse delle ordinate e la cui area abbia valore massimo.
$$\left[A(k) = k^3 - 5k^2 + \frac{25}{4}k; k_M = \frac{5}{6}\right]$$

17. (Liceo scientifico 1976/77) I tre punti A, B C, non allineati, sono vertici di un triangolo ABC i cui lati BC e CA sono lunghi rispettivamente a, b. Si dica come deve essere scelto l'angolo $A\hat{C}B = \gamma$ affinché la somma dei quadrati delle altezze del triangolo relative ai lati BC e CA, diminuita del quadrato del lato AB, sia massima. Posto $b = m \cdot a$ ($m > 0$), si determini per quale valore di m, γ assume ampiezza minima. $\left[f(\gamma) = cos(\gamma) \cdot \left[2ab - \left(a^2 + b^2\right) \cdot cos(\gamma)\right], \gamma_M = cos^{-1}\left(\frac{ab}{a^2 + b^2}\right), m_m = 1, \gamma_m = \frac{\pi}{3}\right]$

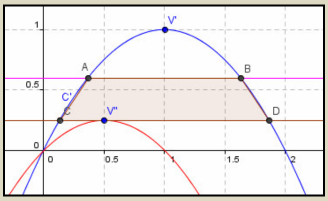
18. (Liceo scientifico suppletiva 1976/77) Tra le parabole del tipo $y = -\frac{1}{4}x^2 + c$ con $c > 0$ si determini quella per la quale i punti P di essa che hanno minima distanza dall'origine O degli assi cartesiani di

riferimento sono tali che $\overline{OP}^2 = 12$. $\left[f(c) = \frac{x^4}{16} + \frac{2-c}{2}x^2 + c^2, c_m = 4\right]$

Lavoriamo insieme

Consideriamo un problema assegnato agli esami di Liceo scientifico 1977/78. *In un sistema di assi coordinati cartesiani si considerino le parabole C′ e C″ rispettivamente di equazione $y = 2x - x^2$, $y = x - x^2$. Nella regione finita di piano delimitata dalle due curve si conducano: la retta di equazione $y = k$, $k > \frac{1}{4}$, sulla quale C′ intercetta la corda AB; la retta tangente a C″ nel suo vertice, sulla quale la stessa C′ intercetta la corda CD. Si determini per quale valore di k l'area del trapezio ABCD acquista il valore massimo.*

C' ha vertice nel punto $V' \equiv (1;1)$, C'' ha vertice in $V'' \equiv \left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$, quindi la tangente ha equazione $y = \frac{1}{4}$. Abbiamo rappresentato il tutto in figura.



Determiniamo le coordinate dei vertici del trapezio: $\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = k \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x + k = 0 \Rightarrow A \equiv \left(1 - \sqrt{1-k};k\right), B \equiv \left(1 + \sqrt{1-k};k\right)$; e poi

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow C \equiv \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2};\frac{1}{4}\right), D \equiv \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2};\frac{1}{4}\right).$$

Quindi la funzione da massimizzare, è: $\frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot AH = \frac{\left(2 \cdot \sqrt{1-k} + \sqrt{3}\right)}{2} \cdot \left(k - \frac{1}{4}\right), \frac{1}{4} < k < 1$, in cui AH è l'altezza relativa alle basi parallele. Calcoliamo la derivata prima: $\frac{9 - 12k + 4 \cdot \sqrt{3 \cdot (1-k)}}{8 \cdot \sqrt{1-k}}$, che si annulla, come unico valore accettabile perché appartenente a $\left(\frac{1}{4};1\right)$, per $k = \frac{11}{12}$. Si verifica facilmente che per tale valore si ha il massimo cercato.

19. (Liceo scientifico suppletiva 1977/78) In un sistema di assi coordinati si considerino: la parabola di equazione $y = 2x - x^2$ che incontra l'asse delle ascisse nei punti O e C; la retta di equazione $y = k$ (con $0 < k < 1$) che incontra la parabola nei punti A e B. Si determini per quale valore del parametro k risulta massimo il volume del solido generato dal trapezio $OABC$ in una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse. $\left[V(k) = \frac{2}{3}\pi k^2 \cdot \left(1 + 2 \cdot \sqrt{1-k}\right), k_M = \frac{18 + 2 \cdot \sqrt{6}}{25}\right]$

20. (Liceo scientifico suppletiva 1977/78) Si determinino i coefficienti della funzione $y = 1 + ax + \frac{b}{x^2}$ in modo che la curva che la rappresenta abbia un estremo relativo in $A \equiv (1; 0)$. $\left[a = -\frac{2}{3}, b = -\frac{1}{3}\right]$

21. (Liceo scientifico 1978/79) Data una circonferenza di raggio r e l'angolo al centro $A\hat{O}B = 2x$, si costruisca sulla corda AB, da parte opposta rispetto al centro O, il triangolo isoscele ABC avente per base AB e per altezza $\overline{CH} = 2k \cdot \overline{AB}$. Si determini il valore dell'angolo $A\hat{O}B$ per il quale il quadrilatero $OACB$ ha area massima. Si calcoli il valore di k per cui l'ampiezza dell'angolo $A\hat{O}B$ del quadrilatero

ottenuto è 150°. $\left[r^2 \cdot sin^2(x) \cdot [4k \cdot sin(x) + cos(x)], 0 < x < \frac{\pi}{2}; x_M = \frac{1}{2} \cdot cot^{-1}(-4k), k = \frac{\sqrt{3}}{4}\right]$

22. (Liceo scientifico 1978/79) Data in un sistema di assi cartesiani ortogonali la parabola di equazione $y = x^2 + 2x + 1$ si scriva l'equazione della retta che, nella regione finita di piano limitata dalla stessa parabola e dagli assi, sia tangente alla curva e formi con gli assi stessi il triangolo di area massima. $\left[S(h) = \frac{h^3 - h^2 - h + 1}{4}, h_M = -\frac{1}{3}\right]$

23. (Liceo scientifico suppletiva 1978/79) Data una circonferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, con $\overline{PH} = x$ altezza del rettangolo perpendicolare ad AB, si determinino su di essa i punti tali che, condotti i segmenti perpendicolari al diametro e alla tangente alla circonferenza on A, i rettangoli che si ottengono abbiamo area massima. $\left[f(x) = x \cdot \sqrt{x \cdot (2r - x)}, x_M = \frac{3}{2}r\right]$

24. (Liceo scientifico 1979/80) Sui lati opposti $\overline{AB} = 2x$ e CD del rettangolo $ABCD$ ed esternamente ad esso si costruiscano due triangoli isosceli APB e CQD aventi gli angoli alla base di ampiezza α. sapendo che il perimetro dell'esagono $APBCQD$ è $2p$, si determinino le lunghezze dei lati del rettangolo in modo che l'area dell'esagono risulti massima. Per quale valore di α tale esagono è inscrivibile in una circonferenza? $\left[2x \cdot \frac{x \cdot [sin(\alpha) - 2] + p \cdot cos(\alpha)}{cos(\alpha)}, 0 < x < \frac{1}{2} p \cdot cos(\alpha), 2x = \frac{p \cdot cos(\alpha)}{2 - sin(\alpha)}, \alpha_M = \frac{\pi}{6}\right]$

25. (Liceo scientifico suppletiva 1979/80) In un settore circolare di raggio r e di ampiezza $\frac{\pi}{6}$, si inscriva un rettangolo avente un lato su uno dei raggi limitanti il settore e gli altri due vertici l'uno sull'arco e l'altro sul rimanente raggio. Si determini, tra tali rettangoli, quello per il quale è minima la diagonale in funzione dell'angolo x formato da un estremo della diagonale con il centro del settore e il relativo raggio. $\left[r^2 \cdot \left[3sin^2(x) - 2 \cdot \sqrt{3} sin(x) cos(x) + 1\right]; x_m = tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}\right)\right]$

26. (Liceo scientifico 1980/81) In un triangolo di base $\overline{AB} = a$ e altezza $\overline{CH} = h$ si inscriva il rettangolo con un lato su AB e i vertici opposti sugli altri due lati, che in una rotazione completa attorno alla retta AB genera il solido di volume massimo. Supposto che gli angoli adiacenti alla base siano uno doppio dell'altro, si calcolino i valori che essi assumono quando detto valore massimo è $\frac{\pi a^2}{36}$.
$\left[\frac{\pi a}{h} \cdot \left(-x^3 + hx^2\right), x_M = \frac{2}{3}h, 30°, 60°, 90°\right]$

27. (Liceo scientifico suppletiva 1980/81) In una circonferenza di raggio r si consideri la corda AB che dista $\frac{r}{2}$ dal centro. Si prenda sul maggiore degli archi $\widehat{AB}$ il punto C, e si prolunghi AC di un segmento CD tale che sia $\overline{CD} = \overline{AC}$ e si determini per quale valore di $\angle B\hat{A}C = x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ è massima l'area del triangolo CDB. $\left[\frac{r^2}{2} \cdot sin(x) \cdot \left[3cos(x) + \sqrt{3} sin(x)\right]; x_M = \frac{\pi}{3}\right]$

28. (Liceo scientifico 1980/81) In un sistema di assi cartesiani ortogonali si scrivano le equazioni delle due circonferenze passanti per l'origine O e aventi centri rispettivi nei punti $C' \equiv (2; 0)$ e $C''\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.
Condotte per il punto O due rette mutuamente ortogonali, delle quali la prima incontra le due circonferenze, oltre che nel punto O, nei punti A e B rispettivamente e la seconda nei punti C e D, si determini il quadrilatero $ACBD$ avente area massima, in funzione del coefficiente angolare m di una delle due

rette. $\left[\frac{25m}{2\cdot\left(1+m^2\right)}, m>0; m_M=1\right]$

29. (Liceo scientifico suppletiva 1982/83) Sulla semiretta asse di simmetria di una parabola assegnata si fissi un punto Q. Si determinino, in un sistema di assi cartesiani opportunamente scelto, le coordinate dei punti P della parabola le cui distanze da Q hanno un valore minimo e si scriva l'equazione della circonferenza avente centro in Q e per raggio tale valore minimo.
$\left[f(x)=a^2x^4+(1-2ab)\cdot x^2+b^2, a,b\in\mathbb{R}; x_m=\pm\sqrt{\frac{2ab-1}{2b^2}}\vee 0\right]$

30. (Liceo scientifico 1983/84) Si consideri una circonferenza di diametro $\overline{AB}=2r$ e si conduca per il punto A, perpendicolarmente al piano della stessa circonferenza, il segmento $\overline{AP}=a$. Se MN è una corda della circonferenza, perpendicolare ad AB, si determini per quale posizione di MN risulta massimo il volume della piramide $PAMN$. H è il piede della perpendicolare condotta da A a MN, con $\overline{AH}=x$. $\left[\frac{ax}{3}\cdot\sqrt{x\cdot(2r-x)},\quad 0<x<2r, x_M=\frac{3}{2}r\right]$

31. (Liceo scientifico suppletiva 1983/84) Dato il triangolo rettangolo isoscele ABC con $\angle\hat{A}=90°$, $\overline{AB}=a$, si conduca per il vertice C la retta non secante il triangolo tale che risulti massima la somma delle perpendicolari AM e BN condotte su di essa. Si costruisca graficamente la soluzione. Sia $\angle A\hat{C}M=x,\ 0\le x\le 135°$. $[f(x) = a\cdot[2sin(x) + cos(x)], x_M = tan^{-1}(2)]$

32. (Liceo scientifico suppletiva 1983/84) Si considerino le parabole di equazioni $y^2=\frac{x}{2}$ $y^2=-x+a^2$. Nella regione finita di piano compresa fra le due curve e l'asse delle ascisse si inscriva il rettangolo con i lati paralleli agli assi coordinati che, in una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse, genera il cilindro di massimo volume. $\left[V(h)=\pi\cdot\left(-3h^4+a^2h^2\right), h_M=a\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}, V_M=\frac{\pi}{24}a^4\right]$

33. (Liceo scientifico 1984/85) In una circonferenza di centro O e raggio unitario si conduca la corda AB tale che, costruito il triangolo equilatero ABC da parte opposta di O rispetto ad AB, l'area del quadrilatero $ABCO$ risulti massima. Si esprimano i valori che assumono la lunghezza della corda AB e l'ampiezza dell'angolo $\angle A\hat{O}B=x$. $\left[f(x)=\sqrt{3}\cdot sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot sin(x), x_M=\frac{5}{6}\pi\right]$

34. (Liceo scientifico 1984/85) In un sistema di assi coordinati cartesiani si consideri la cubica di equazione $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ e si individui la traslazione $x = X + a$; $y = Y + b$ che porta l'origine del sistema di riferimento nel punto della curva di minimo relativo. Si scriva l'equazione della curva nel nuovo sistema di riferimento. $[x_M = 1, x_m = 2; a = 2, b = -1; Y = 2X^3 + 3X^2]$

35. (Liceo scientifico PNI 1989/90) In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy è assegnata la parabola di equazione $y = -x^2 - x + 6$. Siano P un suo punto, H la proiezione di P sull'asse delle ascisse, P' e H' rispettivamente i simmetrici di P e H rispetto all'asse delle ordinate. Espresso in funzione dell'ascissa x di P il semiperimetro p del rettangolo $PP'H'H$, si studi come varia p al variare del punto sulla parabola, determinandone in particolare gli estremi relativi.
$\left[p = 2\cdot|x| + |x^2 + x - 6|; x_M = -\frac{3}{2}\vee\frac{1}{2}; x_m = -3 \vee 0\right]$

36. (Liceo scientifico 1989/90) La funzione $y = x\cdot e^{-x}$ rappresenti per $x \ge 0$ la legge oraria del moto di un punto che si muove lungo una semiretta (x rappresenti il tempo e y la distanza del punto P dall'origine della semiretta su cui si muove). Determinare in quale istante P raggiunge la massima velocità, in quale istante la velocità è nulla e in quale istante l'accelerazione è nulla. $[v_{Max} = v(0), v(1) = 0, a(2) = 0]$

37. (Liceo scientifico PNI 1989/90) Data la semicirconferenza di centro O e raggio r, si consideri il triangolo isoscele ABV i cui lati obliqui AV e BV siano tangenti alla semicirconferenza rispettivamente nei punti F e G e tale che la proiezione di V sulla base AB coincida con O. Detto P un punto dell'arco FG e, rispettivamente, L e M le intersezioni della tangente alla semicirconferenza in P con i lati AV e BV,

si dimostri che i triangoli *AOL* e *BMO* sono simili. Indicato con *x* uno degli angoli alla base del triangolo *ABV*, si esprima in funzione di esso la somma *s* tra il lato del quadrato equivalente al rettangolo di lati *AL* e *BM* e l'altezza *VO* del triangolo *ABV*, osservando che *s* non dipende dalla posizione del punto *P*. Si determini per quale valore di *x* la somma *s* è estrema. $\left[s = r \cdot \frac{sin(x)+cos(x)}{sin(x) \cdot cos(x)}, 0 < x < \frac{\pi}{2}; x_m = \frac{\pi}{4}\right]$

38. (Liceo scientifico suppletiva 1990/91) In un piano ortogonale *Oxy* si consideri nel primo quadrante la circonferenza di raggio unitario tangente ai due assi coordinati. Detta *r* una retta passante per l'origine di coefficiente angolare *m*, e secante la circonferenza nei punti *A* e *B*, si studi come varia, al variare di *r*, l'area del triangolo *ABC*, essendo *C* il centro della circonferenza, e si determinino in particolare le due rette per cui detta area assume valore massimo. $\left[A = \frac{\sqrt{2m} \cdot |m-1|}{1+m^2}; y = \left(2 \pm \sqrt{3}\right) \cdot x\right]$

39. (Liceo scientifico suppletiva 1992/93) In un sistema di assi cartesiani ortogonali siano $A \equiv \left(-1, \sqrt{3}\right)$ e $B \equiv (1;\ 1)$. Determinare il punto *P* (*x*; 0) tale che sia minimo $y = \sqrt{2} \cdot \overline{AP} + \overline{PB}$. Tracciata la retta *r* perpendicolare all'asse delle *x* in *P* verificare che, detti β l'angolo formato dalla semiretta *PB* con la retta *r* e α l'angolo formato dalla semiretta *PA* con la retta *r*, è $\frac{sin(\beta)}{sin(\alpha)} = n$. $[x_m = 0]$

40. (Liceo scientifico PNI suppletiva 1993/94) Sono dati una circonferenza Γ di diametro $\overline{AB} = 4$ e il triangolo rettangolo *ABC* tale che la sua ipotenusa *AC* incontra Γ in *P* e tale che la sua misura sia $8 \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}$. Si conduca una retta perpendicolare ad *AB* che incontra rispettivamente *AB*, Γ e *AC* in *D*, *E* e *F* e siano *E′* ed *F′* le proiezioni di *E* ed *F* su *BC*. Si studi al variare di *AD*, la variazione del volume *V* del solido *S* generato, in un giro completo attorno ad *AB*, dal rettangolo *EE′F′F*. Osservato che *V* ha due massimi relativi, si calcoli, quando *V* assume il suo valore massimo assoluto, l'area della superficie totale di *S*. $\left[V(x) = \frac{4}{5}\pi \cdot (4-x) \cdot \left|5x - 2x^2\right|; x_M = 1; S = \frac{6}{5}\pi \cdot \left(5 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{15} + 4\right)\right]$

41. (Maturità magistrale PNI suppletiva 1993/94) Su un piano α è assegnata la circonferenza Γ di centro *O* e diametro $\overline{AB} = 2$ e sulla perpendicolare per *O* al piano α è fissato il punto *C* tale che $\overline{OC} = \overline{AB}$. Sia δ il cilindro circolare retto di base a circonferenza Γ e altezza *OC*. Si conduca un piano β, parallelo ad α, che incontra il segmento *OC* in un punto *O′* e si consideri il solido formato dal cilindro circolare retto δ′, di base la circonferenza Γ e altezza *OO′*, sormontato dalla sfera di diametro *O′C*. Si studi come varia il volume del detto solido al variare del raggio della sfera. Nel caso in cui il volume diventa minimo si conduca un piano parallelo a *OC* e tangente alla sfera che sega il cilindro δ′ secondo un rettangolo. Si calcoli il perimetro della proiezione di detto rettangolo dal punto *C* sul piano α.

$$\left[V(x) = \frac{2}{3}\pi \cdot \left(2x^3 - 3x + 3\right); x_m = \frac{\sqrt{2}}{2}; 2p = 3 \cdot \sqrt{2}\right]$$

42. (Liceo scientifico suppletiva 1994/95) Nel parallelepipedo rettangolo di vertici *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* le facce *ABCD* ed *EFGH* sono opposte e i segmenti *AE*, *BF*, *CG* sono spigoli. Inoltre $\overline{AB} = 3x$, $\overline{AD} = 4x$, $\overline{AE} = 2a - x$, essendo *a* una lunghezza nota e *x* una lunghezza incognita. Chiamato *P* il piede della perpendicolare condotta da *A* alla retta *FH*, considerare il poliedro Σ avente per vertici i punti *A*, *B*, *F*, *E*, *P*. Calcolare il valore di *x* che rende massimo il volume di Σ, il valore di *a* per il quale questo volume massimo è uguale a $\frac{128}{75} cm^3$ e, infine, per tale valore di *a*, l'area della superficie del solido Σ di volume massimo.

$$\left[V(x) = \frac{36}{25}x^2 \cdot (2a - x), 0 < x < 2a; x_M = \frac{4}{3}a; a = 1\ cm; S_M = \frac{8}{3} + \frac{4}{75} \cdot (107 + 5809) cm^2\right]$$

43. (Liceo scientifico 1995/96) Considerato il rettangolo *ABCD*, il cui lato *AD* è lungo 8*a*, dove *a* è una lunghezza nota, sia *M* il punto medio del lato *AB*. Sulla perpendicolare al piano del rettangolo condotta

per M, prendere un punto V in modo che il piano del triangolo VCD formi con il piano del rettangolo un angolo α tale che $tan(\alpha) = \frac{3}{4}$. Mostrare che la superficie laterale della piramide di vertice V e base $ABCD$ è costituita da due triangoli rettangoli e da due triangoli isosceli. Sapendo che l'area di tale superficie laterale è $92a^2$, calcolare la lunghezza di AB. Constatato che tale lunghezza è $5a$, condurre un piano σ parallelo ala base della piramide e proiettare ortogonalmente su tale base il poligono sezione di σ con la piramide stessa, ottenendo in questo modo un prisma retto. Determinare la posizione di σ per la quale il volume di tale prisma risulta massimo. A completamento del problema, dimostrare che, se i numeri reali positivi x, y variano in modo che la loro somma si mantenga costante, allora il prodotto $x^2 \cdot y$ è massimo quando risulta $x = 2y$. [Vol. massimo se la distanza di σ dal piano di base è $2a$]

44. (Liceo scientifico 1996/97) Considerare i coni circolari retti in cui è uguale a una lunghezza assegnata $2k$, la somma del doppio dell'altezza con il diametro della base. Fra tali coni determinare quello di volume massimo e stabilire se ha anche la massima area laterale. Nel cono di volume massimo inscrivere poi il cilindro circolare retto avente la base sul piano di base del cono e volume massimo.

$$\left[V_M = \frac{4}{81}\pi\ k^3, \nexists S_M; V_C = \frac{2}{729}\pi \cdot k^3\right]$$

45. (Liceo scientifico suppletiva 1996/97) Data una semicirconferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 2$, si tracci la tangente t a detta semicirconferenza nel punto A. Preso un punto P sulla semicirconferenza, si tracci la perpendicolare PH alla retta t. Dimostrare che la semiretta PA è bisettrice dell'angolo $H\hat{P}O$. Posto $\overline{PH} = x$ esprimere in funzione di x l'area y del quadrilatero $AOPH$. Determinare per quale valore di x l'area $y = f(x)$ è massima. $\left[f(x) = \frac{1}{2}\cdot(x+1)\cdot\sqrt{2x-x^2}; x_M = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$

46. (Liceo scientifico suppletiva 1996/97) Due circonferenze concentriche γ_1 e γ_2 di centro C hanno raggio rispettivamente uguale a x e a 1, con $x < 1$. Da un punto P di γ_2 tracciare le tangenti a γ_1. Siano Q e R i due punti di tangenza. Determinare la funzione $y = f(x)$ che rappresenta l'area del triangolo PQR in funzione di x. Rappresentare in coordinate cartesiane ortogonali la funzione $y = f(x)$. Verificare che l'area y è massima per $x = \frac{1}{2}$ e dimostrare che in tale caso il triangolo PQR è equilatero.

$$\left[y = x\cdot\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}\right]$$

47. (Liceo scientifico 1999/00) Il candidato dimostri i seguenti enunciati:
   - Fra tutti i triangoli rettangoli aventi la stessa ipotenusa, quello isoscele ha l'area massima.
   - Fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una data sfera, quello di minima area laterale ha il suo vertice distante dalla superficie sferica della quantità $r\cdot\sqrt{2}$, se r è il raggio della sfera.

48. (Liceo scientifico 2000/2001) Fra i triangoli inscritti in un semicerchio quello isoscele ha: a) area massima e perimetro massimo; b) area massima e perimetro minimo; c) area minima e perimetro massimo; d) area minima e perimetro minimo. Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione. [a)]

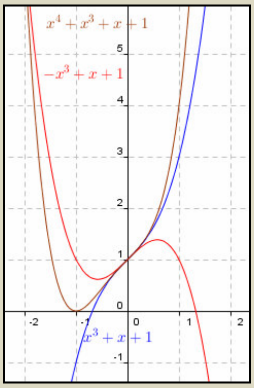
49. (Liceo scientifico 2000/2001) Considerata la funzione: $f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 3x$, dove a è un parametro reale non nullo, determinare i valori di a per cui essa ha un massimo e un minimo relativi e quelli per cui non ha punti estremanti. $\left[a < -\frac{9}{4} \vee a > 0; -\frac{9}{4} < a < 0\right]$

Lavoriamo insieme

Consideriamo un problema assegnato agli esami di Liceo scientifico PNI nell'a.s. 1999/2000. *Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale tale che valgano le seguenti condizioni*: $f(x_0) > 0$, $f'(x_0) > 0$, $f''(x_0) = 0$, *dove x_0 è un particolare valore reale*.

a) *Spiegare perché tali condizioni non sono sufficienti a determinare l'andamento di $f(x)$ in un intorno di x_0*. Noi sappiamo che a destra di x_0 la funzione è positiva e crescente, ma non sappiamo cosa accade a sinistra, quindi potremmo avere sia una funzione crescente in un intorno di 0 che una che invece in o cambia crescenza. Cioè in $x = 0$ può esservi sia un punto di flesso ascendente, sia uno in cui vi è un cambio di curvatura.

b) *Trovare almeno tre funzioni polinomiali* $f(x)$, *di grado superiore al* 1°, *aventi andamenti diversi in* $x_0 = 0$, *tali che*: $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$. Consideriamo un generico polinomio di III grado: $ax^3 + bx^2 + cx + d$ e imponiamo le condizioni, tenendo conto che ogni derivazione diminuisce di una unità il grado del polinomio, dovendo calcolare in x 0 0, ciò equivale a dire che sono unitari i coefficienti c e d e nullo il coefficiente b. Quindi otteniamo i generici polinomi: $ax^3 + x + 1$, che per $a > 0$ sono funzioni sempre crescenti con un flesso per $x = 0$, mentre per $a < 0$ invece hanno due estremi relativi: $3ax^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3a}}$. Ma anche il polinomio $ax^4 + bx^3 + x + 1$ verifica le condizioni e questo per $x = 0$ ha un andamento ancora diverso, come mostrato nella figura a lato.



c) *Determinare, se possibile, tutte le rette tangenti ai grafici delle funzioni trovate e parallele alla retta di equazione* $y = x + 1$. Considerando le cubiche, la generica derivata è $3ax^2 + 1$, che deve essere uguale a 1, il che accade per $x = 0$, quindi è proprio la tangente inflessionale la retta cercata, che coincide con la stessa retta data: $y = x + 1$.

50. (Liceo scientifico Scuole italiane all'estero 2000/2001) E′ assegnato un cilindro equilatero Q il cui raggio di base misura a. a) Si determini il cono C di volume minimo circoscritto al cilindro (C e Q hanno basi complanari) b) Si determini il valore di a per il quale il volume di C, approssimato alla prima cifra decimale, è $31{,}4 dm^3$. c) Si determini il volume della sfera S circoscritta a C.

$$\left[a)\ V_m = \frac{9}{2}\pi a^3; b)\ a = \sqrt[3]{\frac{20}{9}}dm; c)\ \frac{24565}{256}\pi\ dm^3\right]$$

51. (Liceo scientifico 2003/04) Date un esempio di funzione $f(x)$ con un massimo relativo in (1; 3) e un minimo relativo in (–1; 2). $\left[y = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}\right]$

52. (Liceo scientifico 2001/02) Si considerino le lunghezze seguenti: [1] $a + 2x$, $a - x$, $2a - x$; dove a è una lunghezza nota non nulla e x è una lunghezza incognita. a) Determinare per quali valori di x le lunghezze [1] si possono considerare quelle dei lati di un triangolo non degenere. b) Stabilire se, fra i triangoli non degeneri i cui lati hanno le lunghezze [1], ne esiste uno di area massima o minima. c) Verificato che per $x = \frac{a}{4}$ le [1] rappresentano le lunghezze dei lati di un triangolo, descriverne la costruzione geometrica con riga e compasso e stabilire se si tratta di un triangolo rettangolo, acutangolo o ottusangolo. d) Indicato con ABC il triangolo di cui al precedente punto c), in modo che BC sia il lato maggiore, si conduca per A la retta perpendicolare al piano del triangolo e si prenda su di essa un punto D tale che AD sia lungo a: calcolare un valore approssimato a meno di un grado (sessagesimale) dell'ampiezza dell'angolo formato dai due piani DBC e ABC.

$$\left[\text{a) } 0 < x < \frac{a}{2}; \text{ b) } x_M = \frac{a \cdot \sqrt{7} - 1}{6}; \nexists x_m; \text{ c) Ottusangolo; d) } \approx 57°\right]$$

53. (Liceo scientifico PNI 2002/03) Quale è la capacità massima, espressa in centilitri, di un cono retto di apotema 2 dm? [≈ 322,45 cl]

54. (Liceo scientifico PNI 2003/04) Tra i triangoli di base assegnata e di uguale area, dimostrare che quello isoscele ha perimetro minimo.

55. (Liceo scientifico 2003/04) *ABC* è un triangolo rettangolo di ipotenusa *BC*. a) Dimostrate che la mediana relativa a *BC* è congruente alla metà di *BC*. b) Esprimete le misure dei cateti di *ABC* in funzione delle misure, supposte assegnate, dell'ipotenusa e dell'altezza ad essa relativa. c) Con *BC* = 3 *m*, determinate il cono *K* di volume massimo che si può ottenere dalla rotazione completa del triangolo attorno ad uno dei suoi cateti e la capacità in *litri* di *K*. d) Determinate la misura approssimata, in radianti ed in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale del cono *K*.

$$\left[\text{b) } \sqrt{i\cdot\left(\frac{i}{2}-\sqrt{\left(\frac{i}{2}\right)^2-h^2}\right)};\sqrt{i^2-\left(\frac{i^2}{2}-i\cdot\sqrt{\left(\frac{i}{2}\right)^2-h^2}\right)};\text{c) } \approx 2094,39\,l;\text{ d) } \approx 5,13\,rad \approx 293°56'20''\right]$$

56. (Liceo scientifico 2004/05) Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di 0,4 *litri*, quali devono essere le sue dimensioni in *centimetri*, affinché sia minima la quantità di materiale necessario per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta e si consideri anche il materiale per i coperchi)

[Il foglio di latta per il contenitore, esclusi i coperchi, deve essere quadrato di lato lungo $\sqrt[3]{1,6\pi}$]

57. (Liceo scientifico 2004/05) Si dimostri che tra tutti i rettangoli di dato perimetro, quello di area massima è un quadrato.

58. (Liceo scientifico PNI 2004/05) Nel piano *Oxy* sono date le curve λ: $x^2 = 4\,(x - y)$ e *r*: $4y = x + 6$. a) Si provi che λ e *r* non hanno punti comuni. Si trovi il punto $P \in \lambda$ che ha distanza minima da *r*.

$$\left[P \equiv \left(\frac{3}{2};\frac{15}{16}\right)\right]$$

59. (Liceo scientifico 2005/06) Un filo metallico di lunghezza λ viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare. a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare? b) Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché: la somma delle due aree sia minima? La somma delle due aree sia massima? c) Una aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

$$\left[\text{a) Quadrata; b) } m \equiv \left(\frac{\pi}{\pi+4};\frac{1}{4\cdot(\pi+4)}\right), M \equiv \left(\frac{1}{16};\frac{1}{4\pi}\right);\text{ c) } 33,1\%\right]$$

60. (Liceo scientifico 2005/06) Un foglio di carta deve contenere: un'area di stampa di 50 cm^2, margini superiore e inferiore di 4 *cm* e margini laterali di 2 *cm*. Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che si può utilizzare? [9 *cm* × 18 *cm*]

61. (Liceo scientifico 2005/06) La funzione $f(x) = a\,sin(x) + b\,cos(x)$ ha un estremo relativo per $x = \frac{4}{3}\pi$, ed è $f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 1$. Si trovino *a* e *b* e si dica quale è il periodo di *f*(*x*). $\left[a = \sqrt{3}, b = 1; P = 2\pi\right]$

62. (Liceo scientifico PNI 2006/07) Sia *a* un numero reale maggiore di zero e sia *g* la funzione definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, da: $g(x) = a^x + a^{-x}$. Si dimostri che, se $a \neq 1$, *g* è strettamente crescente per $x > 0$ e strettamente decrescente per $x < 0$.

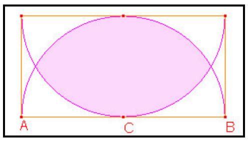
63. (Liceo scientifico 2006/07) Si considerino i triangoli la cui base è *AB* = 1 e il cui vertice *C* varia in modo che l'angolo $C\hat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo $A\hat{B}C$. Si determini l'ampiezza dell'angolo $A\hat{B}C$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati *AC* e *BC* e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi. [≈ 52°14′]

64. (Liceo scientifico 2006/07) Un serbatoio di olio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 1 *m*. Si dica quanti litri di olio il serbatoio può contenere. [≈ 403]

65. (Liceo scientifico 2007/2008) Fra le casseruole, di forma cilindrica, aventi la stessa superficie *S* (quel-

la laterale più il fondo) qual è quella di volume massimo? $\left[V_{Max}=\sqrt{\dfrac{S^3}{27\pi}}\right]$

66. (Liceo scientifico 2007/2008) Assegnato nel piano il semicerchio Γ di centro C e diametro $AB = 2$, si affrontino le seguenti questioni: a) Si disegni nello stesso semipiano di Γ un secondo semicerchio Γ_1 tangente ad AB in C e di uguale raggio 1.



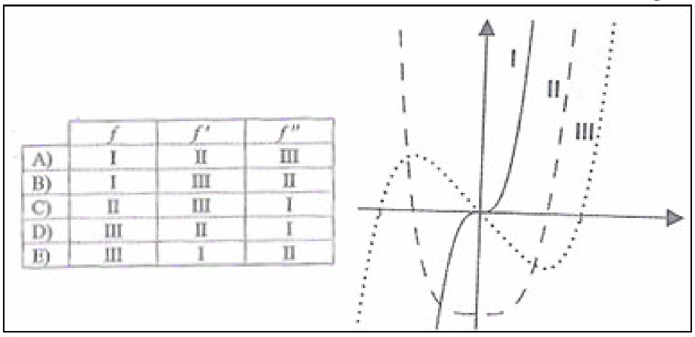
Si calcoli l'area dell'insieme piano intersezione dei due semicerchi Γ e Γ_1. b) Si trovi il rettangolo di area massima inscritto in Γ. c) Sia P un punto della semicirconferenza di Γ, H la sua proiezione ortogonale su AB. Si ponga $P\widehat{C}B = x$ e si esprimano in funzione di x le aree S_1 e S_2 dei triangoli APH e PCH. Si calcoli il rapporto $f(x)=\dfrac{S_1(x)}{S_2(x)}$. Si studi $f(x)$ e se ne disegni il grafico prescindendo dai limiti geometrici del problema.

$$\left[\text{a) } \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{b) dimensioni una doppia dell'altra; c) } f(x)=\frac{1+cos(x)}{|cos(x)|}, x_M=(2k+1)\pi, x_m=2k\pi\right]$$

67. (Liceo scientifico 2010/2011) Sia f la funzione definita sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali da $f(x)=(ax+b)e^{-\frac{x}{3}}+3$ dove a e b sono due reali che si chiede di determinare sapendo che f ammette un massimo nel punto di ascissa 4 e che $f(0) = 2$. [$a = 1$, $b = -1$]

68. (Liceo scientifico 2010/2011) Si trovi il punto della curva $y=\sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate (4;0). $\left[\left(\dfrac{7}{2};\sqrt{\dfrac{7}{2}}\right)\right]$

69. (Liceo scientifico 2010/2011) Nella figura seguente, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione f, un altro lo è della funzione derivata f' e l'altro ancora di f''. quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici? [D)]

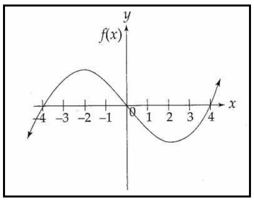


	f	f'	f''
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II

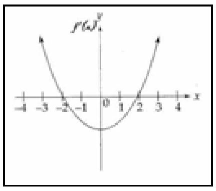
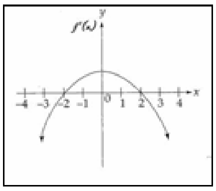
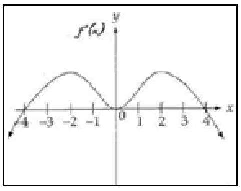
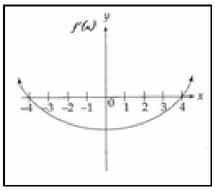
70. (Liceo scientifico PNI 2010/2011) Di tutti i coni inscritti in una sfera di raggio 10 cm, qual è quello di superficie laterale massima? $\left[r_c=\dfrac{20\cdot\sqrt{2}}{3}, a_c=\dfrac{20\cdot\sqrt{6}}{3}\right]$

71. (Liceo scientifico PNI 2011/2012) Si provi che fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una sfera di raggio r, quello di minima area laterale ha il vertice che dista $r\cdot\sqrt{2}$ dalla superficie sferica.

72. (Liceo scientifico 2012/2013)

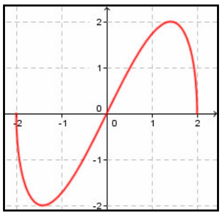


Se la figura a lato rappresenta il grafico di $f(x)$, quale dei seguenti potrebbe essere il grafico di $f'(x)$? Si giustifichi la risposta. [A]

A. 
B. 
C. 
D 

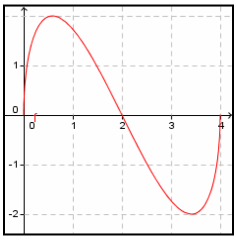
73. (Liceo scientifico 2013/14) Un'azienda commercializza il suo prodotto in lattine da 5 litri a forma di parallelepipedo a base quadrata. Le lattine hanno dimensioni tali da richiedere la minima quantità di latta per realizzarle. Quali sono le dimensioni, arrotondate ai *mm*, di una lattina?

[Cubo di spigolo ≈ 171 *mm*]

74. (Liceo scientifico 2013/14)  A lato è disegnato il grafico Γ della funzione $f(x) = x \cdot \sqrt{4 - x^2}$. a) Si calcolino il massimo e il minimo assoluti di $f(x)$. b) Si dica se l'origine O è centro di simmetria per Γ e si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'angolo che la tangente in O a Γ forma con la direzione positiva dell'asse x. c) Sia $h(x) = sin[f(x)]$ con $0 \le x \le 2$. Quanti sono i punti del grafico di $h(x)$ di ordinata 1? d) Il grafico di $h(x)$ presenta punti di minimo, assoluti o relativi? e) Per quali valori reali di k l'equazione $h(x) = k$, ha 4 soluzioni distinte?

$$\left[\text{a) } m \equiv \left(-\sqrt{2};-2\right), M \equiv \left(\sqrt{2};2\right);\text{ b) Sì, } \approx 63°26'6'';\text{ c) 2; d) } x = 0 \vee \sqrt{2} \vee 2;\text{ e) } sin(2) < k < 1\right]$$

75. (Liceo scientifico 2013/14) Del polinomio di quarto grado $P(x)$ si sa che assume il suo massimo valore, 3, per $x = 2$ e $x = 3$ e, ancora, che $P(1) = 0$. Si calcoli $P(4)$. [0]

76. (Liceo scientifico PNI 2013/14) Sia $f(x) = (2 - x) \cdot \sqrt{4x - x^2}$  A lato è disegnato il grafico Γ di $f(x)$. a) Si dimostri che (2; 0) è centro di simmetria di Γ e si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'angolo che la tangente in esso a Γ forma con la direzione positiva dell'asse x. b) Si dimostri che, qualunque sia t, $0 < t < 2$, le rette tangenti a Γ nei suoi punti di ascisse $2 + t$ e $2 - t$ sono parallele. Esistono rette tangenti a Γ che siano parallele alla retta $21x + 10y + 31 = 0$? E che siano parallele alla retta $23x + 12y + 35 = 0$? c) Sia $h(x) = sin[f(x)]$. Quanti sono i punti del grafico di $h(x)$ di ordinata 1? Il grafico di $h(x)$ presenta punti di minimo, assoluti o relativi? Per quali valori reali di k l'equazione $h(x) = k$, ha 4 soluzioni distinte?[a) ≈ 116°33′54″; b) No; Sì; c) 2; Sì; $sin(2) < x < 1 \vee -1 < x < -sin(2)$]

77. (Liceo scientifico PNI 2013/14) Si calcolino l'altezza e il raggio del massimo cilindro circolare retto inscritto in una sfera di raggio $\sqrt{3}$. $\left[h_M = 2, r_M = \sqrt{2}\right]$

78. (Liceo scientifico PNI 2013/14) Se $f'(x) = ln(x) - x + 2$, per quale dei seguenti valori approssimati di x, $f(x)$ ha un minimo relativo? (A) 5,146 (B) 3,146 (C) 1,000 (D) 0,159 (E) 0 [D]

79. (Liceo scientifico 2014/2015) Sia f la funzione, definita per tutti gli x reali, da $f(x) = (x - 1)^2 + (x - 2)^2 + (x - 3)^2 + (x - 4)^2 + (x - 5)^2$, determinare il minimo di f. [(3; 10)]

80. (Liceo scientifico 2015/16) Data una parabola di equazione $y = 1 - ax^2$, con $a > 0$ si vogliono inscrivere dei rettangoli, con un lato sull'asse x, nel segmento parabolico delimitato dall'asse x. Determinare a in modo tale che il rettangolo di area massima sia anche il rettangolo di perimetro massimo. [$a = 3$]

Rappresentazione grafica di una funzione

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti per potere rappresentare una qualsiasi funzione. Ovviamente ciò non significa che sappiamo farlo sempre.

Esempio 12

Della funzione $f(x) = x^6 + x^5 + x - 1$, si determina facilmente il dominio, che è $\mathbb{R}$. Non siamo però in grado di risolvere l'equazione $x^6 + x^5 + x - 1 = 0$, quindi non sappiamo stabilire quante e quali intersezioni ha con l'asse x. Possiamo osservare che $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 2 > 0$, quindi per il teorema di esistenza degli zeri c'è certamente almeno una intersezione con l'asse delle x. Potremmo determinare un suo valore approssimato con il metodo dicotomico. Allo stesso modo avremmo difficoltà a studiare la crescenza della funzione, poiché $f'(x) = 6x^5 + 5x^4 + 1$. Anche questo polinomio è difficile da scomporre.

Diciamo che, come visto nell'esempio precedente, ragionando riusciamo a risolvere tanti problemi e anche se non riusciamo a determinare *esattamente* il grafico della funzione, nel senso che non troviamo i valori esatti delle intersezioni con gli assi o degli estremi relativi, in genere riusciamo a capire se e quante intersezioni o estremi vi sono. Prima però di passare a uno studio completo di funzione, dobbiamo considerare il cosiddetto comportamento asintotico.

Esempio 13

Il dominio della funzione $f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-4}$ è $x \neq \pm 2$. Quindi dobbiamo stabilire cosa accade quando ci avviciniamo a queste due ascisse. Dobbiamo cioè calcolare i limiti seguenti

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2-x}{x^2-4}=+\infty,\ \lim_{x\to -2^+}\frac{x^2-x}{x^2-4}=-\infty,\ \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-x}{x^2-4}=-\infty,\ \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-x}{x^2-4}=+\infty$$

Qual è il significato geometrico di questi calcoli? Che se ci avviciniamo a -2 o a 2, la funzione *tende* a diventare la retta $x = -2$ o $x = 2$. Cioè, usando un concetto già visto per esempio nello studio delle iperboli, che le rette $x = -2$ e $x = 2$ sono due asintoti per la funzione. Dobbiamo però indagare anche cosa accade quando ci avviciniamo agli estremi infiniti della funzione: $\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-x}{x^2-4}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-x}{x^2-4}=1$. Anche in questo caso abbiamo un asintoto, poiché la funzione *tende* a diventare la retta $y = 1$.

In vista dell'esempio precedente poniamo le seguenti definizioni.

Definizione 5

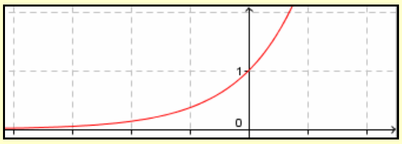
Per una funzione $f(x)$ la retta $x = a$ è un
- **asintoto verticale sinistro** se $\lim_{x\to a^-} f(x)=\infty$;
- **asintoto verticale destro** se $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$;
- **asintoto verticale** se $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$;

Per una funzione $f(x)$ la retta $y = a$ è un
- **asintoto orizzontale sinistro** se $\lim_{x\to -\infty} f(x)=a$;
- **asintoto orizzontale destro** se $\lim_{x\to +\infty} f(x)=a$;
- **asintoto orizzontale** se $\lim_{x\to \pm\infty} f(x)=a$.

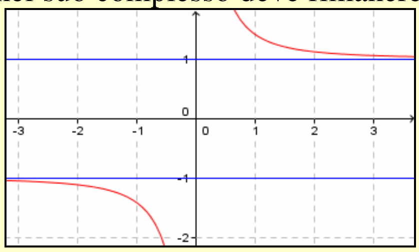
Nelle definizioni precedenti il segno dell'infinito nei risultati, è irrilevante. Una funzione può avere infiniti asintoti verticali, come accade per $f(x) = tan(x)$; mentre può avere al massimo 2 asintoti orizzontali diversi, uno per lato. Ovviamente una funzione definita in $\mathbb{R}$, o comunque in un insieme in modo continuo non può avere asintoti verticali, questi possono cercarsi solo in quei punti x_0 in cui la funzione non è definita ma per i quali è definita in un loro intorno almeno parziale (sinistro o destro). Allo stesso modo una funzione per avere asintoti orizzontali deve avere un insieme di esistenza che contenga un intervallo del tipo $(a; +\infty)$ oppure $(-\infty; a)$.

Esempio 14

- La funzione $f(x) = e^x$ ha l'asse x come asintoto orizzontale sinistro, dato che $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, ma non ha asintoto orizzontale destro, dato che $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Non ha asintoti verticali poiché il dominio è $\mathbb{R}$.



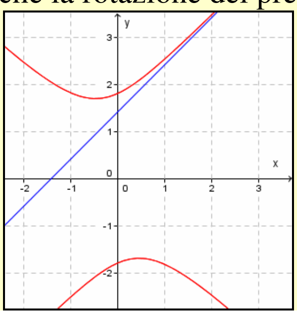
- La funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ ha la retta $x = 0$ come asintoto verticale, dato che il suo dominio è $x \neq 0$, quindi possiamo calcolare il limite e si ha: $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}} = +\infty$. Ha anche $y = 1$ come asintoto orizzontale destro, dato che $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = 1$, mentre ha come asintoto orizzontale sinistro la retta di equazione $y = -1$, infatti $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}}\right) = -1$. Il segno meno davanti alla radice quadrata, quando portiamo x dentro la radice, è motivato dal fatto che per x che tende a meno infinito, il denominatore è negativo, portando il fattore all'interno della radice diventerebbe positivo, quindi dobbiamo cambiare segno perché l'espressione nel suo complesso deve rimanere negativa com'era prima di tale operazione.



In effetti per alcune funzioni è possibile l'esistenza di un asintoto di tipo diverso, ossia una retta non parallela ad alcuno degli assi coordinati.

Esempio 15

Se ruotiamo la funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, di 45° rispetto all'origine non otteniamo una funzione, come mostrato nella figura seguente, ma se la rotazione la applichiamo solo al ramo destro avremo una funzione che avrà ancora un asintoto, che non sarà altro che la rotazione del precedente asintoto orizzontale $y = 1$.



Definizione 6

Per una funzione $f(x)$ la retta di equazione $y = mx + p$ è un

- **asintoto obliquo sinistro** se $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx-p\right]=0$;
- **asintoto obliquo destro** se $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx-p\right]=0$;
- **asintoto obliquo** se $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx-p\right]=0$.

La definizione precedente ci permette di stabilire se una data retta è un asintoto obliquo per una funzione, ma non se una data funzione ha asintoti obliqui. Il seguente risultato permette la determinazione dei coefficienti della eventuale retta asintotica.

Teorema 8

La funzione $y = f(x)$ ha asintoto obliquo $y = mx + p$ se: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=m\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-m\cdot x\right]=p\in\mathbb{R}$.

Dimostrazione

Dalla definizione 6 abbiamo:

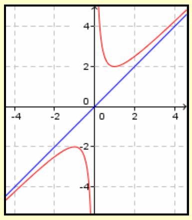
$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx-p\right]=0\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(mx+p)\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{mx+p}{x}=m$$

E, nel momento in cui m è reale e diverso da zero: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=p$.

Vediamo un esempio di applicazione del criterio stabilito dal Teorema precedente.

Esempio 16

La funzione $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ ha un asintoto obliquo che andiamo a determinare usando i risultati del Teorema 8: $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x}\cdot\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2}=1$. Poiché $m \neq 0$, cerchiamo p: $p=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{x^2}=0$.

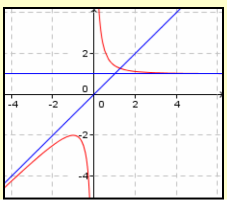


Quindi l'asintoto obliquo ha come equazione $y = x$. A lato il grafico di conferma.

Ovviamente una funzione non può avere **contemporaneamente** un asintoto orizzontale e uno obliquo *dalla stessa parte*, ma può averli da *parti opposte*.

Esempio 17

La funzione $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{x} & x<0\\[2mm] \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} & x>0\end{cases}$, per quanto visto negli esempi precedenti, ha per asintoto obliquo sinistro la retta di equazione $y = x$ e come asintoto orizzontale destro la retta di equazione $y = 1$.



Per alcune funzioni gli asintoti si determinano quasi senza calcoli.

Definizione 7

Una funzione $f(x)$ che può esprimersi come somma di prodotti di numeri per potenze reali di x si chiama **polinomio generalizzato di grado la massima potenza di x**. Il coefficiente della potenza massima si chiama **coefficiente direttore**.

Esempio 18

La funzione $f(x) = x + \sqrt{x} - 2 \cdot \sqrt[3]{x^4} + x^{\pi} - 4$, è un polinomio generalizzato di grado π.

Corollario 1

Data la funzione $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, in cui $P(x)$ e $Q(x)$ sono due polinomi generalizzati di gradi α e β e di coefficienti direttori a e b. Allora $f(x)$:

- ha asintoto orizzontale se è $\alpha \leq \beta$ ($y = 0$ se $\alpha < \beta$; $y = \frac{a}{b}$ se $\alpha = \beta$);
- non ha asintoti orizzontali se è $\alpha > \beta$;
- ha un asintoto obliquo se è $\alpha = \beta + 1$.

Dimostrazione ovvia, dal calcolo dei limiti delle rispettive definizioni di asintoto.

Vediamo un esempio.

Esempio 19

- La funzione $f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x} - x^e}{x^3 - 1}$ ha l'asse x come asintoto orizzontale, poiché $e < 3$.
- La funzione $f(x) = \frac{x^3 + \sqrt{x}}{2x^3 - 1}$ ha la retta $y = \frac{1}{2}$, come asintoto orizzontale, poiché entrambi i polinomi hanno grado 3 e i coefficienti direttori sono rispettivamente 1 e 2.
- La funzione $f(x) = \frac{x^4 + \sqrt{x} - 1}{2x^3 - x + \sqrt{x}}$ ha asintoto obliquo, poiché il numeratore ha grado 4 e il denominatore grado 3. Calcoliamo i coefficienti dell'equazione: $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^4 + \sqrt{x} - 1}{2x^4 - x^2 + x \cdot \sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$ e $p = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^4 + \sqrt{x} - 1}{2x^3 - x + \sqrt{x}} - \frac{1}{2} \cdot x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{2x^4} + 2\sqrt{x} - 2 - \cancel{2x^4} + x^2 - x \cdot \sqrt{x}}{2 \cdot \left(2x^3 - x + \sqrt{x}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{4x^3} = 0$. Quindi possiamo dire che l'asintoto obliquo ha equazione $y = \frac{1}{2}x$.

A questo punto siamo in grado di studiare una funzione. Possiamo fare uno schema di passi da effettuare, sottolineando che non sempre possono eseguirsi e non sempre sono utili.

Schema per lo studio di una funzione

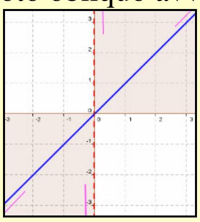
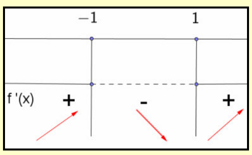
1. Determinazione del dominio.
2. Determinazione di eventuali simmetrie.
3. Studio del segno della funzione e ricerca di sue eventuali intersezioni con gli assi coordinati.
4. Studio del comportamento agli estremi del dominio, con conseguente ricerca di eventuali asintoti.
5. Studio del segno della derivata prima, con conseguente determinazione degli intervalli di crescenza e

decrescenza ed eventuali estremi relativi.
6. Studio di quel che accade dove la funzione è continua ma non derivabile.
7. Studio del segno della derivata seconda, con conseguente determinazione degli intervalli di concavità e convessità ed eventuali estremi relativi e flessi a tangente obliqua.

Adesso vediamo alcuni esempi.

Esempio 20

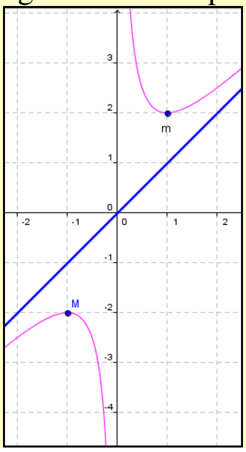
Studiamo la funzione $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$. È buona norma rappresentare man mano tutto ciò che otteniamo, controllando ogni volta se ciò che otteniamo è coerente con *tutto ciò che abbiamo già ottenuto*.

1. *Determinazione del dominio della funzione*
   Facilmente si ha: $x \neq 0$.
2. *Determinazione di eventuali simmetrie della funzione*
   Intanto osserviamo che ha senso effettuare questa ricerca perché il dominio è esso stesso simmetrico, essendo privo solo di $x = 0$. In effetti la funzione è dispari: $f(-x)=\dfrac{(-x)^2+1}{-x}=-\dfrac{x^2+1}{x}=-f(-x)$. Ciò vuol dire che possiamo studiare la funzione solo per $x > 0$, o comunque che ci aspettiamo valori simmetrici, quindi se trovassimo un estremo relativo in $(a; b)$ dovrebbe esserci un estremo relativo di tipo diverso in $(–a; –b)$.
3. *Studio del segno della funzione e sue eventuali intersezioni con gli assi coordinati*
   La funzione ovviamente non può avere intersezioni con l'asse y perché tale retta non appartiene al dominio. Non ha neppure intersezioni con l'asse delle ascisse perché il numeratore è sempre positivo. Quindi il segno della funzione è quello del denominatore. Pertanto la funzione è positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$.
4. *Studio del comportamento agli estremi con conseguente ricerca di eventuali asintoti.*
   Vediamo cosa accade nell'intorno di $x = 0$. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+1}{x}=-\infty, \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+1}{x}=+\infty$. Quindi l'asse y è asintoto verticale. Dal Corollario 1 sappiamo che non vi sono asintoti orizzontali, ma vi è un asintoto obliquo, che abbiamo già determinato nell'Esempio 16, la retta di equazione $y = x$. Fino adesso abbiamo ottenuto le seguenti informazioni che rappresentiamo nel grafico seguente, in cui indichiamo con il colore fucsia i tratti di funzione e coloriamo le parti di piano in cui abbiamo la funzione. Ragionando su tale grafico, dato che i tratti segnati devono unirsi fra loro, essendo la funzione continua, ci aspettiamo di trovare almeno un minimo relativo per $x > 0$ e almeno un massimo relativo per $x < 0$, con ascisse e ordinate fra loro opposte per la simmetria. Vi è da dire che in effetti non abbia sufficienti informazioni per stabilire che l'*avvicinamento* della funzione all'asintoto obliquo avvenga come mostrato e non dalle parti opposte.
   
5. *Studio del segno della derivata prima della funzione.*
   Abbiamo: $f'(x)=\dfrac{2x\cdot x-(x^2+1)\cdot 1}{x^2}=\dfrac{2x^2-x^2-1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$, che si annulla per $x = \pm 1$. Il segno dipende solo dal numeratore ed è rappresentato nel grafico a lato. 

   Quindi abbiamo un massimo relativo per $x = 1$, la cui ordinata è $f(1) = 2$, e un minimo relativo per $x = –1$, la cui ordinata è $f(–1) = –2$. In accordo con la simmetria della funzione e con quanto congetturato al punto 4.
6. *Studio di quel che accade dove la funzione è continua ma non derivabile*

Non ci sono punti di questo tipo.

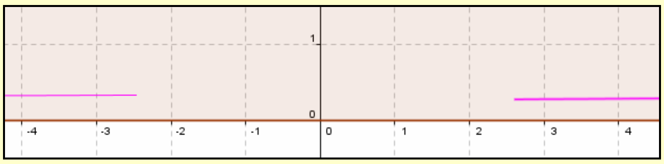
7. *Studio del segno della derivata seconda della funzione.*
   Dalle informazioni ottenute non è necessario, poiché facilmente si capisce che non ci possono essere punti di flesso e che la curva volge la concavità verso il basso per $x < 0$ e verso l'alto per $x > 0$. Facciamolo lo stesso per verifica. Si ha: $f''(x) = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{\cancel{2x^3} - \cancel{2x^3} + 2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$.
   Effettivamente non si annulla mai e ha il segno di x. Ecco perciò il grafico cercato.



Consideriamo adesso una funzione esponenziale.

Esempio 21

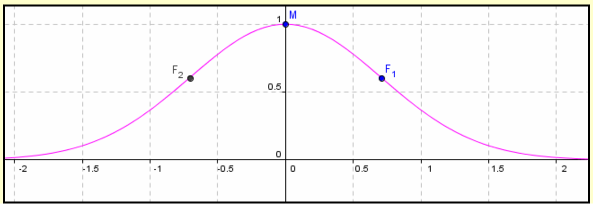
Studiamo la funzione $f(x) = e^{-x^2}$.

1. *Determinazione del dominio della funzione*
   Tutti i reali
2. *Determinazione di eventuali simmetrie della funzione*
   La funzione è pari, dato che contiene solo la x di grado 2. Ciò vuol dire che possiamo studiare la funzione solo per $x > 0$, o comunque che ci aspettiamo valori simmetrici, quindi se troviamo un estremo relativo in (a; b), deve esserci un altro estremo relativo dello stesso tipo in ($-a$; b). Ovviamente se è $a = 0$, l'estremo relativo è uno solo.
3. *Studio del segno della funzione e sue eventuali intersezioni con gli assi coordinati*
   La funzione è ovviamente sempre positiva.
4. *Studio del comportamento agli estremi con conseguente ricerca di eventuali asintoti*
   Non ci possono essere asintoti verticali perché il dominio è $\mathbb{R}$. Cerchiamo quelli orizzontali: $\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = 0$. Quindi la retta di equazione $y = 0$ è asintoto orizzontale. Fino adesso abbiamo le informazioni mostrate nel grafico a lato,  in cui indichiamo con il colore fucsia i tratti di funzione e coloriamo la parte di piano in cui vi è la funzione. Dato che i trati devono unirsi e la funzione non è costante, ci aspettiamo almeno un massimo relativo, probabilmente sull'asse delle ordinate, per quanto detto sulla simmetria. Inoltre, data l'asintoticità e la simmetria ci devono essere due flessi, infatti diversamente la curva presenterebbe sempre la stessa concavità e perciò dovrebbe attraversare l'asintoto e andare verso meno infinito.
5. *Studio del segno della derivata prima della funzione*
   Abbiamo: $f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x)$, che si annulla per $x = 0$. Calcoliamo la derivata seconda: $f''(x) = e^{-x^2} \cdot (4x^2 - 2)$, calcoliamola in zero: $f''(0) < 0$. Quindi in $M \equiv (0; 1)$ vi è un massimo relativo, come ci aspettavamo.
6. *Studio di quel che accade dove la funzione è continua ma non derivabile*

Non ci sono di questi punti

7. *Studio del segno della derivata seconda della funzione*

La abbiamo già calcolata, si annulla per $x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. Quindi ci sono effettivamente i due flessi in posizioni simmetriche: $F \equiv \left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}};\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$. Ecco perciò il grafico cercato.



Nelle verifiche vedremo altri esempi.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Determinare gli eventuali asintoti della funzione $f(x)=\frac{2x^2-x+1}{x^2-1}$.

Il dominio della funzione è $x \neq \pm 1$; studiamo il comportamento della funzione nell'intorno di questi valori: $\lim_{x\to-1^-}\frac{2x^2-x+1}{x^2-1}=+\infty$, $\lim_{x\to-1^+}\frac{2x^2-x+1}{x^2-1}=-\infty$, $\lim_{x\to1^-}\frac{2x^2-x+1}{x^2-1}=-\infty$, $\lim_{x\to1^+}\frac{2x^2-x+1}{x^2-1}=+\infty$. Quindi le rette $x = -1$ e $x = 1$ sono asintoti verticali. Per quanto detto nel Corollario 1 vi è anche un asintoto orizzontale: $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$, cioè la retta $y = 2$.

Determinare gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni, se la risposta è ∅ non ve ne sono, Dx = destro, Sx = sinistro

Livello 1

1. $f(x)=\frac{3x^2-x+7}{x^2+1}$; $f(x)=\frac{7x^3-5x+2}{x^2+5}$; $f(x)=\frac{x^3-x}{x-1}$; $f(x)=\frac{x^3+1}{x-2}$ [$y = 3$; ∅ ; ∅ ; $x = 2$]
2. $f(x)=\frac{x^2+1}{x-3}$; $f(x)=e^{-x}$; $f(x)=\frac{4x^2-1}{5x+2}$ $\left[y=x+3; x=0(Dx); \left(x=-\frac{2}{5}, y=\frac{4}{5}x-\frac{8}{25}\right)\right]$
3.
4. $f(x)=\frac{x^2+x-1}{4x^2-9}$; $f(x)=ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$; $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

$\left[\left(x=\pm\frac{3}{2}, y=\frac{1}{4}\right); (x=-1(Sx), x=1(Dx), y=0); \varnothing\right]$

Livello 2

5. $f(x)=\frac{x+\sqrt{x}-1}{x^2}$; $f(x)=ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+x$; $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

[($x = 0$ (Dx), $y = 0$ (Dx)) ; $y = x$ (Dx) ; ($y = e$, $x = -1$ (Sx))]

6. $f(x)=\sqrt{4x^2+1}$; $f(x) = tan^{-1}(2x+3)$; $f(x)=sin^{-1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

$\left[(y=2x(Dx), y=-2x(Sx)); \left(y=-\frac{\pi}{2}(Sx), y=\frac{\pi}{2}(Dx)\right); y=\frac{\pi}{2}\right]$

7. $f(x)=\frac{e^{-x}+3e^x}{e^x+1}$; $f(x)=tan^{-1}\left(\frac{x+3}{3x-1}\right)$; $f(x)=\frac{sin(x)}{x}$ $\left[y=3(Dx); y=tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right); y=0\right]$

Lavoriamo insieme

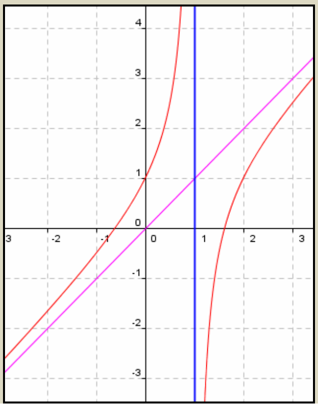
Data la funzione $y=\frac{ax^2+bx-1}{cx-1}$, determinare i valori dei parametri *a, b, c* sapendo che ammette la retta di equazione $x = 1$ come un asintoto verticale e la retta di equazione $y = x$ come un asintoto obliquo.

Prima di imporre le condizioni spieghiamo cosa significano. Nel primo caso deve essere: $\lim_{x\to1}\frac{ax^2+bx-1}{cx-1}=\infty$, il che significa che per $x = 1$ si deve annullare il denominatore ma non il numeratore, diversamente avremmo una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Nel secondo caso invece deve essere:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx-1}{(cx-1)\cdot x}=\frac{a}{c},\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax^2+bx-1}{cx-1}-\frac{a}{c}\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{acx^2}+bcx-c-\cancel{acx^2}+ax}{c\cdot(cx-1)}=\frac{bc+a}{c^2}$$

Quindi si ha: $\begin{cases} c-1=0 \\ a+b-1\neq 0 \\ \dfrac{a}{c}=1 \\ \dfrac{bc+a}{c^2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=1 \\ a+b-1\neq 0 \\ a=1 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=1 \\ 1-1-1\neq 0 \\ a=1 \\ b=-1 \end{cases}$.

Infine la funzione cercata è $y=\dfrac{x^2-x-1}{x-1}$. La rappresentiamo con Geogebra, per conferma.



Nei seguenti quesiti determinare i valori dei parametri a, b, c, in modo che le date funzioni soddisfino quanto richiesto (l'equazione di una retta indica un asintoto; M un massimo; m un minimo; F un punto di flesso a tangente obliqua; E un estremo relativo generico, P un punto appartenente alla funzione)

Livello 2

8. $y=\dfrac{x^2+ax+b}{cx-5}$, $x = 5$, $M \equiv (3; 1)$; $y=\dfrac{a+bx^4}{x^3+c}$, $x = 1$, $y = x$
[($a = -5$, $b = 4$, $c = 1$) ; ($a \neq -1$, $b = 1$, $c = -1$)]

9. $y=\dfrac{ax^2+bx-1}{cx-1}$, $x = 1$, $y = x$; $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2-bx+4}$, $x = -4$; $E_{1,2} \equiv (\pm 2; y)$ [($a = 1$, $b = -1$, $c = 1$); Indet.to]

10. $y=\dfrac{ax^2+bx+1}{x^2+c}$, $y = 1$, $x = -1$, $P\equiv\left(2;\dfrac{7}{3}\right)$; $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 4x$, $E_1\equiv\left(\dfrac{1}{2};y\right), E_2\equiv\left(-\dfrac{2}{3};y\right)$
$\left[(a=b=1,c=-1);\left(a=\dfrac{3}{2},b=-\dfrac{11}{3},c=-2\right)\right]$

11. $y=\dfrac{e^x+a}{e^x+b};F\equiv\left(ln(3);\dfrac{5}{6}\right)$; $y=\dfrac{a\cdot x^2+bc}{cx^2-1}$; $x = 1$; $y=\dfrac{1}{2}$; $P \equiv (-2; 1)$ [($a = 2$, $b = 3$) ; $\varnothing$]

Livello 3

12. $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$; $E\equiv\left(4;-\dfrac{16}{3}\right), F\equiv\left(2;-\dfrac{8}{3}\right)$ $\left[a=0,b=\dfrac{1}{6},c=-1,d=0\right]$

13. $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$; $y=x-\dfrac{7}{2}$; $P \equiv (2; 0)$ [$a = 1$, $b = -7$, $c = 10$]

14. $y=\sqrt{\dfrac{ax+b}{c+x}}$; $x = 0$; $y = 2$; $P\equiv\left(2;\dfrac{5}{\sqrt{6}}\right)$ $\left[a=4,b=\dfrac{1}{3},c=0\right]$

15. $y=\dfrac{a\cdot sin(x)+b}{cos(x)+c}$; $x = \pi$; $E\equiv\left(2tan^{-1}(-2);-\dfrac{3}{2}\right)$ (Suggerimento: usare le formule parametriche per calcolare i valori della funzione e della sua derivata) [$a = 2$, $b = 1$, $c = 1$]

16. $y=\dfrac{a+cos(x)}{b\cdot sin(x)+c\cdot cos(x)}$; $M\equiv\left(\dfrac{\pi}{2};1\right); x=\dfrac{3}{4}\pi$ [a = 1, b = 1, c = 1]

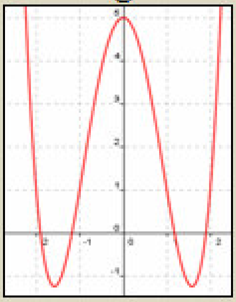
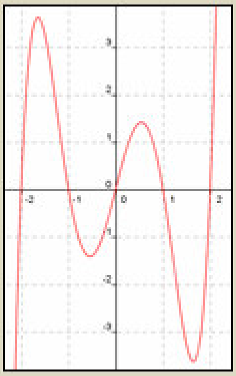
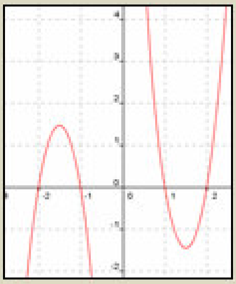
Livello 3

Giustificare le risposte ai seguenti quesiti

17. Se non esiste $f(a)$, possiamo dire che certamente $x = a$ è asintoto verticale per $f(x)$? [No]
18. Quali condizioni devono necessariamente accadere perché $x = a$ possa essere asintoto verticale per $f(x)$? [Non deve esistere $f(a)$ e $x = a$ deve essere punto di accumulazione]
19. È possibile che una funzione dispari abbia la retta $x = 1$ come asintoto verticale destro e sinistro? [No]
20. È possibile che una funzione pari abbia la retta $x = 1$ come asintoto orizzontale destro e sinistro? [Sì]
21. È possibile che una funzione dispari abbia un unico asintoto verticale destro e sinistro? [Sì; solo x =0]
22. È possibile che una funzione dispari abbia la retta $y = 1$ come asintoto orizzontale destro e sinistro? [No]
23. È possibile che una funzione pari abbia la retta $y = 1$ come asintoto orizzontale destro e sinistro? [Sì]
24. Se una funzione dispari ha la retta $y = 1$ come asintoto obliquo destro, quale è certamente il suo asintoto obliquo sinistro? [$y = -1$]
25. È possibile che una funzione dispari abbia un unico asintoto orizzontale destro e sinistro? [No]
26. È possibile che una funzione dispari abbia la retta $y = x + 1$ come asintoto obliquo? [No]
27. È possibile che una funzione pari abbia la retta $y = x + 1$ come asintoto obliquo? [No]
28. È possibile che una funzione dispari abbia la retta $y = x$ come asintoto obliquo destro e sinistro? [Sì]
29. È possibile che una funzione pari abbia la retta $y = x$ come asintoto obliquo destro e sinistro? [No]
30. Se una funzione pari ha la retta $y = x$ come asintoto obliquo destro, quale è certamente il suo asintoto obliquo sinistro? [$y = -x$]

Lavoriamo insieme

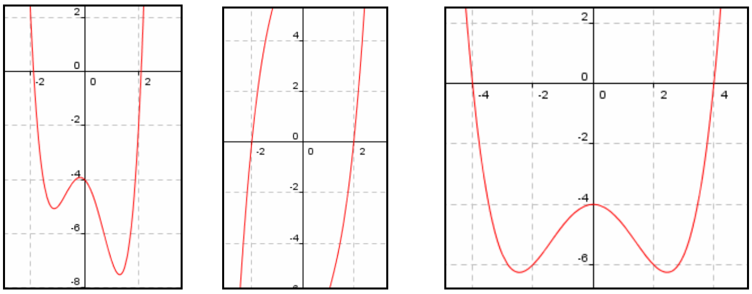
Consideriamo la funzione $f(x) = (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 4)$, vogliamo stabilire senza effettuare alcun calcolo perché ciascuno dei grafici di seguito rappresentati non può riferirsi a questa funzione.

-  Non incontra l'asse x nei punti di ascissa ±1 e ±2
-  Passa per l'origine degli assi.
-  Ha una discontinuità, almeno apparentemente

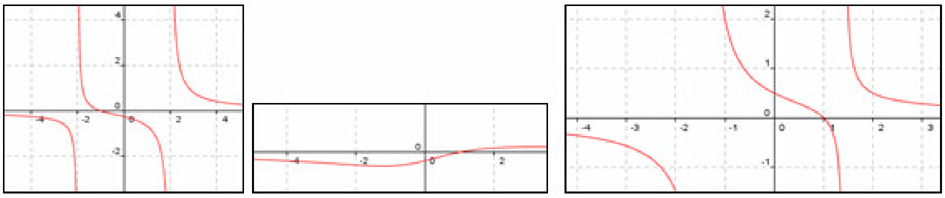
Ciascuno dei seguenti grafici NON si riferisce alla funzione indicata, fornire una o più motivazioni

Livello 2

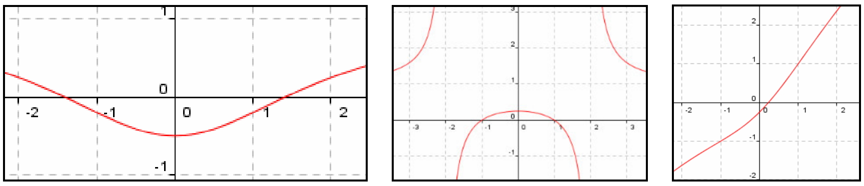
31. $f(x) = (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 4)$



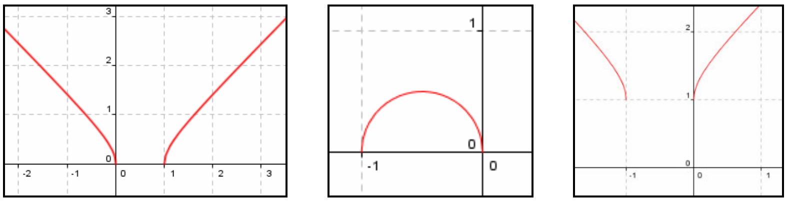
32. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$



33. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+4}$



34. $y = \sqrt{x^2 + x}$

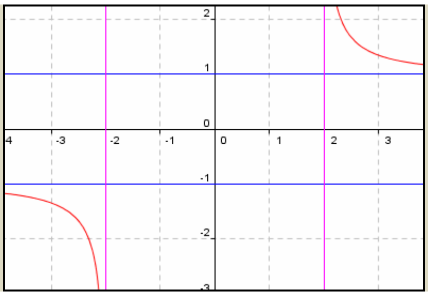


Lavoriamo insieme

Studiamo la funzione $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$. L'insieme di esistenza è: $x^2 - 4 > 0$, cioè $x < -2 \vee x > 2$. La funzione è dispari, dato che $f(x) = -f(-x)$. Non ci sono intersezioni con gli assi perché $x = 0$, che annulla il numeratore, non fa parte del dominio. Il segno dipende solo dal numeratore, dato che il denominatore è sempre positivo nel dominio. Quindi la funzione è positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$. Si ha: $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}} = +\infty$, quindi $x = -2$ è un asintoto verticale sinistro e $x = 2$ un asintoto verticale destro. Inoltre si ha: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{-x} = -1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x} = 1$. Quindi $y = -1$ è un asintoto orizzontale sinistro e $y = 1$ un asintoto orizzontale destro. Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2-4} - x \cdot \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2} \cdot \sqrt{x^2-4}}}{x^2-4} = \frac{\cancel{x^2} - 4 - \cancel{x^2}}{\left(x^2-4\right) \cdot \sqrt{x^2-4}} = \frac{-4}{\left(x^2-4\right) \cdot \sqrt{x^2-4}}.$$

È sempre negativa nel dominio, quindi la funzione è sempre decrescente. Non è necessario studiare la derivata seconda. Il grafico si costruisce facilmente ed è simile al seguente ottenuto con Geogebra.



Studiare e rappresentare graficamente le seguenti funzioni

Livello 1

35. $f(x) = x^3 - x$ $\left[M \equiv \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{2\cdot\sqrt{3}}{9}\right), m \equiv \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{2\cdot\sqrt{3}}{9}\right), F \equiv (0;0)\right]$

36. $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$ $\left[M \equiv (-1;2), m \equiv \left(-\frac{1}{3}; \frac{50}{27}\right), F \equiv \left(-\frac{2}{3}; \frac{52}{27}\right)\right]$

37. $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ $\left[m \equiv \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{25}{4}\right), M \equiv (0;-4) m \equiv \left(\frac{\sqrt{6}}{6}; -\frac{25}{4}\right), F \equiv \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{21}{4}\right)\right]$

38. $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x$; $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ $\left[M \equiv \left(1; -\frac{7}{12}\right); (F \equiv (0;0), x = \pm 1, y = 0)\right]$

39. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ $\left[M_1 \equiv \left(-1; -\frac{1}{2}\right), M_2 \equiv \left(1; \frac{1}{2}\right), F_1 \equiv (0;0), F_{2,3} \equiv \left(\pm\sqrt{3}; \pm\frac{\sqrt{3}}{4}\right), y = 0\right]$

40. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ $\left[M \equiv (0;1), F_{12} \equiv \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{3}{4}\right), y = 0\right]$

41. $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x}$ $[M \equiv (1; 0); F \equiv (-1; 0); x = 0]$

42. $f(x) = \frac{4x}{x^2+36}$ $\left[M_1 \equiv \left(-6; -\frac{1}{3}\right), M_2 \equiv \left(6; \frac{1}{3}\right), F_{12} \equiv \left(0; \pm 6\sqrt{3}\right), y = 0\right]$

43. $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ $\left[M \equiv \left(-\sqrt{3}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right), F \equiv (0;0), m \equiv \left(\sqrt{3}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), x = \pm 1, y = x\right]$

44. $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$ $\left[M \equiv \left(1; \frac{3}{2}\right), F_1 \equiv (0;0), F_{23} \equiv \left(\pm\sqrt{3}; \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}\right), m \equiv \left(-1; \frac{3}{2}\right), y = 0\right]$

Livello 2

45. $f(x) = x \cdot \sqrt{1-x}$; $f(x) = x \cdot \sqrt{x^2-1}$ $\left[M \equiv \left(\frac{2}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{9}\right); F_{12} \equiv \left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}; \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

46. $f(x) = x \cdot \sqrt{1-x^2}$ $\left[M_1 \equiv \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}\right), M_2 \equiv \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\right), F \equiv (0;0)\right]$

47. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$ [Funzione sempre decrescente e con concavità rivolta verso l’alto, $x = 1$ (Sx)]

48. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $f(x) = \frac{1}{2} e^{2x} - x$ $\left[(F \equiv (0;0), x = -1(Dx), x = 1(Sx)); \left(M\left(0; \frac{1}{2}\right), y = -x(Sx)\right)\right]$

49. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ $\left[(x = -1(Sx), x = 1(Dx), y = 1(Dx), y = -1(Sx)); \left(F \equiv \left(-\frac{1}{2}; e^{-2}\right), x = 0, y = 1\right)\right]$

50. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; $f(x)=x\cdot e^{x^2}$ [($F \equiv (0; 0)$, $y = 1$ (Dx), $y = -1$ (Sx)) ; ($F \equiv (0; 0)$)]

51. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-x}$; $f(x)=\sqrt{x^2-2x+3}$ [($x = 1$, $y = 0$ (Dx)) ; ($M \equiv (1; \sqrt{2})$, $y = x - 1$ (Dx), $y = -x + 1$(Sx))]

52. $f(x)=4\cdot ln(x-3)-3\cdot ln(x-2)$ [Sempre crescente, e concavità verso il basso, $x = 3$ (Sx)]

53. $f(x)=x^2\cdot e^{-x}$ $\left[m\equiv(0;0),M\equiv\left(2;4e^{-2}\right),F\equiv\left(2-\sqrt{2};\approx 0,19\right),F\equiv\left(2+\sqrt{2};\approx 0,38\right),x=0(Dx)\right]$

54. $f(x) = sin(x) - \frac{x}{2}$, $x \in [0 ;2\pi]$ $\left[F\equiv(0;0),M\equiv\left(\frac{\pi}{3};\frac{3\cdot\sqrt{3}-\pi}{6}\right),F\equiv\left(\pi;-\frac{\pi}{2}\right),m\equiv\left(\frac{5\pi}{3};-\frac{5\pi+3\cdot\sqrt{3}}{6}\right)\right]$

Livello 3

55. $f(x) = cos(x) + sin^2(x) - 2sin(x) + x$, $x\in [0 ;2\pi]$ $\left[M_1\equiv\left(\frac{\pi}{3};\approx 0,56\right),F\equiv\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}-1\right),M_2\equiv\left(\frac{5\pi}{3};\approx 8,22\right)\right]$

56. $f(x) = x^2 \cdot ln(x)$ $\left[m\equiv\left(\frac{1}{\sqrt{e}};-\frac{1}{2e}\right),F\equiv\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}};-\frac{3}{2e^3}\right)\right]$

57. $f(x) = x - 2tan^{-1}(x)$ $\left[M_1\equiv\left(-1;\frac{\pi}{2}-1\right),F\equiv(0;0),M_2\equiv\left(1;1-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

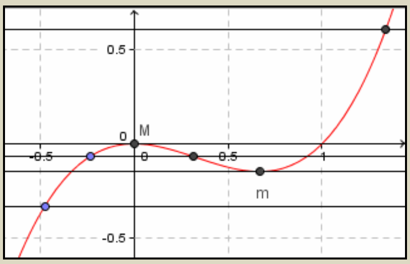
58. $f(x)=x-\frac{3}{2}\cdot ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ $\left[M\equiv\left(-2;-\frac{ln(27)+2}{2}\right),m\equiv\left(2;\frac{ln(27)+2}{2}\right),x=-1(Sx),x=1(Dx),y=x\right]$

59. $f(x) = \frac{1}{2}\ e^{2x} - 3e^x + 2x$ $\left[M_1\equiv\left(0;-\frac{5}{2}\right),F\equiv\left(ln\left(\frac{3}{2}\right);ln\left(\frac{9}{4}\right)-\frac{27}{8}\right),M_2\equiv\left(ln(2);ln(4)-4\right)\right]$

60. $f(x)=\frac{e^{-x}+3e^x}{e^x+1}$ [$y = 3$ (Dx), $m \equiv (0; 2)$, $F \equiv (\approx 1; \approx 2,3)$]

Lavoriamo insieme

Vogliamo determinare quante soluzioni ha l'equazione: $x^3 - x^2 + 5k - 1 = 0$, al variare del parametro k. Scriviamo $x^3 - x^2 = 1 - 5k$, riconducendo il problema alla determinazione di quante intersezioni vi sono fra la funzione $y = x^3 - x^2$ e la retta $y = 1 - 5k$. Rappresentiamo la funzione. Poiché $y' = 3x^2 - 2x$, che si annulla per $x = 0$ e $x = \frac{2}{3}$, abbiamo che la funzione ha un massimo in (0; 0) e un minimo in $\left(\frac{2}{3};-\frac{4}{27}\right)$, quindi il suo grafico è quello in figura.



Da esso si vede che abbiamo una soluzione se $1-5k<-\frac{4}{27}$ ∨ $1 - 5k > 0$, cioè $k>\frac{31}{135}\vee k<\frac{1}{5}$. Ovviamente vi sono 2 soluzioni se $k=\frac{31}{135}\vee\frac{1}{5}$ e tre soluzioni se $\frac{1}{5}<k<\frac{31}{135}$.

Livello 2

Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali delle equazioni seguenti

61. $x^3 - 4x^2 + k = 0$; $\dfrac{x^5}{5} - 2x^4 + \dfrac{22}{3}x^3 - 12x^2 - 9x - \dfrac{18}{5} - 4k$

$$\left[\begin{cases} 1 & k<0 \vee k>\dfrac{256}{27} \\ 2 & k=0 \vee \dfrac{256}{27} \\ 3 & 0<k<\dfrac{256}{27} \end{cases};\begin{cases} 1 & k \neq -\dfrac{16}{15}, 0 \\ 2 & k=-\dfrac{16}{15} \vee 0 \end{cases}\right]$$

62. $2x^3 + 9x^2 - 24x + 2 - 3k = 0$; $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 2 + 5k = 0$

$$\left[\begin{cases} 1 & k<-\dfrac{11}{3} \vee k>38 \\ 2 & k=38 \vee -\dfrac{11}{3} \\ 3 & -\dfrac{11}{3}<k<38 \end{cases};\begin{cases} 0 & k>\dfrac{11}{5} \\ 1 & k<-1 \\ 2 & k=\dfrac{11}{5} \\ 3 & k=-1 \\ 4 & -1<k<\dfrac{11}{5} \end{cases}\right]$$

63. $3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 24x + 2 + 3k = 0$; $2x^3 - 9x^2 + 12x - k = 0$

$$\left[\begin{cases} 0 & k>\dfrac{38}{3} \\ 1 & k=\dfrac{38}{3} \\ 2 & k<\dfrac{38}{3} \end{cases};\begin{cases} 1 & k<4 \vee k>5 \\ 2 & k=4 \vee 5 \\ 3 & 4<k<5 \end{cases}\right]$$

Livello 3

64. $e^x - x + 2 + k = 0$; $x\ ln(x) - 3x - 1 + 2k = 0$; $e^{2x} - 4e^x + 2x + 3k - 4 = 0$

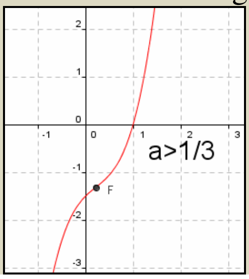
$$\left[\begin{cases} 0 & k<3 \\ 1 & k=3 \\ 2 & k>3 \end{cases};\begin{cases} 0 & k>\dfrac{e^2+1}{2} \\ 1 & k=\dfrac{e^2+1}{2} \\ 2 & k<\dfrac{e^2+1}{2} \end{cases};1 \forall k \in \mathbb{R}\right]$$

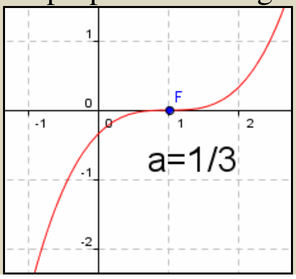
Lavoriamo insieme

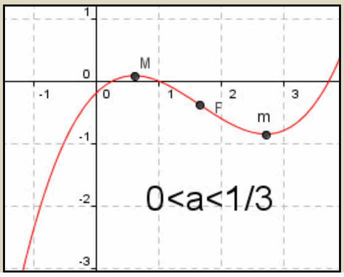
Studiamo la funzione $f(x) = ax^3 - x^2 + x - a$, al variare del parametro reale a. Possiamo scrivere:

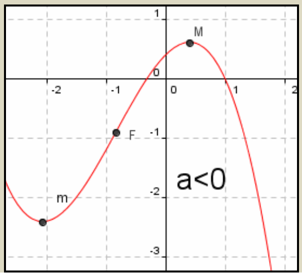
$a(x^3 - 1) - x(x - 1) = a(x - 1)\cdot(x^2 + x - 1) - x(x - 1) = (x - 1)\cdot(ax^2 + ax + a - x) = (x - 1)\cdot[ax^2 + (a - 1)x + a]$

Quindi la curva incontra l'asse x nel punto (1; 0). Se poi si ha: $\Delta = (a - 1)^2 - 4a^2 = -3a^2 - 2a + 1 < 0 \Rightarrow a < -1 \vee a > \dfrac{1}{3}$, allora vi è una sola intersezione con l'asse x. Se invece è $\Delta > 0 \Rightarrow -1 < a < \dfrac{1}{3}$, ci sono altre due intersezioni. E se $\Delta = 0 \Rightarrow a = -1 \vee a = \dfrac{1}{3}$, vi è anche il punto (–1; 0). Ciò ovviamente influenza anche il segno della funzione. Essendo in ogni caso un polinomio non vi sono asintoti. Calcoliamo la derivata prima: $f'(x) = 3ax^2 - 2x + 1$; tutto dipende sempre dal $\Delta = 4 - 12a$. Così se $a > \dfrac{1}{3}$, $\Delta < 0$ quindi $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, la funzione è sempre crescente. Se $a = \dfrac{1}{3}$, $\Delta = 0$, $f'(x) = 0$ se $x = 1$, per il resto è sempre positiva, la funzione è sempre crescente, ma $F \equiv (1; 0)$ è flesso ascendente a tangente orizzontale. Infine se $a < \frac{1}{3}$, $\Delta > 0$, $f'(x) = 0$ in $x = \frac{1 \pm \sqrt{1-3a}}{3a}$. Se $a < 0$, $f'(x) > 0$ per $\frac{1-\sqrt{1-3a}}{3a} < x < \frac{1+\sqrt{1-3a}}{3a}$ e negativa altrimenti, quindi ci sono un minimo e un massimo nell'ordine. Se $0 < a < \frac{1}{3}$ invece si ha prima il massimo e poi il minimo. Passiamo alla derivata seconda: $f''(x) = 6ax - 2$. Che si annulla per $x = \frac{1}{3a}$, ovviamente se è $a \neq 0$. Quindi vi è sempre un flesso. Di seguito proponiamo dei grafici che mostrano tutti i casi trattati.









Studiare al variare del parametro reale a ≠ 0, le funzioni seguenti

Livello 3

65. $f(x) = ax^3 - ax^2 + x - 1$ $\quad$ $\left[P \equiv (1; 0),\ F \equiv \left(\frac{1}{3}; \frac{-2\cdot(a+9)}{27}\right);\text{ min e max per } a < 0 \vee a > 3\right]$

66. $f(x) = ax^3 - 2x^2 - ax + 2$ $\quad$ [$P \equiv (\pm 1; 0)$, Flesso, min e max per $\forall\, a \neq 0$]

67. $f(x) = ax^4 - x^2 + a$ $\quad$ [$m \equiv (0; a)$, 2 Flessi e 2 max per $a < 0$]

68. $f(x) = ax^4 - 2x^2 + a + 1$ $\quad$ [$M \equiv (0; a + 1)$, 2 Flessi e 2 min per $a > 0$]

69. $f(x) = \frac{ax^2 - 1}{3x + a}$ $\quad$ $\left[x = -\frac{a}{3};\ y = \frac{a}{3}x - \frac{a^2}{9};\text{ Max e min per } a < 0 \vee a > \sqrt{27}\right]$

70. $f(x) = \frac{ax^2 - x}{x + a}$ $\quad$ [$x = -a$; $y = ax - a^2 - 1$; Max e min per $\forall\, a \neq 0$]

71. $f(x) = \frac{ax^2}{x^2 + a}$ $\quad$ $\left[x = \pm\sqrt{-a}\text{ per } a < 0;\ y = a;\ m \equiv (0; 0),\ F \equiv \left(\pm\frac{\sqrt{3a}}{3}; \frac{a}{4}\right)\text{ per } a > 0\right]$

72. $f(x) = \frac{ax^2 - a}{x^2 + 1}$ $\quad$ $\left[y = a;\ m \equiv (0; 0)\text{ per } a > 0;\ M \equiv (0; 0)\text{ per } a < 0,\ F \equiv \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{a}{2}\right)\right]$

73. $f(x) = \frac{ax^3}{ax + 1}, a \neq 0$ $\quad$ $\left[x = -\frac{1}{a}; F_1 \equiv (0;0); F_2 \equiv \left(-\frac{3}{2a}; \frac{27}{4a^2}\right)\right]$

74. $f(x) = \frac{a}{x^2 - a^2}$ $\quad$ [$x = \pm a$; $y = 0$; $m \equiv (0; 0)$ per $a < 0$; $M \equiv (0; 0)$ per $a > 0$]

75. $f(x) = \frac{x + a}{ax^2 - x}$ $\quad$ [$x = \frac{1}{a}$, $x = 0$; $y = 0$; min, Max e Flesso]

76. $f(x) = \sqrt{a^2x^2 - x + 1}$ $\quad$ $\left[y = |a|x - \frac{|a|}{2}(Dx); y = -|a|x + \frac{|a|}{2}(Sx); x_m = \frac{1}{2a^2}; a < -\frac{1}{2} \vee a > \frac{1}{2}\right]$

Rispondere alle seguenti domande giustificando la risposta

Livello 2

105. Se una funzione ha un massimo relativo in (1; 3) e l'asintoto orizzontale destro $y = 2$, possiamo dire che ha un punto di flesso in $(3; +\infty)$? $\quad$ [Solo se è continua in $[3; +\infty)$]

106. Se una funzione ha un massimo relativo in (1; 3) e l'asintoto orizzontale sinistro $y = 2$, possiamo dire

che ha un punto di flesso in $(3; +\infty)$? [No]

107. Se una funzione ha un minimo relativo in (1; 3) e l'asintoto orizzontale destro $y = 4$, possiamo dire che ha un punto di flesso in $(3; +\infty)$? [Solo se è continua in $[3; +\infty)$]
108. Se una funzione ha la retta $y = 3$ come asintoto orizzontale, è possibile che contenga il punto (1; 3)? [Sì]
109. Se una funzione dispari ha asintoti orizzontali destro e sinistro i due sono uguali, diversi o possono essere sia uguali che diversi? [Diversi, $y = a$ e $y = -a$]
110. Se una funzione pari ha asintoti orizzontali destro e sinistro i due sono uguali, diversi o possono essere sia uguali che diversi? [Uguali]
111. Una funzione pari può avere un asintoto orizzontale destro e un asintoto obliquo sinistro o viceversa? [No]
112. Una funzione dispari può avere un asintoto orizzontale destro e un asintoto obliquo sinistro o viceversa? [No]
113. Il grafico di un polinomio di quinto grado può avere (rispondere vero o falso)
    Due massimi e due minimi [Vero, p.e. $6x^5 - 15x^4 - 10x^3 + 30x^2$]
    Tre massimi e un minimo o tre minimi e un massimo [Falso]
    Un massimo e un minimo [Vero, p.e. $3x^5 - 5x^3$]
    Due massimi e un minimo [Falso]
    Nessun estremo relativo [Vero, p.e. $6x^5 - 15x^4 + 10x^3$]

L'angolo di Derive

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quinto%20volume/Capitolo%2010/10-2-1.exe scarichi un'applicazione che mostra come studiare le funzioni con Derive.
Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quinto%20volume/Capitolo%2010/10-2-1.dfw scarichi il relativo file.

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

1. Fornire degli esempi di polinomi di quinto grado che hanno esattamente 0, 1, 2, 3 e 4 estremi relativi. Se qualcuna delle possibilità non potesse accadere giustificarne le motivazioni. [$x^5 + x$; $\varnothing$; $x^5 - x$; $\varnothing$; $x^5 - x^4 - x^3 + x^2$]
2. Tenuto conto del precedente quesito possiamo dire che in generale un polinomio di grado dispari, se ha estremi relativi, questi sono sempre una quantità … [pari]
3. Fornire degli esempi di polinomi di IV grado che hanno esattamente 0, 1, 2 e 3 estremi relativi. Se qualcuna delle possibilità non potesse accadere giustificare le motivazioni. [$\varnothing$; x^4; $x^4 - x^3$; $x^4 + x^3 - x^2$]
4. Un polinomio di grado pari ha sempre estremi relativi? Giustificare la risposta. [Sì]

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni Esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi
I temi completi dei Licei Scientifici per gli ultimi anni sono scaricabili, con soluzione, dal sito
http://matdidattica.altervista.org/esamidistato.htm

1. (Liceo scientifico 1966/67) In un piano, riferito ad uni sistema cartesiano ortogonale Oxy, si considerino le parabole di equazione: $y = mx^2 + x + 3 - 4m$ (1), essendo m un parametro diverso da zero.
    (a) Si determinino le coordinate del vertice della generica parabola di equazione (1), in funzione del parametro m. Successivamente, eliminando m fra le due relazioni così trovate, si studi la curva di

equazione $y = f(x)$ che così si ottiene (luogo dei vertici delle parabole) e in particolare si trovino i punti A e B in cui la funzione $f(x)$ ha rispettivamente un massimo e un minimo relativo.

$$\left[V \equiv \left(-\frac{1}{2m};\frac{-16m^2+12m-1}{4m}\right); f(x) = \frac{x^2+6x+4}{2x}; A \equiv (-2;1), B \equiv (2;5)\right]$$

(b) Si verifichi che tutte le parabole considerate passano per i punti A e B e si dia una giustificazione di ciò.

2. (Liceo scientifico 1970/71) È dato il triangolo AOB rettangolo in O, del quale sia h l'altezza relativa all'ipotenusa. Detta x l'ampiezza dell'angolo $O\hat{A}B$, e posto $t = tan\left(\frac{x}{2}\right)$, si esprima per mezzo di h e di t il perimetro del triangolo e si studi l'andamento della funzione così ottenuta.

$$\left[h\cdot\frac{1+t^2}{t\cdot(1-t)}, 0 < t < 1, t_{\min} = -1-\sqrt{2}\right]$$

3. (Liceo scientifico 1970/71) Si studi il grafico della funzione $y = 2sin(x) + sin(2x)$ per $0 \le x \le 2\pi$.

$$\left[x_M = \frac{\pi}{3}, x_m = \frac{5\pi}{3}\right]$$

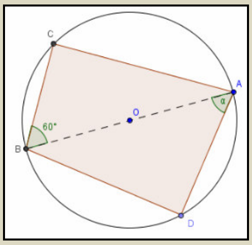
4. (Liceo scientifico suppletiva 1970/71) In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy si rappresenti la curva di equazione $y = \frac{x-1}{x+1}$. Condotta poi la retta di coefficiente angolare m per il punto (–1; 1), si dica per quali valori di m una delle sue intersezioni con la curva appartiene al primo o al quarto quadrante o al terzo quadrante. Si determini inoltre la lunghezza della corda minima intercettata sulla retta dalla curva e si dica qual è il rapporto, maggiore di uno, tra le aree dei triangoli che le tangenti negli estremi di tale corda formano con gli assi cartesiani.

$$\left[I: -\frac{1}{2} < m < 0, IV: -2 < m < -\frac{1}{2}, III: m < -2; L_m = 4; 17-12\cdot\sqrt{2}\right]$$

Lavoriamo insieme

Consideriamo un problema assegnato agli esami di Liceo scientifico 1971/72.

Data una circonferenza di diametro AB = 2r, si prendano su di essa da parte opposta di AB, due punti C e D tali che $A\hat{B}C = \frac{\pi}{3}, B\hat{A}D = \alpha$. *Si consideri la funzione* $y = \frac{\overline{AD}^2 - \overline{CD}^2}{\overline{BC}^2}$, *espressa mediante x = tan(α) e*



se ne studi il grafico.

Consideriamo la figura, usando la trigonometria abbiamo: $\overline{AD} = 2r\cdot cos(\alpha), \overline{BC} = 2r\cdot sin(30°) = r$,

$\overline{AC} = 2r\cdot sin(60°) = r\cdot\sqrt{3}, \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 - 2\cdot\overline{AD}\cdot\overline{AC}\cdot cos(30°+\alpha) =$

$4r^2\cdot cos^2(\alpha) + 3r^2 - 4r^2\cdot\sqrt{3}\cdot cos(\alpha)\cdot cos(30°+\alpha) = ... = -2r^2\cdot cos^2(\alpha) + 2r^2\cdot\sqrt{3}\cdot sin(\alpha)\cdot cos(\alpha) + 3r^2$.

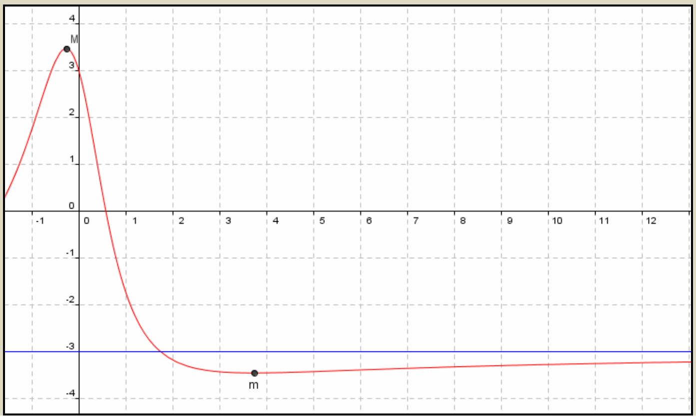
Sostituendo: $y = \frac{4r^2cos^2(\alpha) + 2r^2cos^2(\alpha) - 2r^2\sqrt{3}sin(\alpha)\cdot cos(\alpha) - 3r^2}{r^2} = 6cos^2(\alpha) - 2\sqrt{3}sin(\alpha)\cdot cos(\alpha) - 3$,

Trasformiamo in $tan(\alpha)$ e sostituiamo ottenendo la funzione $y = \frac{-3x^2 - 2\cdot\sqrt{3}x + 3}{1+x^2}$. Il cui dominio sono tutti i reali. Poiché $\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2-2\cdot\sqrt{3}x+3}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2}{x^2} = -3$, ha per asintoto orizzontale la retta $y = -3$.

Interseca l'asse x nei punti di ascissa $x = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3+9}}{-3} = \frac{\sqrt{3} \pm 2\cdot\sqrt{3}}{-3} = \prec \begin{matrix} -\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{matrix}$; l'asse y nel punto (0; 3).

$$y' = \frac{\left(-6x - 2\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(1+x^2\right) - 2x\cdot\left(-3x^2 - 2\cdot\sqrt{3}x + 3\right)}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{-6x - 2\cdot\sqrt{3} - \cancel{6x^3} - 2\cdot\sqrt{3}x^2 + \cancel{6x^3} + 4\cdot\sqrt{3}x^2 - 6x}{\left(1+x^2\right)^2} =$$

$= \frac{2\cdot\sqrt{3}x^2 - 12x - 2\cdot\sqrt{3}}{\left(1+x^2\right)^2}$, che si annulla per $2\cdot\sqrt{3}x^2 - 12x - 2\cdot\sqrt{3} = 0 \Rightarrow \sqrt{3}x^2 - 6x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2 - 2\cdot\sqrt{3}x - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3} \pm 2$. Non avendo cambiato i segni avremo valori positivi all'esterno dell'intervallo e negativi all'interno, quindi vi è un punto di massimo relativo di ascissa $\sqrt{3} - 2$ e un minimo relativo di ascissa $\sqrt{3} + 2$. Poiché la funzione è continua, fra un minimo e un massimo deve esservi per forza un flesso che si determina studiando la derivata seconda, che risulta essere: $\frac{-4\cdot\sqrt{3}\cdot\left(x^3 - 3\cdot\sqrt{3}\cdot x^2 - 3x + \sqrt{3}\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$, che risulta complicata da risolvere. Il grafico qualitativo è il seguente.



5. (Liceo scientifico 1971/72) Si studi la funzione $y = sin(2x) \cdot cos(x)$ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$.

$$\left[x_M = cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \vee \pi - cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \vee \frac{3}{2}\pi; x_m = 2\pi - cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \vee \pi + cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \vee \frac{\pi}{2}\right]$$

6. (Liceo scientifico 1972/73) Si disegni il grafico della funzione $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ e se ne determinino i punti per i quali la distanza dal punto $A \equiv (0; 1)$ assume valore minimo.

[$x_M = 0$, punti di minima distanza: $B \equiv (-\sqrt{3}; 2)$, $C \equiv (0; -1)$, $D \equiv (-\sqrt{3}; 2)$]

7. (Liceo scientifico suppletiva 1972/73) Dato il triangolo rettangolo AOB di cateti $\overline{OA} = a$ e $\overline{OB} = b$, si prenda sull'ipotenusa AB un punto OP di cui sia Q la proiezione ortogonale su OB e si ponga $\overline{QP} = x$; si consideri poi la funzione $y(x) = \frac{V_1}{V_2}$, essendo V_1 e V_2 i volumi dei due solidi generati dalla rotazione completa del trapezio $OAPQ$ attorno al cateto OA e al cateto OB rispettivamente e, indipendentemente dalla questione geometrica, la si studi per x variabile in tutto il campo reale.

$$\left[y(x) = \frac{-b\cdot\left(2x^2 - ax - a^2\right)}{a\cdot\left(x^2 + ax + a^2\right)}; x_M = -2a; x_m = 0\right]$$

8. (Liceo scientifico 1973/74) Si studi la funzione $y = \frac{x^3}{2x^2-1}$ e se ne disegni il grafico. Presi sulla curva

i punti *A* e *B* rispettivamente di ascissa $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{3}$, si determinino i punti dell'arco *AB* nei quali la tangente alla curva è parallela alla retta *AB*.

$$\left[x_{Max} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; x_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2}; P \equiv \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{4\cdot\sqrt{6}}\right), Q \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{4\cdot\sqrt{6}}\right)\right]$$

9. (Liceo scientifico suppletiva 1973/74) Data la funzione $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$ si determinino i valori delle costanti *a*, *b*, *c* in modo che risulti $f(1) = \frac{1}{6}, f(2) = \frac{1}{24}, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{15}$. Si studi la funzione così ottenuta. $\left[a = \frac{1}{2}, b = -1, c = \frac{1}{2} : x_M = \frac{\sqrt{3}-3}{3}; x_m = -\frac{\sqrt{3}+3}{3}\right]$

10. (Liceo scientifico 1974/75) Assegnata una circonferenza di diametro $\overline{AB} = 2$, si conduca per *A* la retta tangente e su di essa si consideri un punto *M* tale che $\overline{AM} = x$. Da *M* si tracci la ulteriore retta tangente alle circonferenze e sia *C* il punto in cui essa incontra il prolungamento di *AB*. Posto $\overline{AC} = y$, si esprima *y* in funzione di *x* e si disegni il grafico relativo. $\left[y = \begin{cases} \frac{2x^2}{1-x^2} & 0 < x < 1 \\ \frac{-2x^2}{1-x^2} & x > 1 \end{cases}\right]$

11. (Liceo scientifico suppletiva 1974/75) Si studi la funzione $y = x^2 \cdot (3 - x)$ e se ne disegni il grafico. $[x_M = 2, x_m = 0]$

12. (Liceo scientifico 1975/76) Si studi la funzione $y = x + 2\,sin(x)$ e se ne disegni il grafico nell'intervallo $-2\pi \le x \le 2\pi$. $\left[x_M = -\frac{4\pi}{3} \vee \frac{2\pi}{3}, x_m = \frac{4\pi}{3}\right]$

13. (Liceo scientifico 1975/76) In un sistema di assi coordinati cartesiani si studi la funzione $y = \frac{2x-1}{2x^3}$ e se ne disegni il grafico. Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = ax^2 + bx$ in modo che la parabola da essa rappresentata passi per il flesso e per l'ulteriore punto d'intersezione della curva con la tangente inflessionale. $\left[x_M = \frac{3}{4}, x_F = 1, a = 1, b = -\frac{1}{2}\right]$

14. (Liceo scientifico suppletiva 1975/76) Presi su una circonferenza di raggio unitario tre punti *A*, *B*, *C*, tali che $\overline{AB} = \overline{BC}$, si studi la funzione $y = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$ e se ne disegni il grafico.

$$\left[y = 6x^2 - x^4, 1 - \sqrt{6} < x < \sqrt{6}, x_M = \sqrt{3}\right]$$

15. (Liceo scientifico 1976/77) Data la funzione $y = a \cdot sin(x) + b \cdot cos(x)$ si determinino i coefficienti *a*, *b* in modo che per $x = \frac{2}{3}\pi$ sia $y = 0$ e che i valori estremanti di *y* siano –2 e 2. Se ne disegni il grafico nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$. Posto $y = c \cdot sin(x + \phi)$ si calcolino *c*, ϕ in modo che questa funzione coincida con quella assegnata. Fatte le sostituzioni $y = s$, $x = 2\pi t$, dove *s* rappresenta lo spostamento dall'origine di un punto *P* che si muove su una retta nel tempo *t*, si aggiunga, facoltativamente, la descrizione del moto di *P*, determinando, in particolare gli istanti nei quali la velocità è nulla e quelli nei quali è massima. $[(a = 0, b = -2) \vee (a = \sqrt{3}, b = 1)]$

16. (Liceo scientifico suppletiva 1976/77) Si studino le funzioni $y = \frac{2}{x^2}$, $y = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$ e se ne disegnino i grafici in un sistema cartesiano ortogonale. Si verifichi che i loro punti comuni stanno su una retta di cui si chiede l'equazione. [La prima funzione non ha estremi relativi, la seconda: $x_m = 2$; i punti comuni sono $A \equiv \left(1-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}\right), B \equiv \left(1+\sqrt{3}; 2-\sqrt{3}\right)$, $C \equiv (1; 2)$, appartenenti a $x + y - 3 = 0$]

17. (Liceo scientifico suppletiva 1976/77) Dato l'angolo $a\hat{O}b = \gamma$, si fissino alla semiretta Ob i punti P e Q tali che $\overline{OP} = 1, \overline{OQ} = 2$; preso sulla semiretta Oa un punto A, si studi la funzione $y = \frac{\overline{AP}^2 - \overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2}$, della quale si disegni il grafico nell'ipotesi che $\gamma = \frac{\pi}{6}$. In questo caso particolare si costruiscano sulla semiretta Oa i punti aventi distanze da P e da Q distanze estremanti per y.

$$\left[y = \frac{-3+\sqrt{3}\cdot x}{5+2x^2-3\cdot\sqrt{3}\cdot x}, m \equiv \left(\sqrt{3}-1; -\frac{3+4\cdot\sqrt{3}}{13}\right), M \equiv \left(\sqrt{3}+1; \frac{4\cdot\sqrt{3}-3}{13}\right)\right]$$

18. (Liceo scientifico 1977/78) Si studi la funzione $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ e se ne disegni il grafico. Si scriva l'equazione della circonferenza tangente ai tre rami delle curve e si calcolino il perimetro e l'area del triangolo individuato dai tre punti di contatto. [$x_m = 0$; $x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$; Area = $3\cdot\sqrt{3}$]

19. (Liceo scientifico suppletiva 1978/79) Data la funzione $y = \frac{4x^2+1}{3x}$ se ne rappresenti il grafico. Preso un punto P sull'arco di curva che appartiene al primo quadrante, si conducano per esso le parallele agli asintoti che incontrano questi nei punti A e B rispettivamente e si determini la posizione di P per la quale è minima la somma dei segmenti PA e PB. $\left[x_M = -\frac{1}{2}, x_m = \frac{1}{2}, f(x) = \frac{1}{3x} + \frac{5}{3}x, x_m(P) = \frac{\sqrt{5}}{5}\right]$

20. (Liceo scientifico 1978/79) Si studi la funzione $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ e se ne disegni il grafico. Si scrivano l'equazione della parabola avente come asse l'asse delle ordinate, vertice nel punto (0; 1) e tangente alla curva e quella della parabola a questa simmetrica rispetto alla congiungente i due punti di contatto.

[m: (–1; 2), (1; 2); $y = \frac{3}{4}x^2 + 1$, $y = \frac{3}{4}x^2 + 4$]

21. (Liceo scientifico suppletiva 1978/79) Si studi la funzione $y = x + \frac{4}{x^2}$ e se ne disegni il grafico. Detti A il punto estremo relativo e B l'ulteriore punto di intersezione della curva con la tangente in A, si scriva l'equazione della parabola passante per A e tangente alla curva in B. [$x_m = 2$; $y = -3x^2 + 3x + 9$]

22. (Liceo scientifico suppletiva 1979/80) Data la funzione $y = \frac{1+sin(x)}{sin(x)}$ se ne rappresenti il grafico dopo aver determinato i massimi e i minimi valori di x nell'intervallo (0; 2π). Si consideri poi facoltativamente la funzione $y = log\left|\frac{1+sin(x)}{sin(x)}\right|$ e la si rappresenti utilizzando gli elementi ottenuti per la rappresentazione della funzione precedente. $\left[\left(x_M = \frac{3\pi}{2}, x_m = \frac{\pi}{2}\right); x_m = \frac{\pi}{2}\right]$

23. (Liceo scientifico 1979/80) Si rappresenti la funzione: $y = \frac{6x^2+2x+3}{2\cdot(2x^2+1)}$ dopo aver determinato massimi, minimi, flessi e asintoti. Effettuata la sostituzione $x = t$, $y = s$, si interpreti la s come la distanza percorsa su di una retta da un punto al variare del tempo t; si dica per quali valori del tempo t positivo la velocità è massima in modulo e si descriva il moto del punto.

$$\left[x_M = \frac{\sqrt{2}}{2}, x_m = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_F = -\sqrt{\frac{3}{2}} \vee 0 \vee \sqrt{\frac{3}{2}}, as.: y = \frac{3}{2}, v_M = v(0)\right]$$

24. (Liceo scientifico suppletiva 1980/81) Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2}$ in modo che la curva da essa rappresentata ammetta come asintoto obliquo la

retta di equazione $y = x - 2$, abbia un estremo relativo nel punto di ascissa $x = 2$ e un flesso nel punto di ascissa $x = -1$. Se ne disegni il grafico. Si determinino inoltre le intersezioni della curva con l'iperbole equilatera avente per asintoti gli assi coordinati e passante per il punto (1; 3).

$$\left[a=1, b=-2, c=3, d=1; A\equiv(1;3), B\equiv\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};-\frac{3\cdot\sqrt{5}+3}{2}\right), C\equiv\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{-3\cdot\sqrt{5}+3}{2}\right)\right]$$

25. (Liceo scientifico 1980/81) Si studi la funzione $y = x^2 + \frac{16}{x^2}$ e se ne disegni il grafico. [$x_m = \pm 2$]

26. (Liceo scientifico 1981/82) Si studi la funzione $y = sin^3(x) + cos^3(x)$ nell'intervallo [0; 2π] e se ne disegni il grafico. $\left[x_M = 0 \vee \frac{\pi}{2} \vee \frac{5}{4}\pi \vee 2\pi; x_m = \frac{\pi}{4} \vee \pi \vee \frac{3}{2}\pi\right]$

27. (Liceo scientifico 1981/82) Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ in modo che la curva da essa rappresentata tocchi la retta $y = x$ nel punto $A \equiv (1; 1)$ e la retta $y = 0$ in $B \equiv (3; 0)$. Se ne disegni il grafico. $\left[y=\frac{1}{2}x^3-\frac{13}{4}x^2+6x-\frac{9}{4}; F\equiv\left(\frac{13}{6};\frac{125}{6}\right); m\equiv(3;0); M\equiv\left(\frac{4}{3};\frac{125}{108}\right)\right]$

28. (Liceo scientifico 1982/83) Si studi la funzione $y = sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ e se ne disegni il grafico. Utilizzando il grafico precedente si studi la funzione $y = e^{f(x)}$, dove $f(x)$ è la funzione precedentemente studiata. [La seconda funzione in (0; 2π): $x_M = \frac{\pi}{6}; x_m = \frac{7}{6}\pi$]

29. (Liceo scientifico 1982/83) Si studi la funzione $y = \frac{a^2}{x^2} - 1$ e se ne disegni il grafico. Si determinino le intersezioni della curva da essa rappresentata con la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = a^2$ e si trovi il valore di a per cui dette intersezioni sono vertici di un esagono regolare.

$$\left[(\pm a;0), \left(\pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{4a^2+1}}{2}};\frac{-1+\sqrt{4a^2+1}}{2}\right); a=2\cdot\sqrt{3}\right]$$

30. (Liceo scientifico suppletiva 1982/83) Si determinino i coefficienti di $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ in modo che la curva da essa rappresentata abbia due estremi relativi nei punti $A \equiv (1; 1)$ e $B \equiv (-1; -1)$. Se ne disegni il grafico. Si scriva l'equazione della parabola, con l'asse parallelo all'asse delle ordinate, passante per il punto A e per i punti in cui la curva data incontra il semiasse positivo delle ascisse.

$$\left[a=-\frac{1}{2}, b=0, c=\frac{3}{2}, d=0; y=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}x^2+\frac{3+\sqrt{3}}{2}x\right]$$

31. (Liceo scientifico suppletiva 1982/83) Si studi la funzione $y = a \cdot sin(x) + cos^2(x)$ e se ne disegni il grafico dopo aver determinato a in modo che la curva abbia un flesso nel punto di ascissa $x = \frac{7}{6}\pi$. [$a = 2$]

32. (Liceo scientifico 1983/84) Si studi la funzione $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ e se ne disegni il grafico. Si individui la traslazione di equazioni: $x = X + a$; $y = Y + b$ che rende la curva simmetrica rispetto all'origine e si scriva l'equazione della curva trasformata. Si determinino le coordinate dei punti in cui la curva data incontra la bisettrice del primo e del terzo quadrante.

$$\left[M\equiv(0;1), m\equiv(1;0); a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}; Y=2X^3-\frac{3}{2}X; A\equiv\left(\frac{\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{5}}{2}\right), B\equiv\left(-\frac{\sqrt{5}}{2};-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right]$$

33. (Liceo scientifico suppletiva 1983/84) Si disegni il grafico della funzione $y = x^3 - 2x^2 + x + a$ attribuendo ad a un valore particolare a scelta del candidato. Si dica come deve essere scelto a perché la curva rappresentativa incontri l'asse delle ascisse in uno, due o tre punti.

$$\left[a=0\Rightarrow M\equiv\left(\frac{1}{3};\frac{4}{27}\right),m\equiv(1;0);\begin{cases}a<-\frac{4}{27}\vee a>0 & \text{un punto}\\ -\frac{4}{27}\leq a\leq 0 & \text{tre punti}\end{cases}\right]$$

34. (Liceo scientifico 1985/86) Si studi la funzione $y = x^4 - kx^2$ distinguendo vari casi, a seconda dei valori assunti dal parametro reale k. In particolare si calcoli il minimo della funzione per ogni valore di k. Si disegnino i grafici corrispondenti ai valori $k = -1$ e $k = 1$. $\left[x_m=\begin{cases}0 & \forall k\in\mathbb{R}\\ \pm\sqrt{\frac{k}{2}} & k>0\end{cases}\right]$

35. (Liceo scientifico PNI 1989/90) Si studi la funzione $f(x)=\frac{1-x}{x^2-3x}$. [Nessun estremo relativo]

36. (Liceo scientifico suppletiva 1990/91) Si disegni in un piano cartesiano ortogonale Oxy la curva C di equazione $y=\frac{\sqrt{2x^2-1}}{x}$. [Nessun estremo relativo]

37. (Liceo scientifico PNI 1991/92) In un piano cartesiano ortogonale Oxy si considerino le parabole C e C' di equazione rispettivamente: $y - x^2 = 0$, $y^2 + 8x - 6y - 3 = 0$. Si verifichi che C e C' sono tangenti in $A \equiv (1; 1)$ e che hanno in comune un ulteriore punto B. Detto P un punto della retta AB sia QQ' la corda intercettata da C sulla parallela per P all'asse delle ascisse, RR' la corda intercettala da C' sulla parallela per P all'asse delle ordinate e S la proiezione di P sulla retta di equazione $y + 2 = 0$. Si studi come varia il rapporto: $\frac{8\cdot\overline{PS}^2}{\overline{QQ'}\cdot\overline{RR'}}$ al variare di x ordinata di P, determinando in particolare il suo valore minimo. $\left[\frac{(x+2)^2}{x},x_m=2\right]$

38. (Liceo scientifico PNI 1991/92) In un piano cartesiano ortogonale si indichino con x e y le coordinate di un punto P e con X e Y le coordinate di un punto P'. a) Si consideri la trasformazione di equazioni: $X = ax + by$; $Y = a'x + b'y$, tale che al punto $A \equiv (1; 1)$ corrisponda il punto $A' \equiv (0; 2)$ e a $B \equiv (1; 0)$ corrisponda $B' \equiv (1; 0)$. b) Si studi la trasformazione ottenuta determinando in particolare i punti e le rette che si trasformano rispettivamente in se stessi. c) Detto α l'angolo acuto formato dalla retta r di equazione $y = mx$ e dalla sua trasformata r' si studi come varia la tangente trigonometrica di α al variare della retta r, determinando in particolare il massimo relativo e quello assoluto di $tan(\alpha)$.

[a) $a = 1$, $b = -1$, $a' = 0$, $b' = 2$; b) $(x; 0)$, $ax + ay + c = 0$; c) $tan(\alpha)=\frac{|m^2+m|}{2m^2-m+1},x_M=-\frac{1}{3}\vee 1$]

39. (Liceo scientifico suppletiva 1991/92) Studiare la funzione $y(x) = cos(x) \cdot e^{-x}$ per $x \geq 0$.

$$\left[x_M=\frac{7\pi}{4}+2k\pi;x_m=\frac{3}{4}\pi+2k\pi\right]$$

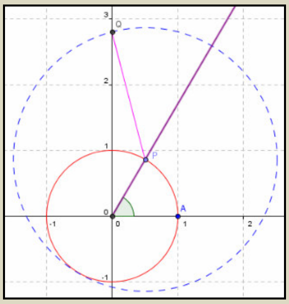
40. (Liceo scientifico suppletiva 1991/92) In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB}=2r$ inscrivere il triangolo ABD retto in D. Tracciare la bisettrice dell'angolo $D\hat{A}B$: tale bisettrice intersechi il segmento BD in E. Indicato con x l'angolo $B\hat{A}E$, determinare il rapporto y tra la lunghezza del segmento BE e la lunghezza del segmento BD: $y=\frac{\overline{BE}}{\overline{BD}}$. Calcolare il rapporto y per x che tende a zero, quindi rappresentare la funzione $y = f(x)$. $\left[\lim_{x\to 0}y=\frac{1}{2};y=\frac{1}{2\cdot cos^2(x)}\right]$

41. (Liceo scientifico suppletiva 1991/92) Dati i due punti $A \equiv (-1; 0)$ e $B \equiv (1; 0)$ determinare il luogo dei

punti $P \equiv (x, y)$ tali che $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = K$, con $K > 0$. Descrivere le caratteristiche delle curve trovate come luogo. Trovato, per $K \neq 1$, il centro C di tali curve in funzione di K, studiare l'andamento dell'ascissa del centro di tali curve al variare di K. $\left[x^2+y^2+2\cdot\frac{1+K^2}{1-K^2}\quad x+1=0, C\equiv\left(\frac{1+K^2}{K^2-1};0\right)\right]$

Lavoriamo insieme

Consideriamo un problema assegnato agli esami di Liceo scientifico 1992/93. *Dato un sistema di assi cartesiani ortogonali di centro O, tracciare la circonferenza γ di raggio unitario e centro O. Detto A il punto di coordinate* (1; 0), *indicare con θ l'angolo formato da una generica semiretta uscente dall'origine con il semiasse positivo delle x e con P il punto in cui tale semiretta interseca* γ ($P\hat{O}A = \theta$). *Determinare in funzione di θ l'ordinata y del punto Q appartenente al semiasse positivo delle y tale che* $\overline{PQ} = 2$. *Descrivere, limitandosi all'uso della derivata prima, la funzione y = f*(θ) *così trovata. Se P ruota sulla circonferenza γ con velocità angolare costante, il moto di Q quali caratteristiche presenta? Negli istanti in cui Q ha velocità nulla, P dove si trova?*

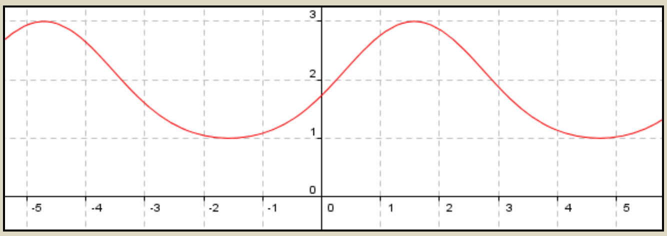


La circonferenza ha equazione $x^2 + y^2 = 1$. Consideriamo la figura. La semiretta OP ha equazione $y = tan(\theta)\, x$, quindi le coordinate di P sono: $\begin{cases} y = tan(\theta)\cdot x \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = tan(\theta)\cdot x \\ x^2+tan^2(\theta)\cdot x^2=1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} y = tan(\theta)\cdot x \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{1+tan^2(\theta)}} = cos(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = sin(\theta) \\ x = cos(\theta) \end{cases}$. Determiniamo adesso le coordinate di Q:

$$\overline{PQ} = 2 \Rightarrow cos^2(\theta) + [y_Q - sin(\theta)]^2 = 4 \Rightarrow [y_Q - sin(\theta)]^2 = 4 - cos^2(\theta) \Rightarrow y_Q = sin(\theta) + \sqrt{4-cos^2(\theta)}$$

$\Rightarrow y_Q = sin(\theta) + \sqrt{3+sin^2(\theta)}$. Studiamo la funzione, che è sempre positiva, date le limitazioni imposte dal problema, periodica di 2π, quindi non ha asintoti di nessun genere. Studiamo la derivata prima: $y' = cos(\theta) + \frac{2\cdot sin(\theta)\cdot cos(\theta)}{2\cdot\sqrt{3+sin^2(\theta)}} = \quad = \frac{cos(\theta)}{\sqrt{3+sin^2(\theta)}}\cdot\left[\sqrt{3+sin^2(\theta)} + sin(\theta)\right]$. Il secondo fattore è sempre positivo, quindi essa si annulla solo per $\theta = \frac{\pi}{2} \vee \frac{3\pi}{2}$, più le periodicità. Ovviamente per il primo valore si ha un massimo, per l'altro un minimo. Il grafico è a lato.



Se P ruota sulla circonferenza γ con velocità angolare costante, anche Q effettua un moto periodico che varia dall'ordinata dei minimi: 1, a quella dei massimi: 3. Se Q ha velocità nulla, vuol dire che la derivata prima della funzione è nulla, cioè P e Q avrebbero la stessa ordinata.

42. (Liceo scientifico PNI suppletiva 1991/92) Si consideri in un piano cartesiano ortogonale *Oxy* la circonferenza di centro $A \equiv (1; 0)$, passante per l'origine degli assi. Detta *r* la retta di equazione $y = mx$, sia *OPQ* il triangolo rettangolo inscritto nella circonferenza il cui cateto *OP* appartiene alla retta *r*. Si studi come varia l'area $f(m)$ del rettangolo avente come lati i cateti del triangolo *OPQ* e si tracci in un piano, riferito a un sistema cartesiano ortogonale *O′ms*, la curva *C* di equazione $s = f(m)$.

$$\left[f(m)=\frac{4m}{m^2+1};M_1\equiv(1;2),M_1\equiv(-1;-2),m\equiv(0;0)\right]$$

43. (Liceo scientifico 1992/93) Sia $\begin{cases} x = sin(t) \\ y = sin(2t) \end{cases}$. Esprimere *y* in funzione di *x* rappresentare le due funzioni $y = \pm f(x)$ in uno stesso sistema cartesiano. Individuare simmetrie e caratteristiche del grafico trovato. $\left[y=\pm 2x\cdot\sqrt{1-x^2}\right]$

44. (Liceo scientifico suppletiva 1992/93) Studiare $f(x)=\left|\frac{sin(x)}{k-cos(x)}\right|$ dopo aver determinato il valore di *k* in modo che la funzione abbia un massimo per $x=\frac{\pi}{3}$. $[k = 2]$

45. (Liceo scientifico PNI suppletiva 1992/93) Si stabiliscano le relazioni cui debbono soddisfare *a* e *b* affinché il sistema di equazioni: $\begin{cases} ax+2y+bz=1 \\ x+y+az=1 \\ x+ay+bz=1 \end{cases}$ ammetta un'unica soluzione o infinite soluzioni o nessuna soluzione. Nella relazione cui debbono soddisfare *a* e *b* affinché il sistema non ammetta un'unica soluzione si esegua la sostituzione: $a = X$; $b = XY$. Si tracci, in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy*, la curva *C* rappresentata dall'equazione a cui si perviene.

$$\left[\begin{cases} b\neq\frac{a\cdot(a^2-2)}{2a-3} & 1\ sol \\ b=\frac{a\cdot(a^2-2)}{2a-3}\wedge a=1 & \infty\, sol;Y=\frac{X^2-2}{2x-3} \\ b=\frac{a\cdot(a^2-2)}{2a-3}\ \wedge\ a\neq 1 & 0\, sol \end{cases}\right]$$

46. (Liceo scientifico PNI suppletiva 1992/93) Si studi la funzione $f(x)=\sqrt[3]{1+3x^2}$ e si tracci, in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy*, il grafico della curva *C* di equazione $y = f(x)$, determinando in particolare l'ascissa *a* del suo punto di flesso *F* appartenente al primo quadrante. Sia *S* l'area della parte finita di piano delimitata dalla curva *C*, dagli assi coordinati e dalla parallela all'asse delle ordinate passante per *F*. Si divida l'intervallo *I*, appartenente all'asse delle ascisse, di estremi 0 e *a*, in *n* parti uguali di estremi $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = a$. Siano T_n e R_n rispettivamente le aree dei poligoni, il primo somma dei trapezi aventi per altezza i segmenti in cui è stato diviso *I* e per basi i segmenti di lunghezza $f(x_h)$ e $f(x_{h+1})$ ($h = 0, 1, 2, ..., n - 1$) e il secondo somma dei rettangoli aventi per lati le altezze dei trapezi e i segmenti di lunghezza $f(x_h)$ ($h = 0, 1, 2, ..., n - 1$). Si dimostri che si ha $R_n < S < T_n$ e si determini il valore minimo di *n* per il quale risulta $T_n - R_n < \frac{1}{10^k}$ (*k* intero).

$$\left[x_m=0,a=1,n>\frac{\left(\sqrt[3]{4}-1\right)\cdot 10^k}{2}\right]$$

47. (Liceo scientifico PNI 1992/93) Si studi la funzione $f(x)=1+\sqrt{x^2-2x+5}$ e si tracci, in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy*, la curva *c* di equazione $y = f(x)$, verificando che essa è simmetrica rispetto alla retta di equazione $x = 1$. Si determinino in particolare le equazioni $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$ degli asintoti di *C*. $[g_1(x) = x, g_2(x) = -x + 2]$

48. (Liceo scientifico 1993/94) Nel piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy*, è assegnata la curva *k* di equazione: $y = \frac{x^2}{2} + ln|x+1|$. Disegnare un andamento approssimato dopo aver verificato, fra l'altro, che essa ha due flessi. Calcolare l'area del triangolo formato dalla retta congiungente tali flessi e dalle tangenti inflessionali. [$F_1 \equiv (-2; 2)$, $F_2 \equiv (0, 0)$; area triangolo = 2]

49. (Liceo scientifico 1993/94) Una piramide ha per base il triangolo *ABC*, isoscele e rettangolo in *A*, e ha per altezza il segmento *AV*. Inoltre la faccia *VBC* forma un angolo di 45° col piano della base e lo spigolo *VB* è lungo $2h \cdot \sqrt{3}$, dove *h* è una lunghezza nota. Calcolare la distanza del vertice *A* dal piano della faccia *VBC* e trovare per quale valore di *h* tale distanza vale $4 \cdot \sqrt{2}$. Verificato che questo valore di *h* è 4, con riferimento a esso secare la piramide con un piano parallelo alla base *ABC* e, proiettato ortogonalmente il triangolo sezione sulla base stessa, esprimere il volume del prisma triangolare così ottenuto in funzione della sua altezza *x*. Studiare, in rapporto alla questione geometrica, la funzione *f*(*x*) ricavata e tracciarne l'andamento in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy*. Calcolare infine quanti, fra i punti della regione piana compresa fra il grafico di *f*(*x*) e l'asse *x*, escluso il contorno, hanno entrambe le coordinate intere. $\left[f(x) = x \cdot (8-x)^2; x_M = \frac{8}{3}; 329 \right]$

50. (Liceo scientifico suppletiva 1993/94) Studiare le funzioni: $y = x^3 + 1$ e $y = \sqrt{x^3+1}$ e disegnare i loro grafici, rispettivamente *K′* e *K″*, nello stesso piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy*. Successivamente, tra i segmenti intercettati, dalla regione piana *R* delimitata da *K′* e *K″*, su una parallela all'asse *y*, determinare quello di lunghezza massima. $\left[L(k) = \sqrt{k^3+1} - k^3 - 1, k_M = -\sqrt[3]{\frac{3}{4}} \right]$

51. (Liceo scientifico suppletiva 1993/94) Considerato il rettangolo *ABCD*, il cui lato *AB* è lungo *a*, condurre per *B* la perpendicolare alla retta *AC* e chiamare *H* ed *E* i punti in cui essa seca le rette *AC* e *AD* nell'ordine. Condurre quindi per *H* la perpendicolare al piano della figura e su di essa prendere un punto *P* tale che: $\overline{HP} = 6 \cdot \overline{AE}$. Esprimere il volume della piramide, avente per vertice il punto *P* e per base il quadrilatero *HDEC*, in funzione della lunghezza *x* del segmento *BH*. Studiare, indipendentemente dalla questione geometrica, la funzione *f*(*x*) fornita dall'espressione del volume suddetto quando *a* = 1 e disegnare il grafico *G* in un piano cartesiano ortogonale *Oxy*.

$$\left[f(x) = \frac{(1-x^2)^2}{x^2}; x_m = \pm 1 \right]$$

52. (Liceo scientifico PNI 1993/94) Si studi la funzione: $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}$. Si tracci, in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy*, il grafico della curva *C* di equazione *y* = *f*(*x*) e si scrivano le equazioni delle rette tangenti a *C* nei suoi punti (*x*, *f*(*x*)), per i quali *f*(*x*) assume valore estremo relativo, e della tangente nel suo punto di flesso. Detta *r* la parallela all'asse delle ascisse passante per il punto *P* di intersezione della curva *C* con il proprio asintoto *a*, si determini il rapporto dei segmenti *QR* e *OP*, essendo *Q* e *R* le proiezioni su *a* degli ulteriori punti di intersezione di *r* con *C*.

$$\left[x_M = -2, x_m = 0; Tang: y = \sqrt[3]{4}, x = 0, x = -3; \frac{\overline{QR}}{\overline{QP}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \right]$$

53. (Maturità magistrale PNI 1993/94) In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy* si considerino la circonferenza *C* di equazione $x^2 + y^2 - 2y = 0$ e la curva *C′*, ottenuta come trasformata mediante l'omotetia *T* di equazione: $\begin{cases} X = 2x + 2 \\ Y = 2y \end{cases}$. Sia *P* il punto d'intersezione di *C* e *C′* appartenente all'asse delle ordinate. Si conduca per *P* una retta *r* e siano *PQ* e *PR* le corde intercettate da *r* su *C* e su *C′*. Si studi come varia, al variare di *r*, la quarta parte della somma dei quadrati delle misure delle due corde. Si determinino il centro A e il valore del rapporto *k* dell'omotetia *T* e si scrivano le equazioni delle tangenti comuni a *C* e *C′*. $\left[f(x) = \frac{x^2+4}{x^2+1}; x_m = 0, x_M = \frac{\sqrt{3}}{3}; A \equiv (-2;0), k = 2; y = \frac{4}{3} \cdot (x+2) \right]$

54. (Liceo scientifico PNI 1994/95) In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy* si consideri la parabola Γ di equazione $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ e sia *P* il punto di Γ di ascissa λ. Il candidato: a) scriva l'equazione della parabola passante per l'origine *O* e avente il vertice nel punto *P*; b) determini l'equazione della curva Σ, luogo geometrico del fuoco della parabola al variare di λ; c) tracci il grafico della curva Σ individuandone in particolare il flesso *F*.

$$\left[\text{a) } y = \frac{\lambda - 1}{2\lambda}x^2 + (1-\lambda)x;\ \text{b) } \frac{x^2\cdot(2-x)}{2\cdot(x-1)};\ \text{c) } F \equiv (2;0)\right]$$

55. (Liceo scientifico PNI suppletiva 1994/95) È dato in un piano α il triangolo *ABC* retto in *B* con i lati $\overline{AB} = a, \overline{AC} = 2a$. Si conducano in uno dei semispazi individuati dal piano α i segmenti *AA′*, *BB′*, *CC′* perpendicolari ad α, tali che $\overline{AA'} = \overline{BB'} = 4a$ e l'angolo $B\hat{B}'C = \frac{\pi}{4}$. Il candidato a) indicato con *P* un punto del segmento *BB′* e posto $\overline{BP} = x$, studi come varia la somma $s = \overline{AP} + \overline{PC'}$ al variare di *P* determinando in particolare, con un metodo analitico o sintetico, il minimo e il massimo valore assoluto di *s*, e tracci in un piano riferito a un sistema di assi ortogonali *Oxs* la curva di equazione $s = s(x)$; b) dimostri che la faccia *A′B′C′* del solido *T* di vertici *ABCA′B′C′* è un triangolo rettangolo; c) calcoli la superficie totale e il volume di *T*.

$$\left[\text{a) } s(x) = \sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{x^2 + 2\cdot\left(\sqrt{3}-4\right)\cdot ax + \left(22 - 8\cdot\sqrt{3}\right)\cdot a^2}, 0 \le x \le 4a\right.$$

$$\left. s_m = \sqrt{23 - 6\cdot\sqrt{3}}\cdot a; s_M = \left(\sqrt{17}+\sqrt{6}\right)\cdot a;\ \text{b) } S = \frac{21 + 7\cdot\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}a^2, V = \frac{4\cdot\sqrt{3}-1}{2}a^3\right]$$

56. (Liceo scientifico 1994/95) Nel cubo di vertici *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* le facce *ABCD* e *EFGH* sono opposte e i segmenti *AE*, *BF*, *CG* sono spigoli. Inoltre gli spigoli del cubo hanno lunghezza unitaria. Sullo spigolo *BF* prendere un punto *P* tale che: $\overline{BP} = x$. a) Verificare che la distanza *y* di *P* dalla diagonale *AG* è espressa da: $y = \sqrt{\frac{2}{3}\cdot\left(x^2 - x + 1\right)}$. b) Di essa disegnare il grafico in un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy*, dopo avere trovato, fra l'altro, le equazioni dei suoi asintoti. $\left[y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]$

57. (Liceo scientifico suppletiva 1994/95) Studiare la funzione: $y = \sqrt[3]{x^2+1}$ e disegnarne il grafico *G* in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy*. Verificato che *G* ha due flessi, *F′* e *F″*, calcolare l'area del triangolo di vertici *O*, *F′*, *F″*. Trovare i due interi consecutivi entro i quali è compresa quest'area. $\left[x_m = 0; F' \equiv \left(-\sqrt{3};\sqrt[3]{4}\right), F'' \equiv \left(\sqrt{3};\sqrt[3]{4}\right); A_{OF'F''} = \sqrt[6]{432}; 2 < \sqrt[6]{432} < 3\right]$

58. (Istituto magistrale PNI 1994/95) Su una semiretta di origine A_0 è dato il segmento A_0A_1 di lunghezza 2. Si considerino i segmenti adiacenti A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{n-1}A_n$ tali che il rapporto tra ogni segmento e il precedente sia *k*. Il candidato: a) dimostri che le aree dei cerchi aventi per diametro i suddetti segmenti sono i termini di una progressione geometrica e calcoli l'area S_n della parte di piano delimitata dalla successione delle prime *n* circonferenze; b) determini il limite di S_n al tendere di *n* all'infinito quando $k = \frac{1}{2}$; c) determini, in generale, il limite di S_n al tendere di *n* all'infinito, distinguendo i due casi: 1) $k < 1$, 2) $k \ge 1$; e verificando che nel caso 1) detto limite assume valore finito *S*(*k*); d) studi, in detto caso, come varia *S*(*k*) al variare di *k* e disegni, in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali *OkS* la curva di equazione $S = S(k)$. $\left[\text{b) } \frac{4}{3}\pi;\ \text{c1) } 1; \text{c2) } \frac{\pi}{1-k^2}; \text{d) Sempre crescente}\right]$

59. (Liceo scientifico 1995/96) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (*Oxy*), è assegnata la curva *k* di equazione: $y = \frac{x^2}{4-x^3}$. Dopo averla studiata (dominio, eventuali zeri ed estremi, asintoti di *k*), disegnarne l'andamento. $[x_m = 0, x_M = -2]$

60. (Liceo scientifico suppletiva 1995/96) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione: $y=\frac{2x^2+ax+b}{x^3}$ dove a e b sono parametri reali. Trovare quale relazione lega questi parametri quando le curve considerate hanno un punto di massimo e uno di minimo relativi e stabilire a quali altre condizioni devono soddisfare a e b affinché tali punti, quando esistono, abbiano ascisse dello stesso segno. Tra le curve assegnate determinare la curva k avente gli estremi relativi nei punti A, B di ascisse 1 e 3 rispettivamente e disegnarne l'andamento.

$$\left[0<b<\frac{a^2}{6},k(x)=\frac{2\cdot(x-1)^2}{x^3}\right]$$

61. (Liceo scientifico suppletiva 1995/96) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione: $y = x^3 + ax^2 + bx + c$, dove a, b, c sono numeri reali. a) Determinare tra queste le due curve k_1 e k_2 che passano per l'origine e per il punto $A \equiv (2; 0)$ e sono tangenti all'asse delle ascisse rispettivamente in O e in A. Disegnare l'andamento di k_1 e k_2. b) Considerata la regione piana R delimitata dagli archi di k_1 e k_2, aventi gli estremi in O e in A, trovare tra le sue corde parallele all'asse delle ordinate quella di lunghezza massima. Calcolare poi l'area del quadrilatero convesso avente per vertici gli estremi di questa corda e i punti O e A. c) Verificare che le equazioni delle due curve k_1 e k_2 si trasformano l'una nell'altra con la sostituzione $\begin{cases} x=2-x' \\ y=-y' \end{cases}$ ed esprimere questa proprietà in termini geometrici. [a) k_1: $y = x^2 \cdot (x - 2)$, k_2: $y = x \cdot (x - 2)$;

b) massima lunghezza: 2; Area di $R = \frac{8}{3}$; Area quad. = 2; c) simmetria di centro (1; 0)]

62. (Liceo scientifico suppletiva 1995/96) Nel triangolo ABC rettangolo in A, risulta $\overline{AB}=a,\ sin\left(A\hat{B}C\right)=\frac{4}{5}$, dove a è una lunghezza nota. Indicato con D un punto della semicirconferenza di diametro BC, non contenente A, esprimere l'area S del triangolo ABD in funzione dell'ampiezza dell'angolo $B\hat{A}D$. Constatato che $S=\frac{a^2}{6}\cdot\left[4\cdot sin^2(x)+3\cdot sin(x)\cdot cos(x)\right]$, studiare questa funzione e disegnarne l'andamento con riferimento alla questione geometrica. Utilizzare il disegno ottenuto al fine di calcolare per quali valori di x l'area S risulta uguale a ka^2, dove k è un parametro reale. Determinare infine il perimetro del triangolo ABD per il quale è massima l'area S.

$$\left[\begin{cases} 1 & 0\le k\le\frac{2}{3}a^2 \\ 2 & \frac{2}{3}a^2<k<\frac{3}{4}a^2 \end{cases};2p=\left(1+\sqrt{10}\right)\cdot\right]$$

63. (Liceo scientifico PNI 1995/96) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti $A \equiv (2; 0)$ e $B \equiv (0, 4)$. Sia $P \equiv (x, y)$ un punto di detto piano con $x > 0$ e $y > 0$, e C, D, E, F i punti medi dei lati OA, AP, PB, BO del quadrilatero $OAPB$. Il candidato: a) dica quali posizioni deve occupare P affinché il quadrilatero $OAPB$ degeneri in un triangolo; b) dimostri che il quadrilatero $CDEF$ è un parallelogramma; c) dica quali posizioni deve occupare P affinché il parallelogramma $CDEF$ sia un rettangolo; d) dica quali posizioni deve occupare P affinché il parallelogramma $CDEF$ sia un rombo; e) dica dove si trova P quando il parallelogramma $CDEF$ è un quadrato e ne determini le coordinate; f) dimostri che l'area del parallelogramma $CDEF$ è metà dell'area del quadrilatero $OAPB$; g) esprima in funzione dell'ascissa di P il rapporto z tra l'area del quadrato di lato EF e l'area del parallelogramma $CDEF$, quando P, oltre a rispettare le condizioni inizialmente assegnate, appartiene alla retta di equazione $y = 4 - x$; h) studi la funzione $z(x)$ e ne disegni il grafico in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali $O'xz$.

$$\left[\text{a) } P\in AB;\text{c) } P\equiv\left(x;\frac{x}{2}\right),x>0;\text{d) } P\in\left\{x^2+y^2=20,x>0,y>0\right\};\right.$$

e) $P \equiv (4;2)$; g) $z = \dfrac{x^2 - 4x + 8}{x+4}, 0 < x < 4$]

64. (Liceo scientifico PNI 1995/96) In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy* è assegnata la parabola di equazione $y = -x^2 + 2x + 3$. Sia $P \equiv (x, y)$ un punto dell'arco γ, appartenente al primo quadrante, di detta parabola e *H* la proiezione di *P* sull'asse delle ascisse. Sul piano α passante per il punto *P* e perpendicolare all'asse delle ascisse, si consideri il triangolo *APB*, avente i lati *AP* e *PB* uguali, il segmento *PH* come altezza relativa al alto *AB* e tale che la somma delle lunghezze di *AB* e di *PH* sia 4. Il candidato: a) dica quali posizioni deve occupare *P* sull'arco considerato affinché il triangolo *APB* esista; b) limitatamente alle suddette posizioni di *P*, esprima l'area di *S* del triangolo *APB* in funzione dell'ascissa di *P* e studi come essa varia al variare di *P*; c) calcoli il volume del solido, luogo del triangolo *APB* al variare di *P* sull'arco γ; d) risponda alle domande a) e b) quando *P* varia sull'arco γ' della parabola considerata, appartenente al semipiano $x \geq 0$, verificando in particolare se esistono estremi relativi e assoluti di $S(x)$ ed eventualmente determinandoli.

[a) $0 \leq x < 1 \vee 1 < x < 3$; b) $S = \dfrac{1}{2}(x-1)^2 \cdot (x+1) \cdot (x-3)$, $0 \leq x < 3 \wedge x \neq 1$;

c) $\dfrac{27}{10}$; d) $0 \leq x < 1 + 2\cdot\sqrt{2}, x \neq 1 \wedge x \neq 3; x_M = 1 + 2\cdot\sqrt{2} \vee 1 + \sqrt{6} \vee 0$]

65. (Liceo scientifico 1996/97) Sono assegnate le funzioni in *x*: $\dfrac{x^4 + ax^2 + b}{x^2 + 1}$ dove *a* e *b* sono parametri reali. Fra tali funzioni indicare con $f(x)$ quella per cui la curva *k* di equazione $y = f(x)$, disegnata in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy*, soddisfi alle seguenti condizioni: la retta di equazione $y = 1$ sechi *k* in due punti e sia tangente a essa in un punto; l'asse *x* sia tangente a *k* in due punti distinti. $\left[y = \dfrac{(x^2-1)^2}{x^2+1}\right]$

66. (Liceo scientifico PNI 1996/97) In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy* sia data la parabola γ di equazione $y = x^2$ e sia *P* un suo punto di ascissa $\lambda \neq 0$ e *r* la parallela per *P* all'asse *y*. Siano γ_1 e γ_2 le parabole con asse la retta *r*, vertice in *P* e stessa distanza focale di γ (distanza fuoco – direttrice, pari a $\dfrac{1}{2\cdot|a|}$ per la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$). Il candidato: a) scriva in funzione di λ le equazioni di γ_1 e γ_2, essendo γ_1 la parabola che incontra γ solo in *P*; b) scriva le equazioni delle trasformazioni che mutano γ in γ_1 e γ in γ_2; c) dica la natura di dette trasformazioni precisando se si tratta di trasformazioni dirette o inverse e se hanno elementi che si trasformano in se stessi; d) fissato $\lambda = 1$e dette T, T_1, T_2 le rispettive intersezioni di γ, γ_1 e γ_2 con la retta di equazione $x - h = 0$, studi la funzione $z = \dfrac{\overline{TT_1} + \overline{T_1T_2}}{\overline{TT_2}}$, al variare di *h*, e ne tracci il relativo grafico in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali *O′hz*.

$\left[\text{a) } y = x^2 - 2\lambda x + 2\lambda^2, y = -x^2 + 2\lambda x \text{; b)} \begin{cases} x' = x + \lambda \\ y' = y + \lambda^2 \end{cases}, \begin{cases} x' = \lambda - x \\ y' = \lambda^2 - y \end{cases} \text{; c) } z = \dfrac{1 + |h-1|}{|h|}\right]$

67. (Liceo scientifico PNI 1996/97) In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy* sia *r* la retta di equazione $x - 1 = 0$ e *P* un suo punto. Siano *A* e *B* i punti d'intersezione della retta *OP* con la circonferenza di centro *P* e raggio $2\cdot\sqrt{2}$. Il candidato: a) verifichi che il luogo di *A* e *B*, al variare del punto *P* su *r*, è dato dalle curve γ_1 e γ_2, di equazioni $f_1(x) = \dfrac{x}{x+1}\cdot\sqrt{-x^2 + 2x + 7}$ e $f_2(x) = \dfrac{x}{x-1}\cdot\sqrt{-x^2 + 2x + 7}$; b) determini l'insieme *E* di esistenza della funzione $f_1(x)$, gli insiemi in cui essa assume valore positivo, negativo o nullo , gli eventuali asintoti, il valore x_0 in cui ha un massimo relativo e dimostri che le tangenti a γ_1, nei punti le cui ascisse sono gli estremi di *E* nei quali

$f_1(x)$ è definita, sono parallele all'asse y; c) disegni la curva γ_1 e, quindi, la curva γ_2; d) detta t la tangente alla curva γ_1, nel suo punto $M \equiv (x_0; f(x_0))$, determini l'ulteriore intersezione di t con γ_1.

$\left[\text{b) } E = \left[1-2\cdot\sqrt{2},1\right) \cup \left(1,1+2\cdot\sqrt{2}\right]; x_0 = -1; \text{d) } x = 2-\sqrt{3}\right]$

68. (Liceo scientifico PNI suppletiva 1996/97) Rappresentare in coordinate cartesiane ortogonali la funzione $y = sin(x) + \frac{1}{3}\cdot sin(x)$ nell'intervallo [0; 2π]. Determinare il periodo della funzione $y = sin(nx) + \frac{1}{3}\cdot sin(mx)$, dove n e m sono due numeri interi maggiori di 0.

$\left[x_m : \frac{\pi}{2} \vee \frac{5\pi}{4} \vee \frac{7\pi}{4}; x_M : \frac{3\pi}{2} \vee \frac{\pi}{4} \vee \frac{3\pi}{4}; P = \frac{2\pi}{m\cdot n}\cdot mcm(m,n)\right]$

69. (Liceo scientifico PNI suppletiva 1996/97) Dato un trapezio rettangolo $ABCD$ avente altezza $\overline{AD} = 1$ e basi $\overline{AB} = 2$ e $\overline{CD} = x$, determinare il volume del parallelepipedo retto a base quadrata il cui lato di base sia uguale al lato obliquo BC del trapezio e la cui altezza sia uguale alla base CD del trapezio stesso. Tracciare in coordinate cartesiane ortogonali il grafico della funzione $y = f(x)$ rappresentante il lato del cubo avente lo stesso volume del precedente parallelepipedo. Determinare l'equazione della retta t passante per l'origine del sistema di riferimento delle coordinate cartesiane ortogonali e tangente alla curva $y = f(x)$ in un punto T del primo quadrante. Verificare che T ha coordinate $x = \frac{5}{2}$, $y = \sqrt[3]{\frac{25}{8}}$.

$\left[f(x) = \sqrt[3]{x^3-4x^2+5x}; x_{\max} = 1; x_{\min} = \frac{5}{3}; t : y = \frac{\sqrt[3]{25}}{5}\cdot x\right]$

70. (Liceo scientifico 1997/98) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione: $y = ax^3 + 3x + b$ dove a, b sono parametri reali con $a \neq 0$. a) Determinare i valori di a per i quali queste curve hanno un punto di massimo ed uno di minimo relativi e quelli per i quali non ammettono tali punti. b) Calcolare i valori di a e b in modo che la curva corrispondente abbia un massimo relativo uguale a 0 e sechi l'asse x nel punto di ascissa $-2\cdot\sqrt{2}$. c) Controllato che la curva si ottiene per $a = -\frac{1}{2}$, disegnarne l'andamento.

$\left[\text{a) Estremi relativi per } a < 0;\ \text{b) } a = \frac{1}{2}, b = -2\cdot\sqrt{2}\right]$

71. (Liceo scientifico 1997/98) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva C' di equazione: $y = \frac{x^2-1}{2x}$. a) Studiarla e disegnarne l'andamento, indicando con A e B i punti in cui la curva seca l'asse x ($x_A > x_B$). b) Trovare l'equazione della circonferenza C'' tangente a C' in A e passante per B. c) Disegnare C'' sullo stesso piano di C' dopo aver determinato il raggio e il centro di C'' e inoltre le coordinate dell'ulteriore punto in cui C'' seca C'. d) Determinare l'angolo sotto cui C' e C'' si secano in B. $\left[\text{b) } x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0;\ \text{c) } r = \sqrt{2}; (0;1); \left(-\frac{1}{5}; \frac{12}{5}\right); \text{d) } 90°\right]$

72. (Liceo scientifico PNI 1997/98) Sia il seguente sistema lineare: $\begin{cases} (k+1)\cdot x - y - 1 = 0 \\ 2kx - y - 1 = 0 \\ 2x + y + 1 + h = 0 \end{cases}$. Il candidato:

a) dica per quali valori di h e k il sistema ammette soluzioni; b) interpretate le equazioni del sistema come quelle di tre rette r, s, t di un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, dica quali sono le posizioni delle rette quando il sistema ha soluzione; c) nei casi in cui il sistema non ha soluzione, determini, per via algebrica o geometrica, quando le tre rette individuano un triangolo; d) in tale condizione, fissato h = 1, studi come varia l'area s del triangolo al variare di k e disegni, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $O'ks$, la curva di equazione $s = s(k)$.

[a) $h = 0 \vee k = 1$; b) $(h = 0 \wedge k \neq 1) \vee (h \neq 0 \wedge k = 1)$, rette incidenti in $P \equiv \left(-\frac{h}{4}; -\frac{h+2}{2}\right)$;

coincidenti : $h = 0 \wedge k = 1$, r e s; $h = 0 \wedge k = -1$, s e t; $h = 0 \wedge k = -3$, r e t;

c) $h \neq 0 \wedge k \neq 1 \wedge k \neq -1 \wedge k \neq -3$; d) $s = \frac{1}{4} \cdot \left|\frac{k-1}{k^2+4k+3}\right|$]

73. (Liceo scientifico 1997/98) Un cateto di un triangolo rettangolo è lungo $2a$, dove a è una lunghezza nota, e l'angolo acuto adiacente ad esso ha coseno uguale a $\frac{4}{5}$. a) Condotta per il vertice dell'angolo retto una retta t che non attraversa il triangolo e indicata con x la misura dell'angolo che questa retta forma col cateto maggiore, esprimere in funzione di x il volume $V(x)$ del solido generato dal triangolo quando compie una rotazione completa intorno alla retta t. b) Verificato che risulta: $V(x) = \frac{1}{2} \cdot \pi a^3 \cdot [4 \cdot sin(x) + 3 \cdot cos(x)]$, con x appartenente ad un determinato intervallo, disegnarne il grafico in un piano cartesiano. c) Utilizzare il grafico disegnato per determinare x in modo che il volume del solido di rotazione descritto sopra sia ka^3, dove k è un parametro reale assegnato.

$$\left[\text{b) } x_M = tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right); \text{c) } \begin{cases} 1\,sol. & \frac{3}{2} \leq k < 2 \\ 2\,sol. & 2 \leq k \leq \frac{5}{2} \end{cases} \right]$$

74. (Liceo scientifico 1998/99) Posto $f(x) = \frac{x^3}{ax+b}$, dove a e b sono parametri reali, determinare tali parametri in modo che la curva γ di equazione cartesiana $y = f(x)$ abbia un estremo relativo nel punto di coordinate $\left(\frac{3}{4}; \frac{27}{32}\right)$. Controllato che la curva γ cercata si ottiene per $a = 2$, studiare tale curva e disegnarne l'andamento in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy). Nello stesso piano (Oxy) disegnare l'andamento della curva γ′ di equazione $y = f'(x)$, dopo aver determinato, in particolare, le coordinate dei punti comuni a γ e γ′. Sussiste un'evidente relazione fra l'andamento di γ e quello di γ′. Quale? $\left[a = 2 \wedge b = -1; (0; 0), (1; 1); \left(\frac{3}{2}; \frac{27}{16}\right)\right]$

75. (Liceo scientifico 1998/99) Considerato il quadrato $ABCD$, sull'arco di circonferenza di centro A e raggio AB, contenuto nel quadrato, si prenda un punto T in modo che l'angolo $T\hat{A}B$ misuri $2x$ radianti. Si conduca quindi per T la retta tangente alla circonferenza e si chiamino P e Q i punti in cui essa seca le rette BC e CD rispettivamente. a) Esprimere in funzione di x il rapporto $f(x) = \frac{\overline{CP} + \overline{CQ}}{\overline{AT}}$. b) studiare la $f(x)$ ottenuta, tenendo conto dei limiti imposti alla variabile x dalla questione geometrica, e disegnarne il grafico in un piano cartesiano. c) Utilizzare il grafico disegnato per determinare x in modo che il rapporto considerato sia uguale a un numero reale k assegnato. d) Verificare che il rapporto $f(x)$ può essere scritto nella seguente forma: $f(x) = \frac{sin(2x) + cos(2x)}{sin(2x) + cos(2x) + 1}$. e) Stabilire che risulta $tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$.

$$\left[\text{a) } \frac{-tan^2(x) + 2 \cdot tan(x) + 1}{1 + tan(x)}, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}; \text{ c) } \begin{cases} 1\,sol. & 1 \leq k \leq 4 - 2\cdot\sqrt{2} \\ 0\,sol. & k < 1 \vee k > 4 - 2\cdot\sqrt{2} \end{cases} \right]$$

76. (Liceo scientifico PNI 1998/99) In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy è data la parabola γ di equazione: $y = \frac{x^2}{2} - x$. Siano A un punto dell'asse x di ascissa λ, con λ > 0, B il suo simmetrico rispetto a O, e A' e B' i punti della parabola le cui proiezioni ortogonali sull'asse x sono rispettivamente A e B. Il candidato: a) verifichi che le tangenti a e b alla parabola γ, rispettivamente in A' e B', si incontrano in un punto E dell'asse y; b) detti C e D i rispettivi punti di intersezione di a e con l'asse x, esprima in funzione di λ l'area del triangolo CED; c) studi la funzione $s(λ)$ e tracci, in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali $O'λs$, la curva C di

equazione $s = s(\lambda)$. $\left[\text{a) } E \equiv \left(0; -\dfrac{\lambda^2}{2}\right); \text{ b) } \dfrac{\lambda^5}{4 \cdot \left|\lambda^2 - 1\right|}; \text{ c) } \dfrac{25 \cdot \sqrt{15} - 48}{72}\right]$

77. (Liceo scientifico PNI 1998/99) In un piano α è assegnato il triangolo *ABC*, retto in *B*, i cui cateti *AB* e *BC* misurano rispettivamente 4 e 3. Si conduca per il punto *A* la perpendicolare al piano α e sia *V* un punto di questa per cui $\overline{VA} = \overline{VB}$. Il candidato a) dimostri, geometricamente o algebricamente, che, come tutte le altre facce del tetraedro *VABC*, anche la faccia *VBC* è un triangolo rettangolo, il cui angolo retto è $V\widehat{B}C$; b) calcoli il volume e la superficie totale del tetraedro; c) detto *M* il punto medio di *VA* e *P* un punto dello stesso segmento a distanza *x* da *V*, esprima in funzione di *x* il volume *V* del tetraedro *MPQR*, essendo *Q* ed *R* le rispettive intersezioni degli spigoli *VB* e *VC* con il piano β parallelo ad α e passante per *P*; d) studi come varia *V* al variare di *P* sul segmento *VA* determinando in particolare la posizione $\overline{P}$ di *P* in cui il volume *V* assume valore massimo; e) detto *D* il punto medio di *VB* ed *E* il punto di *AC* tale che $\overline{AE} = \overline{AB}$, determini la posizione *P** di *P* che rende minima la somma $\overline{DP} + \overline{PE}$ (si consiglia di far ruotare il triangolo *VAB* attorno ad *AV* fino a portarlo nel piano del triangolo *VAE*, simmetricamente a quest'ultimo, e considerare la somma $\overline{D'P} + \overline{PE}$, essendo *D'* il corrispondente di *D* nella suddetta rotazione).

$\left[\text{b) } 8; 6 \cdot \left(4 + \sqrt{2}\right); \text{ c) } V(x) = \dfrac{x^2 \cdot |x - 2|}{8}; \text{ d) } P \equiv A; \text{ e) } \overline{VP^*} = \dfrac{8}{3}\right]$

78. (Liceo scientifico PNI 1999/2000) Assegnata la funzione: $f(x) = a \cdot ln^2(x) + b \cdot ln(x)$, il candidato: a) determini per quali valori di *a* e *b* la $f(x)$ ha un minimo relativo in $\left(\sqrt{e}; -\dfrac{1}{4}\right)$; b) disegni la curva grafico della $f(x)$ per i valori di *a* e di *b* così ottenuti [a) $a = 1$, $b = -1$; b) minimo assoluto per $x = \sqrt{e}$]

79. (Liceo scientifico 2000/2001) Si consideri la seguente relazione tra le variabili reali *x*, *y*: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{a}$, dove *a* è un parametro reale positivo. a) Esprimere *y* in funzione di *x* e così ottenuta, disegnandone il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (*Oxy*). b) Determinare per quali valori di *a* la curva disegnata risulta tangente o secante alla retta *t* di equazione $x + y = 4$. c) Scrivere l'equazione della circonferenza *k* che ha il centro nel punto di coordinate (1; 1) e intercetta sulla retta *t* una corda di lunghezza $2 \cdot \sqrt{2}$. d) Calcolare le aree delle due regioni finite di piano in cui il cerchio delimitato da *k* è diviso dalla retta *t*. e) Determinare per quale valore del parametro *a* il grafico, di cui al precedente punto a), risulta tangente alla circonferenza *k*. $\left[\text{a) } y = \dfrac{ax}{x - a}\right.$; tangente per $a = 1$,

secante per $\left. 0 < a < 1; \text{ c) } x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0; \text{d) } \pi - 2; 3\pi + 2; \text{e) } \dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}\right]$

80. (Liceo scientifico 2002/03) È assegnata la funzione $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + 2}$, disegnarne il grafico *g* in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (O*xy*), dopo aver stabilito quanti sono esattamente i flessi di *g* ed aver fornito una spiegazione esauriente di ciò. [3 flessi]

81. (Liceo scientifico PNI 2002/03) Nel piano sono dati: il cerchio γ di diametro $OA = a$, la retta *t* tangente a γ in *A*, una retta *r* passante per *O*, il punto *B*, ulteriore intersezione di *r* con γ, il punto *C* intersezione di *r* con *t*. La parallela per *B* a *t* e la perpendicolare per *C* a *t* s'intersecano in *P*. Al variare di *r*, *P* descrive il luogo geometrico Γ noto con il nome di versiera di Agnesi [da Maria Gaetana Agnesi, matematica milanese, (1718–1799)]. a) Si provi che valgono le seguenti proporzioni: *OD* : *DB* = *OA* : *DP* = *OC* : *DP* = *DP* : *BC* ove *D* è la proiezione ortogonale di *B* su *OA*; b) Si verifichi che, con una opportuna scelta del sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche *Oxy*, l'equazione cartesiana di Γ è: $y = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$. c) Si tracci il grafico di Γ. $\left[y = 0; M \equiv O, F_1 \equiv \left(-\dfrac{a}{\sqrt{3}}; \dfrac{3}{4}a\right); F_2 \equiv \left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}; \dfrac{3}{4}a\right)\right]$

82. (Liceo scientifico PNI 2003/04) Sia *f* la funzione così definita: $f(x) = sin\left(\frac{\pi}{a}\cdot x\right)\cdot cos\left(\frac{\pi}{2b}\cdot x\right)+x$, con *a* e *b* numeri reali diversi da zero. a) Si dimostri che, comunque scelti *a* e *b*, esiste sempre un valore di *x* tale che $f(x)=\frac{a+b}{2}$. b) Si consideri la funzione *g* ottenuta dalla *f* ponendo *a* = 2*b* = 2. Si studi *g* e se ne tracci il grafico. c) Si consideri per *x* > 0 il primo punto di massimo relativo e se ne fornisca una valutazione approssimata applicando un metodo iterativo a scelta.

$$\left[\text{b) } x_m = 2-cos^{-1}\left(-\frac{2}{\pi}\right)+2k\pi; x_M = cos^{-1}\left(-\frac{2}{\pi}\right)+2k\pi; x_F = 1+2k\pi \vee 2+2k\pi; \text{c) } \approx 0{,}719\right]$$

83. (Liceo scientifico 2003/04) Sia *f* la funzione definita da: $f(x) = 2x - 3x^3$. a) Disegnate il grafico *G* di *f*. b) Determinate la funzione *g* il cui grafico è simmetrico di *G* rispetto alla retta $y=\frac{4}{9}$.

$$\left[\text{a) } M \equiv \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{4}{9}\cdot\sqrt{2}\right), m \equiv \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{4}{9}\cdot\sqrt{2}\right), F \equiv O; \text{b) } y = 3x^3-2x+\frac{8}{9}\right]$$

84. (Liceo scientifico PNI 2003/04) Sia γ la curva d'equazione: $y = k\cdot e^{-\lambda\cdot x^2}$ ove *k* e λ sono parametri positivi. a) Si studi e si disegni γ. b) Si determini il rettangolo di area massima che ha un lato sull'asse *x* e i vertici del lato opposto su γ. $\left[\text{a) } M \equiv O; F_1 \equiv \left(-\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}; \frac{k}{\sqrt{e}}\right); F_2 \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}; \frac{k}{\sqrt{e}}\right);\right.$

b) Rettangolo i cui vertici hanno le stesse ascisse dei punti di flesso]

85. (Liceo scientifico 2004/05) Si consideri la funzione *f* definita sull'intervallo [0; +∞) da:

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x) = 1/2x^2\left[3-2\log(x)\right]+1 \quad se \quad x>0 \end{cases}$$

e sia *C* la sua curva rappresentativa nel riferimento *Oxy*, ortogonale e monometrico. Si disegni *C* e si determini l'equazione della retta *r* tangente a *C* nel punto di ascissa *x* = 1. $\left[y = 2x+\frac{1}{2}\right]$

86. (Liceo scientifico 2005/06) Si considerino le funzioni $f(x) = ln(x)$ e $g(x) = ax^2$, essendo *a* un parametro reale. a) Si discuta, al variare di *a*, l'equazione $ln(x) = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di *a* i grafici di *f* e *g* sono tra loro tangenti. b) Si studi la funzione $h(x) = ln(x) - ax^2$ scegliendo per *a* un valore numerico maggiore di $\frac{1}{2e}$ e se ne disegni il grafico. $\left[\text{a) } a=\frac{1}{2e}; \text{b) } x = 0(Dx), x_M = \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

87. (Liceo scientifico PNI 2006/07) Si disegni il grafico della funzione $f(x) = e^x + e^{-x}$ e si disegni il grafico della funzione $\frac{1}{f(x)}$. $\left[f(x)\text{: } m \equiv (0;2); \frac{1}{f(x)}: x=0; M \equiv \left(0;\frac{1}{2}\right); F_{12} \equiv \left(ln\left(\sqrt{2}\pm 1\right); \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right]$

88. (Liceo scientifico 2006/07) Si determini, al variare di *k*, il numero delle soluzioni reali dell'equazione: $x^3 - x^2 - k + 1 = 0$. [1 per $k < \frac{23}{27} \vee k > 1$; 2 soluzioni per $k = 1 \vee k = \frac{23}{27}$, 3 soluzioni altrimenti]

89. (Liceo scientifico 2007/2008) Si determini, al variare di *k*, il numero delle soluzioni reali dell'equazione: $x^3 - 3x^2 + k = 0$. [1 per $k < 0 \vee k > 4$; 2 per $k = 0 \vee k = 4$; 3 per $0 < k < 4$]

90. (Liceo scientifico PNI 2007/2008) Siano *f* e *g* le funzioni definite, per ogni *x* reale, da $f(x) = 2^x$, $g(x) = x^2$. a) Si traccino i grafici di *f* e di *g* e si indichi con *A* la loro intersezione di ascissa negativa. b) Si calcoli, con uno dei metodi di approssimazione numerica studiati, l'ascissa di *A* con due cifre decimali esatte. c) Quanti e quali sono gli zeri della funzione $h(x) = 2^x - x^2$? Si tracci il grafico di *h* (*x*).

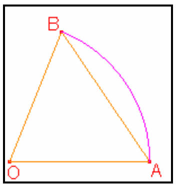
[b) –0,76; c) 3 zeri; – 0,76; 2; 4]

91. (Liceo scientifico PNI 2008/2009) Sia $f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}\right)\cdot e^{-x}$, dove *n* è un intero positivo e

$x \in \mathbb{R}$. a) Si verifichi che la derivata di $f(x)$ è: $f'(x) = -\frac{x^n}{n!} \cdot e^{-x}$. b) Si dica se la funzione f ammette massimi e minimi (assoluti e relativi) e si provi che, quando n è dispari, $f(x) \leq 1$ per ogni x reale. c) Si studi la funzione g ottenuta da f quando $n = 2$ e se ne disegni il grafico.

[b) In $x = 0$ vi è massimo per n dispari, flesso per n pari; c) $F \equiv (0; 1)$]

92. (Liceo scientifico 2008/2009) Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si tracci il grafico G_f della funzione $f(x) = ln(x)$. a) Sia A il punto d'intersezione con l'asse y della tangente a G_f in un suo punto P. Sia B il punto d'intersezione con l'asse y della parallela per P all'asse x. Si dimostri che, qualsiasi sia P, il segmento AB ha lunghezza costante. Vale la stessa proprietà per il grafico G_g della funzione $g(x) = \log_a(x)$ con a reale positivo diverso da 1? b) Sia δ l'inclinazione sull'asse x della retta tangente a G_g nel suo punto di ascissa 1. Per quale valore della base a è $\delta = 45°$? E per quale valore di a è $\delta = 135°$? [a) $AB = 1$ per G_f e $\log_a(e)$ per G_g; b) $a = e^{-1}$; $a = e$]

93. (Liceo scientifico 2008/2009) È assegnato il settore circolare AOB di raggio r e ampiezza x (r e x sono misurati, rispettivamente, in *metri* e *radianti*). 

a) Si provi che l'area S compresa fra l'arco e la corda AB, in funzione di x, è $S(x) = \frac{1}{2} r^2 \cdot [x - sin(x)]$, con $x \in [0; 2\pi]$. b) Si studi come varia $S(x)$ e se ne disegni il grafico (posto $r = 1$). c) Si fissi l'area del settore AOB pari a 100 m². Si trovi il valore di r per il quale è minimo il perimetro del settore AOB e si esprima il corrispondente valore di x in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).

[b) Funzione sempre crescente con un flesso per $x = \pi$; c) Minimo per $r = 10$ e $x \approx 114{,}59°$]

94. (Liceo scientifico PNI 2008/2009) In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3 + kx$, con k parametro reale. a) Si dica come varia il grafico di f al variare di k (k positivo, negativo o nullo). b) Sia $g(x) = x^3$ e γ il suo grafico. Si dimostri che γ e la retta di equazione $y = 1 - x$ hanno un solo punto P in comune. Si determini l'ascissa di P approssimandola a meno di 0,1 con un metodo iterativo.

[a) $k > 0$, f sempre crescente. $k = 0$, O è un flesso. $k < 0$ ci sono due estremi relativi; b) $x_P \approx 0{,}6$]

95. (Liceo scientifico 2010/2011) Un serbatoio ha la stessa capacità del cilindro di massimo volume inscritto in una sfera di raggio 60 *cm*. Qual è la capacità in litri del serbatoio? [≈ 522]

96. (Liceo scientifico 2010/2011) Si considerino le funzioni f e g definite, da: $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = sin(\pi x)$, per tutti gli x reali. Fissato un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy si studino le funzioni f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f, G_g. Si calcolino le ascisse dei punti di intersezione di G_f con la retta $y = -3$. Successivamente si considerino i punti di G_g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo [–6; 6] e se ne indichino le coordinate.

$$\left[\left(-\frac{11}{2};1\right),\left(-\frac{9}{2};-1\right),\ldots,\left(-\frac{3}{2};1\right),\left(-\frac{1}{2};1\right),\ldots,\left(\frac{11}{2};-1\right)\right]$$

97. (Liceo scientifico PNI 2010/2011) Sia f la funzione definita sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali da $f(x) = x + ln(4) + \frac{2}{e^x + 1}$ e sia Γ la sua rappresentazione grafica nel sistema di riferimento Oxy. Si provi che, per tutti gli x reali, è: $f(x) = x + 2 + ln(4) - \frac{2e^x}{e^x + 1}$. Si provi altresì che la retta r di equazione $y = x + ln(4)$ e la retta di equazione $y = x + 2 + ln(4)$ sono asintoti di Γ e che Γ è interamente compresa nella striscia piana delimitata da r e da s.

98. (Liceo scientifico PNI 2010/2011) Per il progetto di una piscina, un architetto si ispira alle funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da: $f(x) = x^3 - 16x$, $g(x) = sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. Si studino le funzioni f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy. Si considerino i punti del grafico g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo [–10; 10] e se ne

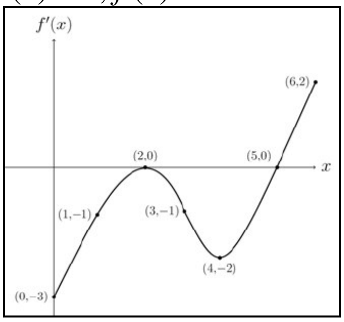
indichino le coordinate. [(–9; –1), (–7; 1), (–5; –1), (–3; 1), (–1; –1), (1; 1), (3; –1), (5;1), (7;–1), (9;1)]

99. (Liceo scientifico 2010/2011) Si studi su $\mathbb{R}$ la funzione $f(x)=(x-1)e^{-\frac{x}{3}}+3$ e se ne tracci il grafico Γ nel sistema di riferimento *Oxy*. $\left[y = 3\ (Dx);\ x_M = 4;\ x_F = 3+6e^{-\frac{7}{3}}\right]$

100. (Liceo scientifico 2011/2012) Siano *f* e *g* le funzioni definite, per tutti gli *x* reali, da $f(x) = |27x^3|$ e $g(x)=sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$. Qual è il periodo della funzione *g*? Si studino *f* e *g* e se ne disegnino i rispettivi grafici G*f* e G*g* in un conveniente sistema di riferimento cartesiano *Oxy*. $\left[\frac{4}{3}\right]$

101. (Liceo scientifico PNI 2011/2012) Si dimostri che la curva di equazione $y = x^3 + ax + b$ ha uno ed un solo punto di flesso rispetto a cui è simmetrica. $[F \equiv (0; b)]$

102. (Liceo scientifico PNI 2011/2012) Della funzione *f*, definita per $0 \le x \le 6$, si sa che è dotata di derivata prima e seconda e che il grafico della sua derivata $f'(x)$, disegnato di seguito, presenta due tangenti orizzontali per $x = 2$ e $x = 4$. Si sa anche che $f(0) = 9$, $f(3) = 6$, $f(5) = 3$. Si trovino le ascisse

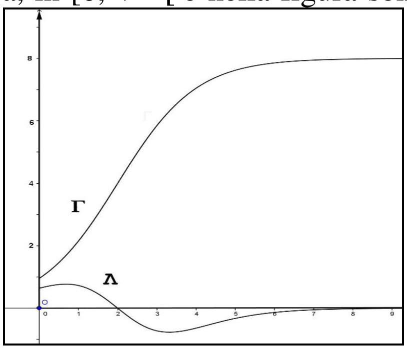


dei punti di flesso di *f* motivando le risposte in modo esauriente. [2; 4]

103. (Liceo scientifico PNI 2011/2012) Siano *f* e *g* le funzioni $f(x) = e^x$ e $g(x) = ln(x)$. a) Fissato $x_0 > 0$, si considerino le rette *r* e *s* tangenti ai grafici di *f* e di *g* nei rispettivi punti di ascissa x_0. Si dimostri che esiste un solo x_0 per il quale *r* e *s* sono parallele. Di tale valore x_0 si calcoli un'approssimazione arrotondata ai centesimi. b) Sia $h(x) = f(x) - g(x)$. Per quali valori di *x* la funzione $h(x)$ presenta, nell'intervallo chiuso $\frac{1}{2} \le x \le 1$, il minimo e il massimo assoluti? Si illustri il ragionamento seguito.

[a) circa 0,56; b) $x_m = h(x_0)$; $x_M = h(1) = e$]

104. (Liceo scientifico PNI 2012/2013) Una funzione $f(x)$ è definita e derivabile, insieme alle sue derivate prima e seconda, in $[0, +\infty[$ e nella figura sono disegnati i grafici Γ e Λ di $f(x)$ e della sua derivata seconda $f''(x)$.



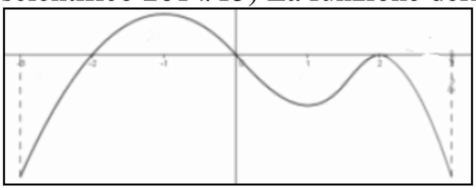
La tangente a Γ nel suo punto di flesso, di coordinate (2; 4), passa per (0; 0), mentre le rette $y = 8$ e $y = 0$ sono asintoti orizzontali per Γ e Λ, rispettivamente. 1) Si dimostri che la funzione $f'(x)$, ovvero la derivata prima di $f(x)$, ha un massimo e se ne determinino le coordinate. Sapendo che per ogni *x* del dominio è: $f''(x) \le f'(x) \le f(x)$, qual è un possibile andamento di $f'(x)$? [(2; 2)] 2) Si supponga che $f(x)$ costituisca, ovviamente in opportune unità di misura, il modello di crescita di un certo tipo di popolazione. Quali informazioni sulla sua evoluzione si possono dedurre dai grafici in figura e in particolare dal fatto che Γ presenta un asintoto orizzontale e un punto di flesso? 3) Se Γ è il grafico della funzione $f(x)=\frac{a}{1+e^{b-x}}$, si provi che $a = 8$ e $b = 2$.

105. (Liceo scientifico 2012/2013) Sia f la funzione definita, per tutti gli x reali, da $f(x)=\dfrac{8}{4+x^2}$. a) Si studi f e se ne disegni il grafico Φ in un sistema di coordinate cartesiane Oxy. Si scrivano le equazioni delle tangenti a Φ nei punti $P \equiv (-2;\ 1)$ e $Q \equiv (2;\ 1)$ e si consideri il quadrilatero convesso che esse individuano con le rette OP e OQ. Si provi che tale quadrilatero è un rombo e si determinino le misure, in gradi e primi sessagesimali, dei suoi angoli. b) Sia Γ la circonferenza di raggio 1 e centro in (0; 1). Una retta t, per l'origine degli assi, taglia Γ oltre che in O in un punto A e taglia la retta d'equazione $y = 2$ in un punto B. Si provi che, qualunque sia t, l'ascissa x di B e l'ordinata y di A sono le coordinate $(x;\ y)$ di un punto di Φ. [a) $y=\pm\dfrac{1}{2}x+2$; $\approx 53°7'48''$, $\approx 126°52'12''$]

106. (Liceo scientifico 2012/2013) Si considerino, nel piano cartesiano, i punti $A \equiv (2;\ -1)$ e $B \equiv (-6;\ -8)$. Si determini l'equazione della retta passante per B e avente distanza massima da A. [$8x + 7y + 104 = 0$]

107. (Liceo scientifico PNI 2012/2013) Sia f la funzione definita per tutti gli x positivi da $f(x) = x^3\, ln(x)$. 1. a) Si studi f e si tracci il suo grafico γ su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali e monometrici Oxy; accertato che γ presenta sia un punto di flesso che un punto di minimo se ne calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ascisse arrotondate alla terza cifra decimale. b) Sia P il punto in cui γ interseca l'asse x. Si trovi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, passante per l'origine e tangente a γ in P. c) Si disegni la curva simmetrica di γ rispetto all'asse y e se ne scriva altresì l'equazione. Similmente si faccia per la curva simmetrica di γ rispetto alla retta $y = -1$.
[a) $x_m \approx 0{,}716$; $x_F \approx 0{,}434$; b) $y = x^2 - x$; c) $-x^3 ln(-x)$; $-x^3\, ln(x) - 2$]

108. (Liceo scientifico PNI 2012/2013) Si stabilisca per quali valori $k \in R$ l'equazione $x^2\,(3 - x) = k$ ammette due soluzioni distinte appartenenti all'intervallo [0, 3]. Posto $k = 3$, si approssimi con due cifre decimali la maggiore di tali soluzioni, applicando uno dei metodi iterativi studiati.
[$0 < k < 4$; $\approx 2{,}532$]

109. (Liceo scientifico 2014/15) La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3;3]$, il grafico Γ disegnato in figura.  Γ presenta le tangenti orizzontali per $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. a) Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito. b) Individua i valori di $x \in [-3;\ 3]$, per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di x per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.
[a) 4; b) $x_M = 0$; $(-3; -1)$ e in $(1; 2)$]

110. (Liceo scientifico 2015/16) Si stabilisca se la seguente affermazione è vera o falsa, giustificando la risposta: "Esiste un polinomio $P(x)$ tale che: $|P(x) - cos(x)| \le 10^{-3}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$". Suggerimento: si consideri lo sviluppo di Taylor della funzione $cos(x)$. [No]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.

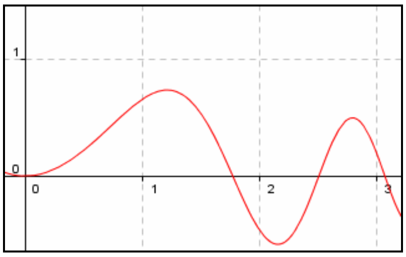
CEEB = College Entrance Examination Board
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest
RICE = Rice University Mathematics Tournament

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato nel 2004 al CEEB. *Il flusso del traffico è definito come il tasso a cui le macchine passano attraverso un incrocio, misurato in numero di macchine al minuto. In un particolare incrocio il flusso di traffico è modellizzato dalla seguente funzione*: $F(t) = 82 + 4 \cdot sin\left(\frac{t}{2}\right)$, con $0 \le t \le 30$. *t è misurato in minuti. Vogliamo sapere se al minuto 7 il traffico è in aumento o in diminuzione, rispetto ai minuti precedenti.*

Avendo una funzione continua e derivabile la crescenza o decrescenza è determinata dalla sua derivata prima: $F'(t) = 2 \cdot cos\left(\frac{t}{2}\right)$, quindi $F'(7) = 2 \cdot cos(3,5) < 0$. Quindi siamo in un momento di diminuzione del traffico.

1. (CEEB 2004) Una particella si muove lungo l'asse y ad una velocità $v(t) = 1 - tan^{-1}\left(e^t\right)$. Nell'istante $t = 0$ s la particella di trova a $y = -1$. Si vuol sapere: l'accelerazione della particella al tempo $t = 2$ s; in questo istante la velocità è in aumento o in diminuzione? In quale istante la particella raggiunge la massima altezza? [$\approx -0,132$; aumenta; $\approx 0,44$ s]
2. (CEEB 2005) Una particella si muove lungo l'asse x ad una velocità $v(t) = ln\left(t^2 - 3t + 3\right), 0 \le t \le 5$. Nell'istante $t = 0$ s la particella di trova a $x = 8$. Si vuol sapere: l'accelerazione della particella al tempo $t = 4$ s; determinare inoltre tutti gli istanti, in (0, 5), in cui la particella cambia direzione e gli intervalli in cui viaggia verso sinistra. $\left[\frac{5}{7}\right.$; $1 \vee 2$; (1; 2)]
3. (CEEB 2006) Sia una funzione $f(x)$ definita per $x \ge 0$, con $f(0) = 5$ e la cui derivata è $f'(x) = e^{-\frac{x}{4}} \cdot sin\left(x^2\right)$, il cui grafico è il seguente.



Usando tale grafico stabilire la concavità della funzione $f(x)$ in (1,7; 1,9). Determinare poi il valore di x in [0; 3] in cui la f ha un massimo assoluto. [(1,7; 1,9); $\sqrt{\pi}$]
4. (HSMC 2009) Sia $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, si ha $f(2) = -3$ e $f'(2) = 0$, ma 2 non è un estremo relativo. Determinare $a + b + c$. [–5]
5. (Rice 2010) Determinare i massimi di $f(x) = \left|\frac{3x+1}{9x^2+6x+2}\right|$. $\left[x = 0 \vee x = \frac{2}{3}\right]$
6. (Rice 2010) Determinare il minimo di $e^x - x - \frac{x^3}{3}$. [1]

Questions in English

Working together

This is a question assigned at HSMC, in 2003.
Find the point on the line $3x + 4y = 10$ *which is closest to the origin.*
Let $(x; y)$ be the point of minimum distance. We seek to minimize $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ which occurs where $D = d^2 = x^2 + y^2$ is a minimum. Since $3x + 4y = 10$ then $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$ and

$$D = x^2 + \left(-\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow D' = 2x + 2\cdot\left(-\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) = 0 \Rightarrow \frac{25}{16}x - \frac{15}{8} = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{5}$$

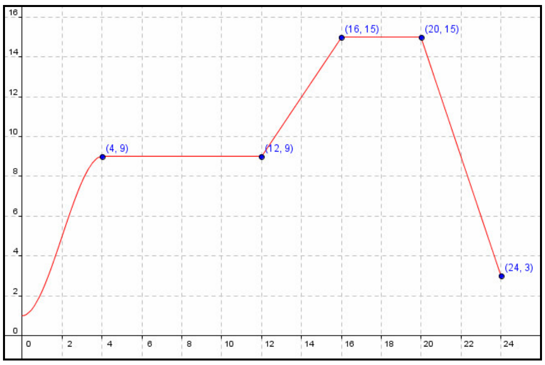
So $y = -\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5} + \frac{5}{2} = \frac{8}{6}$. The point is $\left(\frac{6}{5}; \frac{8}{5}\right)$.

7. (HSMC 2001) Find the x coordinate of the point on the curve $xy = 8$ and in the first quadrant that is closest to the point $(3; 0)$. [4]
8. (HSMC 2002) Suppose that the greatest possible value of $2 \cdot sin(x) + 3 \cdot cos(x)$ (for $x \in [0; 2\pi)$) is M, and a is a real number such that $2 \cdot sin(a) + 3 \cdot cos(a) = M$. (So the quantity $2 \cdot sin(x) + 3 \cdot cos(x)$ is maximized at $x = a$.) Compute $tan(a)$. $\left[\frac{2}{3}\right]$
9. (CEEB 2004) For $0 \leq t \leq 31$, the rate of change of the number of mosquitoes on Tropical Island at time t days is modeled by $5\cdot\sqrt{t}\cdot cos\left(\frac{t}{5}\right)$ mosquitoes per day. There are 1000 mosquitoes on Tropical Island at time $t = 0$. Show that the number of mosquitoes is increasing at time $t = 6$. At time $t = 6$, is the number of mosquitoes increasing at an increasing rate, or is the number of mosquitoes increasing at a decreasing rate? Give a reason for your answer. [Decreasing]
10. (CEEB 2005) Let f be a function that is continuous on the interval [0, 4). It is also twice differentiable except at $x = 2$. f and its derivatives have the properties indicated in the following table, where DNE means that the derivative doesn't exist. For $0 < x < 4$, find all values of x at which f has a relative extremum. Determine whether f has a relative maximum or a relative minimum at each of these values.

x	0	$0 < x < 1$	1	$1 < x < 2$	2	$2 < x < 3$	3	$3 < x < 4$
$f(x)$	– 1	< 0	0	> 0	2	> 0	0	< 0
$f'(x)$	4	> 0	0	> 0	DNE	< 0	– 3	< 0
$f''(x)$	– 2	< 0	0	> 0	DNE	< 0	0	> 0

[Maximum at $x = 2$]

11. (HSMC 2006) A square has its base on the x–axis and one vertex on each branch of the curve $y = \frac{54}{x^2}$. What is the area of the square? [36]
12. (CEEB 2006) The rate, in calories per minute, at which a person using a exercise machine burns calories is modeled by the function $f(t) = -\frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 1$ for $0 \leq t \leq 4$ and f is piecewise linear for $4 \leq t \leq 24$ as in the following graph.



Find $f'(22)$. For the time interval $0 \leq t \leq 24$, at what time t is f increasing at its greatest rate? [3 cal/*min*; $t = 2$]

13. (Rice 2009) Find the shortest distance between the point (6;12) and the parabola given by the equation $x = \frac{1}{2} y^2$. $\left[2 \cdot \sqrt{17}\right]$

14. (Rice 2010) A rectangular pyramid tower is being built on a circular island of radius two. The height of the tower is equal to its width. What is the maximum volume of the tower? $\left[\frac{128}{27} \cdot \sqrt{3}\right]$

15. (Rice 2010) Let $f(x) = x^6 - 6x^2 + 6x - 7$. It is known that this polynomial has three critical points. Find the parabola passing through these critical points. [$y = -4x^2 + 5x - 7$]

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_5_10.htm

11. L’integrazione

11.1 Integrazione indefinita

Prerequisiti

- Trinomio ed equazione di II grado
- Polinomi, regola e teorema di Ruffini
- Formule goniometriche
- Concetto di area di una figura piana
- Concetto di limite
- Continuità di una funzione
- Il calcolo differenziale

Obiettivi

- Comprendere il significato dell’integrale come antiderivata
- Sapere risolvere semplici integrali
- Conoscere i metodi di integrazione più diffusi
- Sapere operare una trasformazione per il calcolo di un integrale

Contenuti

- L’integrale come area di un trapezoide
- L’operatore inverso della derivata
- Integrazione per parti
- Integrazione di funzioni razionali fratte
- Integrazione per sostituzione

Parole chiave

Esaustione – Integrale – Integrando – Plurirettangoli inscritti e circoscritti – Primitiva
Somma inferiore e Somma superiore – Trapezoide

Richiamiamo le conoscenze

Ricordiamo un importante risultato che ci servirà per trattare al meglio alcuni argomenti di questa unità.

Un trinomio di secondo grado è un polinomio $ax^2 + bx + c$, a esso associamo un numero che viene chiamato delta o discriminante del trinomio: $\Delta = b^2 - 4ac$. Allora valgono i seguenti fatti:

- Se $\Delta > 0$ esistono due numeri reali distinti x_1 e x_2, per cui possiamo scrivere:
$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$
- Se $\Delta = 0$ il trinomio è un quadrato di binomio: $ax^2 + bx + c = \left(\frac{2ax+b}{2\sqrt{|a|}}\right)^2$
- Se $\Delta < 0$ il trinomio può scriversi come somma di due quadrati:
$$ax^2 + bx + c = \left(\sqrt{|a|} \cdot x + \frac{b}{2 \cdot \sqrt{|a|}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{4ac - b^2}{4|a|}}\right)^2$$

Concludiamo enunciando un fondamentale risultato.

Principio di identità dei polinomi
Due polinomi sono uguali se e solo se hanno lo stesso grado e, ordinatamente, gli stessi coefficienti.

L'integrale come area di un trapezoide

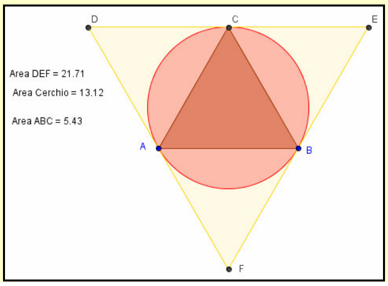
Il problema

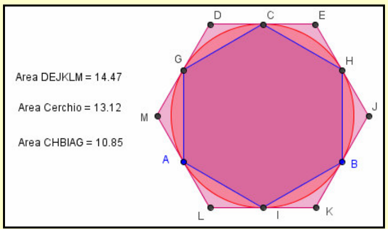
Sappiamo calcolare le aree di alcuni poligoni, regolari o no. Con metodi di approssimazione, come la reticolazione o la suddivisione in triangoli, siamo in grado di calcolare l'area di un generico poligono. Sappiano calcolare anche l'area di qualche figura a contorno non rettilineo come quella del cerchio e di alcune sue parti. Ci chiediamo se possiamo calcolare aree di generiche figure a contorno curvilineo.

Ricordiamo come Archimede, nel III secolo a.C., fornì un metodo per il calcolo dell'area del cerchio, che condusse poi alla famosa approssimazione del numero $\pi \approx 3{,}14$. Nel successivo esempio illustriamo l'idea del grande scienziato siracusano.

Esempio 1

Archimede cominciò ad inscrivere e circoscrivere in un cerchio un triangolo equilatero. Come si vede nella prima delle figure seguenti, e come è ovvio, l'area del triangolo inscritto è un valore approssimato per difetto dell'area del cerchio, mentre quella del triangolo circoscritto è un'approssimazione per eccesso. Se dividiamo in due gli archi possiamo inscrivere e circoscrivere degli esagoni regolari. Ovviamente i valori così ottenuti sono "migliori" rispetto ai precedenti, poiché è aumentata la parte di area che cerchio ed esagono inscritto hanno in comune ed è diminuita la parte di area che cerchio ed esagono circoscritto non hanno in comune. Archimede continuò il procedimento fino a poligoni di 96 lati.





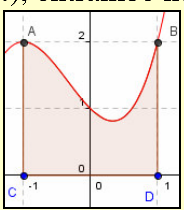
Se continuassimo all'infinito la procedura di Archimede troveremmo l'esatto valore dell'area del cerchio, che può quindi considerarsi come un poligono regolare di infiniti lati, ciascuno dei quali ha misura infinitesima. Proprio partendo da queste considerazioni possiamo estendere il metodo archimedeo per il calcolo di particolari figure che andiamo a definire.

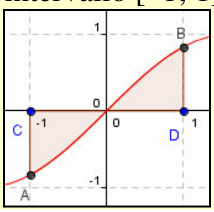
Definizione 1

Data una funzione continua in un intervallo $[a; b]$, diciamo **trapezoide di basi $f(a)$ ed $f(b)$ e altezza $[a; b]$**, la parte di piano delimitata dalla funzione $f(x)$, dall'asse delle x e dai segmenti condotti perpendicolarmente all'asse x dai punti $(a; f(a))$ e $(b; f(b))$

Esempio 2

Nelle figure consideriamo prima il trapezoide determinato dalla funzione $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ e poi quello determinato dalla funzione $f(x) = sin(x)$, entrambe nell'intervallo $[-1; 1]$.

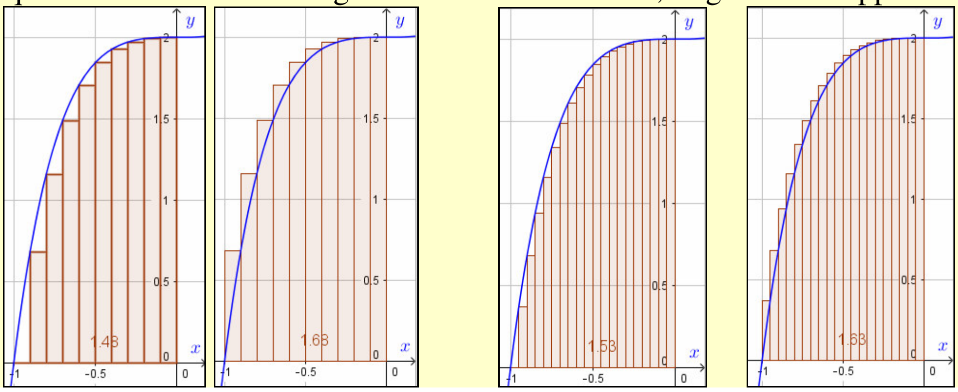




Vediamo allora di adattare il procedimento esaustivo per il calcolo delle aree dei trapezoidi.

Esempio 3

Per comodità consideriamo una funzione crescente in un intervallo, ma ovviamente quanto vedremo può ripetersi anche per funzioni non monotòne. Dividiamo l'intervallo in un certo numero di parti uguali, per esempio 4, e inscriviamo dei rettangoli, come mostrato in figura. Questi forniranno un valore approssimato per difetto dell'area del trapezoide. Analogamente possiamo considerare dei rettangoli circoscritti, la somma delle cui aree fornirà invece un valore approssimato per eccesso. Anche in questo caso aumentare il numero di suddivisione e quindi il numero di rettangoli inscritti e circoscritti, migliorerà le approssimazioni.



Tenuto conto di quanto visto sopra poniamo qualche definizione.

Definizione 2

- Diciamo **partizione** di un intervallo $[a; b]$, un insieme di numeri reali: $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tale che si abbia $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.
- Chiamiamo **ampiezza della partizione** la misura del più grande degli intervalli in cui la partizione stessa suddivide $[a; b]$.
- Una partizione si dice **regolare** se tutti i suoi intervalli hanno uguale ampiezza, cioè se si ha: $(x_1 - x_0) = (x_2 - x_1) = (x_3 - x_2) = \ldots = (x_n - x_{n-1}) = \dfrac{b-a}{n}$.

Definizione 3

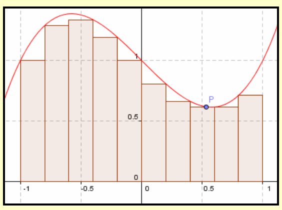
Data una funzione $f(x)$ continua e limitata in un intervallo $[a; b]$ e P una partizione di $[a; b]$. Indichiamo con I_i l'inf della funzione nell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ e con S_i il sup della funzione nell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$. Allora

- l'unione dei rettangoli di vertici $(x_i; 0)$, $(x_i; I_i)$, $(x_{i+1}; I_i)$, $(x_{i+1}; 0)$, $0 \le i \le n - 1$, si chiama **plurirettangolo inscritto**, la somma delle sue aree si chiama **somma inferiore**;
- l'unione dei rettangoli di vertici $(x_i; 0)$, $(x_i; S_i)$, $(x_{i+1}; S_i)$, $(x_{i+1}; 0)$, $0 \le i \le n - 1$, si chiama **plurirettangolo circoscritto**, la somma delle sue aree si chiama **somma superiore**.

Vediamo di capire perché abbiamo considerato inf e sup della funzione nei dati intervalli.

Esempio 4

Non è detto che le funzioni siano tutte monotòne, quindi non sempre i plurirettangoli inscritti o circoscritti hanno altezza pari all'ordinata di uno degli estremi. Per esempio nel caso della funzione in figura osserviamo che il punto P, che fa parte di un intervallo in cui la funzione passa dalla decrescenza alla crescenza, non coincide con nessuno degli estremi della funzione nell'intervallo, ma è l'inf (in effetti il minimo) della funzione nello stesso intervallo.



Teorema 1

Data una funzione $f(x)$ continua e positiva in un intervallo $[a; b]$ e una successione infinita di sue partizioni regolari: $\{P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots\}$, in cui l'indice stabilisce il numero di elementi della partizione. Indicate con s_n la successione delle somme inferiori e con S_n quella delle somme superiori, entrambe relative alla partizione P_n. Allora si ha: $\lim\limits_{n\to\infty} s(n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(n) \in \mathbb{R}$.

Non dimostriamo il teorema, ma esprimiamo la somma inferiore e superiore per una partizione regolare. Facilmente si ha: $s(n) = \frac{b-a}{n} \cdot [I_0 + I_1 + \ldots + I_n] = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} I_i ; S(n) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=o}^{n-1} S_i$.

In vista del precedente risultato poniamo la seguente definizione.

Definizione 4

Data una funzione $f(x)$ continua e positiva in un intervallo $[a; b]$, diciamo **integrale secondo Riemann di *f*(*x*) esteso all'intervallo [*a*; *b*]**, il limite comune alle successioni delle sue somme inferiori e superiori.

Notazione 1

L'integrale secondo Riemann di una funzione $f(x)$, si indica con il simbolo $\int_a^b f(x)\, dx$ e si legge *integrale di f esteso all'intervallo* [*a*; *b*] *in de x*.

Abbiamo dato la definizione di *integrale definito* solo per funzioni positive poiché vogliamo associare a esso il concetto di area, quindi se avessimo una funzione che assume anche valori negativi qualcuno degli addendi delle somme inferiore o superiore potrebbero essere negativi. Nella successiva unità forniremo una definizione più generale.

L'angolo storico

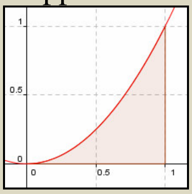
- **Il procedimento di esaustione** è detto così per via del fatto che esso tende a "esaurire" l'area di una figura inscrivendo in essa altre figure delle quali è nota l'area. Esso è detto di Eudosso–Archimede, poiché è stato enunciato per la prima volta da Eudosso di Cnido (408 a. C. – 355 a. C.) ed è stato poi ampiamente usato da Archimede (287 a.C. – 212 a.C.) per molte delle sue più importanti dimostrazioni, da quella che ha condotto alla determinazione del primo valore approssimato del numero π, alla determinazione del volume della piramide, della sfera e via dicendo. Vi è da dire però che la prima idea di inscrivere dei poligoni in un cerchio per determinarne l'area è dovuta al sofista Antifone vissuto nel V secolo a.C., mentre un altro sofista, Brisone (attivo nel 450 a.C.), pensò di migliorare l'approssimazione circoscrivendo dei poligoni.
- Un simbolo molto simile all'attuale, che altri non è se non una S stilizzata e vuole appunto indicare il fatto che l'integrale è una somma, è dovuto a Leibniz e si trova in un suo manoscritto del 29 Ottobre 1675. Scrivendo $\int l$ egli sostituiva la scritta fino ad allora usata: *omn l* che significava somma di ogni *l* (*omn* sta per il latino *omnia*). Lo stesso autore usò questo simbolo in lavori a stampa solo 11 anni più tardi.
- Il simbolo *dx* che indica l'ampiezza infinitesima della base dei plurirettangoli, e contemporaneamente la variabile rispetto cui avviene la somma infinita, si trova per la prima volta in un'opera di William R. Hamilton del 1858.

I protagonisti

 **Georg Friedrich Bernhard Riemann** nacque il 17 Settembre 1826 a Breselenz in Germania. Dopo avere intrapreso studi di Teologia, si interessò di matematica che cominciò a studiare con ottimi risultati, conseguendo prima la laurea e poi il dottorato sotto la guida del grande Gauss. Ottenne importanti risultati in quasi tutti i campi della matematica e della fisica. A lui è dovuto il primo esempio di geometria non euclidea di tipo ellittico o, come adesso si dice, riemanniano, in cui non esistono rette parallele. Ma ottenne anche importanti risultati di cui si giovò in seguito Einstein per la sua Teoria della Relatività. Alla fine del 1862 si ammalò di tubercolosi e per curarla passò l'inverno in Sicilia. Rientrato in Germania si ammalò di nuovo e passò i due anni successivi in Italia. Nonostante il clima le sue condizioni non migliorarono e morì il 20 Luglio 1866 a Selasca, una località sul Lago maggiore.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare un valore approssimato del trapezoide determinato dalla parabola $y = x^2$ e dall'intervallo [0; 1], mostrato in figura. 

Cominciamo a dividere [0; 1] in 10 parti uguali, ciascuno di ampiezza $\frac{1}{10}$. Avremo quindi che la somma inferiore sarà

$$s(10) = \frac{1}{10}\cdot\left[f(0) + f\left(\frac{1}{10}\right) + f\left(\frac{2}{10}\right) + ... + f\left(\frac{9}{10}\right)\right] = \frac{1}{10}\cdot\left[0 + \frac{1}{100} + \frac{4}{100} + ... + \frac{81}{100}\right] =$$

$$= \frac{1}{10}\cdot\left[\frac{1+4+9+16+...+81}{100}\right] = \frac{57}{200} = 0,285; S(10) = \frac{1}{10}\cdot\left[\frac{1}{100} + \frac{4}{100} + ... + \frac{81}{100} + 1\right] = \frac{77}{200} = 0,385.$$

Quindi possiamo dire che si ha: $0,285 < \int_0^1 x^2\ dx < 0,385$. Vedremo che il valore esatto è $\frac{1}{3} \approx 0,333$.

Inscrivendo e circoscrivendo* 10 *plurirettangoli, determinare dei valori approssimati per difetto e per eccesso delle aree dei seguenti integrali definiti. Nelle risposte indichiamo con I il valore esatto.

***Livello* 1**

1. $\int_0^1 x\ dx$; $\int_0^2 x^2\ dx$; $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$; $\int_{-2}^{-1} x^2\ dx$

[(0,9 < I < 0,11) ; (2,28 < I < 3,08) , (0,67 < I < 0,72) ; (2,18 < I < 2,49)]

2. $\int_0^2 x^3\ dx$; $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2}\ dx$; $\int_{-3}^{-2} \frac{x^2+1}{x^2}\ dx$; $\int_{-1}^{2} \frac{x^2}{x^2+1} dx$

[(3,24 < I < 4,84) ; (0,47 < I < 0,54) ; (1,16 < I < 1,17) ; (0,92 < I < 1,3)]

***LIvello* 2**

3. $\int_0^{\pi/2} sin(x)\ dx$; $\int_1^3 ln(x)\ dx$; $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx$; $\int_{-1}^{2} e^x\ dx$

[(0,92 < I < 1,08) ; (1,18 < I < 1,4) ; (0,73 < I < 0,83) ; (6,02 < I < 8,13)]

L'operatore inverso della derivata

La Natura sorride delle difficoltà dell'integrazione.
Pierre Simon de Laplace

Il problema

Il problema posto nel paragrafo precedente non è stato del tutto risolto, dato che calcolare una certa area con la procedura teorica delle somme inferiori e superiori, è in pratica molto complesso e lungo. Dobbiamo quindi determinare una procedura più semplice.

Abbiamo bisogno di una nuova definizione.

Definizione 5

Data una funzione $f(x)$ continua in un intervallo $[a; b]$, sia x_0 un elemento fissato di $[a; b]$ e x un elemento variabile di $[a; b]$. La funzione $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$ si chiama **funzione integrale di $f(x)$**.

Osserviamo che la definizione precedente è coerente poiché, comunque scegliamo x_0 e x in $[a; b]$ l'integrale esiste ed è un numero, grazie al Teorema 1. Possiamo adesso enunciare un altro risultato che non dimostriamo.

Teorema 2 (Fondamentale del calcolo integrale)

Data una funzione $f(x)$ continua in un intervallo $[a; b]$, allora la funzione integrale $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$ è derivabile in $[a; b]$ e si ha: $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a; b]$.

Esempio 5

Consideriamo la funzione $f(x) = sin(x)$ che è continua in ogni intervallo, e la consideriamo in $[0; 1]$. La sua funzione integrale relativa a tale intervallo è $F(x) = \int_{x_0}^{x} sin(t)\, dt$, per il Teorema 2 è $F'(x) = sin(x)$. Quindi vuol dire che la funzione integrale è tale che la sua derivata è $sin(x)$. Ma noi conosciamo una funzione la cui derivata è $sin(x)$, cioè $(-cos(x))$. Possiamo quindi dire che $F(x) = -cos(x)$? Se così fosse abbiamo trovato un metodo per calcolare gli integrali definiti e quindi le aree dei trapezoidi.

Per risolvere la questione sollevata nell'esempio precedente, cominciamo a porre una definizione.

Definizione 6

Una funzione $f(x)$ derivabile e tale che si abbia $f'(x) = F(x)$ si dice **funzione primitiva o antiderivata** di $F(x)$. Ogni funzione dotata di primitive in un insieme X si dice **integrabile in X**.

Noi sappiamo che le funzioni $f(x)$ e $f(x) + c$, con c numero reale qualsiasi, se sono derivabili hanno la stessa derivata. Quindi possiamo enunciare il seguente ovvio risultato.

Teorema 3

Ogni funzione continua $F(x)$ in un insieme X è ivi dotata di infinite funzioni primitive, che si esprimono tutte nella forma $f(x) + c$, con c numero reale qualsiasi.

Notazione 2

L'insieme delle primitive di una funzione $f(x)$ si indica con il simbolo $\int f(x)\, dx$ e si legge *integrale indefinito di $f(x)$ in de x.*

Esempio 6

Possiamo scrivere $\int sin(x)\, dx = -cos(x) + c$.

Possiamo cominciare a costruire facilmente una tabella di integrali indefiniti immediati, semplicemente invertendo l'ordine di lettura di un'analoga tabella di derivate che già conosciamo.

Corollario 1

Valgono le seguenti uguaglianze:

$$\int x^k\, dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c, k \neq -1; \int \frac{1}{x}\, dx = ln(x) + c; \int sin(x) dx = -cos(x) + c;$$

$$\int cos(x)\, dx = sin(x) + c; \int \frac{1}{cos^2(x)}\, dx = \int \left[tan^2(x) + 1\right] dx = tan(x) + c;$$

$$\int e^x\, dx = e^x + c; \int a^x\, dx = \frac{a^x}{ln(a)} + c; \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = sin^{-1}(x) + c; \int \frac{1}{x^2+1}\, dx = tan^{-1}(x) + c$$

Dimostrazione

Proviamo solo la prima. Noi sappiamo che $D(x^k) = k \cdot x^{k-1}$. Quindi deve essere $\int k \cdot x^{k-1}\, dx = x^k + c$, o, che è lo stesso, $\int (k+1) \cdot x^k\, dx = x^{k+1} + c$. D'altro canto noi sappiamo che possiamo dividere per una quantità non nulla un'uguaglianza senza che questa cambi, quindi se $k + 1 \neq 0$, cioè se $k \neq -1$, avremo quanto affermato nella tesi.

Esempio 7

Per il precedente risultato, possiamo dire che $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\, dx = \int x^{-\frac{5}{3}}\, dx = \frac{x^{-\frac{5}{3}+1}}{-\frac{5}{3}+1} + c = \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} + c = -\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} + c$.

Vale anche questo immediato risultato, la cui dimostrazione è lasciata per esercizio.

Teorema 4

Se $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ sono funzioni integrabili in un insieme X, e a_1, a_2, …, a_n sono numeri reali, allora anche $a_1 \cdot f_1(x) + a_2 \cdot f_2(x) + \ldots + a_n \cdot f_n(x)$, è integrabile in X e si ha:

$$\int \left[a_1 \cdot f_1(x) + a_2 \cdot f_2(x) + \ldots + a_n \cdot f_n(x)\right] dx = a_1 \cdot \int f_1(x)\, dx + a_2 \cdot \int f_2(x)\, dx + \ldots + a_n \cdot \int f_n(x)\, dx.$$

Esempio 8

Tenuto conto del precedente risultato possiamo dire che

$$\int \left[3 \cdot sin(x) + \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right] dx = 3 \cdot \int sin(x)\, dx + 4 \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -3 \cdot cos(x) + 4 \cdot sin^{-1}(x) + c.$$

Purtroppo non vale un analogo risultato al precedente per operazioni diverse dalla somma algebrica.

Esempio 9

Non è vero che $\int x \cdot e^x \; dx = \int x \; dx \cdot \int e^x \; dx = \frac{x^2}{2} \cdot e^x + c$.

Infatti si ha: $D\left(\frac{x^2}{2} \cdot e^x + c\right) = \frac{2x}{2} \cdot e^x + \frac{x^2}{2} \cdot e^x = \; = x \cdot e^x + \frac{x^2}{2} \cdot e^x$.

In seguito vedremo che non esiste neanche una regola per l'integrazione di prodotti o rapporti, a differenza di quel che invece accade per le derivate.
Possiamo però costruire una tabella di altri integrali immediati tenendo conto della regola di derivazione delle funzioni composte.

Esempio 10

Sappiamo che $D[e^{f(x)}] = e^{f(x)} \cdot f'(x)$, quindi possiamo dire che $\int e^{f(x)} \cdot f'(x) \; dx = e^{f(x)} + c$.

Quindi per esempio: $\int e^{3x+1} \cdot 3 \; dx = e^{3x+1} + c$.

Corollario 2

Valgono le seguenti uguaglianze:

$$\int f(x)^k \cdot f'(x) \; dx = \frac{f(x)^{k+1}}{k+1} + c, k \neq -1; \int \frac{f'(x)}{f(x)} \; dx = ln[f(x)] + c;$$

$$\int sin[f(x)] \cdot f'(x) dx = -cos[f(x)] + c; \int cos[f(x)] \cdot f'(x) \; dx = sin[f(x)] + c;$$

$$\int \frac{f'(x)}{cos^2[f(x)]} \; dx = \int [tan^2[f(x)] + 1] \cdot f'(x) \; dx = tan[f(x)] + c;$$

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) \; dx = e^{f(x)} + c; \int a^{f(x)} \cdot f'(x) \; dx = \frac{a^{f(x)}}{ln(a)} + c;$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}} \; dx = sin^{-1}[f(x)] + c; \int \frac{f'(x)}{f^2(x) + 1} \; dx = tan^{-1}[f(x)] + c$$

Dimostrazione per esercizio

Vediamo qualche applicazione dei precedenti risultati.

Esempio 11

- $\int 2x \cdot (x^2 - 2)^3 \; dx$, poiché $D(x^2 - 3) = 2x$, possiamo applicare la prima regola del corollario precedente scrivendo: $\int 2x \cdot (x^2 - 2)^3 \; dx = \frac{(x^2 - 2)^4}{4} + c$.
- $\int \sqrt[3]{4x + 1} \; dx$. La regola da applicare è ancora la prima, solo che manca la derivata di $4x + 1$. Quindi scriviamo: $\frac{1}{4} \cdot \int (4x + 1)^{\frac{1}{3}} \cdot D(4x + 1) dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{(4x + 1)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3} + 1} + c = \frac{1}{4} \cdot \frac{(4x + 1)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{16} \cdot \sqrt[3]{(4x + 1)^4} + c$.
- $\int \frac{2x + 7}{x^2 + 7x - 1} \; dx$. Si osserva che il numero è la derivata del denominatore, pertanto siamo nel secondo

caso del corollario e possiamo scrivere : $\int \frac{d\left(x^2+7x-1\right)}{x^2+7x-1} = ln\left(\left|x^2+7x-1\right|\right)+c$.

- $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$, dato che D($e^x$) = e^x, siamo nel penultimo caso, perciò: $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx = sin^{-1}\left(e^x\right)+c$.
- $\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$. Per il Teorema 4 possiamo scrivere $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$. Il secondo integrale è immediato, il primo non proprio. Infatti il numeratore non è *esattamente* la derivata del denominatore. Però possiamo sempre moltiplicare e dividere per una stessa quantità non nulla e quindi:
$$\frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + tan^{-1}(x)+c = \frac{1}{2}\cdot ln\left(x^2+1\right)+tan^{-1}(x)+c.$$

Nelle verifiche vedremo altri esempi.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare la derivata della funzione integrale $\int_1^{x^3+1} \frac{sin(t)}{t}\,dt$. Per il teorema 2, che possiamo applicare perché la funzione integranda è continua in [1, +∞[, abbiamo che la derivata coincide con la funzione integranda calcolata per $t = x^3 + 1$, cioè $D\left[\int_1^{x^3+1} \frac{sin(t)}{t}\,dt\right] = \frac{sin(x^3+1)}{x^3+1} \cdot D(x^3+1) = \frac{sin(x^3+1)}{x^3+1} \cdot 3x^2$.

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni integrali

Livello 1

1. $\int_5^x \frac{sin(t)}{t}\,dt$; $\int_{-2}^x \frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2+3}\,dt$; $\int_0^x \frac{ln(t)}{t^2+1}\,dt$: $\int_0^x \frac{\sqrt{t}+t}{cos(t)}\,dt$; $\int_{-\sqrt{2}}^x \frac{e^{2t}-t}{e^{3t}+t^2}\,dt$; $\int_1^x \frac{sin(t^2)}{tan^{-1}(t)}\,dt$
$\left[\frac{sin(x)}{x};\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+3};\frac{ln(x)}{x^2+1};\frac{\sqrt{x}+x}{cos(x)};\frac{e^{2x}-x}{e^{3x}+x^2};\frac{sin(x^2)}{tan^{-1}(x)}\right]$

Livello 2

2. $\int_2^{x^2} \frac{sin(t)}{t}\,dt$; $\int_0^{x^2+x} \frac{\sqrt{t}+t}{cos(t)}\,dt$; $\int_1^{2x+1} e^{-t^2+1}\,dt$ $\left[\frac{2\cdot sin(x^2)}{x};\frac{(2x+1)\cdot\left(\sqrt{x^2+x}+x^2+x\right)}{cos(x^2+x)};2\cdot e^{-4x^2-4x}\right]$

Livello 3

3. Usando il teorema di De l'Hôpital calcolare: $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x\cdot cos(x)}$, con $f(x)$ funzione continua per $x > 0$, tale che $f(0) = 1$. [1]
4. Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione $f(x) = \int_x^{x+1} sin(t)\,dt$. [$sin(x + 1) – sin(x)$]
5. Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione $f(x) = \int_{x^2}^{x^2+x} e^t\,dt, x > 1$. $\left[e^{x^2}\cdot\left(2xe^x+e^x-2x\right)\right]$

Lavoriamo insieme

Calcoliamo: $\int\left(7\sqrt[3]{x^4}-\frac{6}{x^7}+\frac{12}{\sqrt[3]{3x^7}}\right)dx$. Possiamo scrivere: $7\cdot\int x^{\frac{4}{3}}\,dx - 6\cdot\int x^{-7}\,dx + \frac{12}{\sqrt[3]{3}}\cdot\int x^{-\frac{7}{3}}dx$.

Applichiamo a ciascuno dei tre integrali la regola: $\int x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}+c$,

ottenendo: $7\frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} - 6\frac{x^{-7+1}}{-7+1} + \frac{12}{\sqrt[3]{3}}\cdot\frac{x^{-\frac{7}{3}+1}}{-\frac{7}{3}+1}+c = \cancel{7}\frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{\cancel{7}}{3}} - \cancel{6}\frac{x^{-6}}{-\cancel{6}} + \frac{\cancel{12}^{3}}{\sqrt[3]{3}}\cdot\frac{x^{-\frac{4}{3}}}{-\frac{\cancel{4}}{3}}+c = = 3\cdot\sqrt[3]{x^7}+\frac{1}{x^6}-\frac{9}{\sqrt[3]{3x^4}}+c$.

Calcolare i seguenti integrali indefiniti

Livello 1

6. $\int \sqrt[8]{x}\,dx$; $\int \sqrt[7]{x^2}\,dx$; $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}}dx$; $\int \frac{1}{x^{e+1}}dx$ $\left[\frac{8}{9}\cdot\sqrt[8]{x^9}+c;\frac{7}{9}\cdot\sqrt[7]{x^9}+c;\frac{4}{3}\cdot\sqrt[4]{x^3}+c;-\frac{1}{e\cdot x^e}+c\right]$

7. $\int \sqrt{2^x}\,dx$; $\int \frac{sin(2x)}{sin(x)}dx$; $\int \frac{x^2}{\sqrt{x}}dx$; $\int \sqrt[8]{\frac{3}{x}}\,dx$ $\left[\frac{2\cdot\sqrt{2^x}}{ln(2)}+c;2sin(x)+c;\frac{2}{5}\cdot\sqrt{x^5}+c;\frac{8\cdot\sqrt[8]{3x^7}}{7}+c\right]$

8. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}dx$; $\int \frac{2}{x}dx$; $\int \frac{sec(x)}{\sqrt{1-sin^2(x)}}dx$; $\int 2^{x+3}\,dx$ $\left[\frac{12}{17}\cdot\sqrt[12]{x^{17}}+c;ln(x^2)+c;tan(x)+c;\frac{2^{x+3}}{ln(2)}+c\right]$

Livello 2

9. $\int\left(\sqrt[3]{x^5}-\frac{7}{x^2}+\frac{9}{\sqrt[5]{2x^3}}\right)dx$; $\int\left(x^e-e^x+\frac{\pi}{\sqrt[3]{4x}}\right)dx$; $\int\left(\sqrt[3]{3x^4}-\frac{2}{3}\cdot sin(x)-\frac{3}{cos^2(x)}\right)dx$

$\left[\frac{3}{8}\cdot\sqrt[3]{x^8}+\frac{7}{x}+\frac{45\cdot\sqrt[5]{16x^2}}{4}+c;\frac{x^{e+1}}{e+1}-e^x+\frac{3\pi\cdot\sqrt[3]{2x^2}}{4}+c;\frac{2}{3}\cdot cos(x)-3\cdot tan(x)+\frac{9\cdot\sqrt[3]{3x^7}}{7}+c\right]$

10. $\int\left(\sqrt[5]{4}\cdot cos(x)-\frac{5}{x^2+1}+\frac{2}{\sqrt[3]{x^5}}\right)dx$; $\int\left(2\cdot\sqrt[3]{x}-\frac{17}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{2}{x}\right)dx$

$\left[\sqrt[5]{4}\cdot sin(x)-5\cdot tan^{-1}(x)-\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}+c;\frac{3\cdot\sqrt[3]{x^4}}{2}-17\cdot sin^{-1}(x)+2\cdot ln(x)+c\right]$

11. $\int\left(5^x+\frac{2}{x^{e+1}}+\frac{3}{\sqrt[5]{x^e}}\right)dx$; $\int\left(4^{x+1}-\frac{8}{x^{\pi+1}}+\frac{2}{\sqrt[e]{x^2}}\right)dx$; $\int\left(\frac{2}{7^x}-\frac{1}{x^3}+\frac{sin(x)}{\sqrt[3]{7}}\right)dx$

$\left[\frac{5^x}{ln(5)}-\frac{2}{e\cdot x^e}+\frac{15\cdot\sqrt[5]{x^{5-e}}}{5-e}+c;-\frac{2}{7^x\cdot ln(7)}+\frac{1}{2x^2}-\frac{\sqrt[3]{49}}{7}\cdot cos(x)+c;\frac{2^{2x+1}}{ln(2)}+\frac{8}{\pi\cdot x^\pi}+\frac{2e\cdot\sqrt[e]{x^{e-2}}}{(e-2)}+c\right]$

12. $\int\left(\pi^x-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}^x}+\frac{2}{3\cdot cos^2(x)}\right)dx$; $\int\left(\sqrt{3}^{x-1}-\frac{1}{3x}-\frac{1}{\sqrt[\pi]{x^e}}\right)dx$

$\left[\frac{\pi^x}{ln(\pi)}+\frac{\sqrt{3\cdot 2^{2-x}}}{ln(2)}+\frac{2\cdot tan(x)}{3}+c;\frac{2\cdot\sqrt{3^{x+1}}}{3\cdot ln(3)}-\frac{1}{3}\cdot ln(x)+\frac{\pi\cdot\sqrt[\pi]{x^{\pi-e}}}{e-\pi}+c\right]$

Lavoriamo insieme

Calcoliamo: $\int\frac{x+2}{x}dx$. Non è un integrale di quelli immediati, ma possiamo scomporre la frazione, scrivendo: $\int\left(\frac{x}{x}+\frac{2}{x}\right)dx=\int\left(1+\frac{2}{x}\right)dx=x+2\cdot ln(x)+c$.

Livello 1

13. $\int(x+1)^2\,dx$; $\int(2x+1)^3\,dx$; $\int\frac{x^2+2x+1}{x+1}dx$ $\left[\frac{(x+1)^3}{3}+c;\frac{(2x+1)^4}{8}+c;\frac{x^2}{2}+x+c\right]$

14. $\int\frac{x^2+2}{x^2+1}dx$; $\int\frac{x^3+x^2-3x+1}{x}dx$ $\left[x+tan^{-1}(x)+c;\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-3x+ln(|x|)+c\right]$

15. $\int\frac{\sqrt{x}+2\cdot\sqrt[3]{x}-3}{\sqrt[4]{x}}dx$; $\int\frac{2^x+4^x}{2^x}dx$ $\left[\frac{4\cdot\sqrt[4]{x^5}}{5}+\frac{24\cdot\sqrt[12]{x^{13}}}{13}-4\cdot\sqrt[4]{x^3}+c;x+\frac{2^x}{ln(2)}+c\right]$

16. $\int \frac{cos(2x)}{cos^2(x)}dx$; $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx$; $\int \frac{e^{3x}-e^{2x}+1}{e^x}dx$ $[2x - tan(x) + c ; e^x - x + c ; e^{2x} - e^x - e^{-x} + c]$

17. $\int \frac{2^x-3^x+1}{4^x}dx$; $\int \frac{x^4+2x^2+3}{x^2+1}dx$ $\left[\frac{3^x}{4^x\cdot(ln(4)-ln(3))}-\frac{2^{-x}+2^{-2x-1}}{ln(2)}+c;2\cdot tan^{-1}(x)+\frac{x}{3}+x+c\right]$

18. $\int \frac{e^{2x}+2e^x+1}{e^x+1}dx$; $\int sin^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$; $\int tan^2(x)dx$ $\left[e^x+x+c;\frac{x-sin(x)}{4}+c;tan(x)-x+c\right]$

Livello 2

19. $\int \frac{sin(x)+sin(3x)}{3\cdot sin(2x)}dx$ (Suggerimento: applicare la formula di prostaferesi) $\left[\frac{2}{3}sin(x)+c\right]$

20. $\int \frac{cos(2x)}{cos(x)\cdot[cos(x)+cos(3x)]}dx$; $\int \frac{x^5+x^3-x^2}{x^2+1}dx$ $\left[\frac{1}{2}tan(x)+c;\frac{x^4}{4}-x+tan^{-1}(x)+c\right]$

Lavoriamo insieme

Calcoliamo: $\int tan(x)dx$. Possiamo scrivere: $\int \frac{sin(x)}{cos(x)}dx$, in questo modo il numeratore è *quasi* la derivata del denominatore, quindi possiamo applicare la regola: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln|f(x)|+c$. Perciò:

$$-\int \frac{-sin(x)}{cos(x)}dx = -\int \frac{D[cos(x)]}{cos(x)}dx = -ln|cos(x)|+c = ln\frac{1}{|cos(x)|}+c$$

Calcolare i seguenti integrali indefiniti

Livello 1

21. $\int\left(\sqrt[4]{(5x+1)^7}+\frac{9}{(2x+1)^8}\right)dx$; $\int sin^3(x)\cdot cos(x)\ dx$ $\left[\frac{4\cdot\sqrt[4]{(5x+1)^{11}}}{55}-\frac{9}{14\cdot(2x+1)^7}+c;\frac{sin^4(x)}{4}+c\right]$

22. $\int\left(\sqrt[3]{(2x-3)^4}+\frac{7}{(3x+1)^2}\right)dx$; $\int x\cdot sin(x^2)\ dx$ $\left[\frac{3}{14}\cdot\sqrt[3]{(2x-3)^7}-\frac{7}{3\cdot(3x+1)}+c;-\frac{cos^2(x)}{2}+c\right]$

23. $\int\left(\sqrt[6]{(12x+1)^5}-\frac{3}{\sqrt[5]{3-2x}}\right)dx$; $\int \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ $\left[\frac{15\cdot\sqrt[5]{(3-2x)^4}}{8}+\frac{\sqrt[6]{(12x+1)^{11}}}{22}+c;e^{2\sqrt{x}}+c\right]$

24. $\int (x^2+1)^3\cdot x\ dx$; $\int \sqrt{x^2+x+1}\cdot(2x+1)\ dx$ $\left[\frac{(x^2+1)^4}{8}+c;\frac{2\cdot\sqrt{(x^2+x+1)^3}}{3}+c\right]$

25. $\int e^x\cdot(e^x+1)\,dx$; $\int \frac{tan^{-1}(x)}{1+x^2}dx$; $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$ $\left[\frac{1}{2}e^{2x}+e^x+c;\frac{1}{2}\left(tan^{-1}(x)\right)^2+c;ln\left(e^{2x}+1\right)-x+c\right]$

26. $\int \frac{1+cos(x)}{x+sin(x)}\ dx$; $\int \frac{sin(x)+cos(x)}{sin(x)}dx$; $\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

$\left[ln(|sin(x)+x|)+c;ln(|sin(x)|)+x+c;-3\cdot\sqrt{1-x^2}+c\right]$

27. $\int \frac{3x+5}{x^2+1}\,dx$; $\int \frac{sin^{-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ $\left[5\cdot tan^{-1}(x)+\frac{3\cdot ln(x^2+1)}{2}+c;\frac{[sin^{-1}(x)]^2}{2}+c\right]$

28. $\int \frac{3}{x^2+6x+9}\,dx$; $\int \frac{x}{4x^4-12x^2+9}\,dx$ $\left[-\frac{3}{x+3}+c;\frac{1}{4\cdot(3-2x^2)}+c\right]$

29. $\int \frac{ln(|x^3|)}{x}dx$; $\int \frac{ln(x^4)}{2x}dx$; $\int \frac{tan(x)}{cos^2(x)}dx$ $\left[\frac{3\cdot ln^2(|x|)}{2}+c;ln^2(|x|)+c;\frac{1}{2\cdot cos^2(x)}+c\right]$

30. $\int x\cdot\sqrt{x^2+1}\,dx$; $\int x\cdot e^{x^2+5}dx$; $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ $\left[\frac{\sqrt{(x^2+1)^3}}{3}+c;\frac{e^{x^2+5}}{2}+c;2\cdot e^{\sqrt{x}}+c\right]$

31. $\int x^2\cdot\sqrt[4]{x^3+1}\,dx$; $\int \frac{sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$; $\int \frac{5x}{x^2+12}dx$; $\int \frac{cos(\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

$\left[\frac{4\cdot\sqrt[4]{(x^3+1)^5}}{15}+c;-2\cdot cos(\sqrt{x})+c;\frac{5\cdot ln(x^2+12)}{2}+c;\frac{3\cdot sin(\sqrt[3]{x^2})}{2}+c\right]$

Livello 2

32. $\int \frac{2x+5}{2x-1}\,dx$; $\int \frac{4x+1}{2x-15}dx$; $\int \frac{2x-7}{3x-10}dx$

$\left[ln(\sqrt[3]{|2x-1|})+x+c;\frac{31}{2}ln(|2x-15|)+2x+c;\frac{2}{3}x-\frac{1}{9}\cdot ln(|3x-10|)+c\right]$

33. $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}}dx$; $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+1}}dx$; $\int \frac{x^3+x}{x^4+1}dx$ $\left[\frac{\sqrt{2x^2+3}}{2}+c;\frac{4}{9}\cdot\sqrt[4]{(x^3+1)^3}+c;\frac{2\cdot tan^{-1}(x^2)+ln(x^4+1)}{4}+c\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare: $\int \frac{1}{3x^2+4}dx$. Non abbiamo, né possiamo avere, al numeratore la derivata del denominatore. La regola che più *assomiglia* all'integrale è $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx = tan^{-1}[f(x)]+c$. Cerchiamo allora di trasformare l'espressione in una a cui si può applicare tale regola. Dividiamo numeratore e denominatore per 4, in modo da ottenere l'addendo 1: $\int \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3x^2}{4}+1}dx$, adesso cerchiamo di scrivere il primo addendo del denominatore come un quadrato, cosa che può farsi sempre con numeri positivi: $\frac{1}{4}\cdot\int \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)^2+1}dx$. Siamo quasi giunti al termine, abbiamo bisogno solo della derivata della base del quadrato: $\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}\cdot\int \frac{\sqrt{3}/2}{\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)^2+1}dx = \frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}\cdot tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x\right)+c$

Livello 1

34. $\int\frac{1}{x^2+4}dx$; $\int\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx$; $\int\frac{1}{16x^2+1}dx$ $\left[\frac{tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)}{2}+c;sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+c;\frac{tan^{-1}(4x)}{4}+c\right]$

35. $\int\frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}dx$; $\int\frac{1}{\sqrt{1-6x^2}}dx$; $\int\frac{1}{x^2+3}dx$ $\left[\frac{1}{5}\cdot sin^{-1}(5x)+c;\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot sin^{-1}\left(\sqrt{6}x\right)+c;\frac{tan^{-1}\left(\sqrt{3}x\right)}{\sqrt{3}}+c\right]$

36. $\int\frac{3x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$; $\int\frac{1}{9x^2+16}dx$; $\int\frac{1}{\sqrt{25-4x^2}}dx$ $\left[-\frac{3\cdot\sqrt{1-4x^2}}{4}+c;\frac{tan^{-1}\left(\frac{3}{4}x\right)}{12}+c;\frac{1}{2}\cdot sin^{-1}\left(\frac{2x}{5}\right)+c\right]$

Livello 2

37. $\int\frac{5x-1}{5x^2+9}dx$; $\int\frac{11x+5}{x^2+1}dx$ $\left[\frac{ln\left(5x^2+9\right)}{2}-\frac{\sqrt{5}\cdot tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}\cdot x}{3}\right)}{15}+c;\frac{11\cdot ln\left(x^2+1\right)}{2}+5\cdot tan^{-1}(x)+c\right]$

38. $\int\frac{6x-1}{x^2+7}dx$; $\int\frac{2x+5}{16x^2+1}dx$ $\left[3\cdot ln\left(x^2+7\right)-\frac{\sqrt{7}\cdot tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)}{7}\cdot+c;\frac{ln\left(16x^2+1\right)}{16}+\frac{5}{4}\cdot tan^{-1}(4x)+c\right]$

39. $\int\frac{5x+2}{3x^2+1}dx$; $\int\frac{5x+1}{\sqrt{1-9x^2}}dx$ $\left[\frac{5\cdot ln\left(3x^2+1\right)}{6}+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot tan^{-1}\left(\sqrt{3}\cdot x\right)+c;\frac{3\cdot sin^{-1}(3x)-5\cdot\sqrt{1-9x^2}}{9}+c\right]$

40. $\int\frac{14x+1}{x^2+35}dx$; $\int\frac{x^2+3}{2x^2+1}dx$ $\left[7\cdot ln\left(x^2+35\right)+\frac{tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{35}}\right)}{\sqrt{35}}+c;\frac{1}{2}\cdot x+\frac{5\cdot\sqrt{2}\cdot tan^{-1}\left(\sqrt{2}\cdot x\right)}{4}+c\right]$

41. $\int\frac{1}{x\cdot ln(x)}dx$; $\int\frac{1}{x\cdot ln(x)\cdot ln\left[ln(x)\right]}dx$ [$ln(|ln(|x|)|) + c$; $ln(|ln(|ln(|x|)|)|) + c$]

42. $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\ dx$; $\int\frac{x}{2x^4-2x^2+1}\ dx$ $\left[\frac{1}{2}sin^{-1}\left(x^2\right)+c;\frac{1}{2}tan^{-1}\left(2x^2-1\right)+c\right]$

43. $\int\frac{cos(x)}{1+sin^2(x)}\ dx$; $\int\frac{1}{x\cdot\left[1+ln^2(x)\right]}\ dx$ [$tan^{-1}(sin(x)) + c$; $tan^{-1}(ln(x)) + c$]

44. $\int\frac{1}{x\cdot\sqrt{1-ln^2(x)}}\ dx$; $\int\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\ dx$ [$sin^{-1}(ln(x)) + c$; $sin^{-1}(e^x) + c$]

45. $\int sin^3(x)\ dx$; $\int cos^5(x)\ dx$ $\left[-cos(x)+\frac{cos^3(x)}{3}+c;sin(x)-\frac{2}{3}\cdot sin^3(x)+\frac{1}{5}\cdot sin^5(x)+c\right]$

46. $\int\frac{x^2-1}{\left(x^2-x+1\right)\cdot\left(x^2+x+1\right)}dx$; $\int\frac{2}{x\cdot ln(x^2)}dx$ $\left[ln\left(\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}\right)+c;ln\left(\left|ln\left(x^2\right)\right|\right)+c\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare: $\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx$. Ancora una volta non abbiamo né possiamo avere al numeratore la derivata del denominatore. Cerchiamo sempre di riferirci all'integrale $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx = tan^{-1}[f(x)]+c$. Poiché il delta del denominatore è negativo possiamo sempre scrivere il trinomio come somma di due quadrati: $\int \frac{1}{x^2+2x+1+1}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx$ e poiché D(x + 1) =1: $\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx = tan^{-1}(x+1)+c$.

Livello 3

47. $\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx$; $\int \frac{1}{4x^2+4x+5}dx$ $\left[\frac{tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}}+c; \frac{tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{2}\right)}{4}+c\right]$

48. $\int \frac{1}{2x^2+x+1}dx$; $\int \frac{1}{3x^2+3x+4}dx$ $\left[\frac{2\cdot tan^{-1}\left(\frac{4x+1}{\sqrt{7}}\right)}{\sqrt{7}}+c; \frac{2\cdot tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{39}}\right)}{\sqrt{39}}+c\right]$

49. $\int \frac{8x+1}{9x^2-12x+5}dx$; $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\ dx$; $\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}\ dx$ $\left[\frac{19}{9}\cdot tan^{-1}(3x-2)+\frac{4}{9}\cdot ln\left(9x^2-12x+5\right)+c; sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+c; sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+c\right]$

50. $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}dx$; $\int \frac{1}{\sqrt{2-5x^2}}dx$; $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2-x}}dx$ $\left[\frac{1}{2}\cdot sin^{-1}(2x)+c; \frac{sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{5}{2}}x\right)}{\sqrt{5}}+c; sin^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)+c\right]$

51. $\int \frac{1}{\sqrt{2-x^2-4x}}dx$; $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2-4x}}dx$; $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x^2+x}}dx$ $\left[sin^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right)+c; sin^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)+c; \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot sin^{-1}\left(\frac{4x-1}{5}\right)+c\right]$

Negli esercizi seguenti le lettere diverse dalla x indicano parametri reali

52. $\int sin^n(x)\cdot cos(x)\ dx$; $\int \frac{sin\left(\sqrt[n]{x}\right)}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}dx, n>1$ $\left[\frac{sin^{n+1}(x)}{n+1}+c; n-n\cdot cos\left(\sqrt[n]{x}\right)+c\right]$

53. $\int \frac{1}{ax+b}\ dx$; $\int \sqrt[n]{ax+b}\ dx, n>1$ $\left[\frac{ln(|ax+b|)}{a}+c; \frac{n\cdot\left(\sqrt[n]{(ax+b)^{n+1}}-1\right)}{a\cdot(n+1)}+c\right]$

54. $\int \frac{1}{x^2+a^2}\ dx$; $\int \frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}}\ dx, n>1$ $\left[\frac{tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)}{a}+c; \frac{n\cdot\left(\sqrt[n]{ax+b}-ax-b\right)}{a\cdot(1-n)\cdot\sqrt[n]{ax+b}}+c\right]$

55. $\int \frac{ax+b}{ax-b}\ dx\ ;\ \int \frac{ax+b}{x^2+1}\ dx$ $\left[\frac{2b \cdot ln(|ax-b|)}{a}+x+c; \frac{a \cdot ln(x^2+1)}{2}+b \cdot tan^{-1}(x)+c\right]$

56. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\ dx\ ;\ \int \frac{ax+b}{x^2+a^2}\ dx$ $\left[sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c; \frac{a \cdot ln(x^2+a^2)}{2}+\frac{b}{a} \cdot tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c\right]$

Integrazione per parti

Così come è molto facile determinare il differenziale di una data quantità, è difficile trovare l'integrale di un dato differenziale. Inoltre, a volte, non riusciamo a dire con certezza se l'integrale di una data quantità possa essere trovato o no. *Johann Bernoulli* (1667 – 1748)

Il problema

Abbiamo già osservato che non esiste una regola di integrazione per il prodotto di due qualsiasi funzioni entrambe integrabili, allora semplifichiamo la questione cercando una regola per il prodotto di due particolari funzioni.

Ricordiamo la regola di derivazione del prodotto di due funzioni: $D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Cosa accade se applichiamo gli integrali all'uguaglianza? $\int D[f(x) \cdot g(x)]dx = \int f'(x) \cdot g(x)dx + \int f(x) \cdot g'(x)dx$. Ovviamente, per la stessa definizione di integrale come operatore reciproco di quello di derivate avremo: $f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) \cdot g(x)\, dx + \int f(x) \cdot g'(x)\, dx$, cioè: $\int f'(x) \cdot g(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\, dx$. Questa uguaglianza sembra abbastanza inutile poiché esprime un integrale mediante un altro, tranne che noi sapessimo calcolare il secondo integrale. Proprio in questa ipotesi enunciamo la seguente regola.

Regola di integrazione per parti

Dato un integrale esprimibile come il prodotto di due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, una almeno delle due integrabile di primitive note (che si chiamerà **fattore differenziale**) e l'altra derivabile (che si chiamerà **fattore finito**), vale la seguente regola, detta di **integrazione per parti**: $\int f'(x) \cdot g(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\, dx$, in cui $f(x)$ è il fattore differenziale e $g(x)$ quello finito.

Vediamo qualche applicazione della regola precedente.

Esempio 12

Supponiamo di voler calcolare $\int x \cdot sin(x)dx$. Poiché noi sappiamo integrare entrambi i fattori potremmo usare la regola di integrazione per parti in due modi.

- Se consideriamo x come fattore differenziale avremo: $f'(x) = x$ e $f(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$, $g(x) = sin(x)$ e $g'(x) = cos(x)$, ottenendo quindi: $\int x \cdot sin(x)dx = \int D\left(\frac{x^2}{2}\right) \cdot sin(x)dx = \frac{x^2}{2} \cdot sin(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot cos(x)dx$. Ci rendiamo conto immediatamente che in questo caso la regola è del tutto inutile, poiché il secondo integrale è più complicato di quello che vogliamo calcolare.
- Se invece è $sin(x)$ il fattore differenziale avremo: $f'(x) = sin(x)$ e $f(x) = \int sin(x)dx = -cos(x)$, $g(x) = x$ e $g'(x) = 1$, ottenendo quindi: $\int x \cdot sin(x)dx = \int x \cdot D(-cos(x)) \cdot dx = -x \cdot cos(x) - \int -cos(x) \cdot 1dx$. Stavolta la regola è efficace poiché il secondo integrale è immediato, possiamo perciò concludere: $\int x \cdot sin(x)dx = -x \cdot cos(x) + sin(x) + c$.

Ci sono dei casi in cui la regola apparentemente non si può applicare.

Esempio 13

Supponiamo di voler calcolare $\int ln(x)dx$. In questo caso *sembra* che la regola non possa applicarsi, poiché abbiamo un solo fattore. Ciò non è vero poiché ogni quantità può essere pensata moltiplicata per 1 e di 1 noi conosciamo una sua primitiva: x. Così si ha:

$$\int ln(x)dx = \int ln(x)\cdot 1dx = \int ln(x)\cdot D(x)dx = x\cdot ln(x) - \int \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}dx = x\cdot ln(x) - x + c.$$

La regola di integrazione per parti vale sempre, anche se non sempre permette di calcolare l'integrale voluto.

Esempio 14

Supponiamo di voler calcolare $\int \frac{sin(x)}{x}dx$. Noi conosciamo sia una primitiva di $sin(x)$ che una di $\frac{1}{x}$.

- Nel primo caso: $\int \frac{sin(x)}{x}dx = \int D(-cos(x))\cdot\frac{1}{x}dx = -\frac{cos(x)}{x} - \int \frac{cos(x)}{x^2}dx$, e l'integrale ottenuto è più complicato di quello iniziale.
- Nel secondo: $\int \frac{sin(x)}{x}dx = \int D(ln(x))\cdot sin(x)dx = sin(x)\cdot ln(x) - \int ln(x)\cdot cos(x)dx$, che conduce anch'esso a un integrale più complicato.
- Anche scrivendo: $\int \frac{sin(x)}{x}dx = \int D(x)\cdot\frac{sin(x)}{x}dx = \cancel{x}\cdot\frac{sin(x)}{\cancel{x}} - \int \cancel{x}\cdot\frac{x\cdot cos(x) - sin(x)}{x^{\cancel{2}}}dx$, si ottiene un integrale più complicato. In effetti può dimostrarsi che la predetta funzione non è integrabile in modo elementare.

Infine in alcuni casi la regola di integrazione per parti sembra entrare in un circolo vizioso.

Esempio 15

Calcolare $\int sin^2(x)dx$. Si ha: $\int sin^2(x)dx = \int sin(x)\cdot sin(x)dx = \int sin(x)\cdot D[-cos(x)]dx$, quindi possiamo applicare la regola di integrazione per parti nel seguente, unico, modo, dato che i fattori sono uguali: $\int sin^2(x)dx = -cos(x)\cdot sin(x) - \int -cos(x)\cdot cos(x)dx = -cos(x)\cdot sin(x) + \int cos^2(x)dx$. Abbiamo ottenuto un integrale simile a quello da calcolare, quindi sembrerebbe che anche questa volta la regola non funzioni. Però possiamo anche scrivere nel seguente modo:

$$\int sin^2(x)dx = -cos(x)\cdot sin(x) + \int [1 - sin^2(x)]dx = -cos(x)\cdot sin(x) + x - \int sin^2(x)dx$$

A questo punto forse ci siamo convinti ancor più che la regola non va, dato che abbiamo riottenuto l'integrale di partenza. Se però guardiamo l'uguaglianza da un altro punto di vista, ossia la consideriamo come un'equazione nell'incognita $\int sin^2(x)dx$: $2\cdot\int sin^2(x)dx = -cos(x)\cdot sin(x) + x$, allora non abbiamo più bisogno di calcolare alcun integrale, basta solo dividere per 2 e aggiungere la costante, ottenendo l'integrale cercato: $\int sin^2(x)dx = \frac{-cos(x)\cdot sin(x) + x}{2} + c$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Calcolare $\int x^2 \cdot ln(x)\, dx$. Usiamo il metodo di integrazione per parti, scegliendo x^2 come fattore differenziale. Si ha: $\int x^2 \cdot ln(x)\ \ dx = \int D\left(\frac{x^3}{3}\right)\cdot ln(x)\ \ dx = \frac{x^3}{3}\cdot ln(x) - \int \frac{x^{\cancel{3}2}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}dx = \frac{x^3}{3}\cdot ln(x) - \frac{x^3}{9} + c$.

Calcolare i seguenti integrali, usando, se possibile, il metodo di integrazione per parti

Livello 1

1. $\int x\cdot cos(x)\,dx$; $\int e^x \cdot sin(x)\, dx$; $\int x\cdot e^x dx$ $\left[cos(x)+x\cdot sin(x)+c; \frac{1}{2}e^x\cdot(sin(x)-cos(x))+c; (x-1)\cdot^x + c\right]$

2. $\int x^3 \cdot sin(x)\, dx$; $\int x^4 \cdot e^x\ dx$; $\int x\cdot e^{-x}dx$

   $[x \cdot (6 - x^2) \cdot cos(x) + 3\,(x^2 - 2) \cdot sin(x) + c$; $(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) \cdot e^x + c$; $-(x + 1) \cdot e^{-x} + c]$

3. $\int e^{2x}\cdot cos(x)\,dx$; $\int x^2\cdot e^{2x}dx$; $\int [ln(x)]^2\ dx$

   $\left[\frac{1}{5}e^{2x}\cdot(sin(x)+2cos(x))+c; \frac{e^{2x}\cdot(2x^2-2x+1)}{4}+c; x\cdot(ln^2(x)-2ln(x)+2e^x)+c\right]$

4. $\int x^2 \cdot ln(x)\, dx$; $\int sin^{-1}(x)\,dx$ $\left[\frac{x^3}{9}\cdot[3\cdot ln(x)-1]+c; x\cdot sin^{-1}(x)+\sqrt{1-x^2}+c\right]$

5. $\int tan^{-1}(x)\ dx$; $\int x\cdot tan^{-1}(x)\ dx$ $\left[x\cdot tan^{-1}(x)-ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)+c; \left(\frac{1+x^2}{2}\right)\cdot tan^{-1}(x)-\frac{x}{2}+c\right]$

6. $\int e^{3x}\cdot sin(x)\ dx$; $\int \frac{ln(x)}{x^2}dx$ $\left[\frac{1}{10}e^{3x}\cdot[3\cdot sin(x)-cos(x)]+c; -\frac{1+ln(x)}{x}+c\right]$

Livello 2

7. $\int ln(x^2+1)\,dx$; $\int log_2(x)\,dx$ $\left[2\cdot tan^{-1}(x)+x\cdot ln(x^2+1)-2x+c; x\cdot\frac{ln(x)-1}{ln(2)}+c\right]$

8. $\int ln^2(x)\,dx$; $\int ln(5x+1)\,dx$ $\left[x\cdot ln^2(x)-2x\cdot ln(x)+2x+c; \frac{(5x+1)\cdot ln(5x+1)}{5}-x+c\right]$

9. $\int x\cdot sin(x)\cdot cos(x)\,dx$; $\int \frac{x\cdot cos(x)}{sin^2(x)}dx$ $\left[\frac{1}{8}\cdot sin(2x)+\frac{1}{2}x\cdot sin^2(x)-\frac{1}{4}x+c; ln\left(tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)-\frac{x}{sin(x)}+c\right]$

10. $\int ln^3(x)\,dx$; $\int tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-1}\right)dx$ $\left[x\cdot ln^3(x)-3x\cdot ln^2(x)+6x\cdot ln(x)-6x+c; ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)+tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+c\right]$

Livello 3

11. $\int sin[ln(x)]\ dx$; $\int sin^4(x)\ dx$

    $\left[\frac{x\cdot sin(ln(x))-x\cdot cos(ln(x))}{2}+c; \frac{3x-cos(x)\cdot(2\cdot sin^3(x)+3\cdot sin(x))}{8}+c\right]$

12. $\int cos^4(x)\ dx$; $\int x^n \cdot ln(x) dx, n \in \mathbb{N}$

$$\left[\frac{3x + cos(x)\cdot sin(x)\cdot\left(2\cdot cos^2(x)+3\right)}{8}+c; \frac{x^{n+1}\cdot\left[(n+1)\cdot ln(x)-1\right]+1}{(n+1)^2}+c\right]$$

Mostrare che i seguenti integrali non possono essere calcolati con il metodo di integrazione per parti

13. $\int \frac{cos(x)}{x}\ dx$; $\int \frac{ln(x)}{x}\ dx$; $\int \frac{e^x}{x}\ dx$; $\int e^{x^2}\ dx$; $\int \frac{sin^{-1}(x)}{x}\ dx$; $\int \frac{tan^{-1}(x)}{x}\ dx$; $\int \frac{1}{ln(x)}\ dx$

Integrazione di funzioni razionali fratte

Il problema

Abbiamo calcolato l'integrale $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$ nei due casi in cui il discriminante è nullo o negativo, cosa accade quando invece è positivo?

Partiamo con un esempio.

Esempio 16

Vogliamo calcolare $\int \frac{1}{x^2-5x+6}dx$, dato che il discriminante del denominatore è positivo possiamo scomporlo: $\int \frac{1}{(x-2)\cdot(x-3)}dx$, se adesso riuscissimo a scrivere la frazione come somma di due frazioni più semplici: $\int \frac{1}{(x-2)\cdot(x-3)}dx = \int \left(\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}\right)dx$ avremmo finito, dato che i due integrali sono immediati: $\int \left(\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}\right)dx = A\cdot ln(|x-2|)+B\cdot ln(|x-3|)+c$. Quindi il problema è: stabilire se esistono due numeri reali A e B per cui si abbia: $\frac{1}{(x-2)\cdot(x-3)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$. Effettuiamo il minimo comune denominatore: $\frac{1}{(x-2)\cdot(x-3)} = \frac{Ax-3A+Bx-2B}{(x-2)\cdot(x-3)} = \frac{(A+B)\cdot x-3A-2B}{(x-2)\cdot(x-3)}$. Quando due frazioni sono uguali? Non quando hanno numeratori uguali e denominatori uguali, dato che per esempio $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$, se però hanno i denominatori uguali, come accade nel nostro caso, allora devono esserlo anche i numeratori, cioè $(A + B)\cdot x - 3A - 2B = 1$. Il membro sinistro è un polinomio, ma anche il destro lo è, dato che e possiamo scriverlo: $1 = 0 \cdot x + 1$, quindi per il principio di identità dei polinomi deve essere: $\begin{cases} A+B=0 \\ -3A-2B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-B \\ 3B-2B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$.

Quindi $\int \frac{1}{(x-2)\cdot(x-3)}dx = \int \left(\frac{-1}{x-2}+\frac{1}{x-3}\right)dx = -ln(|x-2|)+ln(|x-3|)+c = ln\left(\frac{|x-3|}{|x-2|}\right)+c$.

Quanto visto nell'esempio può applicarsi a qualsiasi integrale di una frazione algebrica in cui il denominatore è un trinomio di secondo grado a discriminante positivo.

Teorema 5

Vale la seguente identità:

$$\frac{1}{(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)} = \frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-a_n},\ a_i \neq a_j \text{ se } i \neq j \text{ e } A_k \in \mathbb{R}\ (1 \le k \le n).$$

Dimostrazione

Se eseguiamo il minimo comune multiplo a secondo membro, al primo membro otterremo un polinomio di grado $(n - 1)$, dato che ogni A_k verrà moltiplicato per gli $(n - 1)$ fattori di primo grado $(x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_{k-1}) \cdot \cdot (x - a_{k+1}) \cdot \ldots \cdot (x - a_n)$. Quindi dopo avere raccolto, al numeratore otterremo un polinomio di grado $(n - 1)$ che ha n coefficienti incogniti (gli A_k), perciò dovremo risolvere un sistema lineare di n equazioni in n incognite. Grazie al teorema di Cramer-Leibniz sappiamo che un sistema del genere ha una sola soluzione se il determinante della matrice incompleta è diverso da zero. Ciò accade come può provarsi, ma noi omettiamo la prova perché conduce a calcoli lunghi.

Cosa accade del risultato precedente se due almeno degli a_i sono uguali?

Esempio 17

Vogliamo calcolare $\int \frac{x^2+x-1}{(x-1)^2\cdot(x+1)}dx$. Come visto il problema è ricondotto alla scomposizione della frazione $\frac{x^2+x-1}{(x-1)^2\cdot(x+1)}$ in frazioni semplici del tipo $\frac{A}{x-a}$. Dato che possiamo scriverla anche nel modo seguente: $\frac{x^2+x-1}{(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x+1)}$, se applichiamo la stessa identità del Teorema 5 dovrebbe aversi: $\frac{x^2+x-1}{(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$. Ci accorgiamo subito però che stavolta il problema non è risolto poiché: $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}=\frac{A\cdot(x^2-1)+B\cdot(x^2-1)+C\cdot(x-1)^2}{(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{(A+B+C)\cdot x^2-2C\cdot x+(-A-B+C)}{(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x+1)}$.

Quindi dovrebbe essere $\begin{cases} A+B+C=1 \\ -2C=1 \\ -A-B+C=-1 \end{cases}$, ma abbiamo: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=0$, cioè il sistema non ha soluzioni. Non è difficile capire perché ciò accada, le frazioni $\frac{A}{x-1}$ e $\frac{B}{x-1}$ sono in pratica la stessa frazione, dato che scrivere *A* o scrivere *B* è solo una diversa scelta per uno stesso simbolo.

Come possiamo risolvere allora la questione precedente? Mediante il seguente risultato.

Teorema 6

Vale la seguente identità: $\frac{1}{(x-a)^n}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_n}{(x-a)^n}$, con $A_k\in\mathbb{R}\ (1\le k\le n)$

Dimostrazione omessa

Vediamo di riprendere l'esempio precedente, usando il risultato del Teorema 6.

Esempio 18

Scriviamo $\frac{x^2+x-1}{(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}$, così otteniamo:

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}=\frac{A\cdot(x^2-1)+B\cdot(x+1)+C\cdot(x-1)^2}{(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{(A+C)\cdot x^2+(B-2C)\cdot x+(-A+B+C)}{(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x+1)}$$

Quindi deve essere $\begin{cases} A+C=1 \\ B-2C=1 \\ -A+B+C=-1 \end{cases}$, e si ha: $\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix}=1+0+0-(-1-2+0)=4\ne 0$, il sistema ha una sola soluzione: $\left(A=\frac{5}{4},B=\frac{1}{2},C=-\frac{1}{4}\right)$. Perciò possiamo scrivere nel modo seguente: $\int\frac{x^2+x-1}{(x-1)^2\cdot(x+1)}dx=\frac{5}{4}\cdot\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{(x-1)^2}dx-\frac{1}{4}\cdot\int\frac{1}{x+1}dx=\frac{5}{4}\cdot ln(|x-1|)-\frac{1}{2\cdot(x-1)}-\frac{1}{4}\cdot ln(|x+1|)+c$.

Adesso ci chiediamo se ogni polinomio possa scomporsi nel prodotto di fattori del tipo visto in precedenza cioè di potenze di polinomi di primo grado. La risposta è ovviamente negativa, basti pensare a un polinomio di II grado a delta negativo, che, nei reali, non è scomponibile. Valgono i seguenti risultati.

Teorema 7

Nell'insieme dei numeri reali ogni polinomio si scompone nel prodotto di polinomi al più di II grado.
Dimostrazione omessa

Teorema 8

Vale la seguente identità con $A, A_k, B_k \in \mathbb{R}$ $(1 \le k \le n)$, $a \neq 0$, $b^2 - 4ac < 0$:

$$\frac{1}{(x-h)\cdot\left(ax^2+bx+c\right)^n} = \frac{A}{x-h} + \frac{A_1 \cdot x + B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2 \cdot x + B_2}{\left(ax^2+bx+c\right)^2} + \ldots + \frac{A_n \cdot x + B_n}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}$$

Dimostrazione omessa

Esempio 19

Vogliamo calcolare $\int \frac{2x^2+3}{(x-2)\cdot\left(x^2+1\right)}dx$. Grazie al precedente teorema possiamo scrivere

$$\frac{2x^2+3}{(x-2)\cdot\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+Bx^2-2Bx+Cx-2C}{(x-2)\cdot\left(x^2+1\right)} = \frac{(A+B)\cdot x^2+(-2B+C)x+(A-2C)}{(x-2)\cdot\left(x^2+1\right)}$$

Quindi deve essere $\begin{cases} A+B=2 \\ -2B+C=0 \\ A-2C=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=2-A \\ -2\cdot(2-A)+\frac{A-3}{2}=0 \\ C=\frac{A-3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=2-A \\ 4A+A-8-3=0 \\ C=\frac{A-3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{11}{5} \\ B=-\frac{1}{5} \\ C=-\frac{2}{5} \end{cases}$. Perciò scriviamo: $\int \frac{2x^2+3}{(x-2)\cdot\left(x^2+1\right)}dx = \frac{11}{5}\cdot ln(|x-2|) - \frac{1}{10}\cdot\int\frac{2x}{x^2+1}dx \frac{11}{5}\cdot ln(|x-2|) - \frac{1}{10}\cdot\int\frac{2x}{x^2+1}dx - \frac{2}{5}\cdot\int\frac{1}{x^2+1}dx =$
$= \frac{11}{5}\cdot ln(|x-2|) - \frac{1}{10}\cdot ln\left(x^2+1\right) - \frac{2}{5}\cdot tan^{-1}(x) + c$.

Cosa accade se il polinomio al numeratore ha grado maggiore o uguale di quello al denominatore?

Esempio 20

Vogliamo calcolare $\int \frac{x^4+x-1}{x^3+3x^2+2x+6}dx$. Effettuiamo la divisione:

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & & & +x & -1 & x^3+3x^2+2x+6 \\ \cline{6-6} -x^4 & -3x^3 & -2x^2 & -6x & & x-3 \\ \hline // & -3x^3 & -2x^2 & -5x & -1 & \\ & +3x^3 & +9x^2 & +6x & +9 & \\ \cline{2-5} & // & 7x^2 & +x & +8 & \end{array}$$

Perciò scriviamo: $\int \frac{x^4+x-1}{x^3+3x^2+2x+6}dx = \int\left(x-3+\frac{7x^2+x+8}{x^3+3x^2+2x+6}\right)dx = \frac{x^2}{2} - 3x + \int\frac{7x^2+x+8}{x^3+3x^2+2x+6}dx$, come si vede abbiamo ottenuto una frazione in cui il numeratore ha grado inferiore al denominatore, quindi ci riconduciamo al caso già visto. Scomponiamo il denominatore: $\int \frac{7x^2+x+8}{(x+3)\cdot(x^2+2)}dx$, e poi il metodo visto in precedenza: $\frac{7x^2+x+8}{(x+3)\cdot(x^2+2)} = \frac{A}{x+3}+\frac{Bx+C}{x^2+2} = \frac{(A+B)\cdot x^2+(3B+C)x+(2A+3C)}{(x+3)\cdot(x^2+2)}$. Quindi deve essere $\begin{cases} A+B=7 \\ 3B+C=1 \\ 2A+3C=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{68}{11} \\ B=\frac{9}{11} \\ C=-\frac{16}{11} \end{cases}$. Sostituendo abbiamo: $\int \frac{7x^2+x+8}{(x+3)\cdot(x^2+2)}dx = \frac{68}{11}\cdot\int\frac{1}{x+3}dx+\frac{1}{11}\cdot\int\frac{9x-16}{x^2+2}dx=$

$$= \frac{68}{11}\cdot ln(|x+3|)+\frac{9}{22}\cdot\int\frac{2x}{x^2+2}dx-\frac{16}{11}\cdot\int\frac{1}{x^2+2}dx = \frac{68}{11}\cdot ln(|x+3|)+\frac{9}{22}\cdot ln(x^2+2)-\frac{16}{11\cdot\sqrt{2}}\cdot tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+c$$

Verifiche

Lavoriamo insieme

Calcolare: $\int \frac{3x+1}{x^2+5x+4}dx$, poiché $x^2 + 5x + 4 = (x + 1) \cdot (x + 4)$, possiamo scrivere: $\int \frac{3x+1}{(x+1)\cdot(x+4)}dx$, e cerchiamo A e B tali che: $\int \frac{3x+1}{(x+1)\cdot(x+4)}dx = \int \frac{A}{x+1}dx + \int \frac{B}{x+4}dx = A\cdot ln(|x+1|) + B\cdot ln(|x+4|) + c$. Poiché si ha: $\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+4} = \frac{Ax+4A+Bx+B}{(x+1)\cdot(x+4)} = \frac{(A+B)\cdot x+(4A+B)}{(x+1)\cdot(x+4)}$ e poiché deve essere: $\frac{3x+1}{(x+1)\cdot(x+4)} = \frac{(A+B)\cdot x+(4A+B)}{(x+1)\cdot(x+4)}$, dobbiamo risolvere: $\begin{cases} A+B=3 \\ 4A+B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3-B \\ 12-4B+B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3-B \\ -3B=-11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{2}{3} \\ B=\frac{11}{3} \end{cases}$.

Infine: $\int \frac{3x+1}{(x+1)\cdot(x+4)}dx = -\frac{2}{3}\cdot ln(|x+1|) + \frac{11}{3}\cdot ln(|x+4|) + c$.

Calcolare i seguenti integrali di funzioni razionali fratte

Livello 1

1. $\int \frac{x+2}{x^2-7x+10}dx$; $\int \frac{1}{x^2\cdot(x+1)^2}dx$; $\int \frac{5x-1}{x^2-5x+6}dx$; $\int \frac{1}{x^3\cdot(x-2)}dx$

$$\left[ln\left(\sqrt[3]{\frac{|x-5|^7}{(x-2)^4}}\right)+c; ln\left[\left(\frac{x-1}{x}\right)^2\right]-\frac{2x+1}{x^2+x}+c; ln\left(\frac{|x-3|^{14}}{|x-2|^9}\right)+c; ln\left(\sqrt[8]{\frac{x-2}{x}}\right)+\frac{1}{4x}+\frac{1}{4x^2}+c\right]$$

2. $\int \frac{3x^3-1}{x^2-5x+6}dx$; $\int \frac{2x+1}{x^3-x}dx$; $\int \frac{7x-3}{x^2+12x+20}dx$; $\int \frac{x+1}{x^4+2x^3+x^2}dx$

$$\left[ln\left(\frac{|x-3|^{80}}{|x-2|^{23}}\right)+\frac{3}{2}x^2+15x+c; ln\left(\sqrt{\frac{(x-1)^3}{x^2\cdot(x+1)}}\right)+c; ln\left(\sqrt[8]{\frac{|x+10|^{73}}{|x+2|^{17}}}\right)+c; ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)-\frac{1}{x}+c\right]$$

3. $\int \frac{5x+1}{x^2-7x+12}dx$; $\int \frac{8x+1}{x^3-x^2}dx$; $\int \frac{x^2+x+1}{x^3-4x^2+4x}dx$

$$\left[ln\left(\frac{|x-4|^{21}}{|x-3|^{16}}\right)+c; 9\cdot ln\left(\left|\frac{x-1}{x}\right|\right)+\frac{1}{x}+c; ln\left(\sqrt[4]{x\cdot(x-2)^3}\right)-\frac{7}{2x-4}+c\right]$$

4. $\int \frac{x^6-1}{x^4-4x^2}dx$; $\int \frac{x^5-1}{x^4-2x^3+x^2}dx$; $\int \frac{1}{x^3+2x^2+x}dx$

$$\left[\frac{x^3}{3}+4x-\frac{1}{4x}+\frac{63}{16}\cdot ln\left(\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right)+c; \frac{1}{x}+\frac{x^2}{2}+2x+ln\left(\frac{|x-1|^5}{x^2}\right)+c; \frac{1}{x+1}-ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)+c\right]$$

Livello 2

5. $\int \frac{x^3+x^2+x+1}{x^4-5x^3+5x^2+5x-6}dx$; $\int \frac{x}{16x^4-1}dx$ $\left[ln\left(\left|\frac{(x-1)\cdot\sqrt{(x-3)^5}}{(x-2)^5}\right|\right)+c; \frac{1}{16}\cdot ln\left(\left|\frac{4x^2-1}{4x^2+1}\right|\right)+c\right]$

6. $\int \frac{2x^3-3}{4x^4-8x^3+3x^2+2x-1}dx$ $\left[\frac{14}{9}\cdot ln\left(\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|\right)-\frac{43}{36}\cdot ln(|4x^2-1|)+\frac{26}{9}\cdot ln(|x-1|)+\frac{1}{3x-3}+c\right]$

7. $\int \frac{2x}{x^2-x-4}dx$; $\int \frac{x}{x^2-2}dx$ $\left[ln\left(x^2-x-4\right)-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot ln\left(\left|\frac{2x+\sqrt{17}-1}{2x-\sqrt{17}-1}\right|\right)+c;ln\left(\sqrt{\left|x^2-2\right|}\right)+c\right]$

8. $\int \frac{x^2-3}{\left(x^2-7\right)^3}dx$; $\int \frac{1}{x^2-3}dx$ $\left[-\frac{\sqrt{7}}{343}\cdot ln\left(\left|\frac{x-\sqrt{7}}{x+\sqrt{7}}\right|\right)-\frac{2x^3-7x}{49\cdot\left(x^2-7\right)^2}+c;\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot ln\left(\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|\right)+c\right]$

9. $\int \frac{1}{x^3+x^2+x}dx$; $\int \frac{1}{x^3-5x}dx$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)-ln\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)+ln\left(|x|\right)+c;\frac{1}{10}\cdot ln\left(\left|1-\frac{5}{x^2}\right|\right)+c\right]$

10. $\int \frac{1}{x^3+1}dx$; $\int \frac{x^3+x-1}{x^4+2x^2+1}dx$

$\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{6}\cdot ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{3}\cdot ln\left(|x+1|\right)+c;ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)-\frac{1}{2}\cdot tan^{-1}(x)-\frac{x}{2x^2+2}+c\right]$

11. $\int \frac{1}{\left(x^2-x+1\right)\cdot\left(x^2+x+1\right)}dx$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\left[tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]-ln\left(\sqrt[4]{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}\right)+c\right]$

12. $\int \frac{x^3}{x^3+3x^2+6x+8}dx$ $\left[-\frac{1}{\sqrt{15}}\cdot tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)-\frac{5}{6}\cdot ln\left(x^2+x+4\right)-\frac{4}{3}\cdot ln\left(|x+2|\right)+x+c\right]$

13. $\int \frac{x}{(x-1)^2\cdot\left(x^2+4\right)^2}dx$ $\left[-\frac{11}{250}\cdot tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{250}\cdot ln\left(x^2+4\right)+\frac{1}{125}\cdot ln\left(|x-1|\right)+\frac{4x^2-5x+11}{50\cdot(1-x)\cdot\left(x^2+4\right)}+c\right]$

Livello 3

14. $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx$; $\int \frac{x}{x^3-a^3}dx$ $\left[\frac{1}{2a}\cdot ln\left(\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right)+c;\frac{\sqrt{3}}{3a}\cdot tan^{-1}\left(\frac{2x+a}{\sqrt{3}a}\right)-\frac{1}{6a}\cdot ln\left(x^2+ax+a^2\right)+\frac{1}{3a}\cdot ln\left(|x-a|\right)+c\right]$

15. $\int \frac{1}{x^3+a^3}dx$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{3a^2}\cdot tan^{-1}\left(\frac{2x-a}{\sqrt{3}a}\right)-\frac{1}{6a^2}\cdot ln\left(x^2-ax+a^2\right)+\frac{1}{3a^2}\cdot ln\left(|x+a|\right)+c\right]$

16. $\int \frac{1}{x^4-a^4}dx$; $\int \frac{x^2}{x^2-a^2}dx$ $\left[\frac{1}{4a^3}\cdot ln\left(\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right)-\frac{1}{2a^3}\cdot tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c;\frac{a}{2}\cdot ln\left(\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right)+x+c\right]$

17. $\int \frac{1}{x^4+a^2x^2+a^4}dx$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{6a^3}\cdot\left[tan^{-1}\left(\frac{2x-a}{3a}\right)+tan^{-1}\left(\frac{2x+a}{3a}\right)\right]-\frac{1}{4a^3}\cdot ln\left(\frac{x^2-ax+a^2}{x^2+ax+a^2}\right)+c\right]$

18. $\int x\cdot ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$; $\int ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$

$$\left[x^2\cdot ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\right)+ln\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)+x+c;\frac{tan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}}+(2x+1)\cdot ln\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)-2x+c\right]$$

Integrazione per sostituzione

Il problema

Risolvendo le equazioni algebriche o trascendenti, abbiamo visto che talvolta il sostituire all'incognita un'altra espressione rendeva il calcolo più semplice, per esempio nelle equazioni biquadratiche sostituendo riconducevamo sempre ad un'equazione di II grado. Risolta questa equazione poi si risostituiva ottenendo un'altra equazione, anch'essa più semplice di quella originale. Possiamo chiederci allora se a volte possa semplificarsi il calcolo di un integrale mediante una opportuna sostituzione di variabili.

Esempio 21

Per calcolare $\int \frac{tan(x)}{1-cos(x)}dx$, nessuno dei procedimenti visti in precedenza ci viene in aiuto. Possiamo però scrivere: $\int \frac{sin(x)}{cos(x)\cdot[1-cos(x)]}dx$, e osservare che il numeratore è derivata di una parte del denominatore. Ciò ci suggerisce di sostituire *cos*(*x*) con una variabile diversa da *x*, per esempio *t*. Così facendo avremo: $\int \frac{sin(x)}{cos(x)\cdot[1-cos(x)]}dx = \int \frac{-d[cos(x)]}{cos(x)\cdot[1-cos(x)]} = \int_{t=cos(x)} \frac{-dt}{t\cdot(1-t)} = \int_{t=cos(x)} \frac{1}{t\cdot(t-1)}dt$. In questo modo quindi abbiamo trasformato l'integrale di partenza in un integrale razionale, che sappiamo risolvere. È importante osservare che dobbiamo sostituire *tutte le x* con espressioni nella nuova variabile, senza dimenticare però che il risultato finale deve essere espresso sempre in *x*, come l'integrale di partenza. Quindi intanto si ha: $\int_{t=cos(x)} \frac{dt}{t\cdot(t-1)} = \int_{t=cos(x)} \left(\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}\right)dt$,così: $\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1} = \frac{1}{t\cdot(t-1)} \Rightarrow (A+B)\cdot t - A = 1 \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$.

E poi: $\int \frac{tan(x)}{1-cos(x)}dx = \int_{t=cos(x)} \left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}\right)dt = \left[-ln(|t|)+ln(|t-1|)\right]_{t=cos(x)} + c = \left[ln\left(\left|\frac{t-1}{t}\right|\right)\right]_{t=cos(x)} + c = ln\left(\left|\frac{cos(x)-1}{cos(x)}\right|\right)+c$

Tenuto conto dell'esempio precedente possiamo enunciare la seguente regola.

Formula di Integrazione per sostituzione

Si ha: $\int f(x)dx = \int_{x=g(t)} f[g(t)]\cdot g'(t)dt$

In genere la sostituzione si usa in tutti quegli integrali di funzioni trascendenti (goniometriche, esponenziali, logaritmiche, …) o irrazionali, per cercare di razionalizzare la funzione integranda, dato che, come abbiamo visto nel paragrafo precedente, in genere sappiamo calcolare gli integrali delle funzioni razionali fratte.

Esempio 22

Vogliamo calcolare $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$. Poiché vogliamo razionalizzare l'espressione, conviene porre uguale a *t* il radicale il cui indice sia il minimo comune indice fra i due presenti, cioè $t=\sqrt[6]{x}$, ciò significa che possiamo scrivere: $\sqrt{x} = \left(\sqrt[6]{x}\right)^3 = t^3; \sqrt[3]{x} = \left(\sqrt[6]{x}\right)^2 = t^2$. Non dobbiamo però dimenticare di sostituire anche *dx*. Dato che si ha: $t=\sqrt[6]{x} \Rightarrow x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5\ dt$. Quindi la corretta sostituzione è: $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx = \int_{t=\sqrt[6]{x}} \frac{t^3}{1+t^2}\cdot 6t^5 dt =$

$= \int_{t=\sqrt[6]{x}} \frac{6t^8}{1+t^2}dt$. Effettuiamo la divisione: $6\cdot \int_{t=\sqrt[6]{x}} \left[\left(t^6-t^4+t^2-1\right)+\frac{1}{1+t^2}\right]dt = 6\cdot\left[\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-t+tan^{-1}(t)+c\right]_{t=\sqrt[6]{x}} =$

$$=\frac{6x\cdot\sqrt[6]{x}}{7}-\frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5}+2\sqrt{x}-6\cdot\sqrt[6]{x}+6\cdot tan^{-1}\left(\sqrt[6]{x}\right)+c.$$

Anche per le funzioni goniometriche si può usare una sostituzione *standard*, che razionalizza.

Esempio 23

Vogliamo calcolare $\int\frac{sin(x)+cos(x)}{1+cos(x)}dx$. Ricordiamo le cosiddette formule parametriche che trasformano seno e coseno in espressioni razionali: $sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}, cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, in cui $t=tan\left(\frac{x}{2}\right)$, quindi avremo anche $x=2\cdot tan^{-1}(t)\Rightarrow dx=\frac{2}{1+t^2}dt$. Perciò abbiamo: $\int\frac{sin(x)+cos(x)}{1+cos(x)}dx=\int_{t=tan(x/2)}\frac{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$, calcoliamo quest'ultimo integrale: $\int_{t=tan(x/2)}\frac{\frac{-t^2+2t+1}{\cancel{1+t^2}}}{\frac{1+\cancel{t^2}+1-\cancel{t^2}}{\cancel{1+t^2}}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int_{t=tan(x/2)}\frac{-t^2+2t+1}{1+t^2}dt$. Abbiamo razionalizzato l'espressione, quindi: $\int_{t=tan\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1+t^2}{1+t^2}+\frac{2}{1+t^2}\right)dt=\left[ln\left(1+t^2\right)-t+2\cdot tan^{-1}(t)+c\right]_{t=tan\left(\frac{x}{2}\right)}=$

$$=ln\left[1+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]-tan\left(\frac{x}{2}\right)+2\cdot tan^{-1}\left[tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]+c=ln\left[1+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]-tan\left(\frac{x}{2}\right)+x+c.$$

Tenuto conto del precedente esempio enunciamo la seguente regola.

Sostituzione di integrandi contenenti seni e/o coseni

Si applica la sostituzione $sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}, cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}, dx=\frac{2}{1+t^2}dt$, dove è $t=tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

La precedente sostituzione è per così dire universale, poiché razionalizza sempre un'espressione goniometrica con seno e coseno, ma nelle verifiche vedremo che in alcuni casi altre sostituzioni sono più convenienti.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Calcolare $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$. Ricordando l'identità: $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$, conviene operare la sostituzione $x = sin(t)$ poiché essa razionalizza l'espressione. Ciò comporta anche la sostituzione $dx = cos(t)\,dt$, ottenendo perciò: $\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{t=sin^{-1}(x)}\sqrt{1-sin(t)^2}\cdot cos(t)\,dt = \int_{t=sin^{-1}(x)} cos^2(t)\,dt$. Quest'ultimo integrale si calcola per parti o utilizzando l'identità: $cos\left(\frac{t}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+cos(t)}{2}} \Rightarrow cos^2\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{1+cos(t)}{2} \Rightarrow cos^2(t)=\frac{1+cos(2t)}{2}$.

Così si ha: $\int_{t=sin^{-1}(x)}\frac{1+cos(2t)}{2}dt=\left[\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\cdot sin(2t)+c\right]_{t=sin^{-1}(x)}=\left[\frac{t}{2}+\frac{1}{\cancel{4}^{2}}\cdot\cancel{2}\cdot sin(t)\cdot cos(t)+c\right]_{t=sin^{-1}(x)}=$

$=\left[\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\cdot sin(t)\cdot\sqrt{1-sin^2(t)}+c\right]_{t=sin^{-1}(x)}=\frac{sin^{-1}(x)+x\cdot\sqrt{1-x^2}}{2}+c$.

Calcolare i seguenti integrali operando un'opportuna sostituzione di variabile

Livello 1

1. $\int\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$; $\int\frac{x+\sqrt{x}}{x-1}dx$ $\quad\left[2\cdot\sqrt{x}-2\cdot tan^{-1}(x)+c;2\cdot ln\left(\sqrt{x}-1\right)+x+2\sqrt{x}+c\right]$

2. $\int\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}dx$; $\int\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+1}dx$ $\quad\left[4\cdot ln\left(\sqrt{x}+1\right)+x+4\cdot\sqrt{x}+c;\frac{3}{2}\cdot\left[\sqrt[3]{x^2}-ln\left(\sqrt[3]{x^2}+1\right)\right]+c\right]$

3. $\int\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}dx$; $\int\sqrt{4-x^2}\,dx$ $\quad\left[\frac{2}{15}\cdot\left(3x^2-4x+8\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)+c;2\cdot sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x\cdot\sqrt{4-x^2}}{2}+c\right]$

4. $\int\frac{x+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}dx$; $\int\frac{sin(x)}{cos^2(x)-cos(x)}dx$; $\int x\cdot\sqrt{x+3}\,dx$

$\left[\frac{3}{70}\cdot\left(20\cdot\sqrt{x+1}+14x-21\right)\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}+c;ln\left[\frac{cos(x)}{cos(x)-1}\right]+c;\frac{2}{5}\cdot\left(x^2+x-6\right)\cdot\sqrt{x+3}+c\right]$

5. $\int\frac{cos(x)}{sin^2(x)-sin(x)-2}dx$; $\int(x+1)\cdot\sqrt{x-2}\,dx$ $\quad\left[ln\left[\sqrt[3]{\frac{2-sin(x)}{1+sin(x)}}\right]+c;\frac{2}{5}\cdot(x+3)\cdot\sqrt{(x-2)^3}+c\right]$

Livello 2

6. $\int\frac{\sqrt{x^2-1}+1}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}}dx$; $\int\frac{1}{sin(x)}dx$ $\quad\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot ln\left(\frac{\left(x-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2x^2-2}-x\right)}{\left(x+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2x^2-2}+x\right)}\right)+ln\left(x^2-1\right)+c;ln\left[tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]+c\right]$

7. $\int\frac{\sqrt{x+1}}{3x-2}dx$; $\int\frac{1}{1-sin(x)}dx$ $\quad\left[\frac{2}{9\cdot\sqrt{15}}\cdot ln\left(\frac{\sqrt{3x+3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3x-2}}\right)+\frac{2}{3}\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)+c;tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+c\right]$

8. $\int\frac{1}{2+cos(x)}dx$; $\int\frac{1}{sin(x)\cdot cos(x)}dx$ $\quad\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left[x-2\cdot tan^{-1}\left(\frac{sin(x)}{cos(x)+\sqrt{3}+2}\right)\right]+c;ln\left[tan(x)\right]+c\right]$

9. $\int\frac{1}{sin^2(x)-sin(x)-2}dx$ $\quad\left[-\frac{2\cdot\sqrt{3}}{9}\cdot tan^{-1}\left(\frac{cos(x)}{sin(x)-\sqrt{3}-2}\right)+\frac{1}{3}\cdot cot\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{3}}{9}\cdot x+c\right]$

10. $\int \frac{1}{1+sin^2(x)}dx$; $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left[x-tan^{-1}\left(\frac{sin(2x)}{cos(2x)-2\cdot\sqrt{2}-3}\right)\right]+c; 2\cdot e^{\sqrt{x}}\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)+c\right]$

11. $\int \frac{tan(x)+2}{tan^2(x)+1}dx$; $\int \frac{1}{e^{2x}-1}dx$ $\left[\frac{sin(2x)+sin^2(x)+2x}{2}+c; ln\left(\sqrt{e^{2x}-1}\right)-x+c\right]$

12. $\int \frac{e^x+1}{\sqrt{e^x-1}}dx$; $\int \frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}dx$ $\left[2\cdot tan^{-1}\left(e^x-1\right)+2\cdot\sqrt{e^x-1}+c; 4\cdot ln\left(\sqrt{1-x}-1\right)+4\cdot\sqrt{1-x}-x+c\right]$

13. $\int \frac{1}{1+sin(x)-cos(x)}dx$; $\int \frac{1}{e^x+1}dx$ $\left[ln\left(\frac{sin(x)}{sin(x)+cos(x)+1}\right)+c; x-ln\left(e^x+1\right)+c\right]$

14. $\int \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x-2}dx$ $\left[-ln\left(\sqrt{e^x+2-2\cdot\sqrt{e^x+1}}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot ln\left(\frac{\sqrt{e^x+1}-\sqrt{3}}{\sqrt{e^x+1}+\sqrt{3}}\right)+\frac{x}{2}+c\right]$

Livello 3

15. $\int x\cdot sin^{-1}(x)\,dx$ (prima integrare per parti, poi sostituire …) $\left[\left(\frac{2x^2-1}{4}\right)\cdot sin^{-1}(x)+\frac{x\cdot\sqrt{1-x^2}}{4}+c\right]$

16. $\int \frac{1}{\left(x^2-1\right)^2}dx$ (si ponga $t=\frac{x+1}{x-1}$) ; $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ $\left[ln\left(\sqrt[4]{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}\right)-\frac{x}{2x^2-2}+c; \frac{4}{5}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{x}+1\right)^3}+c\right]$

17. $\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx$; $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}dx$ $\left[tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{2x^2+2}+c; ln\left(2\cdot\sqrt{x^2+x}\right)+2x+1+c\right]$

18. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-x}}dx$ (si ponga $\sqrt{x^2-x}=x+t$) $\left[ln\left(2\cdot\sqrt{x^2-x}\right)+2x-1+c\right]$

19. $\int x^2\cdot\sqrt{x^2+1}\,dx$; $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}dx$ $\left[\frac{x\cdot\sqrt{x^2+1}\cdot\left(2x^2+1\right)-ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{8}+c; \frac{2}{3}\cdot\left(\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x^3}\right)+c\right]$

20. $\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (si ponga $\frac{1-x^2}{x^2}=t^2$) $\left[\frac{3\cdot sin^{-1}(x)-x\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot\left(2x^2+3\right)}{8}+c\right]$

L’angolo di Derive

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quinto%20volume/Capitolo%2011/11-1-1.exe si scarica un’applicazione che mostra come Derive calcola gli integrali indefiniti. Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quinto%20volume/Capitolo%2011/11-1-1.dfw si scarica il relativo file.

L’angolo di Geogebra

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quinto%20volume/Capitolo%2011/11-1-2.exe si scarica un’applicazione che mostra come Geogebra permette di calcolare somme di plurirettangoli e tracciare funzioni integrali.

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quinto%20volume/Capitolo%2011/11-1-2.rar si scarica il relativo file.

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. Calcolare $\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x e^{-t^2}dt}{1-\cos(x)}$; $\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}dt}{\ln(1+x)}$; $\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x \frac{\ln(t)}{t}dt}{\int_0^x e^{-t}dt}$ [+ ∞ ; 1 ; – ∞]

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi
I temi completi dei Licei Scientifici per gli ultimi anni sono scaricabili, con soluzione, dal sito
http://matdidattica.altervista.org/esamidistato.htm

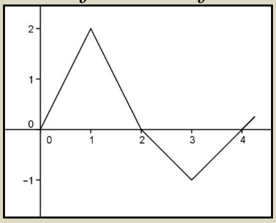
1. (Liceo scientifico 1991/1992) La funzione $f(x)=(2x^3-4x)\cdot e^{-x^2}$ rappresenti, in opportune unità di misura, la forza $f(x)$ a cui è soggetto un punto P libero di muoversi lungo l'asse delle x. Sapendo che la forza f è data da $f(x)=-\frac{dE(x)}{dx}$, dove $E(x)$ è l'energia potenziale, trovare la funzione $E(x)$ e rappresentarla avendo posto $E(0) = -1$. Per quali valori di x il punto P è in equilibrio, ossia per quali valori di x la forza è nulla? Per tali valori di x l'energia potenziale quale valore assume? $\left[E(x)=e^{-x^2}\cdot(x^2-1)\ \ P(0;-1)\vee P\left(\pm\sqrt{2};e^{-2}\right)\right]$
2. (Liceo scientifico 2001/2002) Determinare, se esistono, i numeri a, b in modo che la seguente relazione: $\frac{1}{x^2-2x-3}=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+1}$, sia un'identità. $\left[a=\frac{1}{4},b=-\frac{1}{4}\right]$
3. (Liceo scientifico 2000/2001) Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, continua nel campo reale, tale che $f(0) = 2$. Calcolare: $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{2xe^x}$, dove e è la base dei logaritmi naturali. [1]
4. (Liceo scientifico 2001/2002) Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione $f(x)$ tale che: $f(x)=\int_x^{x+1} \ln(t)\,dt, x>0$. $\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$
5. (Liceo scientifico PNI 2001/2002) Trovare $f(4)$ sapendo che f è continua e che: $\int_0^x f(t)\,dt = x\cdot\cos(\pi\cdot x)$. [1]
6. (Liceo scientifico PNI 2001/2002) Trovare $f(4)$ sapendo che $\int_0^x f(t)\,dt = x\cdot\cos(\pi\cdot x)$. [1]
7. (Liceo scientifico PNI 2002/2003) Di una funzione $f(x)$ si sa che ha derivata seconda uguale a $sen(x)$ e che $f'(0) = 1$. Quanto vale $f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)$? [π – 1]
8. (Liceo scientifico 2002/2003) La derivata della funzione $f(x)=\int_0^{x^2} e^{-t^2}dt$ è la funzione $f'(x) = 2\cdot x\cdot e^{-x^4}$. Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l'affermazione.

9. (Liceo scientifico PNI suppletiva 2004/2005) Calcolare la derivata, rispetto a x, della funzione $F(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{sin(t)}dt$? $\left[\frac{2}{sin(2x)}-\frac{1}{sin(x)}\right]$

10. (Liceo scientifico 2008/2009) Si trovi la funzione $f(x)$ la cui derivata è $sin(x)$ e il cui grafico passa per il punto (0, 2). $[f(x) = 3 – cos(x)]$

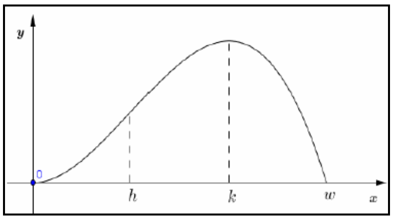
Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente problema assegnato agli esami di Liceo scientifico 2012/2013 *La funzione f ha il grafico in figura. Se* $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ *per quale valore positivo di x, g ha un minimo?*



Usando il teorema fondamentale del calcolo integrale possiamo dire che $g'(x) = f(x)$ e quindi $g'(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \vee x = 4$. Per esserci un minimo vi deve essere un passaggio da una fase di decrescenza a uno di crescenza. Viste le relazioni fra f e g dobbiamo considerare per quale delle due precedenti ascisse la f passa da valori negativi a positivi, il che succede per $x = 4$, che è quindi l'ascissa del minimo di g.

11. (Liceo scientifico 2013/2014) Nella figura a lato è disegnato il grafico Γ di $g(x)=\int_0^x f(t)dt$, con f funzione definita sull'intervallo $[0, w]$ e ivi continua e derivabile.



Γ è tangente all'asse x nell'origine O del sistema di riferimento e presenta un flesso e un massimo rispettivamente per $x = h$ e $x = k$. a) Si determinino $f(0)$ e $f(k)$; b) si dica se il grafico della funzione f presenta punti di massimo o di minimo e se ne tracci il possibile andamento. c) Si supponga che $g(x)$ sia, sull'intervallo considerato, esprimibile come funzione polinomiale di terzo grado. Si provi che, in tal caso, i numeri h e k dividono l'intervallo $[0, w]$ in tre parti uguali. d) Si determini l'espressione di $g(x)$ nel caso $w = 3$ e $g(1)=\frac{2}{3}$ e si scrivano le equazioni delle normali a Γ nei punti in cui esso è tagliato dalla retta $y=\frac{2}{3}$. [a) 0, 0; B) $x = h$ massimo, $x = w$ minimo assoluto $g(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2;3x+y-5=0;3x-6y+1-3\sqrt{3}=0$]

12. (Liceo scientifico 2014/2015) Determinare l'espressione analitica della funzione $y = f(x)$ sapendo che la retta $y = –2x + 5$ è tangente al grafico di f nel secondo quadrante e che $f'(x) = – 2x^2 + 6$. $\left[y=-\frac{2}{3}x^3+6x+\frac{47}{3}\right]$

13. (Liceo scientifico 2015/2016) Data la funzione $f(x)$ definita in $\mathbb{R}$, $f(x) = e^x \cdot (2x + x^2)$, individuare la primitiva di $f(x)$ il cui grafico passa per il punto (1; 2e). $[y = e^x \cdot x^2 + e]$

14. (Liceo scientifico 2015/2016)Sia f la funzione così definita nell'intervallo $]1, +\infty)$: $f(x)=\int_e^{x^2}\frac{t}{ln(t)}dt$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di *f* nel suo punto di ascissa $\sqrt{e}$.

$\left[y = 2e \cdot \sqrt{e} \cdot \left(x - \sqrt{e} \right) \right]$

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.

AK = Arkansas Calculus Competition

CC = Cincinnati University Calculus Contest

HH = Houston High School Math Contest

RICE = Rice University Mathematics Tournament

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato ai giochi della Rice nel 2008. *Calcolare* $\int e^{3x} \cdot sin(x)\, dx$.

Integriamo per parti:

$$\int e^{3x} \cdot sin(x)\, dx = -e^{3x} \cdot cos(x) + \int 3 \cdot e^{3x} \cdot cos(x)\, dx = -e^{3x} \cdot cos(x) + 3 \cdot e^{3x} \cdot sin(x) - \int 9 \cdot e^{3x} \cdot sin(x)\, dx$$

Considerando l'espressione come un'equazione nell'incognita $\int e^{3x} \cdot sin(x)\, dx$, abbiamo:

$$10 \cdot \int e^{3x} \cdot sin(x)\, dx = e^{3x} \cdot \left[3 \cdot sin(x) - cos(x) \right] \Rightarrow \int e^{3x} \cdot sin(x)\, dx = \frac{e^{3x}}{10} \cdot \left[3 \cdot sin(x) - cos(x) \right] + c$$

1. (Rice 2008) Calcolare $\int \frac{x+2}{(x-1)^2 \cdot (x-2)} dx$. $\left[4 \cdot ln\left(\left| \frac{x-2}{x-1} \right| \right) + \frac{3}{x-1} + c \right]$

2. (CC 2008) Calcolare $\int sin^{-1}(3x)\, dx$. $\left[x \cdot sin^{-1}(3x) + \frac{\sqrt{1-9x^2}}{3} + c \right]$

3. (CC 2010) Calcolare $\int \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}} dx$. $\left[-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + c \right]$

4. (CC 2011) Calcolare $\int \frac{x+1}{x^2 + \sqrt{2} \cdot x + 1} dx$. $\left[ln\left(\sqrt{x^2 + 2 \cdot \sqrt{x} + 1} \right) + \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot tan^{-1}\left(\sqrt{2} \cdot x + 1 \right) + c \right]$

5. (HH 2012) Sia *f* una funzione continua e $F(x) = \int_0^x \left[(2t+3) \cdot \int_t^2 f(u)\, du \right] dt$, allora $F''(2)$ è

   a) – 2 · *f*(2) b) – 7 · *f*(2) c) 7 · *f* ′(2) d) 3 · *f* ′(2) e) 7 · *f*(2) [b)]

Questions in English

Working together

We solve a question assigned at Rice in 2008.

Find f(x) such that $\lim_{h \to 0} \frac{h^2}{f(x+2h) - 2 \cdot f(x+h) + f(x)} = -\frac{x^3}{2} - x - \frac{1}{2x}$.

Observe that we can write $f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$, and we can write: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$,

$f'(x+h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h}$ Hence: $f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}{h} =$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-2\cdot f(x+h)+f(x)}{h^2}$ and $\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{f(x+2h)-2\cdot f(x+h)+f(x)}=\frac{1}{f''(x)}$. Hence we must solve: $\frac{1}{f''(x)}=-\frac{x^3}{2}-x-\frac{1}{2x}\Rightarrow f''(x)=-\frac{2x}{x^4+2x^2+1}=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}\Rightarrow f'(x)=-\int\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx\Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x)=-\int 2x\cdot(x^2+1)^{-2}dx\Rightarrow f'(x)=(x^2+1)^{-1}+c\Rightarrow f(x)=\int\left[(x^2+1)^{-1}+c\right]dx\Rightarrow f(x)=tan^{-1}(x)+cx+d$.

6. (Rice 2009) Let $a(t) = cos^2(2t)$ be the acceleration at time t of a point particle traveling on a straight line. Suppose at time $t = 0$, the particle is at position $x = 1$ with velocity $v = -2$. Find its position at time $t = 2$. $\left[-\frac{cos(8)}{16}+\frac{33}{32}\right]$

7. (AK 2012) Solve the following $\int\frac{x^3+8x^2+16x-4}{x+5}dx$. $\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+x-9ln(|x+5|)+c\right]$

8. (AK 2012) Evaluate the following $\int sin^3(2x)\cdot cos(2x)\,dx$. $\left[\frac{sin^4(2x)}{8}+c\right]$

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_5_11.htm

11. L’integrazione

11.2 Integrazione definita

Prerequisiti

- Concetto di limite
- Continuità di una funzione
- Calcolo differenziale
- Calcolo integrale
- Concetto di volume
- Metodo degli indivisibili di Cavalieri

Obiettivi

- Sapere calcolare integrali definiti
- Sapere calcolare aree di parti di piano delimitate da funzioni integrabili
- Sapere distinguere fra integrale definito e area
- Sapere calcolare volumi di rotazione di archi di funzioni integrabili

Contenuti

- Calcolo di integrali definiti e applicazione al calcolo di aree
- Volume di alcuni solidi di rotazione e lunghezza di alcune curve piane
- Integrali impropri e generalizzati

Quelli che … vogliono sapere di più
- Equazioni differenziali

Parole chiave
Integrale generalizzato – Integrale improprio

Calcolo di integrali definiti e applicazione al calcolo di aree

Il problema

Abbiamo dato significato geometrico al simbolo $\int_a^b f(x)\,dx, f(x)>0, \forall x \in [a,b]$, dicendo che rappresenta la misura dell'area del trapezoide determinato dalla funzione *f*(*x*) nell'intervallo [*a*; *b*]. Abbiamo altresì visto che calcolare tale numero usando la definizione è spesso un lavoro laborioso e talvolta pressoché impossibile. Vogliamo quindi determinare un metodo migliore per il calcolo di tali aree.

Nell'Unità precedente abbiamo enunciato il cosiddetto Teorema fondamentale del calcolo integrale, nel quale si dice che la funzione integrale $\int_0^x f(t)\,dt$ è derivabile e la sua derivata è *f*(*x*). Proprio usando tale risultato abbiamo dato un significato all'integrale indefinito come operatore inverso della derivata. Adesso enunciamo il seguente risultato che ci permette di risolvere la questione posta dal problema iniziale.

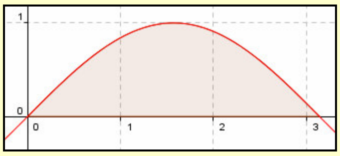
Teorema 1 (Formula fondamentale del calcolo integrale)

Se *f*(*x*) è dotata di primitive in [*a*; *b*] e $\int f(x)dx = F(x)+c$, allora $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$

Dimostrazione omessa

Esempio 1

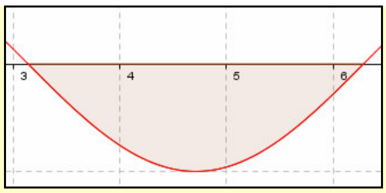
Consideriamo l'area sottesa dalla sinusoide nell'intervallo [0; π], come mostrato in figura, vogliamo calcolarne la misura. Grazie al teorema precedente si ha: $\int_0^\pi sin(x)dx = \left[-cos(x)\right]_0^\pi$ = – *cos*(π) – [– *cos*(0)] =



= – (–1) – (–1) = 2.

Non è difficile capire che gli integrali definiti sono numeri reali, quindi non sempre rappresentano numeri positivi, perciò **non possiamo dire** che un integrale definito rappresenta sempre un'area. Del resto avevamo definito l'area del trapezoide solo per funzioni sempre positive.

Esempio 2

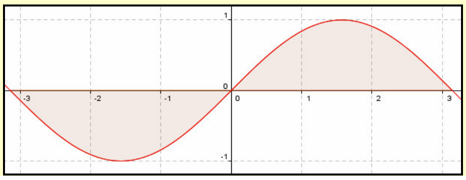


L'area sottesa dalla sinusoide nell'intervallo [π; 2π], mostrata in figura, non può essere calcolata come $\int_\pi^{2\pi} sin(x)dx$, poiché, ricordando che nella definizione dell'area di un trapezoide abbiamo inserito la misura delle altezze dei plurirettangoli come *ordinate* dei punti che dividono l'intervallo, il risultato sarà negativo. Infatti: $\int_\pi^{2\pi} sin(x)dx = \left[-cos(x)\right]_\pi^{2\pi} = -cos(2\pi) - \left[-cos(\pi)\right] = -1-1=-2$. Ovviamente l'opposto dell'area della stessa funzione in [0; π].

Quindi l'area di un trapezoide deve essere calcolata in modo opportuno, cioè considerando il fatto che essa si trovi nel semipiano positivo delle ordinate o in quello inferiore.

Esempio 3

Se calcolassimo l'area sottesa dalla sinusoide nell'intervallo [–π; π], mostrata in figura, come $\int_{-\pi}^{\pi} sin(x)dx$, otterremo ovviamente zero, perché la parte dell'intervallo [–π; 0] avrà un valore opposto a quella dell'intervallo [0; π]. Il modo corretto di calcolare tale area è $-\int_{-\pi}^{0} sin(x)dx+\int_{0}^{\pi} sin(x)dx$ = – (–2) + 2 = 4.



In vista di quanto detto finora forniamo la seguente definizione.

Definizione 1

Chiamiamo **integrale definito** della funzione $f(x)$ estesa all'intervallo [a; b] il numero

$$\int_a^b f(x)dx=\begin{cases}\int_a^b f(x)dx & se\ a<b\\ 0 & se\ a=b\\ -\int_b^a f(x)dx & se\ a>b\end{cases}$$

Intuitivo è perciò il seguente risultato.

Teorema 2

Se $f(x)$ è continua in [a; b] e $c \in (a, b)$, allora si ha $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

Dimostrazione ovvia dal significato di integrale definito.

Per calcolare un integrale definito basterebbe quindi calcolare l'integrale indefinito e poi applicare la sostituzione stabilita dal Teorema 1. Esistono però anche regole per particolari procedure. Cominciamo a considerare quella per l'integrazione per parti.

Teorema 3

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono continue e derivabili in [a; b], con le derivate anch'esse continue, allora si ha

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx=\left[f(x)\cdot g(x)\right]_a^b-\int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx$$

Dimostrazione ovvia dai precedenti risultati.

Esempio 4

Per calcolare $\int_0^1 x\cdot sin(x)dx$, applichiamo il metodo di integrazione per parti, ottenendo:

$$\int_0^1 x\cdot sin(x)dx=\left[-x\cdot cos(x)\right]_0^1+\int_0^1 cos(x)dx=-cos(1)+\left[sin(x)\right]_0^1=-cos(1)+sin(1)\approx 0,301$$

Consideriamo adesso la regola da usa per il metodo di integrazione per sostituzione.

Teorema 4

Sia $f(x)$ continua in $[a; b]$, $x = g(t)$ continua e derivabile in $[c; d]$ con la derivata anch'essa continua. Sia inoltre $g(t) \in [a; b]$, $\forall\, t \in [c; d]$, allora si ha $\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f[g(t)] \cdot g'(t)\,dt$.

Dimostrazione omessa

Esempio 5

Per calcolare $\int_2^3 \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$, applichiamo la sostituzione: $\sqrt{x} = t, x = t^2, dx = 2t\,dt$. Dobbiamo però sostituire anche gli estremi di integrazione. Se $x = 2$ allora $t = \sqrt{2}$ e, analogamente, se $x = 3$ allora $t = \sqrt{3}$. Quindi l'integrale diventa: $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{t+t^2}{t-1} \cdot 2t\,dt = 2 \cdot \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{t^3+t^2}{t-1}dt = 2 \cdot \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \left(t^2 + 2t + 2 + \frac{2}{t-1}\right)dt = 2 \cdot \left[\frac{t^3}{3} + t^2 + 2t + 2 \cdot ln(t-1)\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} =$

$$= 2 \cdot \left[\sqrt{3} + 3 + 2 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot ln\left(\sqrt{3}-1\right) - \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} - 2 - 2 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right] = 4 \cdot ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}-1}\right) - \frac{16 \cdot \sqrt{2}}{3} + 6 \cdot \sqrt{3} + 2$$

Abbiamo già visto un teorema della media di una funzione, il cosiddetto teorema di Lagrange, che ci dice che, come la media aritmetica è in generale un rappresentante (spesso non buono) di un insieme finito di valori numerici, sotto particolari condizioni anche una funzione può essere rappresentata da un suo valore. Lo stesso vogliamo fare nel caso dell'area sottesa da una funzione, vogliamo cioè cercare un valore della funzione che può considerarsi l'altezza di un rettangolo di base comune al trapezoide e ad esso equivalente. Vale infatti questo risultato.

Teorema 5 (della media integrale)

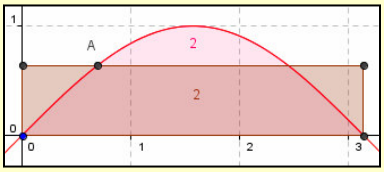
Sia $f(x)$ integrabile in $[a; b]$, allora esiste $c \in [a; b]$ tale che si abbia: $\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx = f(c)$.

Dimostrazione omessa

Il precedente risultato dice appunto che possiamo trovare un punto P sulla funzione in modo tale che il rettangolo che ha per base $[a; b]$ e per altezza l'ordinata di P ha la stessa area del trapezoide.

Esempio 6

Dato $\int_0^\pi sin(x)\,dx = 2$, vogliamo trovare il punto in cui si ha la media, cioè: $\frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi sin(x)\,dx = sin(c)$ $\Rightarrow \frac{2}{\pi} = sin(c) \Rightarrow c = sin^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)$. Quindi il rettangolo di base $[0; \pi]$ e altezza $sin\left(\left[sin^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)\right]\right) = \frac{2}{\pi}$ ha area pari a 2. Lo mostriamo in figura.

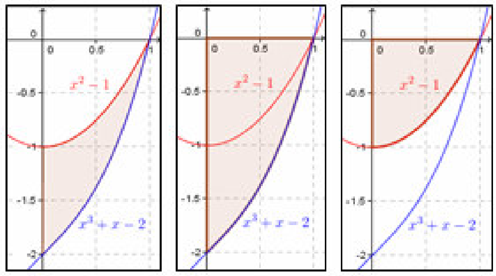


Possiamo anche calcolare aree racchiuse da due o più funzioni.

Esempio 7

Vogliamo calcolare l'area racchiusa dalle funzioni $y = x^2 - 1$, $y = x^3 + x - 2$ e dall'asse delle ordinate. L'area da calcolare è quella mostrata nella prima figura in basso. Come possiamo calcolarla? Teniamo conto che siamo interamente nel semipiano negativo delle ordinate. Allora calcolando $\int_0^1 \left(x^3 + x - 2\right) dx$ avremo l'opposto dell'area mostrata nella seconda figura. Invece $\int_0^1 \left(x^2 - 1\right) dx$ è l'opposto dell'area nella terza figura. Quindi il modo corretto di calcolare l'area cercata è: $\int_0^1 \left[\left(x^2 - 1\right) - \left(x^3 + x - 2\right)\right] dx = \int_0^1 \left(-x^3 + x^2 - x + 1\right) dx =$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{7}{12}.$$



Verifiche

Lavoriamo insieme

- Calcolare $\int_0^1 \frac{ln(x)}{x}\,dx$. L'integrale non ha significato (nei paragrafi successivi tratteremo questo tipo di integrali) perché la funzione integranda non è definita per $x = 0$.
- Invece $\int_1^2 \frac{ln(x)}{x}\,dx$ ha significato e si ha: $\int_1^2 \frac{ln(x)}{x}\,dx = \left[\frac{ln^2(x)}{2}\right]_1^2 = \frac{ln^2(2)}{2}$.

Dire quale dei seguenti integrali sono definiti, giustificando la risposta

Livello 1

1. $\int_{-1}^{1}\sqrt{x}\,dx$; $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$; $\int_{-1}^{1}ln(|x|)\,dx$; $\int_{-2}^{-1}sin(x)\,dx$; $\int_{1}^{2}sin^{-1}(x)\,dx$ [Sì ; No ; No ; Sì ; No]
2. $\int_{10}^{11}tan^{-1}(x)\,dx$; $\int_{0}^{2}tan(x)\,dx$; $\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}dx$; $\int_{-1}^{1}x\cdot cot(x)\,dx$ [No ; No ; Sì ; No]

Calcolare i seguenti integrali definiti

Livello 1

3. $\int_{1}^{2}\left(e^x-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$; $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(sin(x)+cos(x))\,dx$; $\int_{-1}^{1}(x+2)^3\,dx$ $\left[e^2-e+3\cdot\sqrt[3]{2}-\frac{7}{2};2;20\right]$
4. $\int_{0}^{2}(x^2+1)^2\,dx$; $\int_{0}^{3}\frac{x^2+x+1}{x+1}dx$; $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-x}{\sqrt{x}}dx$ $\left[\frac{206}{15};ln(4)+\frac{9}{2};-\frac{2\cdot\sqrt[6]{2}}{5}+\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{31}{30}\right]$
5. $\int_{-2}^{-1}\frac{3x^3+2x^2-x}{x}dx$; $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{sin(2x)}{cos(x)}dx$; $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos(2x)}{sin^2(x)}dx$; $\int_{0}^{1}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$ $\left[3;1-\sqrt{2};1-\frac{\pi}{2};ln\left(\frac{e^2+1}{2}\right)-1\right]$
6. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{cos(x)-cos(5x)}{sin(2x)}dx$; $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin(x)-cos(x)}{sin(x)+cos(x)}dx$; $\int_{1}^{\sqrt{2}}\frac{x^2-1}{x^2+1}dx$ $\left[\frac{2}{3};0;2\cdot tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\pi}{2}+\sqrt{2}-1\right]$
7. $\int_{-1}^{1}\frac{(e^x-e^{-x})^2}{e^x}dx$; $\int_{0}^{1}\frac{2^x+4^{-x}}{2^x}dx$; $\int_{-1}^{1}\frac{x^4+x^2-1}{x^2+1}dx$ $\left[\frac{e^3}{3}-e+\frac{1}{e}-\frac{1}{3e^3};\frac{7}{24\cdot ln(2)}+1;\frac{2}{3}-\frac{\pi}{2}\right]$
8. $\int_{-2}^{-1}(x^3-1)^4\cdot x^2\,dx$; $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}sin^4(x)\cdot cos(x)\,dx$; $\int_{1}^{2}\sqrt{x^2-x}\cdot(2x-1)\,dx$ $\left[\frac{5917}{15};\frac{\sqrt{2}}{20};\frac{4\sqrt{2}}{3}\right]$
9. $\int_{0}^{\pi}x^3\cdot sin(x^4)\,dx$; $\int_{-1}^{1}e^{2x}\cdot(e^{3x}-1)\,dx$; $\int_{-\sqrt{3}}^{1}\frac{tan^{-1}(x)}{1+x^2}dx$ $\left[\frac{1-cos(\pi^4)}{4};\frac{e^5}{5}-\frac{e^2}{2}+\frac{1}{2e^2}-\frac{1}{5e^5};-\frac{\pi^2}{18}\right]$
10. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{6}}[sin(x)+cos(x)]\cdot csc(x)\,dx$; $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; $\int_{-\sqrt{3}}^{0}\frac{x^2-2}{x^2+1}\,dx$ $\left[\frac{\pi-6\cdot ln(2)}{12};0;-\frac{6\cdot\sqrt{3}}{5}\right]$

11. $\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \frac{\left[sin^{-1}(x)\right]^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$; $\int_1^e \frac{e^{ln(x)+1}}{x}dx$; $\int_0^1 \frac{1}{x^2+12x+36}\ dx$; $\int_2^3 \frac{4x}{x^6-3x^4+3x^2-1}dx$ $\left[\frac{35\pi^3}{5184};e^2-e;\frac{1}{42};\frac{55}{576}\right]$

12. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\cdot ln(x^3)}dx$; $\int_{-1}^1 x\cdot\sqrt{x^2-1}\,dx$; $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^3\cdot\sqrt[5]{x^4+1}\,dx$; $\int_{\pi^3/27}^{\pi^3} \frac{cos\left(\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ $\left[ln\left(\sqrt[3]{2}\right);0;0;-\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\right]$

13. $\int_{-1}^0 \frac{x}{x^2+9}dx$; $\int_{e^{\frac{\pi}{3}}}^{e^{\frac{\pi}{4}}} \frac{sin\left[ln(x)\right]}{x}dx$; $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} sin(x)\cdot e^{cos(x)}dx$ $\left[ln\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right);\frac{1-\sqrt{2}}{2};\sqrt{e}-1\right]$

Livello 2

14. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cdot sin(x)dx$; $\int_0^{\pi} e^x\cdot cos(x)dx$; $\int_{-1}^1 x^2\cdot e^x dx$; $\int_1^{\sqrt{e}} ln\left(x^2\right)dx$ $\left[0;-\frac{e^{\pi}+1}{2};e-\frac{5}{e};2-\sqrt{e}\right]$

15. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x\cdot sin^{-1}(x)dx$; $\int_1^{ln(2)} x\cdot e^{2x}dx$; $\int_{\frac{1}{e}}^{e} ln(x)dx$; $\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} sin^{-1}(x)dx$ $\left[\frac{\pi+6\cdot\sqrt{3}}{48};\frac{8\cdot ln(2)-e^2-4}{4};\frac{2}{e};\frac{3-\sqrt{3}}{6}\pi-\frac{1}{2}\right]$

16. $\int_{-\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} tan^{-1}(x)\ dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cdot sin(x)\ dx$; $\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{ln(x)}{x^2}dx$; $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x\cdot(x-1)^2}dx$ $\left[\frac{9ln(3)-5\sqrt{3}\pi}{18};\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2};\frac{3\sqrt{e}-4}{2e};ln\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{6}\right]$

17. $\int_0^1 \frac{x}{x^2-5x+6}dx$; $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2-x-2}dx$; $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2-7x+10}dx$; $\int_1^2 \frac{1}{x^2\cdot(x+1)}dx$ $\left[ln\left(\frac{32}{27}\right);\frac{3-7ln(2)}{3};ln\left(\frac{4}{3}\right);ln\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}\right]$

Usando il metodo di sostituzione calcolare i seguenti integrali definiti

Livello 2

18. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{5+4\cdot cos(x)}$ (Sugg. Effettuare la sostituzione $u = tan\ x$) ; $\int_1^2 x^2\cdot\sqrt{x-1}\,dx$ $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2}dx$ $\left[\frac{\pi}{18};\frac{84}{105};\frac{9\pi}{2}\right]$

19. $\int_0^1 (x-1)\cdot\sqrt{x+1}\,dx$; $\int_0^1 \frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}dx$; $\int_0^1 \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx$ $\left[\frac{14-16\cdot\sqrt{2}}{15};ln(16)-3;\frac{3\pi}{2}-ln(9)-\frac{279}{140}\right]$

20. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}dx$; $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}+1}dx$; $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x+1}}dx$ $\left[2\cdot\sqrt{2}\cdot ln\left(\sqrt{2}-1\right)+2;ln(9)-\frac{7}{4};\frac{32-18\cdot\sqrt{2}}{35}\right]$

21. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(x)}{\sqrt{1+cos^2(x)}}dx$; $\int_0^{\pi} sin(n\cdot x)\ dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^3(x)}{sin^3(x)+cos^3(x)}\ dx$ $\left[ln\left(\sqrt{2}+1\right);0 \text{ se } n \text{ pari}\vee\frac{2}{n} \text{ se } n \text{ dispari};\frac{\pi}{4}\right]$

22. Che cosa rappresenta l'ultimo integrale del n.18? [L'area di un semicerchio di raggio 3]

Livello 3

23. Se una funzione $f(x)$ pari è continua in $[-a; a]$, quanto vale $\int_{-a}^{a} f(x)\ dx$? $\left[2\cdot\int_0^a f(x)\ dx\right]$

24. Se una funzione $f(x)$ dispari è continua in $[-a; a]$, quanto vale $\int_{-a}^{a} f(x)\ dx$? [0]

25. Sapendo che $f(x)$ è integrabile in [0, 4] e $\int_0^4 f(x)\ dx = 10$, calcolare $\int_0^2 f(2x)\ dx$. [5]

26. Sapendo che $f(x)$ è integrabile in [0, 4] e $\int_3^6 f(x)\,dx = 6$, calcolare $\int_1^2 f(3x)\,dx$. [2]

Applicare, se possibile, il teorema della media integrale alle seguenti funzioni, nell'intervallo indicato, determinando l'ascissa del valore medio

Livello **1**

27. $f(x) = x^3 + 1, x \in [0; 1]$; $f(x) = x^2 - x + 1, x \in [-1; 1]$ $\left[c = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}; c = \frac{3-\sqrt{21}}{6}\right]$

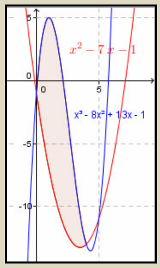
28. $f(x) = \frac{x+1}{x}, x \in [0;1]$; $f(x) = \frac{x+1}{x}, x \in [1;3]$ $\left[\text{Non applicabile; } c = \frac{2}{ln(3)}\right]$

29. $f(x) = ln(x), x \in [1; e]$; $f(x) = sin^{-1}(x), x \in [0; 1]$ $\left[c = \sqrt[e-1]{e}; c = cos(1)\right]$

30. $f(x) = tan(x), x \in [0; 2]$; $f(x) = cos(x),\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $\left[\text{Non applicabile; } c = cos^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)\right]$

31. $f(x) = \lfloor x \rfloor, x \in [-1; 1]$; $f(x) = \lfloor x \rfloor, x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$ $\left[\text{Non applicabile ; } \frac{1}{4} \le c \le \frac{1}{2}\right]$

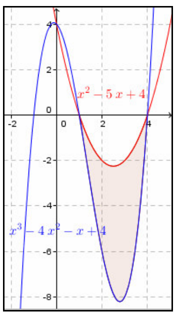
Lavoriamo insieme

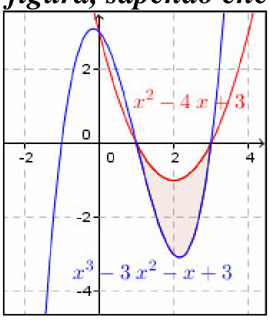


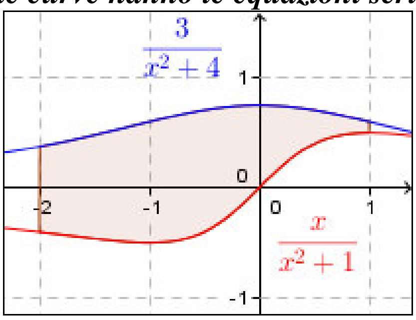
In figura abbiamo rappresentato le funzioni $f(x) = x^2 - 7x - 1$, $g(x) = x^3 - 8x^2 + 13x - 1$. Vogliamo calcolare l'area colorata che esse racchiudono. La figura suggerisce che le intersezioni abbiano ascisse $x = 0$ e $x = 4$. Ce ne assicuriamo sostituendo e verificando che per tali valori le funzioni assumono lo stesso valore (lo lasciamo per esercizio). Adesso come possiamo calcolare l'area? $\int_0^4 \left(x^3 - 8x^2 + 13x - 1\right) dx$ calcola l'area della parte di curva di [0; 2] e l'opposto dell'area compresa tra la curva blu e l'asse x in [2; 4]. Invece $\int_0^4 \left(x^2 - 7x - 1\right) dx$ calcola l'opposto dell'area compresa tra la curva rossa e l'asse x in [0; 4]. Quindi il corretto calcolo è: $\int_0^4 \left(x^3 - 8x^2 + 13x - 1\right) - \int_0^4 \left(x^3 - 9x^2 + 20x\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{\cancel{9}^{3} x^3}{\cancel{3}} + \frac{\cancel{20}^{10} x^2}{\cancel{2}}\right]_0^4 = 64–192+160 = 32.$

Livello **1**

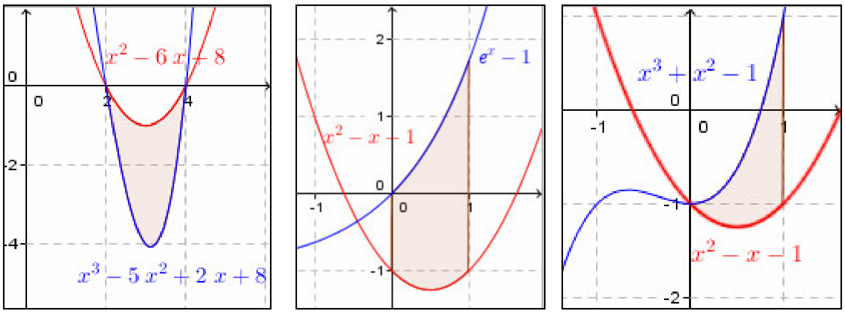
Calcolare le aree in figura, sapendo che le curve hanno le equazioni scritte accanto a ciascuna

32. 





$\left[\frac{32}{2}; \frac{37}{12}; \frac{3}{2} \cdot tan^{-1}(3) + ln\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\right]$

33. 

$\left[4; e - \frac{5}{6}; \frac{3}{4}\right]$

Livello 2

34. Calcolare l'area della regione delimitata dal grafico della funzione $y = \sqrt{x-1}$, dalla retta x = 10 e dall'asse x. [18]

35. Calcolare l'area della regione R delimitata dal grafico della funzione $y = \frac{20}{1+x^2}$, dalla retta y = 2 e dai primi due quadranti. [20 tan^{-1} (3) – 6]

36. Calcolare l'area della regione R delimitata dal grafico della funzione $y = 2 \cdot \sqrt{x}$, dalla retta y = 6 e dall'asse y. $\left[38 - 8 \cdot \sqrt{6}\right]$

37. Determinare l'area delimitata dalle funzioni $f(x) = 2x \cdot (1-x); g(x) = 3 \cdot (x-1) \cdot \sqrt{x}$ in [0; 1]. $\left[\frac{17}{15}\right]$

38. Determinare l'area R delimitata dalle funzioni $f(x) = 1 + sin(2x); g(x) = e^{x/2}$ nel primo quadrante. [≈0,429]

Lavoriamo insieme

Il tasso con cui il pubblico entra in un teatro segue la legge $y(t) = 1380t^2 - 675t^3, 0 \le t \le 2$, in cui t indica il tempo dall'apertura che dura 2 ore.

- Vogliamo sapere quanta gente c'è al teatro all'inizio dello spettacolo. Tutta la gente entrata è la somma di quanta ne entra nel generico instante t, quindi, considerando t come un numero reale la risposta è data da $\int_0^2 \left(1380t^2 - 675t^3\right) dt = \left[\cancel{1380}^{460} \cdot \frac{t^3}{\cancel{3}} - 675 \cdot \frac{t^4}{4}\right]_0^2 = 460 \cdot 8 - 675 \cdot \frac{16}{4} = 980$.
- Adesso vogliamo trovare dopo quanto tempo dall'apertura il tasso di ingresso è massimo, quindi dobbiamo risolvere l'equazione $y'(t) = 0 \to 2 \cdot 1380t - 3 \cdot 675t^2 = 0 \to t = 0 \vee t = \frac{184}{135} \approx 1,262$. Ovviamente t = 0 è un minimo relativo, anzi assoluto, mentre l'altro valore fornisce il massimo.

Livello 2

39. Nella tabella seguente mostriamo la temperatura di un filo metallico risaldato a un suo estremo a seconda dalla distanza dall'estremo. Per determinare la temperatura media della temperatura possiamo usare il metodo della somma dei plurirettangoli con i quattro intervalli indicati nella tabella. [≈ 75,69°C]

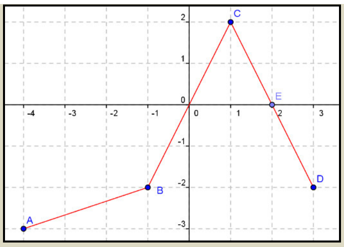
Distanza (*cm*)	0	1	5	6	8
Temperatura (°C)	100	93	70	62	55

40. CAS Un serbatoio di un piccolo condominio contiene 3000 litri di acqua. Ogni giorno esso riceve acqua da mezzanotte a mezzogiorno secondo la legge $f(t) = 125 \cdot \sqrt{t} \cdot sin^2\left(\frac{t}{6}\right)$; mentre i condomini prelevano acqua durante tutto il giorno secondo la legge $g(t) = 235 \cdot sin^2\left(\frac{t}{3}\right)$ ogni ora. Quanta acqua vi sarà nel serbatoio a mezzogiorno? Il serbatoio si svuoterà prima della mezzanotte? Se la risposta è positiva, a che ora si svuoterà? Se la risposta è negativa, per quanto tempo, dopo mezzogiorno, si può evitare di

immettere acqua nel serbatoio senza che esso si svuoti, rimanendo inalterata la legge $g(t)$?

[≈ 4249; no; ≈ 37,7]

Lavoriamo insieme

- 

In figura vi è il grafico di una funzione $f(x)$. Sia la funzione $g(x)=\int_{-4}^{x} f(t)\,dt$. Vogliamo determinare, se esistono, $g(-1)$, $g'(-1)$ e $g''(-1)$. Si ha: $g(-1)=\int_{-4}^{-1} f(t)\,dt=-\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5=-\frac{15}{2}$ (è l'opposto dell'area del trapezio ABB_xA_x, con A_x e B_x proiezioni di A e B sull'asse x). $g'(-1)=f(-1)=-2$; $g''(-1)$ non esiste perché f non è derivabile in $x=-1$, dato che vi è un punto angoloso.
- Ora vogliamo trovare le ascisse dei punti di flesso di g in $(-4, 3)$. La funzione f cambia crescenza quando $x=1$, quindi per tale valore g' cambia segno, che perciò è un punto di flesso.
- Adesso vogliamo determinare gli zeri della funzione $h(x)=\int_{x}^{3} f(t)\,dt$ in $[-4; 3]$. Sicuramente $h(3)=0$. Poi, perché sia $h(x)=0$, gli intervalli devono contenere valori in cui $f(x)>0$, cioè sottoinsiemi di $[0; 2]$. Il triangolo BCD in figura, è isoscele di base BD e OE divide l'area in due parti uguali, quindi sicuramente è $h(-1)=0$. E per lo stesso motivo anche $h(1)=0$.
- Infine vogliamo determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione h. Si ha $h'(x)=-f(x)$, quindi $h'(x)>0 \to f(x)<0 \to x\in(-3; 0)\cup(2; 3)$. $h'(x)<0 \to f(x)>0 \to x\in(0; 2)$.

Livello 3

41. Consideriamo la funzione $y=x^n$, con $n>1$. Calcolare l'area delimitata dalla funzione e dall'asse x per $0\le x\le 1$, al variare di n. Fare lo stesso per l'area del triangolo determinato dalla retta tangente al grafico della funzione nel punto (1;1), dall'asse x e da $x=1$. Infine calcolare l'area ottenuta come sottrazione delle precedenti due e determinare per quale n essa è massima e il valore di tale area massima.

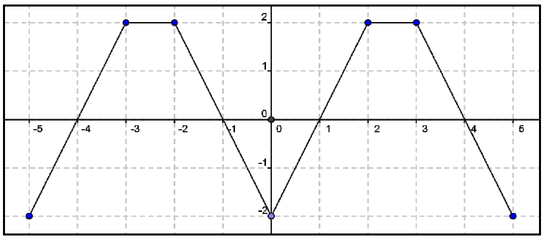
$$\left[\frac{1}{n+1};\frac{1}{2n};\left(1+\sqrt{2};\frac{3-2\cdot\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

42. Consideriamo il grafico di una funzione $f(x)$, formata dai segmenti AB, BC e DE, con $A\equiv(-5;-2)$, $B\equiv(-3;2)$, $C\equiv(0;1)$, $D\equiv(2;1)$, $E\equiv(4;-1)$ e dal semicerchio di estremi CD tangente all'asse x. Consideriamo la funzione $g(x)=\int_{-3}^{x} f(t)\,dt$. Determinare $g(0)$ e $g'(0)$. Trovare le ascisse dei punti di massimo relativo di g in $[-5; 4]$. Fare lo stesso per i flessi. [$g(0)=\frac{9}{2}$; $g'(0)=1$; $x_M=-3$; 1; 2]

43. La marea toglie sabbia alla costa secondo la seguente legge: $f(t)=2+5\cdot sin\left(\frac{4\pi}{25}\cdot t\right)$, il comune ha perciò deciso di reintegrare la sabbia persa aggiungendola con una speciale pompa secondo la legge $g(t)=\frac{15t}{1+3t}$. Entrambe le funzioni calcolano metri cubi di sabbia per ore. Sappiamo che all'inizio della nostra osservazione in una zona di spiaggia vi sono 2500 metri cubi di sabbia. Vogliamo sapere a) Quanti metri cubi di sabbia vengono rimossi dalla marea nelle prime 6 ore; b) il tasso di variazione

della quantità di sabbia sulla spiaggia dopo 4 ore; c) dopo quante ore, nelle prime 6, la quantità di sabbia sulla spiaggia sarà al minimo, e quanto sarà questo minimo.

[a) ≈ 31815; b) ≈ –1,9 m^3/h; c) ≈ 5,12 ore; ≈ 2492,37 m^3]

44. 

In figura vi è il grafico di una funzione $f(x)$. Consideriamo $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. Determinare a) $g(4)$, $g'(4)$, $g''(4)$. b) Per $x = 1$, $g(x)$ ha un estremo relativo? Giustificare la risposta. c) Supposto che $f(x)$ sia una funzione periodica di periodo 5, di cui mostriamo due periodi, sapendo che $g(5) = 2$, determinare $g(10)$ e scrivere l'equazione della tangente al grafico di g per $x = 108$.

[a) 3; 0; –2; b) minimo relativo; c) $y = 2x – 172$]

Volume di alcuni solidi di rotazione e lunghezza di alcune curve piane

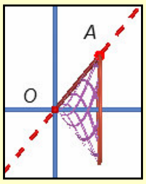
Il problema

Possiamo utilizzare gli integrali per calcolare il volume dei solidi?

Il problema posto ha soluzione in alcuni casi.

Esempio 8

Consideriamo la retta $y = x$ e il segmento da essa individuato dai suoi punti $O \equiv (0;\ 0)$ e $A \equiv (1;\ 1)$. Se facciamo ruotare questo segmento di 2π attorno all'asse delle ascisse determiniamo il cono in figura.



Questo cono ha altezza lunga 1 (l'ascissa di A) e raggio anch'esso lungo 1 (l'ordinata di A). Il volume lo possiamo determinare con il metodo degli indivisibili di Cavalieri, che abbiamo studiato nel Capitolo 6, Unità 4. Infatti, la sezione del cono con un piano parallelo alla base fornisce un cerchio di raggio pari all'ordinata del corrispondente punto sulla retta. Quindi detta x l'ascissa generica, con $0 < x < 1$, l'ordinata sarà anch'essa uguale a x e perciò l'area del generico cerchio sarà pari a $\pi \cdot x^2$. Poiché il volume deve essere la somma delle aree di questi infiniti cerchi e poiché la somma di infiniti elementi abbiamo visto essere l'integrale, possiamo dire che il volume cercato è dato da $\int_0^1 \pi \cdot x^2\, dx = \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}$. E in effetti noi sappiamo che il volume di un cono di raggio r e altezza h è $\pi \cdot \frac{r^2 \cdot h}{3}$. In questo caso $r = h = 1$.

Quanto visto nell'esempio precedente si può generalizzare per il volume generato da una funzione continua nella sua rotazione completa attorno all'asse delle ascisse.

Teorema 6

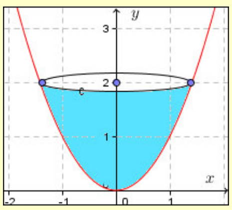
Il volume del solido ottenuto dalla rotazione di 2π della funzione continua $y = f(x)$ attorno all'asse delle ascisse, nell'intervallo $[a;\ b]$ è $\pi \cdot \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$.

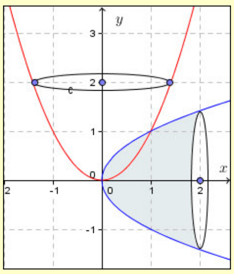
Dimostrazione per esercizio sulla falsariga dell'Esempio 8.

Il precedente risultato vale solo per rotazioni attorno all'asse x.

Esempio 9

Vogliamo calcolare il volume ottenuto facendo ruotare la parabola $y = x^2$ attorno all'asse y in $[0;\ 2]$. Il volume da calcolare è quello nella prima figura seguente.





Non possiamo applicare il Teorema 6, allora ruotiamo la funzione attorno all'origine di 90°, o, che è lo stesso, consideriamo la simmetrica rispetto alla prima bisettrice, quindi ruotiamo attorno all'asse x, ovviamente il volume così ottenuto è uguale al precedente. A questo punto (vedi la seconda figura), sappiamo calcolare il volume, poiché possiamo applicare il teorema 6. Ovviamente la funzione non è più quella di partenza, bensì la sua inversa, cioè $y=\sqrt{x}$: $\pi \cdot \int_0^2 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^2 x\,dx = \pi \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2\pi$.

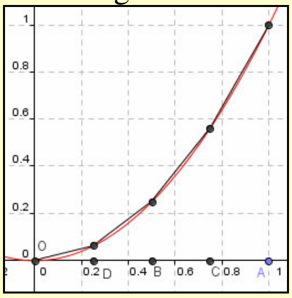
Il problema

Possiamo utilizzare gli integrali per calcolare la lunghezza di alcuni tratti di curve?

Anche in questo caso il problema posto ha soluzione sotto alcune ipotesi.

Esempio 10

Consideriamo l'arco della parabola $y = x^2$, di estremi i punti $O \equiv (0; 0)$ e $A \equiv (1; 1)$. Per calcolare la sua lunghezza possiamo effettuare un procedimento simile a quello del calcolo delle aree, ossia dividiamo il segmento [0; 1] in un certo numero di parti uguali ed uniamo i punti corrispondenti sulla curva, ottenendo una poligonale che ha un valore certamente minore della lunghezza cercata, dato che il segmento è il percorso più breve fra due punti, come mostrato in figura.



In questo caso si ha: $\sqrt{\left(\frac{1}{4}-0\right)^2+\left(\frac{1}{16}-0\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{16}-\frac{1}{4}\right)^2}+\sqrt{\left(1-\frac{3}{4}\right)^2+\left(1-\frac{9}{16}\right)^2}\approx 1{,}47$

Ovviamente se dividessimo l'intervallo in un maggior numero di parti otterremmo un valore più preciso.

Generalizzando il risultato dell'esempio possiamo enunciare il seguente risultato.

Teorema 7

Data la funzione continua e derivabile $y = f(x)$ in $[a; b]$, il suo tratto compreso tra le ascisse $x = a$ e $x = b > a$, è lungo $\int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$.

Dimostrazione

Dividiamo l'intervallo $[a; b]$ in n parti uguali, ognuno di ampiezza $\frac{b-a}{n}$, il generico segmento di estremi $[x_{i-1}; x_i]$ individua sulla funzione i punti di coordinate $(x_{i-1}; f(x_{i-1}))$, $(x_i; f(x_i))$, ed ha perciò lunghezza $\sqrt{\left(x_i-x_{i-1}\right)^2+\left[f\left(x_i\right)-f\left(x_{i-1}\right)\right]^2}$. Quindi per ottenere la lunghezza della poligonale sommiamo quella di tutti i segmenti che la compongono: $\sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{\left(x_i-x_{i-1}\right)^2+\left[f\left(x_i\right)-f\left(x_{i-1}\right)\right]^2}$, con $x_0 = a$ e $x_n = b$.

Facendo tendere n all'infinito otterremo la lunghezza della curva:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{\left(x_i-x_{i-1}\right)^2+\left[f\left(x_i\right)-f\left(x_{i-1}\right)\right]^2}\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{1+\left[\frac{f\left(x_i\right)-f\left(x_{i-1}\right)}{\left(x_i-x_{i-1}\right)}\right]^2}\cdot\left(x_i-x_{i-1}\right)\right\}.$$

Osserviamo che all'interno del radicando il secondo addendo è il rapporto incrementale della funzione $f(x)$, dato che al tendere di n all'infinito, $(x_i - x_{i-1})$ tende a zero. Perciò passando al limite otteniamo la derivata prima della funzione, la sommatoria tende all'integrale e l'ampiezza dell'intervallo tende a zero, cioè all'infinitesimo dx. Da cui la tesi.

Applichiamo il teorema 7 alla curva trattata nel precedente esempio.

Esempio 11

L'arco della parabola $y = x^2$, di estremi i punti $O \equiv (0; 0)$ e $A \equiv (1; 1)$ misura $\int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx$.

Per calcolare questo integrale usiamo la sostituzione $x = \frac{e^t - e^{-t}}{4} \Rightarrow dx = \frac{e^t + e^{-t}}{4}dt\,x$. Infatti in tal modo otteniamo: $\sqrt{1+4x^2} = \sqrt{1+\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{e^{2t}-2+e^{-2t}}{4}} = \sqrt{\frac{2+e^{2t}+e^{-2t}}{4}} = \sqrt{\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2} = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$. Per determinare cosa diventano gli estremi, ricaviamo t: $x = \frac{e^t - e^{-t}}{4} = \frac{e^t - \frac{1}{e^t}}{4} = \frac{e^{2t}-1}{4 \cdot e^t} \Rightarrow e^{2t} - 4 \cdot x \cdot e^t - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^t = 2x + \sqrt{4x^2+1} \Rightarrow t = ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)$, quindi gli estremi sono 0 e $ln\left(2+\sqrt{5}\right)$. L'integrale è perciò:

$$\int_0^{ln\left(2+\sqrt{5}\right)} \frac{e^t + e^{-t}}{2} \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{4}dt = \int_0^{ln\left(2+\sqrt{5}\right)} \frac{e^{2t}+e^{-2t}+2}{8}dt \left[\frac{e^{2t}}{16} - \frac{e^{-2t}}{16} + \frac{1}{4}t\right]_0^{ln\left(2+\sqrt{5}\right)} =$$

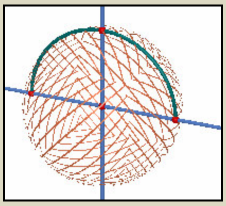
$$= \frac{4+2\cdot\sqrt{5}}{16} - \frac{1}{16\cdot\left(4+2\cdot\sqrt{5}\right)} + \frac{ln\left(2+\sqrt{5}\right)}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{ln\left(2+\sqrt{5}\right)+2\cdot\sqrt{5}}{4} \approx 1,48.$$

Sottolineiamo il fatto che con questa procedura in generale si ottengono integrali di difficile calcolo (spesso non integrabili elementarmente), anche per curve di equazione *semplice*.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo far vedere che il volume di una sfera di raggio 1 unità è $\frac{4\pi}{3}$ unità cubiche. Una sfera di raggio 1, può ottenersi facendo ruotare la semicirconferenza di equazione $y = \sqrt{1-x^2}$, di un giro completo attorno all'asse *x*, per la lunghezza del suo diametro che ha estremi (–1; 0) e (1; 0).



Quindi il volume misura proprio: $\pi \cdot \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right) dx = \pi \cdot \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \pi \cdot \left[1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)\right] = \frac{4}{3}\pi$.

Livello 1

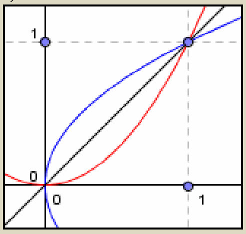
1. Usando il calcolo integrale come possiamo calcolare il volume di un cilindro retto? [Facendo ruotare un segmento parallelo all'asse delle ascisse lungo quanto l'altezza]
2. Usando il calcolo integrale calcolare il volume di un cilindro di raggio 1 e altezza 2. [2π]
3. Facendo ruotare un quarto di circonferenza di estremi (1; 0) e (0; 1) attorno all'asse *x* determinare il volume di una semisfera di raggio 1. $\left[\frac{2}{3}\pi\right]$
4. Usando il calcolo integrale come possiamo calcolare il volume di un cono retto? [Facendo ruotare un segmento passante per l'origine lungo quanto l'apotema e di pendenza che determina l'angolo di apertura del cono]
5. Usando il calcolo integrale calcolare il volume di un cono retto di raggio 1 e altezza 2. $\left[\frac{2}{3}\pi\right]$
6. Usando il calcolo integrale come possiamo calcolare il volume di un tronco di cono retto? [Facendo ruotare un segmento non passante per l'origine e non parallelo agli assi, lungo quanto l'apotema]
7. Usando il calcolo integrale calcolare il volume di un tronco di cono di raggi di base lunghi 1 e 2 e altezza 2. $\left[\frac{14\pi}{3}\right]$

Determinare il volume ottenuto facendo ruotare le seguenti funzioni attorno all'asse delle ascisse, nell'intervallo indicato

8. $y = sin(2x),\ x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; $y = x^2 + x,\ x \in [-1; 0]$; $y = \sqrt{x}, x \in [0;1]$; $y = \frac{1}{\sqrt{x}}, x \in [1;2]$ $\left[\frac{\pi^2}{4}; \frac{\pi}{30}; \frac{\pi}{2}; \pi \cdot ln(2)\right]$
9. $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, x \in \left[0; \sqrt{3}\right]$; $y = \frac{1}{x}, x \in [1; e]$; $y = sin(x) + cos(x),\ x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; $y = \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}}, x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ $\left[\frac{\pi^2}{3}; \frac{e-1}{e}\pi; \frac{\pi \cdot (\pi+2)}{2}; \frac{\pi^2}{6}\right]$
10. $y = \sqrt{\frac{x+1}{x}}, x \in [1;e]$; $y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x}}, x \in \left[1; e^2\right]$; $y = \sqrt{x} \cdot e^x, x \in [0;1]$ $\left[\pi e; \frac{e^4+3}{2}\pi; \frac{e^2+1}{4}\pi\right]$
11. $y = \sqrt{ln(x)}, x \in [1;e]$; $y = ln(x),\ x \in [1; e]$; $y = \sqrt{x \cdot sin(x)}, x \in [0;\pi]$ $[\pi ; \pi \cdot (e-2) ; \pi^2]$

Lavoriamo insieme

I risultati enunciati valgono solo per rotazioni attorno all'asse delle ascisse, come possiamo allora calcolare il volume del solido generato dalla parabola $y = x^2$ che ruota attorno all'asse delle y, per $0 \le y \le 1$? Basta effettuare una simmetria rispetto alla prima bisettrice, in modo da ottenere una curva che ruotando attorno all'asse delle ascisse genera un volume equivalente.



In questo modo la parabola $y = x^2$, diventa la parabola $x = y^2$, che per essere una funzione deve essere considerata come $y=\sqrt{x}, x\in[0,1]$.

Pertanto il volume cercato sarà $\pi\cdot\int_0^1\left(\sqrt{x}\right)^2\,dx=\pi\cdot\int_0^1 x\,dx=\pi\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}$.

Calcolare i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare le seguenti curve attorno all'asse delle ordinate

Livello 2

12. $y = x^2, x\in[0;\,1]$; $y=\frac{1}{\sqrt{x}}, x\in[1;2]$; $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, x\in[0;1]$ $\left[\frac{\pi}{2};\frac{4-\sqrt{2}}{12}\pi;\frac{4-3\cdot\sqrt{2}}{2}\pi\right]$

13. $y = e^x, x\in[0;\,1]$; $y=sin^{-1}\left(x^2\right), x\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$; $y=\frac{1}{x^4}, x\in[0;1]$ $\left[(e-2)\pi;\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\pi;2\pi\right]$

14. $y=ln\left(\sqrt{x}\right), x\in\left[e;e^2\right]$; $y=e^{x^2}, x\in[0;1]$ $\left[\frac{e^2\cdot\left(e^2-1\right)}{4}\pi;\pi\right]$

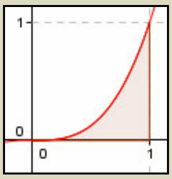
Livello 3

15. $y = sin(x),\ x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; $y=x\cdot\sqrt{x}+1, x\in[0;1]$ $\left[\frac{\pi^2-8}{4}\pi;\frac{6\cdot\sqrt[3]{4}-3}{5}\pi\right]$

16. Data la regione delimitata dal grafico della funzione $y=\sqrt{x-1}$, dalla retta $x = 10$ e dall'asse x, determinare il volume del solido generato dalla rotazione della detta regione attorno la retta $y = 3$ e poi attorno alla retta $x = 10$. $\left[\frac{135\pi}{2};\frac{348\pi}{5}\right]$

Lavoriamo insieme

La regione R delimitata dal grafico della funzione $y = x^3$, dalla retta $x = 1$ e dall'asse delle ascisse è base di un solido le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono quadrati, determinare il volume di tale solido. La regione è quella mostrata in figura.



Il generico quadrato ha quindi lato che misura quanto l'ordinata del generico punto sulla funzione, cioè x^3, perciò l'area del generico quadrato è $(x^3)^2 = x^6$.

Usando il consueto metodo degli indivisibili, il volume cercato sarà $\int_0^1 x^6\,dx=\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^1=\frac{1}{7}$.

Livello 2

17. Calcolare il volume del solido avente per base la regione intersezione della parabola $y = x^2 - 5x + 6$, con l'asse delle ascisse e le cui sezioni perpendicolari all'asse delle x sono quadrati. $\left[\frac{1}{30}\right]$

18. Calcolare il volume del solido avente per base la regione intersezione della parabola $y = x^2 - 7x + 10$, con l'asse delle ascisse e le cui sezioni perpendicolari all'asse delle x sono triangoli equilateri. $\left[\frac{81}{40}\cdot\sqrt{3}\right]$

19. Calcolare il volume del solido avente per base una delle regioni intersezioni della sinusoide con l'asse delle ascisse e le cui sezioni perpendicolari all'asse delle x sono rettangoli le cui dimensioni sono una doppia dell'altra. $[\pi]$

20. Calcolare il volume del solido avente per base la regione intersezione della curva $y = ln(x)$, con l'asse delle ascisse e la retta $x = 2$, le cui sezioni perpendicolari all'asse delle x sono trapezi rettangoli, la cui base maggiore poggia sul piano Oxy, mentre base minore e altezza sono lunghe metà della base maggiore. $\left[\frac{3}{4}\cdot\left(ln^2(2) - ln(4) + 3\right)\right]$

21. Calcolare il volume del solido avente per base la regione intersezione delle curve $y = e^x$, $y = e^{-x}$, dall'asse y e dalla retta $x = 1$, le cui sezioni perpendicolari all'asse delle x sono quadrati. $\left[\frac{1}{2}\cdot\left(e^2 - e^{-2} - 4\right)\right]$

22. Calcolare il volume del solido avente per base una delle regioni intersezioni delle curve $y = sin(x)$, $y = cos(x)$, le cui sezioni perpendicolari all'asse delle x sono triangoli rettangoli i cui cateti sono nel rapporto $\frac{2}{3}$. $\left[\frac{\pi}{3}\right]$

23. Data la regione R delimitata dal grafico della funzione $y = \frac{20}{1+x^2}$, dalla retta $y = 2$ e dai primi due quadranti, determinare il volume del solido generato dalla rotazione della detta regione attorno all'asse x. La regione R è base di un solido le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono semicerchi, determinare il volume di tale solido. [≈ 1871,19; ≈ 174,27]

24. Data la regione R delimitata dal grafico della funzione $y = 2\cdot\sqrt{x}$, dalla retta $y = 6$ e dall'asse y, determinare il volume del solido generato dalla rotazione della detta regione attorno alla retta $y = 7$. R è base di un solido le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse y sono rettangoli la cui altezza è il triplo della base, determinare il volume di tale solido. $\left[90\pi; \frac{1458}{5}\right]$

25. Data la regione R delimitata dalle funzioni $f(x) = 2x \cdot (1 - x)$, $g(x) = 3 \cdot (x - 1)\sqrt{x}$ in [0; 1], determinare il volume del solido generato dalla detta area nella sua rotazione attorno alla retta $y = 2$. Consideriamo adesso la funzione $h(x) = x \cdot (1 - x)$, $0 \le x \le 1$. R si può considerare la base di un solido le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono quadrati. Determinare il volume del detto solido. $\left[\frac{103\pi}{20}; \frac{457}{420}\right]$

26. Data la regione R delimitata dalle funzioni $f(x) = 1 + sin(2x)$, $g(x) = e^{\frac{x}{2}}$ nel I quadrante, determinare il volume del solido generato dalla detta area nella sua rotazione attorno all'asse x. L'area R si può considerare la base di un solido le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono semicerchi i cui diametri sono compresi tra le due funzioni. Determinare il volume del detto solido. [≈ 4,27; ≈ 0,078]

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare la lunghezza della curva $y=\sqrt{x}$ nell'intervallo $\left[\frac{1}{32};\frac{1}{12}\right]$. Dobbiamo calcolare $\int_{\frac{1}{32}}^{\frac{1}{12}}\sqrt{1+\left[\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)\right]^2}\,dx=\int_{\frac{1}{32}}^{\frac{1}{12}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx=\int_{\frac{1}{32}}^{\frac{1}{12}}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx$. Applichiamo la sostituzione $1+\frac{1}{4x}=t^2$, da cui $x=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t^2-1}\Rightarrow dx=\frac{-t}{2\cdot\left(t^2-1\right)^2}dt$, e per gli estremi, dato che $t=\sqrt{1+\frac{1}{4x}}:x=\frac{1}{32}\Rightarrow t=\sqrt{1+\frac{1}{\frac{1}{8}}}=3$; $x=\frac{1}{12}\Rightarrow t=\sqrt{1+\frac{1}{\frac{1}{3}}}=2$ ottenendo $\int_3^2 t\cdot\frac{-t}{2\cdot\left(t^2-1\right)^2}dt$. Calcoliamolo per esempio con il metodo della scomposizione in fratti più semplici: $\frac{1}{2}\cdot\int_2^3\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)^2}dt=\left[\frac{t}{4\cdot\left(t^2-1\right)}-\frac{1}{8}\cdot ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_2^3=\frac{7}{96}+\frac{1}{8}\cdot ln\left(\frac{3}{2}\right)\approx 0{,}12$.

Livello 2

27. Usando il calcolo integrale calcolare la lunghezza del segmento di estremi $A\equiv(1;\,2)$ e $B\equiv(3;\,5)$. $\left[\sqrt{13}\right]$

28. Usando il calcolo integrale calcolare la lunghezza dell'arco di circonferenza di estremi $A\equiv(-3;\,1)$ e $B\equiv(1;\,3)$ e centro in $(0;\,0)$. $\left[\frac{\sqrt{10}}{2}\cdot\pi\right]$

29. Calcolare la lunghezza dell'arco di parabola $y=x^2$ in $[-1;\,1]$. $\left[\frac{ln\left(5+\sqrt{2}\right)+2\cdot\sqrt{5}}{2}\right]$

30. Calcolare la lunghezza dell'arco della curva $y=ln(x)$ in $[1;\,2]$. $\left[ln\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{2}-1}{2}\right)+\sqrt{5}-\sqrt{2}\right]$

Livello 3

31. Usando il calcolo integrale calcolare la lunghezza del segmento di estremi $A\equiv(x_A;\,y_A)$ e $B\equiv(x_B;\,y_B)$. $\left[\sqrt{\left(x_A-x_B\right)^2+\left(y_A-y_B\right)^2}\right]$

32. Usando il calcolo integrale calcolare la lunghezza dell'arco di circonferenza di estremi i punti di ascissa x_A e x_B, centro in $(0;\,0)$ e raggio 1, con $-1\le x_A<x_B\le 1$. $[sin^{-1}(x_B)-sin^{-1}(x_A)]$

Integrali impropri e generalizzati

Il problema

Siamo in grado di calcolare l'area delimitata da una funzione in un intervallo in cui essa è continua, e se invece fosse discontinua? Il problema è sempre privo di significato?

Cominciamo con un esempio

Esempio 12

La funzione $y = \frac{1}{x}$ è un' iperbole equilatera riferita ai propri assi, definita per $x \neq 0$, possiamo calcolare l'area da essa sottesa in ogni intervallo che non contiene l'origine. Così per esempio l'area delimitata dall'intervallo [2; 3] è $\int_2^3 \frac{1}{x}dx = \left[ln(x)\right]_2^3 = ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

Rimanendo immutata la procedura precedente cosa accadrebbe se uno degli estremi fosse 0, ossia il punto in cui la funzione non è definita?

Esempio 13

Si ha: $\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \left[ln(x)\right]_0^1 = ln(1) - ln(0) = ?$ Ossia non ha senso il calcolo del logaritmo con argomento nullo, quindi non ha senso neanche il calcolo dell'integrale e di conseguenza dell'area.

In effetti l'area dovrebbe essere delimitata dalla funzione e dal suo asintoto, quindi l'intuizione ci suggerisce che essa debba essere infinita. Per dare senso a questa intuizione potremmo definire il calcolo della precedente area come quello di un limite.

Esempio 14

Potremmo dire che $\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{a\to 0^+}\left[ln(x)\right]_a^1 = ln(1) - \lim_{a\to 0^+} ln(a) = +\infty$.

Poniamo la seguente definizione.

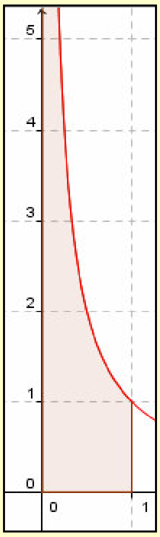
Definizione 2

Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a; x_0) \cup (x_0; b]$, diciamo che $f(x)$ è **integrabile in senso generalizzato**

- **su $[x_0; b]$** se esiste finito $\lim_{c\to x_0^+}\int_c^b f(x)dx$;
- **su $[a; x_0]$** se esiste finito $\lim_{c\to x_0^-}\int_a^c f(x)dx$;
- **su $[a; b]$** se esistono finiti e sono uguali i seguenti limiti: $\lim_{c\to x_0^-}\int_a^c f(x)dx = \lim_{c\to x_0^+}\int_c^b f(x)dx$.

Esempio 15

Consideriamo $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ in [0; 1]. La funzione non è definita per $x = 0$, vediamo se è integrabile in senso generalizzato. Si ha: $\lim\limits_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim\limits_{a\to 0^+}\int_a^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim\limits_{a\to 0^+}\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_a^1 = 2 - \lim\limits_{a\to 0^+} 2\sqrt{a} = 2$. Quindi la funzione è integrabile in senso generalizzato. Graficamente stiamo dicendo che l'area apparentemente infinita nella figura a lato, in effetti misura 2 unità quadrate.



Valgono i seguenti risultati che non dimostreremo

Teorema 8

Sia $f(x)$ continua in $[a; x_0)\cup(x_0; b]$, allora se $|f(x)|$ è integrabile in senso generalizzato su $[a; b]$ anche $f(x)$ lo è.

Teorema 9

Siano $f(x)$ e $g(x)$ continue in $[a; x_0) \cup (x_0; b]$, con $|f(x)| \le g(x)$ $\forall x\in [a; b] \setminus\{x_0\}$, allora se $g(x)$ è integrabile in senso generalizzato su $[a; b]$ lo sono anche $f(x)$ e $|f(x)|$.

Esempio 16

Poiché si ha $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}}, \forall x \in (0;1]$ e poiché nell'esempio precedente abbiamo provato che $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ è integrabile in senso generalizzato su [0; 1], per il teorema 9 possiamo dire che anche $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ è integrabile in senso generalizzato su [0; 1].

Dal precedente teorema si ottiene il seguente risultato che è spesso utile per determinare se una certa funzione è o no integrabile in senso generalizzato.

Corollario 2

Sia $f(x)$ continua in $[a; x_0) \cup (x_0; b]$, e si abbia $|f(x)| \le \frac{K}{(x_0 - x)^h}$, con $K > 0$ e $0 < h < 1$, allora $f(x)$ è integrabile in senso generalizzato su $[a; b]$.

Dimostrazione

Basta dimostrare che $\frac{K}{(x_0 - x)^h}$, con $K > 0$ e $0 < h < 1$ è integrabile in senso generalizzato. abbiamo:

$$\lim_{c\to x_0^-}\int_a^c \frac{K}{(x-x_0)^h}dx = \lim_{c\to x_0^-}\int_a^c K\cdot(x-x_0)^{-h}\,dx = \lim_{c\to x_0^-}\left[K\cdot\frac{(x-x_0)^{1-h}}{1-h}\right]_a^c =$$

$$= K\cdot\lim_{c\to x_0^-}\frac{(c-x_0)^{1-h}-(a-x_0)^{1-h}}{1-h} = \frac{(a-x_0)^{1-h}}{h-1}$$

, il che accade solo se è $h < 1$, perché diversamente il limite sarebbe uguale a + ∞. Si vede facilmente che anche il limite destro è uguale al precedente.

A questo punto generalizziamo il concetto di integrale anche a intervalli infiniti.

Definizione 3

Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a; +\infty)$ (risp. in $(-\infty; a]$), diciamo che $f(x)$ è **integrabile in senso improprio su [*a*; +∞) (risp. su (–∞; *a*])** se esiste finito il $\lim\limits_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)\,dx$ $\left(\text{rispettivamente } \lim\limits_{c\to-\infty}\int_c^a f(x)\,dx\right)$.

Esempio 17

Vediamo se $f(x)=\frac{1}{x^2}$ è integrabile in senso improprio su $[1; +\infty)$. Si ha: $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_1^a \frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{a\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^a =$
$= \lim\limits_{a\to+\infty}\left(-\frac{1}{a}\right)+1=1$. La funzione è integrabile in senso improprio.

Vale un risultato analogo al Corollario 2.

Corollario 3

Sia $f(x)$ continua in $[a; +\infty)$ (risp. in $(-\infty; a]$), e si abbia $|f(x)| \le \frac{K}{x^h}$, con $K > 0$ e $h > 1$, allora $f(x)$ è integrabile in senso improprio su $[a; +\infty)$ (risp. su $(-\infty; a]$).

Esempio 18

$f(x)=\frac{1}{x^3}$ è integrabile in senso improprio su $[1; +\infty)$, poiché si ha: $\frac{1}{x^3}<\frac{1}{x^2}, \forall x>1$ e poiché nell'esempio 17 abbiamo visto che $f(x)=\frac{1}{x^2}$ è integrabile in senso improprio, possiamo applicare il Corollario 3.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo vedere se il seguente integrale è finito: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$. La discontinuità si ha per $x = 1$. Quindi dobbiamo calcolare $\lim_{a\to 1^-}\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{a\to 1^-}\left[sin^{-1}(x)\right]_0^a = \lim_{a\to 1^-}\left[sin^{-1}(a) - sin^{-1}(0)\right] = sin^{-1}(1) - 0 = \frac{\pi}{2}$.
Concludiamo che la funzione è integrabile su [0; 1].

Stabilire quali delle seguenti funzioni sono integrabili in senso generalizzato negli intervalli indicati, per quelle che lo sono calcolarne il valore

Livello 2

1. $f(x) = ln(x)$ in [0; 1] ; $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ in [–1; 1] ; $f(x) = \frac{1}{sin(x)}$ in [0; 1] [–1 ; No ; No]
2. $f(x) = \frac{ln(x)}{x}$ in [0; 1] ; $f(x) = xln(x)$ in [0; 1] ; $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ in [1; 3] $\left[\text{No}; -\frac{1}{4}; -2\right]$
3. $f(x) = \frac{sin(2x)}{sin(x)}$ in [0; π] ; $f(x) = \frac{cos(2x)}{cos^2(x)}$ in [0; π] ; $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ in [0; 1] $\left[0; \text{No}; \frac{\pi}{4}\right]$
4. $f(x) = 1 + tan(x)$ in [0; 1] ; $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ in [0; 1] ; $f(x) = \frac{1}{x\cdot ln(x)}$ in [0; 1] [No ; $2e - 2$; No]
5. $f(x) = \frac{sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ in $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$; $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ in [–1; 0] ; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$ in $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$
$\left[2-2\cdot cos\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right); tan^{-1}\left(\sqrt{e^2-1}\right); \frac{\pi}{4}\right]$

Livello 3

6. Determinare l'area della regione compresa tra la versiera di Agnesi, di equazione $f(x) = \frac{a^3}{x^2+a^2}$ e il suo asintoto orizzontale. [πa^2]
7. Con riferimento al problema precedente determinare il volume del solido generato dalla rotazione della curva attorno all'asintoto. $\left[\frac{\pi^2 a^3}{2}\right]$

Stabilire quali delle seguenti funzioni sono integrabili in senso improprio negli intervalli indicati, per quelle che lo sono calcolarne il valore

Livello 2

8. $f(x) = ln(x)$ in [1; +∞) ; $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ in (–∞; +∞) ; $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}$ in [0; +∞) $\left[\text{No}; \text{No}; \frac{\pi}{4}\right]$
9. $f(x) = \frac{x}{x^2+2x+3}$ in [0; +∞) ; $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ in (–∞; +∞) ; $f(x) = \frac{ln(x)}{x}$ in [1; +∞) [No ; No ; No]
10. $f(x) = \frac{ln(x)}{x^2}$ in [1; +∞] ; $f(x) = \frac{tan(x)}{cos^2(x)}$ in [0; +∞) ; $f(x) = \frac{1}{x\cdot ln(x^2)}$ in [0; +∞) [1; No ; No]
11. $f(x) = x\cdot e^{x+1}$ in (–∞; 0] ; $f(x) = x^2\cdot e^x$ in (–∞; 0] ; $f(x) = x^2\cdot e^x$ in [0; +∞) [$-e$; 2 ; No]

L'angolo di Geogebra

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quinto%20volume/Capitolo%2011/11-2-1.exe scarichi un'applicazione che mostra come Geogebra calcola e rappresenta integrali definiti. Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quinto%20volume/Capitolo%2011/11-2-1.rar si scarica il relativo file.

L'angolo di Derive

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quinto%20volume/Capitolo%2011/11-2-2.exe scarichi un'applicazione che mostra come Derive calcola integrali definiti anche impropri e generalizzati.
Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quinto%20volume/Capitolo%2011/11-2-2.dfw scarichi il relativo file.

L'angolo di Microsoft Mathematics

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quinto%20volume/Capitolo%2011/11-2-3.exe scarichi un'applicazione che mostra come Microsoft Mathematics calcola integrali definiti anche impropri e generalizzati.
Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quinto%20volume/Capitolo%2011/11-2-3.rar scarichi il relativo file.

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. Sapendo che $f(x)$ è integrabile in $[a; b]$ e $\int_{k\cdot a}^{k\cdot b} f(x)\,dx = p$, calcolare $\int_a^b f(k\cdot x)\,dx$. $\left[\frac{1}{k}\right]$
2. Sia $f(x)$, integrabile e periodica di periodo T. Dimostrare che $\int_0^T f(x)\,dx = \int_a^{a+T} f(x)\,dx, \forall a \in \mathbb{R}$.
3. Calcolare $\int sin^{2n+1}(x)dx, n \in \mathbb{N}$. Sugg. Usare il binomio di Newton. $\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} \cdot \binom{n}{k} \cdot cos^{2k+1}(x) + c\right]$
4. Calcolare $\int cos^{2n+1}(x)dx, n \in \mathbb{N}$. Sugg. Usare il binomio di Newton. $\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{2k+1} \cdot \binom{n}{k} \cdot sin^{2k+1}(x) + c\right]$

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi.
I temi completi dei Licei Scientifici per gli ultimi anni sono scaricabili, con soluzione, dal sito
http://matdidattica.altervista.org/esamidistato.htm

1. (Liceo scientifico 1966/67) In un piano, riferito ad un sistema cartesiano ortogonale Oxy, si considerino le parabole di equazione: $y = mx^2 + x + 3 - 4m$ (1), essendo m un parametro diverso da zero. a) Fra le parabole di equazione (1) si studino quelle aventi per vertice $A \equiv (-2; 1)$ o $A \equiv (2; 5)$ e si provi che esse sono fra loro simmetriche rispetto al punto medio C del segmento AB. b) Si calcoli l'area della regione finita limitata dalle due parabole di cui al punto (a). $\left[\frac{16}{3}\right]$

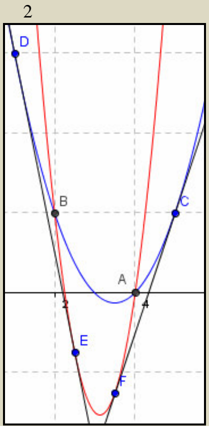
2. (Liceo scientifico 1969/1970) Data la funzione $y = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^2$, si determini l'area del rettangoloide, relativo al grafico, avente per base l'intervallo di estremi $x = 0$, $x = 2$. $\left[\frac{2}{45}\right]$

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente problema assegnato agli esami di Liceo scientifico suppletiva 1971/72.
Date le due parabole rappresentate dalle equazioni $y = x^2 - 7x + 12$, $y = 4x^2 - 25x + 36$, *si determinino le coordinate dei punti comuni, le equazioni delle tangenti comuni e le coordinate dei punti di contatto. Si calcoli poi l'area di una delle due regioni piane limitate dalle parabole e da una delle suddette tangenti.*

- La prima risposta si ottiene risolvendo l'equazione $x^2 - 7x + 12 = 4x^2 - 25x + 36$, che fornisce le ascisse: $x = 2$, $x = 4$. Sostituendo otteniamo le ordinate e perciò i punti $A \equiv (4; 0)$, $B \equiv (2; 2)$. Per le tangenti comuni risolviamo le equazioni delle derivate: $2x - 7 = 8x - 25$, che forniscono $x = 3$, che è perciò il coefficiente angolare delle tangenti comuni. Le loro equazioni sono perciò $y = 3x + h$. Per determinare h risolviamo il sistema con le equazioni delle parabole e imponiamo la condizione di tangenza, ossia discriminante nullo dell'equazione risolutiva. Otteniamo così le equazioni $y = 3x - 13$ e $y = -5x + 11$. Analogamente otteniamo i punti comuni: $C \equiv (5; 2)$, $D \equiv (1; 6)$, $E \equiv \left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$, $F \equiv \left(\frac{7}{2}; -\frac{5}{2}\right)$.
- Per la seconda domanda la situazione è mostrata in figura. Una delle aree si trova con il calcolo seguente:

$$\int_1^2 \left[x^2 - 7x + 12 - (-5x + 11)\right] dx + \int_2^{5/2} \left[4x^2 - 25x + 36 - (-5x + 11)\right] dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$



3. (Liceo scientifico suppletiva 1972/73) In un riferimento cartesiano ortogonale xOy siano date la parabola di equazione $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{27}{8}$ e la circonferenza $x^2 + y^2 - 2ky = 0$, essendo k un parametro reale. Delle predette circonferenze si consideri quella che risulta tangente alla parabola e appartiene al semipiano $y \geq 0$, si scrivano le equazioni delle rette tangenti comuni alla parabola stessa e alla

circonferenza, e si dica qual è l'ampiezza dell'angolo formato dalle due tangenti. Si calcoli, infine, l'area della regione finita del piano compresa fra la parabola e la circonferenza trovata.

$$\left[x^2+y^2-3y=0;\ y=\pm\sqrt{3}x+\frac{9}{2};60°;\frac{27\cdot\sqrt{3}}{16}-\frac{3\pi}{4}\right]$$

4. (Liceo scientifico 1973/74) Assegnata la funzione $y = sin(x) + a \cdot cos(x) + b$ $(-\pi \le x \le \pi)$, si determinino i valori di a e di b in modo che ammetta un massimo relativo $y = 0$ nel punto di ascissa $\frac{\pi}{6}$ e si disegni la curva rappresentativa della funzione ottenuta. Condotta la retta tangente alla curva nel punto A di ascissa $x = 0$, e tracciata la retta $x = \frac{\pi}{2}$, si calcoli l'area della regione piana limitata dalla retta, dalla tangente in A e dalla curva. $$\left[a=\sqrt{3},b=-2;\frac{\pi^2-8\cdot\sqrt{3}+4\cdot\sqrt{3}\pi-8}{8}\right]$$

5. (Liceo scientifico suppletiva 1973/74) Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = ax^2 + bx + c$ in modo che la parabola da essa rappresentata sia tangente alle tre rette rispettivamente di equazione: $2x + y - 3 = 0$, $4x - y - 12 = 0$, $y = 0$. Detti A, B, C i rispettivi punti di contatto si determini sull'arco ACB il punto P tale che risulti massima l'area del triangolo APB. Si calcolino le aree dei segmenti di parabola determinati dai lati AP, PB di tale triangolo.

$$\left[y=x^2-4x+4;f\left(x\right)=-\frac{3\left(x^2-5x+4\right)}{2};x_M=\frac{1}{4};\frac{9}{16}\right]$$

6. (Liceo scientifico 1974/75) In un riferimento cartesiano ortogonale xOy sono date le parabole C' e C'' rispettivamente di equazione: $y = -x^2 + 2ax$, $y=\frac{x^2}{a^4}-\frac{2x}{a^3}$, $a > 0$; si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle due parabole e si determini il valore di a per cui tale area risulta minima.

$$\left[\frac{4\cdot\left(a^4+1\right)}{3a};a_m=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right]$$

7. (Liceo scientifico suppletiva 1974/75) Si studi la funzione $y = x^2 \cdot (3 - x)$ e se ne disegni il grafico. Detti A e B i punti corrispondenti agli estremi della funzione, si conducano per essi le rette tangenti alla curva e siano C e D i rispettivi punti di contatto. Si calcoli l'area del quadrilatero convesso limitato dai segmenti AC e BD e dagli archi AD e BC della curva. $$\left[x_M=2,x_m=0;\frac{27}{32}\right]$$

8. (Liceo scientifico suppletiva 1975/76) In un sistema di assi cartesiani si determinino l'equazione della circonferenza passante per i punti $A \equiv (0, 1)$, $B \equiv (1, 0)$, $C \equiv (-1, 0)$ e quella della parabola con asse parallelo all'asse y, passante per gli stessi punti e si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve. Nel semipiano delle ordinate positive si tracci la retta $y = h$ che incontra in P e Q le circonferenze e in R e S la parabola. Dette P', Q', R', S' le proiezioni ortogonali di P, Q, R, S sull'asse x, si considerino i pentagoni $APP'Q'Q$ e $ARR'S'S$ inscritti negli archi CAB di circonferenza e di parabola rispettivamente, si determini per quale valore di h è massima la differenza dei volumi da essi generati in una rotazione di mezzo giro intorno all'asse delle ordinate.

$$\left[x^2+y^2=1;\ y=-x^2+1;\ \frac{\pi}{2}-\frac{4}{3};\frac{\pi}{3}\cdot(-2h^3+h^2+h)\text{ con }0<h<1;\ h_M=\frac{1+\sqrt{7}}{6}\right]$$

9. (Liceo scientifico 1975/76) Si studi la funzione $y = x + 2\,sin(x)$ e se ne disegni il grafico nell'intervallo $-2\pi \le x \le 2\pi$. Si determinino le coordinate dei punti comuni alla curva e alla retta di equazione $y = x - 2$ e si calcoli l'area della regione di piano delimitata dalla curva e dalla retta nell'intervallo indicato.

$$\left[x_M=-\frac{4\pi}{3}\vee\frac{2\pi}{3};x_m=-\frac{2\pi}{3}\vee\frac{4\pi}{3};4\pi\right]$$

10. (Liceo scientifico 1975/76) In un sistema di assi coordinati cartesiani si studi la funzione $y=\frac{2x-1}{2x^3}$ e

se ne disegni il grafico. Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = ax^2 + bx$ in modo che la parabola da essa rappresentata passi per il flesso e per l'ulteriore punto d'intersezione della curva con la tangente inflessionale e si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve.

$$\left[x_M = \frac{3}{4}; x_F = 1; a = 1, b = -\frac{1}{2}; \frac{7}{48}\right]$$

11. (Liceo scientifico suppletiva 1975/76) In un sistema di assi cartesiani si considerino le parabole rappresentate dalle equazioni: $y = ax^2 - 2x + 2$, $y = 2ax^2 - 2x + 1$, e si determini il valore del parametro reale a in modo che risulti minima la distanza tra i due vertici. Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalla due curve. $\left[f(a) = \frac{2a^2 - 2a + 1}{2a^2}; a_m = 1; \frac{4}{3}\right]$

12. (Liceo scientifico 1976/77) In un sistema di assi coordinati cartesiani si considerino le parabole rappresentate dalle equazioni: $y = 3x - x^2$, $y = x^2 - 2x$. Nella regione finita di piano delimitata dalle due curve si determini il triangolo avente un vertice nel punto comune alle due curve diverso dall'origine e il lato opposto parallelo all'asse delle ordinate e la cui area abbia valore massimo. Si calcolino inoltre le aree delle regioni finite di limitate dai lati di questo triangolo e dalle curve stesse.

$$\left[A(k) = k^3 - 5k^2 + \frac{25}{4}k; k_M = \frac{5}{6}; \frac{125}{162}\right]$$

13. (Liceo scientifico suppletiva 1976/77) Tra le parabole del tipo $y = -\frac{1}{4}x^2 + c$ con $c > 0$ si determini quella per la quale i punti P di essa che hanno minima distanza dall'origine O degli assi cartesiani di riferimento sono tali che $\overline{OP}^2 = 12$. Tracciate le tangenti alla parabola nei punti P' e P'' così determinati, si calcoli l'area del triangolo mistilineo $P'P''T$, dove T è il punto d'incontro delle tangenti e $P'P''$ l'arco di parabola. $\left[f(c) = \frac{x^4}{16} + \frac{2-c}{2}x^2 + c^2; c_m = 4; \frac{8}{3} \cdot \sqrt{2}\right]$

14. (Liceo scientifico suppletiva 1976/77) Si studino le funzioni $y = \frac{2}{x^2}$, $y = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$ e se ne disegnino i grafici in un sistema cartesiano ortogonale. Si verifichi che i loro punti comuni stanno su una retta di cui si chiede l'equazione. Si calcoli inoltre l'area della regione di piano limitata dalle due curve.

[La prima funzione non ha estremi relativi, la seconda: $x_m = 2$; $A \equiv \left(1-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}\right)$, $B \equiv \left(1+\sqrt{3}; 2-\sqrt{3}\right)$, $C \equiv (1; 2)$ appartenenti a $x + y - 3 = 0$; $\frac{6 \cdot \sqrt{3} - 9}{2}$]

15. (Liceo scientifico 1977/78) Tra le parabole di equazione $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + k$, si individui quella sulla quale la retta di equazione $2y = x + 2$ intercetta una corda AB lunga $l = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{5}$. Condotte in A e in B le rette tangenti alla parabola trovata, si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dall'arco di parabola AB e dalle due tangenti. $\left[y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4; \frac{125}{4}\right]$

16. (Liceo scientifico suppletiva 1977/78) Si determinino i coefficienti della funzione $y = 1 + ax + \frac{b}{x^2}$ in modo che la curva che la rappresenta abbia un estremo relativo in $A \equiv (1; 0)$. Se ne disegni il grafico. Condotta per A la retta tangente alla curva nel punto B, si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva, dalla retta AB e dall'asse delle ascisse. $\left[a = -\frac{2}{3}, b = -\frac{1}{3}; x_M = 1; \frac{9}{8}\right]$

17. (Liceo scientifico suppletiva 1977/78) In un sistema di assi coordinati si considerino $O \equiv (0; 0)$ e $A \equiv (2; 2)$ e la circonferenza avente per diametro OA. Si determinino i coefficienti della funzione $y = ax^2 + bx + c$ in modo che la parabola che la rappresenta passi per i due punti dati e abbia in A come

tangente la retta tangente alla circonferenza. Si calcolino le aree delle due regioni finite di piano delimitate dalle due curve. $\left[y = -x^2 + 3x; \pi \pm \frac{4}{3}\right]$

18. (Liceo scientifico suppletiva 1978/79) Si studi la funzione $y = x + \frac{4}{x^2}$ e se ne disegni il grafico. Detti *A* il punto estremo relativo e *B* l'ulteriore punto di intersezione della curva con la tangente in *A*, si scriva l'equazione della parabola passante per *A* e tangente alla curva in *B* e si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dalle due curve. $\left[x_m = 2;\ y = -3x^2 + 3x + 9;\ \frac{104}{27}\right]$

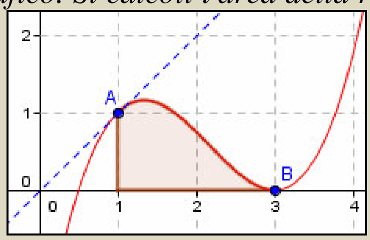
19. (Liceo scientifico 1978/79) Si studi la funzione $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ e se ne disegni il grafico. Si scrivano l'equazione della parabola avente come asse l'asse delle ordinate, vertice nel punto (0; 1) e tangente alla curva e quella della parabola a questa simmetrica rispetto alla congiungente i due punti di contatto. Si calcolino le aree delle tre regioni finite di piano limitate dalle due parabole e dalla curva data.
$$\left[y = \frac{3}{4}x^2 + 1; y = -\frac{3}{4}x^2 + 1; \frac{2\cdot\sqrt{2}}{21}\cdot\left(35 - 11\cdot\sqrt{7}\right), \frac{2\cdot\sqrt{2}}{21}\cdot\left(35 - 11\cdot\sqrt{7}\right), \frac{4\cdot\sqrt{2}}{21}\cdot\left(11\cdot\sqrt{7} - 14\right)\right]$$

20. (Liceo scientifico 1979/80) In un sistema di assi coordinati cartesiani si consideri la parabola di equazione $y = x^2 + \sqrt{3}\cdot x + 1$. Condotte per l'origine *O* le due rete tangenti a essa, si scriva l'equazione della circonferenza passante per *O* e per i due punti di contatto e si calcolino le aree delle due regioni finite di piano delimitate dalle due curve. $\left[x^2 + y^2 - 4y = 0; 2\pi + \frac{4}{3}, 2\pi - \frac{4}{3}, \frac{3\cdot\sqrt{3} - 2 - \pi}{3}\right]$

21. (Liceo scientifico suppletiva 1979/80) Si scriva l'equazione della parabola α avente l'asse di simmetria parallelo all'asse delle *y*, passante per i punti $P \equiv (0; 3)$, $Q \equiv (2; 3)$ e il cui vertice *V* stia sulla parabola β di equazione $y = -x^2 + 3x$. Detto *W* l'ulteriore punto comune alle due curve, si scrivano l'equazione della retta tangente ad α in *W* e quella della retta tangente a β in *V* e si calcoli l'area del trapezio mistilineo delimitato da queste due rette e dalle due parabole.
$$\left[\alpha: y = x^2 - 2x + 3; y = x + \frac{3}{4}; y = x + 1; \frac{7}{24}\right]$$

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente problema assegnato agli esami di Liceo scientifico 1981/82.
Si determinino i coefficienti della curva $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ in modo che essa tocchi la retta $y = x$ nel punto $A \equiv (1; 1)$ e la retta $y = 0$ in $B \equiv (3; 0)$. Se ne disegni il grafico. Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle due rette e dall'arco di curva AB.



Imponiamo le condizioni per determinare i coefficienti, le prime due sono immediate, per le altre due dobbiamo imporre semplicemente che le rette tangenti nei punti dati siano quelle assegnate. Determiniamo quindi il coefficiente angolare della generica tangente: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Tale valore deve essere 1 per $x = 1$ e 0 per $x = 3$. Pertanto il sistema di risolvere è $\begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ 27a + 9b + 3c + d = 0 \\ 3a + 2b + c = 1 \\ 27a + 6b + c = 0 \end{cases}$, le cui soluzioni sono:

$a=\frac{1}{2}, b=-\frac{13}{4}, c=6, d=-\frac{9}{4}$. Lasciamo lo studio della funzione per esercizio, dicendo solo che si hanno gli estremi relativi di ascisse $x_M = \frac{4}{3}$, $x_m = 3$. Il grafico è il seguente, in cui abbiamo evidenziato anche l'area da calcolare. Osserviamo che la richiesta che l'area sia compresa tra le *due* rette è del tutto inutile, poiché bastava dire che fosse compresa tra l'arco *AB* e l'asse *x*, ossia il consueto trapezoide, che perciò si calcola $\int_1^3 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{4}x^2 + 6x - \frac{9}{4}\right)dx$, il cui calcolo lasciamo per esercizio ed è $\frac{4}{3}$.

22. (Liceo scientifico 1980/81) Si studi la funzione $y = x^2 + \frac{16}{x^2}$ e se ne disegni il grafico. Si scrivano le equazioni delle due parabole, con gli assi paralleli all'asse delle ordinate, passanti per l'estremo relativo *A* della curva di ascissa positiva, per il punto *B* della curva di ascissa 1 e tali che l'area della regione finita di piano limitata dall'arco *AB* della curva e da ciascuna delle due parabole sia $\frac{7}{3}$.

[$x = –2$, $x = 2$; $y = –x^2 – 6x + 24$ e $y = 27x^2 – 90x + 80$]

23. (Liceo scientifico 1982/83) Si studi la funzione $y = \frac{a^2}{x^2} - 1$ e se ne disegni il grafico. Si determinino le intersezioni della curva da essa rappresentata con la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = a^2$ e si trovi il valore di *a* per cui dette intersezioni sono vertici di un esagono regolare. In questo caso particolare si calcolino le aree delle regioni finite di piano delimitate dalle due curve.

$$\left[(\pm a;0), \left(\pm\sqrt{\frac{\sqrt{1-4a^2}-1}{2}}; \frac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2}\right); a = \pm 2\cdot\sqrt{3}; \frac{4\pi - 5\cdot\sqrt{3}}{2}\right]$$

24. (Liceo scientifico 1982/83) Una parabola passante per gli estremi di un diametro di una circonferenza di raggio *r* ha le tangenti in tali punti perpendicolari fra loro e l'asse del diametro come asse di simmetria. Si scrivano, in un sistema di assi cartesiani opportunamente scelto, le equazioni della parabola e della circonferenza e si calcolino le aree delle regioni finite di piano delimitate dalle due curve.

$$\left[y = \pm\frac{1}{2r}x^2 \mp \frac{r}{2}; \frac{3\pi \pm 4}{6}r^2\right]$$

25. (Liceo scientifico 1983/84) Si studi la funzione $y = 2x^3 – 3x^2 + 1$ e se ne disegni il grafico. Si individui la traslazione di assi: $x = X + a$, $y = Y + b$, che rende la curva simmetrica rispetto all'origine e si scriva l'equazione della curva trasformata. Si determinino le coordinate dei punti in cui la curva data incontra la bisettrice del primo e del terzo quadrante e si calcoli l'area di una delle regioni finite di piano delimitate dalla curva e dalla bisettrice stessa.

$$\left[x_M = 0, x_m = 1; a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}; Y = 2X^3 - \frac{3}{2}X; \left(\pm\frac{\sqrt{5}}{2}; \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right); \frac{25}{32}\right]$$

26. (Liceo scientifico suppletiva 1983/84) Si considerino le parabole $y^2 = \frac{x}{2}$, $y^2 = –x + a^2$. Nella regione finita di piano compresa fra le due curve e l'asse delle ascisse si inscriva il rettangolo con i lati paralleli agli assi coordinati che, in una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse, genera il cilindro di massimo volume. In tale caso si calcoli il volume del solido generato nella precedente rotazione del triangolo mistilineo aventi come lati la base superiore del rettangolo e gli archi delle due parabole compresi tra gli estremi di tale base e il punto di incontro delle parabole stesse.

$$\left[V(h) = \pi\cdot\left(-3h^4 + a^2h^2\right); h_{Max} = a\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}; V = \frac{\pi}{24}a^4\right]$$

27. (Liceo scientifico 1984/85) In un sistema di assi coordinati cartesiani si consideri la parabola di

equazione $y = 3x - x^2$. Si scrivano l'equazione della parabola a essa simmetrica rispetto all'asse delle ordinate e le equazioni delle due parabole a esse simmetriche rispetto alla retta congiungente i loro vertici. Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle quattro parabole e si trovi il perimetro del quadrato in essa inscritto con i lati tangenti alle parabole stesse.

$$\left[y = -3x - x^2,\ y = x^2 - 3x + \frac{9}{2},\ y = x^2 + 3x + \frac{9}{2};\ A = \frac{9}{2},\ 2p = 5\cdot\sqrt{2}\right]$$

28. (Liceo scientifico 1984/85) In un sistema di assi coordinati cartesiani si consideri la cubica di equazione $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ e si individui la traslazione $x = X + a$, $y = Y + b$, che porta l'origine del sistema di riferimento nel punto della curva di minimo relativo. Si scriva l'equazione della curva nel nuovo sistema di riferimento e si calcolino le aree delle due regioni finite di piano delimitate dalla curva e dagli assi delle ascisse dei due sistemi. $\left[x_M = 1, x_m = 2; a = 2, b = -1; Y = 2X^3 + 3X^2; A = \frac{27}{32}\right]$

29. (Liceo scientifico 1985/86) Si studi la funzione $y = x^4 - kx^2$ distinguendo vari casi, a seconda dei valori assunti dal parametro reale k. In particolare si calcoli il minimo della funzione per ogni valore di k. Si disegnino i grafici corrispondenti ai valori $k = -1$ e $k = 1$. Il secondo grafico delimita, insieme alla retta $y = 0$,due regioni finite del piano, contenute rispettivamente nel terzo e nel quarto quadrante; si dimostri che l'una è la simmetrica dell'altra rispetto alla retta $x = 0$ e si calcoli l'area di una di esse.

$$\left[x_m = 0, \forall x \in \mathbb{R}; x_m = \pm\sqrt{\frac{k}{2}}; A = \frac{2}{15}\right]$$

30. (Liceo scientifico 1989/90) Determinare il luogo dei centri delle circonferenze tangenti alla retta di equazione $y = \frac{37}{12}$ e passanti per $A \equiv \left(0; \frac{19}{12}\right)$ e il luogo dei centri delle circonferenze tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0$ e passanti per $B \equiv (2, 2)$. Calcolare quindi l'area della parte di piano racchiusa dalle due curve. $\left[y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3}; y = \frac{2}{x}; A = \frac{14 - 18\cdot ln(2)}{9}\right]$

31. (Liceo scientifico PNI 1989/90) Si studi la funzione $f(x) = \frac{1-x}{x^2 - 3x}$ e si dica se per essa è valido il teorema della media integrale nell'intervallo [1; 2], giustificando l'affermazione. In caso di risposta affermativa si determini internamente a detto intervallo il valore c della variabile indipendente di cui il teorema stesso assicura l'esistenza quando la funzione è continua.

$$\left[c = \frac{3\cdot\left[ln(2) - 1\right] + \sqrt{9\cdot ln^2(2) - 6\cdot ln(2) + 9}}{2\cdot ln(2)}\right]$$

32. (Liceo scientifico 1990/91) In un piano cartesiano ortogonale Oxy si consideri il punto $A \equiv (2x, 0)$. Si trovi il luogo L del punto $B \equiv (x, y)$ tale che il triangolo OAB abbia perimetro $2p$ e si determini l'area della regione finita di piano delimitata dal luogo stesso. $\left[L: \begin{cases} x = \frac{p^2 - y^2}{2p} & x \geq 0 \\ x = \frac{y^2 - p^2}{2p} & x \geq 0 \end{cases}; A = \frac{4}{3}p^2\right]$

33. (Liceo scientifico 1990/91) Si consideri in un piano cartesiano ortogonale Oxy la famiglia di parabole tangenti all'asse delle ascisse nel punto $A \equiv (1, 0)$. Detto B il punto d'incontro della generica parabola con l'asse delle ordinate, si studi come varia, al variare della parabola, l'area della regione finita di piano compresa tra la parabola stessa e la retta passante per B, parallela alla bisettrice del secondo quadrante, determinandone in particolare i valori estremi relativi.

$$\left[\left(y = \frac{4}{3\cdot\left|x\cdot(1+x)^3\right|}, x_m = \frac{4^5}{3^4}\right) \vee \left(y = \frac{\left|2x-1\right|^3}{6x^2}, x_m = -1\right)\right]$$

34. (Liceo scientifico suppletiva 1990/91) Si disegni in un piano cartesiano ortogonale Oxy la curva C di

equazione $y = \frac{\sqrt{2x^2 - 1}}{x}$ e si calcoli il volume del solido ottenuto facendo ruotare di un giro completo attorno all'asse delle ascisse la regione di piano compresa tra l'arco della curva *C* i cui estremi sono i punti di ascissa $\sqrt{2}/2$ e 1 e le rette tangenti a *C* negli estremi stessi. $\left[V = \pi \cdot \frac{23 \cdot \sqrt{2} - 32}{12}\right]$

35. (Liceo scientifico 1991/92) Data una circonferenza γ di raggio unitario e centro *O*, tracciare una semiretta *s* uscente da *O* e intersecante γ in un punto *Q*. Indicato con *P* un generico punto di *s* esterno alla circonferenza γ, tracciare da esso le due tangenti alla circonferenza: siano *A* e *B* i punti di tangenza. Indicata con *x* la lunghezza del segmento *PQ*, trovare il limite per *x* tendente a infinito del rapporto $k = \frac{\overline{AQ} + \overline{QB}}{\overline{AB}}$. Studiare quindi la funzione *y* = *f*(*x*), dove *f*(*x*) = k^2 e calcolare la superficie della regione di piano delimitata dalla curva e dagli assi cartesiani. $\left[\sqrt{2}; 2 \cdot \left[1 - ln(2)\right]\right]$

36. (Liceo scientifico PNI 1991/92) In un piano cartesiano ortogonale *Oxy* si considerino le parabole *C* e *C′* di equazione rispettivamente: $y - x^2 = 0$, $y^2 + 8x - 6y - 3 = 0$. Si verifichi che *C* e *C′* sono tangenti in $A \equiv (1, 1)$ e che hanno in comune un ulteriore punto *B*. Detto *P* un punto della retta *AB* sia *QQ*’ la corda intercettata da *C* sulla parallela per *P* all’asse delle ascisse, *RR′* la corda intercettala da *C′* sulla parallela per *P* all’asse delle ordinate e *S* la proiezione di *P* sulla retta di equazione *y* + 2 = 0. Si studi come varia il rapporto: $\frac{8 \cdot \overline{PS}^2}{\overline{QQ'} \cdot \overline{RR'}}$ al variare di *P*, determinando in particolare il suo valore minimo. Si calcoli l’area della regione finita di piano delimitata dalle parabole *C* e *C*’. $\left[\frac{(x+2)^2}{x}, x_m = 2; A = \frac{64}{3}\right]$

37. (Liceo scientifico PNI suppletiva 1991/92) Si consideri in un piano cartesiano ortogonale *Oxy* la circonferenza di centro $A \equiv (1, 0)$, passante per l'origine degli assi. Detta *r* la retta di equazione *y* = *mx*, sia *OPQ* il triangolo rettangolo inscritto nella circonferenza il cui cateto *OP* appartiene alla retta *r*. Si studi come varia l'area *f*(*m*) del rettangolo avente come lati i cateti del triangolo *OPQ* e si tracci in un piano, riferito a un sistema cartesiano ortogonale *O'ms*, la curva *C* di equazione *s* = *f*(*m*). Detti *M*' e *M*" i punti di massimo di *f*(*m*), si determini l'area del triangolo mistilineo avente come lati gli archi della curva *O'M*', *O'M* e il segmento *M'M*". $\left[f(m) = \frac{4m}{m^2+1}, M' \equiv (-1; -2), M \equiv (1; 2); A = 4 \cdot \left[1 - ln(2)\right]\right]$

Lavoriamo insieme

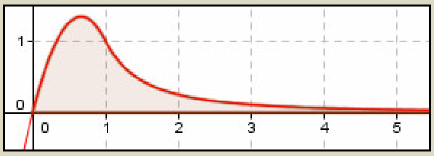
Consideriamo il seguente problema assegnato agli esami di Liceo scientifico 1992/93.

Sia la funzione $f(x) = \begin{cases} -3x^2 + Hx & x \le 1 \\ \frac{K}{x^2} & x > 1 \end{cases}$. *Determinare le costanti H e K in modo che la funzione y = f(x) e la sua derivata siano continue in x =* 1*. Rappresentare la funzione così trovata e calcolarne l’integrale definito fra* 0 *e* + ∞.

Per la continuità dobbiamo imporre $\lim_{x \to 1^-} \left(-3x^2 + Hx\right) = \lim_{x \to 1^+} \frac{K}{x^2} \Rightarrow -3 + H = K$. Per la derivabilità, tenuto conto che si ha: $f'(x) = \begin{cases} -6x + H & x < 1 \\ -\frac{2K}{x^3} & x > 1 \end{cases}$, deve essere $\lim_{x \to 1^-} (-6x + H) = \lim_{x \to 1^+} -\frac{2K}{x^3} \Rightarrow -6 + H = -2K$.

Dobbiamo quindi risolvere il sistema $\begin{cases} H - K = 3 \\ H + 2K = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H = 4 \\ K = 1 \end{cases}$ e la funzione da studiare è

$f(x)=\begin{cases}-3x^2+4x & x\le 1\\ \dfrac{1}{x^2} & x>1\end{cases}$, che lasciamo per esercizio. Il grafico è quello in fondo, con evidenziata l'area da calcolare, che dà luogo all'integrale generalizzato $\int_0^1 \left(-3x^2+4x\right)dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = \left[-x^3+2x^2\right]_0^1+\lim_{c\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^c =$



$=-1+2+\lim_{c\to+\infty}\left(-\frac{1}{c}+1\right)=1+1=2$.

38. (Liceo scientifico suppletiva 1991/92) Studiare la funzione $y(x) = cos(x) \cdot e^{-x}$ per $x \ge 0$. Essa, in opportune unità di misura, rappresenti la corrente elettrica di scarica di un condensatore attraverso una impedenza, essendo x il tempo. In tal caso la carica Q inizialmente presente sulle armature del condensatore è data da $Q=\int_0^{\infty} y(x)\,dx$. Calcolare il valore di Q.

$\left[x_m=\frac{3\pi}{4}+2k\pi, x_M=\frac{7\pi}{4}+2k\pi; Q=0,5C\right]$

39. (Liceo scientifico 1992/93) Sia $\begin{cases}x=sin(t)\\ y=sin(2t)\end{cases}$. Esprimere y in funzione di x e rappresentare le funzioni $y = \pm f(x)$ in uno stesso sistema di riferimento. Individuare simmetrie e caratteristiche del grafico trovato, calcolare l'area racchiusa dalla figura trovata. (L'integrale proposto è di facile esecuzione se si pone $\sqrt{1-x^2}=z$)

$\left[y=\pm 2x\cdot\sqrt{1-x^2}; A=\frac{8}{3}\right]$

40. (Liceo scientifico suppletiva 1992/93) Studiare la funzione $f(x)=\left|\frac{sin(x)}{k-cos(x)}\right|$ dopo aver determinato il valore di k in modo che a funzione abbia un massimo per $x=\frac{\pi}{3}$. Supponendo che la funzione rappresenti il valore numerico dell'intensità (espressa in Newton) di una forza che agisce lungo l'asse delle ascisse (ove x rappresenti il valore numerico della distanza in metri), calcolare il lavoro fatto dalla forza quando il suo punto di applicazione si sposta dalla posizione $x = 0$ a $x = \pi$. (L'integrale è di facile esecuzione se si pone $k - cos(x) = t$)

$\left[x_m=\frac{5\pi}{3}, x_M=\frac{\pi}{3}; L=ln(3)\right]$

41. (Liceo scientifico 1993/94) Nel piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, è assegnata la curva k di equazione: $y=\frac{x^2}{2}+ln|x+1|$. Disegnare un andamento approssimato dopo aver verificato, fra l'altro, che essa ha due flessi. Calcolare l'area del triangolo formato dalla retta congiungente tali flessi e dalle tangenti inflessionali. Calcolare inoltre l'area R della regione piana delimitata da k, dall'asse x e dalla retta di equazione $2x - 3 = 0$. Stabilire infine quale delle due aree precedenti è la maggiore.

$\left[F_1 \equiv (-2, 2), F_2 \equiv (0, 0); A = 2; R=\frac{5}{2}ln\left(\frac{5}{29}\right)-\frac{15}{16}\right]$

42. (Liceo scientifico suppletiva 1993/94) In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le curve di equazione: $y=\frac{x-a}{2x-a}$ dove a è un parametro reale non nullo. a) Dimostrare che esse hanno tutte in comune un punto A ed esso soltanto; b) tra le curve considerate, determinare quelle che intercettano un segmento di lunghezza $\frac{4}{3}\cdot\sqrt{10}$ sulla retta passante per A e avente coefficiente angolare 3; c) calcolare l'area della regione di piano delimitata dalle due curve

trovate e dalla retta di equazione $x = 1$. $\left[\text{a)}\left(0;1\right);\text{b)}\ a=\frac{7}{3}\vee 3;\text{c)}\ \frac{7}{12}\cdot ln\left(\frac{7}{13}\right)+\frac{3}{4}\cdot ln\left(3\right)\right]$

43. (Liceo scientifico suppletiva 1993/94) Studiare le funzioni: $y = x^3 + 1$ e $y=\sqrt{x^3+1}$ e disegnare i loro grafici, rispettivamente K' e K'', nello stesso piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy. Successivamente, tra i segmenti intercettati, dalla regione piana R delimitata da K' e K'', su una parallela all'asse y, determinare quello di lunghezza massima. Calcolare infine il volume del solido generato da tale regione R quando ruota di un giro completo intorno all'asse x.

$$\left[L\left(k\right)=\sqrt{k^3+1}-k^3-1, k_M=-\sqrt[3]{\frac{3}{4}}, V=\frac{3}{28}\pi\right]$$

44. (Liceo scientifico PNI suppletiva 1994/95) In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy è assegnato il punto $A \equiv (a, -a)$. Il candidato: a) scriva l'equazione della circonferenza Γ di centro A che stacca sull'asse delle ascisse un segmento di lunghezza $2\sqrt{2}$; b) intersechi Γ con l'iperbole Σ di equazione $xy - 1 = 0$ e, osservando che l'equazione risolvente del sistema delle due equazioni delle due curve è il quadrato di un trinomio, deduca che al variare di a le curve Γ e Σ sono bitangenti tra loro in due punti distinti B e C; c) individui le circonferenze Γ_1 e Γ_2 che si ottengono per quei valori di a per cui il segmento BC dista dal centro della circonferenza di cui è corda i $\frac{3}{10}$ del segmento stesso; d) calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle rispettive corde BC di Γ_1 e Γ_2 della curva Σ. [a) $(x - a)^2 + (y + a)^2 = 2 + a^2$; b) $(x^2 - ax - 1)^2 = 0$;

c) Γ_1: $x^2 + y^2 - 3x + 3y + \frac{1}{4} = 0$, Γ_2: $x^2 + y^2 + 3x - 3y + \frac{1}{4} = 0$; d) $\frac{15}{8} + ln(16)$]

45. (Liceo scientifico PNI 1994/95) In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy si consideri la parabola Γ di equazione $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ e sia P il punto di Γ di ascissa λ. Il candidato: a) scriva l'equazione della parabola passante per l'origine O e avente il vertice nel punto P; b) determini l'equazione della curva Σ, luogo geometrico del fuoco della parabola al variare di λ; c) tracci il grafico della curva Σ individuandone in particolare il flesso F; d) detta r la retta per F e per il punto A, di ascissa -1, della curva Σ, calcoli l'area della regione finita di piano delimitata da Σ e r; e) dica l'errore relativo che si commette assumendo come area di detta regione quella del triangolo inscritto OFA.

$$\left[\text{a)}\ y=\frac{\lambda-1}{2\lambda}x^2+\left(1-\lambda\right)x;\ \text{b)}\ y=\frac{x^2\cdot\left(2-x\right)}{2\cdot\left(x-1\right)};\text{c)}\ F\equiv\left(2;0\right)\text{d)}\ \frac{39}{32}-ln\left(2\right);\ \text{e)}\ 1-\frac{12}{39-32\cdot ln\left(2\right)}\right]$$

46. (Liceo scientifico 1994/95) In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, è assegnata la curva K di equazione: $y=sin\left(x\right)+\frac{1}{4\cdot sin\left(x\right)}$, con $-\pi < x < \pi$. a) Disegnarne l'andamento e stabilire, in particolare, se la curva ha flessi. b) Calcolare l'area della regione piana delimitata da K e dalla retta di equazione $y = 1$. $\left[\text{a)}\ x_F=sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{33}-1}{8}}\right);\ \text{b)}\ 3-\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{4}\cdot ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)\right]$

N.B. Per il calcolo di una primitiva della funzione $\frac{1}{sin\left(x\right)}$ si suggerisce di porre $t=tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

47. (Liceo scientifico suppletiva 1994/95) Studiare la funzione: $y=\sqrt[3]{x^2+1}$ e disegnarne il grafico G in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy. Verificato che G ha due flessi, F' e F'', calcolare l'area del triangolo di vertici O, F', F''. Trovare i due interi consecutivi entro i quali è compresa quest'area. Calcolare infine il volume del solido generato dal triangolo $OF'F''$ quando ruota di un giro completo attorno all'asse x.

$$\left[x_m=0; F'\equiv\left(-\sqrt{3};\sqrt[3]{4}\right), F''\equiv\left(\sqrt{3};\sqrt[3]{4}\right); A_{OF'F''}=\sqrt[6]{432}; 2<\sqrt[6]{432}<3; V=\frac{8}{\sqrt{3}}\cdot\pi\sqrt[3]{2}\right]$$

48. (Liceo scientifico suppletiva 1994/95) È assegnata l'equazione: $y = 1 - ax^2 + bx + c$ dove a, b, c sono numeri reali non negativi. Determinare tali coefficienti sapendo che la parabola p, che rappresenta l'equazione in un piano cartesiano ortogonale Oxy, interseca l'asse x nei punti O, A e ha vertice nel punto V in modo che: a) il triangolo OAV sia rettangolo; b) il segmento parabolico individuato dalla corda OA generi un solido di volume $\frac{128\pi}{15}$ quando ruota di un giro completo attorno all'asse x. c) Considerata poi la circonferenza tangente in A alla retta AV e passante per O, calcolare le aree delle due regioni piane in cui essa divide il segmento parabolico suddetto.
$$\left[\text{a) } y=-ax^2+2x;\text{ b) } y=-\frac{1}{2}x^2+2x;\text{ c) } S_1=\frac{16}{3};S_2=\frac{28}{3}-2\pi\right]$$

49. (Liceo scientifico 1994/95) Nel cubo di vertici A, B, C, D, E, F, G, H le facce $ABCD$ e $EFGH$ sono opposte e i segmenti AE, BF, CG sono spigoli. Inoltre gli spigoli del cubo hanno lunghezza unitaria. Sullo spigolo BF prendere un punto P tale che: $\overline{BP}=x$. a) Verificare che la distanza y di P dalla diagonale AG è espressa da: $y=\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\left(x^2-x+1\right)}$. b) Di essa disegnare il grafico in un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, dopo avere trovato, fra l'altro, le equazioni dei suoi asintoti. c) Considerato infine il volume del solido generato, in una rotazione completa intorno all'asse x, dalla regione piana delimitata da tale grafico, dagli assi di riferimento e dalla retta di equazione $x = h$ (con $h > 0$), calcolare per quale valore di h questo volume è $\frac{16\pi}{9}$.
$$\left[\text{b) } y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right);\text{c) } h=2\right]$$

50. (Liceo scientifico 1995/96) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva k di equazione: $y=\frac{x^2}{4-x^3}$. Dopo aver studiato la funzione $f(x)=\frac{x^2}{4-x^3}$ (dominio, eventuali zeri ed estremi, asintoti di k), disegnare l'andamento di k. Indicata con t la tangente a k la parallela all'asse delle ascisse distinta dall'asse stesso, calcolare l'area della regione piana delimitata da k e da t.
$$\left[S=1-ln\left(\sqrt[3]{4}\right)\right]$$

51. (Liceo scientifico 1996/97) Sono assegnate le funzioni in x: $\frac{x^4+ax^2+b}{x^2+1}$ dove a e b sono parametri reali. Fra tali funzioni indicare con $f(x)$ quella per cui la curva k di equazione $y = f(x)$, disegnata in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, soddisfi alle seguenti condizioni: la retta di equazione $y = 1$ sechi k in due punti e sia tangente a essa in un punto; l'asse x sia tangente a k in due punti distinti. a) Disegnare l'andamento di k. b) Calcolare l'area della regione piana delimitata da k e dall'asse x. c) Calcolare $\int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right)dx$.
$$\left[\text{a) } y=\frac{\left(x^2-1\right)^2}{x^2+1};\text{ b) } 2\pi-\frac{16}{3};\text{ c) } 3\pi-8\right]$$

52. (Liceo scientifico 1997/98) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva C' di equazione: $y=\frac{x^2-1}{2x}$. a) Studiarla e disegnarne l'andamento, indicando con A e B i punti in cui la curva seca l'asse x ($x_A > x_B$). b) Trovare l'equazione della circonferenza C'' tangente a C' in A e passante per B. c) Disegnare C'' sullo stesso piano di C' dopo aver determinato il raggio e il centro di C'' e inoltre le coordinate dell'ulteriore punto in cui C'' seca C'. d) Determinare l'angolo sotto cui C' e C'' si secano in B. [90°] e) Calcolare le aree delle regioni in cui C' divide il cerchio delimitato da C''.
$$\left[\text{b) } x^2+y^2-2y-1=0;\text{c) }\left(-\frac{1}{5};\frac{12}{5}\right);\text{ d) } S=cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{2}{5}-ln\left(\sqrt{5}\right);2\pi-S\right]$$

53. (Liceo scientifico 1997/98) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione: $y = ax^3 + 3x + b$ dove a, b sono parametri reali con $a \neq 0$. a) Determinare i valori di a per i quali queste curve hanno un punto di massimo ed uno di minimo relativi e quelli per i quali non ammettono tali punti. b) Calcolare i valori di a e b in modo che la curva

corrispondente abbia un massimo relativo uguale a 0 e sechi l'asse x nel punto di ascissa $-2\cdot\sqrt{2}$ .c) Controllato che la curva si ottiene per $a = -\frac{1}{2}$, disegnarne l'andamento. d) Calcolare l'area della regione piana delimitata dalla curva e dall'asse x. $\left[\text{a) } a<0;\ \text{b) } a=\frac{1}{2}, b=-2\cdot\sqrt{2};\ \text{c) } \frac{27}{2}\right]$

54. (Liceo scientifico PNI 1997/98) In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy sono dati i punti $A \equiv (-1; 0)$ e $B \equiv (1; 0)$. Il candidato: a) scriva l'equazione di Γ_1, luogo dei punti per cui è uguale a $2\cdot\sqrt{2}$ la somma delle distanze da A e da B, e l'equazione di Γ_2, luogo dei punti per cui è uguale a $\sqrt{2}$ la distanza da B; b) verifichi che Γ_1 e Γ_2 hanno due punti C e D in comune e dimostri che CBD è un triangolo rettangolo; c) determini, eventualmente sfruttando la simmetria della curva Γ_1 rispetto all'asse delle ordinate, l'area della regione finita di piano S delimitata dagli archi di Γ_1 e di Γ_2 appartenenti al semipiano di equazione $y \geq 0$ e dai segmenti VW e $V'W'$, essendo V, V'' e W, W' i punti d'intersezione dell'asse delle ascisse rispettivamente con Γ_1 e con Γ_2 (V e W di ascissa positiva); d) considerato il solido T che si ottiene facendo ruotare S di un giro completo attorno all'asse delle ascisse, scriva la funzione $f(x)$ che esprime l'area della sezione di T con il piano perpendicolare all'asse delle ascisse e passante per $P \equiv (x, 0)$, distinguendo le varie posizioni di P, e disegni la curva di equazione $y = f(x)$ dica cosa rappresenta per il solido T l'area della parte di piano compresa tra S e l'asse delle ascisse. [a) $x^2 + 2y^2 - 2 = 0$; $x^2 + y^2 - 2x - 1= 0$; b) (0; 1), (0; –1); c) $1 + \frac{\pi}{2}$;

$$\text{d) } f(x)=\begin{cases} \frac{\pi\cdot(2-x^2)}{2} & -\sqrt{2}\leq x\leq 1-\sqrt{2} \\ \frac{\pi\cdot(x^2-4x)}{2} & 1-\sqrt{2}<x\leq 0 \\ \frac{\pi\cdot(4x-x^2)}{2} & 0<x\leq\sqrt{2} \\ \pi\cdot(-x^2+2x+1) & \sqrt{2}<x\leq 1+\sqrt{2} \end{cases}$$; e) misura del volume di T]

55. (Liceo scientifico 1998/99) In un piano α sono assegnate una circonferenza k di raggio di lunghezza data r e una parabola p passante per gli estremi A, B di un diametro di k e avente come asse di simmetria l'asse del segmento AB. L'area del segmento parabolico delimitato dalla parabola p e dal segmento AB è $\frac{8}{3}r^2$. Dopo aver riferito il piano α ad un conveniente sistema di assi cartesiani Oxy: a) determinare l'equazione della circonferenza k; b) determinare l'equazione della parabola p; c) trovare le coordinate dei punti comuni a k e p; d) calcolare le aree delle regioni piane in cui la parabola p divide il cerchio delimitato da k; e) stabilire per quale valore di r la maggiore di tali aree è uguale a $\frac{32+22\pi-15\cdot\sqrt{3}}{3}$ cm^2. [a) $x^2 + y^2 = r^2$, con $A \equiv (-r, 0)$, $B \equiv (r, 0)$; b) $y=\pm\frac{2}{r}x^2\mp 2r$;

c) $A, B, \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}r; -\frac{r}{2}\right)\vee\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}r; \frac{r}{2}\right)$ d) $\frac{2\pi+15\cdot\sqrt{3}-32}{24}, \frac{10\pi-15\cdot\sqrt{3}+32}{12}$; $2\cdot\sqrt{\frac{22\pi-15\cdot\sqrt{3}+32}{10\pi-15\cdot\sqrt{3}+32}}$]

56. (Liceo scientifico PNI 1998/99) In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy è data la parabola γ di equazione: $y=\frac{x^2}{2}-x$. Siano A un punto dell'asse x di ascissa λ, con λ > 0, B il suo simmetrico rispetto a O, e A' e B' i punti della parabola le cui proiezioni ortogonali sull'asse x sono rispettivamente A e B. Il candidato: a) verifichi che le tangenti a e b alla parabola γ, rispettivamente in A' e B', si incontrano in un punto E dell'asse y; b) detti C e D i rispettivi punti di intersezione di a e con l'asse x, esprima in funzione di λ l'area del triangolo CED; c) studi la funzione $s(\lambda)$ e tracci, in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali $O'\lambda s$, la curva C di equazione $s = s(\lambda)$; d) detto λ_0 il valore di λ per cui s assume valore minimo relativo, e detti a_0 e b_0 le posizioni di a e b per detto

valore, calcoli l'area della regione finita del semipiano di equazione $y \le 0$, compresa tra γ, a_0 e b_0.

$$\left[\text{a) } \left(0; -\frac{\lambda^2}{2}\right);\ \text{b) } \frac{\lambda^5}{4\cdot|\lambda^2-1|};\ \text{d) } \frac{25\cdot\sqrt{15}-48}{72}\right]$$

57. (Liceo scientifico PNI 1999/00) Assegnata la funzione: $f(x) = a \cdot ln^2(x) + b \cdot ln(x)$, dove il logaritmo si intende in base e, il candidato: a) determini per quali valori di a e b la $f(x)$ ha un minimo relativo nel punto $\left(\sqrt{e}; -\frac{1}{4}\right)$. b) disegni la curva grafico della $f(x)$ per i valori di a e di b così ottenuti e calcoli l'area della regione finita da essa delimitata con l'asse x. [a) $a = 1 \wedge b = -1$; b) $x_m = \sqrt{e}$; $3 - e$]

58. (Liceo scientifico 1999/00) Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, continua su tutto l'asse reale, tale che: [1] $\int_0^1 f(x)\,dx = 2$ e $\int_0^2 f(x)\,dx = -5$. a) Di ciascuno dei seguenti integrali: $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$, $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx, \int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right)dx, \int_0^1 f(2x)\,dx$, dire se le condizioni [1] sono sufficienti per calcolarne il valore e in caso di risposta affermativa qual è questo. b) Posto: $f(x) = ax^3 + bx + c$, dove a, b, c sono parametri reali con $a \ne 0$, determinare le curve di equazione $y = f(x)$ che soddisfano alle condizioni [1]. c) Dimostrare che ognuna delle curve trovate ha uno ed un solo punto di flesso che è centro di simmetria per la curva medesima. d) Determinare quella, tra tali curve, che ha il flesso nel punto di ordinata –4. e) Fra le curve suddette determinare, infine, quelle che hanno punti estremanti e quelle che non ne hanno. [a) No, 4, –14, $-\frac{5}{2}$; b) $f(x) = \left(\frac{2}{3}k - \frac{13}{3}\right)x^3 + \left(\frac{37}{6} - \frac{7}{3}k\right)x + k$;

c) $F \equiv (0; k)$; d) $k = -4$; e) $k < \frac{13}{12} \vee k > \frac{37}{14}$]

59. (Liceo scientifico 2000/2001) Considerato un qualunque triangolo ABC, siano D ed E due punti interni al lato BC tali che: $\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}$. Siano poi M ed N i punti medi rispettivamente dei segmenti AD ed AE. a) Dimostrare che il quadrilatero $DENM$ è la quarta parte del triangolo ABC. b) Ammesso che l'area del quadrilatero $DENM$ sia $\frac{45}{2}a^2$, dove a è una lunghezza assegnata, e ammesso che l'angolo $A\hat{B}C$ sia acuto e si abbia inoltre: $\overline{AB} = 13\,a$, $\overline{BC} = 15\,a$, verificare che tale quadrilatero risulta essere un trapezio rettangolo. c) Dopo aver riferito il piano della figura, di cui al precedente punto b), ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della parabola, avente l'asse perpendicolare alla retta BC e passante per i punti M, N, C. d) Calcolare, infine, le aree delle regioni in cui tale parabola divide il triangolo ADC.

$$\left[\text{c) } y = -\frac{2}{25}x^2 + \frac{1}{5}x + 6a;\ \text{d) } \frac{135}{5}a^2, \frac{345}{8}a^2\right]$$

60. (Liceo scientifico PNI 2001/02) Due numeri x e y hanno somma e quoziente uguali a un numero reale a non nullo. Riferito il piano a un sistema S di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche (x, y): a) si interpreti e discuta il problema graficamente al variare di a; b) si trovi l'equazione cartesiana del luogo γ dei punti $P \equiv (x, y)$, che soddisfano al problema; c) si rappresentino in S sia la curva γ che la curva γ' simmetrica di γ rispetto alla bisettrice del I e III quadrante; d) si determini l'area della regione finita di piano del primo quadrante delimitata da γ e da γ' e se ne dia un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati; e) si calcoli y nel caso che x sia uguale a 1 e si colga la particolarità del risultato. [a) Intersezione di due rette, una delle quali privata del punto di ordinata nulla;

b) $x = \frac{y^2}{y-1}$; d) 0,106; $y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$]

61. (Liceo scientifico 2001/02) La funzione reale di variabile reale $f(x)$, continua per ogni x, è tale che: $\int_0^2 f(x)\,dx = a$, $\int_0^6 f(x)\,dx = b$, dove a e b sono numeri reali. Determinare, se esistono, i valori a, b per

cui risulta: $\int_0^3 f(2x)\ dx = ln(2)$ e $\int_1^3 f(2x)\ dx = ln(4)$. [$a = ln(-4)$, $b = ln(4)$]

62. (Liceo scientifico 2002/03) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+2}$ g, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 1$. [≈ 0,96]

63. (Liceo scientifico PNI 2002/03) Sia $f(x) = a \cdot 2^x + b \cdot 2^{-x} + c$ con a, b, c numeri reali. a)Si determinino a, b, c in modo che: la funzione f sia pari; $f(0) = 2$; $\int_0^1 f(x)\,dx = \dfrac{3}{2 \cdot \log 2}$. b) Si studi la funzione g ottenuta sostituendo ad a, b, c i valori così determinati e se ne disegni il grafico G. c) Si consideri la retta r di equazione $y = 4$ e si determinino, approssimativamente, le ascisse dei punti in cui essa interseca G, mettendo in atto un procedimento iterativo a scelta. d) Si calcoli l'area della regione finita del piano racchiusa tra r e G. e) Si calcoli $\int \dfrac{1}{g(x)}dx$ .f) Si determini la funzione g' il cui grafico è simmetrico di G rispetto alla retta r.

[a) $a = b = 1$, $c = 0$; b) $m \equiv O$; c) ≈ ± 1,899; d) ≈ 5,2045; e) $\dfrac{tan^{-1}\left(2^x\right)}{ln(2)}+c$; f) $g'(x) = 8 - 2^x - 2^{-x}$]

64. (Liceo scientifico PNI 2002/03) L'equazione cartesiana della versiera di Agnesi è: $y = \dfrac{a^3}{x^2+a^2}$, si provi che l'area compresa fra tale curva e il suo asintoto orizzontale è quattro volte quella del cerchio γ di diametro $OA = a$, con $A \equiv (0; a)$.

65. (Liceo scientifico PNI 2002/03 e 2005/06) Verificare l'uguaglianza: $\pi = 4 \cdot \int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2\ dx}$ e utilizzarla per calcolare un'approssimazione di π, applicando un metodo di integrazione numerica.

66. (Liceo scientifico PNI 2002/03) Dare un esempio di solido il cui volume è dato da $\int_0^1 \pi \cdot x^3\ dx$.

67. (Liceo scientifico 2003/04) Sia f la funzione definita da: $f(x) = 2x - 3x^3$. Nel primo quadrante degli assi cartesiani, considerate la retta $y = c$ che interseca f in due punti distinti e le regioni finite di piano R e S che essa delimita con G. Precisamente: R delimitata dall'asse y, da f e dalla retta $y = c$ e S delimitata da G e dalla retta $y = c$. Determinate c in modo che R e S siano equivalenti e determinate le corrispondenti ascisse dei punti di intersezione di G con la retta $y = c$. $\left[c = \dfrac{4}{9}; x_1 = \dfrac{2}{3}; x_2 = \dfrac{\sqrt{3}-1}{3}\right]$

68. (Liceo scientifico 2003/04) Calcolate: $\int_0^1 sin^{-1}\left(x\right)dx$. $\left[\dfrac{\pi}{2}-1\right]$

69. (Liceo scientifico 2004/05) Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy, ortogonale e monometrico, si consideri la regione R, finita, delimitata dagli assi coordinati e dalla parabola λ d'equazione: $y = 6 - x^2$. a) Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno all'asse y. b) Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno alla retta $y = 6$. c) Si determini il valore di k per cui la retta $y = k$ dimezza l'area di R. d) Per $0 < t < \sqrt{6}$ sia $A(t)$ l'area del triangolo delimitato dagli assi e dalla tangente a λ nel suo punto di ascissa t. Si determini $A(1)$. e) Si determini il valore di t per il quale $A(t)$ è minima.

[a) 18π; $\dfrac{36\pi \cdot \sqrt{6}}{5}$;c) $6-3\cdot\sqrt[3]{2}$; d) $\dfrac{49}{4}$; e) $6\cdot\sqrt{2}$]

70. (Liceo scientifico 2004/05) Si consideri la funzione $f\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=\dfrac{1}{2}x^2\left[3-2log\left(x\right)\right]+1 \text{ se } x>0 \end{cases}$ definita sull'intervallo $[0;+\infty[$, e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy, ortogonale e monometrico. a) Sia n un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di n, l'area A_n del dominio

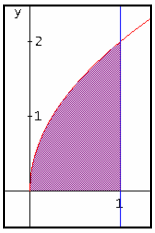
piano delimitato dalla curva C, dalla retta tangente r e dalle rette: $x=\frac{1}{n}$ e $x = 1$. b) Si calcoli il limite per n che tende a $+\infty$ di A_n e si interpreti il risultato ottenuto. $\left[\text{a) } \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[f(x)-2x-\frac{1}{2}\right]dx;\text{ b) } \frac{1}{9}\right]$

71. (Liceo scientifico PNI 2004/05) Nel piano Oxy sono date le curve λ e r d'equazioni: λ: $x^2 = 4(x - y)$ e r: $4y = x + 6$. a) Si determini l'area della regione finita di piano racchiusa da λ e dalla retta s, simmetrica di r rispetto all'asse x. b) Si determini il valore di c per il quale la retta $y = c$ divide a metà l'area della regione S del I quadrante compresa tra λ e l'asse x. c) Si determini il volume del solido di base S le cui sezioni ottenute con piani ortogonali all'asse x sono quadrati. $\left[\text{a) } \frac{343}{24};\text{ b) } 1-\frac{1}{\sqrt[3]{4}};\text{ c) } \frac{32}{15}\right]$

72. (Liceo scientifico 2005/06) Si considerino le funzioni $f(x) = ln(x)$ e $g(x) = x^2$. Si calcoli l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni f e g e dalle rette $x = 1$ e $x = 2$. $\left[\frac{10}{3}-2\cdot ln(2)\right]$

73. (Liceo scientifico PNI 2005/06) Si considerino le funzioni $f(x) = ln(x)$ e $g(x) = -e^2\cdot x^2$. Si calcoli, l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni f e g (con $x > 0$) nella striscia di piano determinata dalle rette d'equazioni $y = -1$ e $y = -2$. $\left[\frac{4\cdot\sqrt{2}-5}{3e}+\frac{1}{e^2}\right]$

74. (Liceo scientifico 2006/07) La regione R delimitata dal grafico di $y=2\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 1$ (in figura)



è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di S. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

75. (Liceo scientifico 2006/07) Se $f(x)$ è una funzione reale dispari (ossia il suo grafico cartesiano è simmetrico rispetto all'origine), definita e integrabile nell'intervallo [–2, 2], che dire del suo integrale esteso a tale intervallo? [È nullo]

76. (Liceo scientifico 2006/07) Si calcoli l'integrale indefinito $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$ e, successivamente, si verifichi che il risultato di $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ è in accordo con il suo significato geometrico.

77. (Liceo scientifico PNI 2006/07) Si calcoli $\int_0^t \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$; successivamente se ne trovi il limite per $t\to\infty$ e si interpreti geometricamente il risultato. $\left[tan^{-1}(e)-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$

78. (Liceo scientifico PNI 2006/07) La regione del piano racchiusa tra il grafico della funzione $y = ln(x)$ e l'asse x, con $1 \le x \le e$, è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x sono tutte rettangoli aventi l'altezza tripla della base. Si calcoli il volume di S e se ne dia un valore approssimato a meno di 10^{-2}. $[3\cdot(e-2)]$

79. (Liceo scientifico PNI 2007/08) Si determini un polinomio $P(x)$ di terzo grado tale che si abbia: $P(0) = P'(0) = 0$, $P(1) = 0$ e $\int_0^1 P(x)\,dx=\frac{1}{12}$. $[-x^3+x^2]$

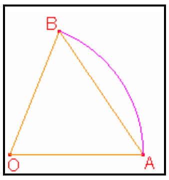
80. (Liceo scientifico PNI 2007/08) Si calcoli l'area Ω della parte di piano delimitata dalla funzione $y=\frac{1}{2}x-2+\frac{3}{2x}$ e dalle tangenti a essa nei punti A(1, 0), B(3, 0). Verificato che è $\Omega=\frac{3}{2}\cdot\left(ln(3)-1\right)$ si

illustri una procedura numerica per il calcolo approssimato di $ln(3)$.

81. (Liceo scientifico PNI 2007/08) Data la funzione $h(x) = 2^x - x^2$, si tracci il suo grafico e si calcoli l'area racchiusa tra il grafico di h e l'asse x sull'intervallo [2; 4]. $\left[\frac{56}{3}-\frac{12}{ln(2)}\right]$

82. (Liceo scientifico PNI 2007/08) Un solido ha per base un cerchio di raggio 1. Ogni sezione del solido ottenuta con un piano perpendicolare ad un prefissato diametro è un triangolo equilatero. Si calcoli il volume del solido. $\left[\frac{4}{3}\cdot\sqrt{3}\right]$

83. (Liceo scientifico 2008/09) È assegnato il settore circolare AOB di raggio 2 e ampiezza $\frac{\pi}{3}$. Il settore AOB è la base di un solido W le cui sezioni ottenute con piani ortogonali ad OA sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di W.



$\left[\frac{8}{3}\right]$

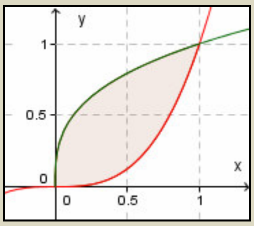
84. (Liceo scientifico 2008/09) Sia D la regione del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati, dalla funzione $f(x) = ln(x)$ e dalla retta $y = 1$. a) Si calcoli l'area di D. b) Si calcoli il volume del solido generato da D nella rotazione completa attorno alla retta d'equazione $x = -1$.
$\left[\text{a) } e-1; \text{b) } \frac{\pi}{2}\cdot\left(e^2+4e-5\right)\right]$

85. (Liceo scientifico PNI 2008/09) Si calcoli $\int_0^2\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)dx$ e se ne dia l'interpretazione geometrica.
$[3 - 9e^{-2}]$

Lavoriamo insieme

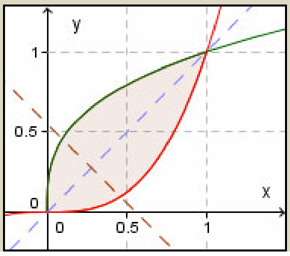
Consideriamo il seguente problema assegnato agli esami di Liceo scientifico PNI 2008/09.
Sia D la regione finita del primo quadrante delimitata da $g(x) = x^3$ *e dal grafico della funzione inversa di g. Si calcoli l'area di D.*

Determiniamo la funzione inversa. $y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$. In basso abbiamo rappresentato le due funzioni ed evidenziamo la regione D. Si determina abbastanza semplicemente la seconda intersezione delle curve nel punto (1; 1). Pertanto l'area è: $\int_0^1\left(\sqrt[3]{x}-x^3\right)dx=\int_0^1\left(x^{\frac{1}{3}}-x^3\right)dx=\left[\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\left[\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.



b) *La regione D è base di un solido W le cui sezioni con piani perpendicolari alla bisettrice del primo quadrante sono tutte rettangoli di altezza* 12. *Si determini la sezione di area massima e il volume di W.*
La sezione di area massima si ottiene ovviamente quando la generica retta perpendicolare alla bisettrice stacca la massima corda (vedi figura seguente). Determinare le intersezioni della perpendicolare generica con le due curve è alquanto complicato, dato che abbiamo a che fare con equazioni di terzo grado. Pertanto conviene determinare metà della corda, data la simmetria di D rispetto alla prima bisettrice. Quindi scelto un generico punto su una delle due curve, per esempio sulla $g(x)$, determiniamo la sua distanza dalla prima

bisettrice. $\frac{|x^3-x|}{\sqrt{2}}$. Determiniamo il massimo di questa funzione per $0 < x < 1$. $D\left(\frac{x^3-x}{\sqrt{2}}\right)=\frac{3x^2-1}{\sqrt{2}}$, che si annulla per $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ (unico dei due zeri compreso in [0; 1]) . Si verifica facilmente che è un massimo, quindi la massima corda è lunga $2\cdot\frac{\left|\left(\sqrt{3}/3\right)^3-\sqrt{3}/3\right|}{\sqrt{2}}=\frac{2\cdot\sqrt{6}}{9}$. E perciò la massima sezione misura $\frac{8\cdot\sqrt{6}}{3}$. Il solido è una specie di parallelepipedo rettangolo la cui base è D, pertanto il volume è semplicemente l'area della base per l'altezza costante. $\frac{1}{2}\cdot 12 = 6$.



86. (Liceo scientifico PNI 2008/09) Siano $0 < a < b$ e $x\in[-b,b]$. Si provi che $\int_{-b}^{b}|x-a|\,dx=a^2+b^2$.

87. (Liceo scientifico PNI 2010/11) Sia f la funzione definita sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali da $f(x)=x+ln(4)+\frac{2}{e^x+1}$. Posto $I(\beta)=\int_0^{\beta}\left[f(x)-x-ln(4)\right]dx$, si calcoli $\lim_{\beta\to+\infty}I(\beta)$. Qual è il significato geometrico del risultato ottenuto? [$2\cdot ln(2)$]

88. (Liceo scientifico PNI 2010/11) Per il progetto di una piscina, un architetto si ispira alle funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da: $f(x) = x^3 - 16x$, $g(x)=sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. a) L'architetto rappresenta la superficie libera dell'acqua nella piscina con la regione R delimitata dai grafici di f e g sull'intervallo [0; 4]. Si calcoli l'area di R. b) In ogni punto di R a distanza x dall'asse y, la misura della profondità dell'acqua nella piscina è data da $h(x) = 5 - x$. quale sarà il volume d'acqua nella piscina? c) Quanti litri d'acqua saranno necessari per riempire la piscina se tutte le misure sono espresse in metri?

[a) 64; b) $\frac{8}{\pi}+\frac{2752}{15}$; c) ≈ 186013]

89. (Liceo scientifico PNI 2010/11) Sia R la regione delimitata, per $x\in[0,\pi]$, dalla curva $y=sin(x)$ e dall'asse x e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y. Si calcoli il volume di W. [$2\pi^2$]

90. (Liceo scientifico 2010/11) Si considerino le funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da: $f(x) = x^3 - 4x$, $g(x) = sin(\pi x)$. Fissato un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy si studino le funzioni f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f, G_g. a) Sia R la regione del piano delimitata da G_f e G_g sull'intervallo [0; 2]. Si calcoli l'area di R. b) La regione R rappresenta la superficie libera dell'acqua contenuta in una piscina. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y, la misura della profondità dell'acqua nella piscina è data da $h(x) = 3 - x$. Quale integrale definito dà il volume dell'acqua? Supposte le misure in metri, quanti litri d'acqua contiene la piscina?

[a) 4; b) $\int_0^2\left[sin(\pi x)-x^3+4x\right]\cdot(3-x)\,dx$; c) ≈ 8370]

91. (Liceo scientifico 2010/11) Si studi su $\mathbb{R}$ la funzione $f(x) = (x - 1)\,e^{-\frac{x}{3}} + 3$ e se ne tracci il grafico Γ nel sistema di riferimento Oxy. Si calcoli l'area della regione di piano del primo quadrante delimitata

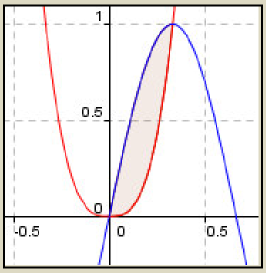
da Γ, dall'asse y e dalla retta $y = 3$. $\left[\frac{9}{\sqrt[3]{e}}-6\right]$

92. (Liceo scientifico 2010/11) Sia R la regione delimitata dalla curva $y = x^3$ e dall'asse x e dalla retta x = 2 e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y. Si calcoli il volume di W. $\left[\frac{64\pi}{5}\right]$

93. (Liceo scientifico 2010/11) Si trovi l'area della regione delimitata dalla curva $y = cos(x)$ e dall'asse x da x = 1 a x = 2 radianti. [2 – sin(1) – sin(2)]

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente problema assegnato agli esami di Liceo scientifico 2011/12. *Siano f e g le funzioni definite, per tutti gli x reali, da f* (x) = $|27x^3|$ *e* $g(x) = sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$. a) *Sia R la regione delimitata da Gf e da Gg. Si calcoli l'area di R.*



La regione R è quella mostrata in figura. L'unico problema potrebbe essere quello di determinare l'ascissa del secondo punto di intersezione, cioè di risolvere l'equazione $27x^3 = sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$. Ma facilmente si ha: $27\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 = sin\left(\frac{3\pi}{2}\cdot\frac{1}{3}\right) = sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, quindi l'area da calcolare è $\int_0^{\frac{1}{3}}\left[sen\left(\frac{3}{2}\pi x\right)-27x^3\right]dx$. Perciò:

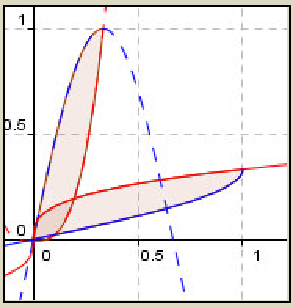
$$\int_0^{\frac{1}{3}}\left[sen\left(\frac{3}{2}\pi x\right)-27x^3\right]dx =$$

$$= \frac{2}{3\pi}\cdot\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{3}{2}\pi sen\left(\frac{3}{2}\pi x\right)dx - 27\cdot\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\pi}\cdot\left[-cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right)\right]_0^{\frac{1}{3}} - 27\cdot\frac{1}{4\cdot 81} = \frac{2}{3\pi}\cdot(0+1)-\frac{1}{12} = \frac{8-\pi}{12\pi} \approx 0,13.$$

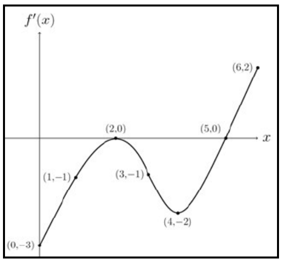
b) La regione R, ruotando attorno all'asse x, genera il solido S e, ruotando attorno all'asse y, il solido T. Si scrivano, spiegandone il perché, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di S e di T.

per la prima domanda si ha: $S = \pi\int_0^{\frac{1}{3}}\left[sen^2\left(\frac{3}{2}\pi x\right)-\left(27x^3\right)^2\right]dx = \frac{5}{42}\cdot\pi$. Per il secondo volume dobbiamo ricorrere alle funzioni inverse delle date, per potere applicare la precedente regola, ricondurre cioè il problema a una rotazione attorno all'asse delle ascisse: $y = sen\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \Rightarrow \frac{3}{2}\pi x = sen^{-1}y \Rightarrow x = \frac{2}{3\pi}\cdot sen^{-1}y$;

$y = 27x^3 \Rightarrow x = \frac{\sqrt[3]{y}}{3}$, ovviamente cambiano anche gli estremi della regione passando da $\left[0;\frac{1}{3}\right]$ a [0; 1], come meglio mostrato in figura.



Quindi il volume cercato è $T=\pi\int_0^1\left[\frac{2}{3\pi}\cdot\left[sen^{-1}(x)\right]^2-\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{3}\right)^2\right]dx=\frac{2\cdot\left(20-\pi^2\right)}{45\pi}\approx 0{,}14$.

94. (Liceo scientifico PNI 2011/12) 

Della funzione *f*, definita per $0 \le x \le 6$, si sa che è dotata di derivata prima e seconda e che il grafico della sua derivata $f'(x)$, disegnato a lato, presenta due tangenti orizzontali per $x = 2$ e $x = 4$. Si sa anche che $f(0) = 9$, $f(3) = 6$ e $f(5) = 3$. a) Si trovino le ascisse dei punti di flesso di *f* motivando le risposte in modo esauriente. b) Per quale valore di *x* la funzione *f* presenta il suo minimo assoluto? Sapendo che $\int_0^6 f'(t)\,dt=-5$ per quale valore di *x* la funzione *f* presenta il suo massimo assoluto? c) Sia *g* la funzione definita da $g(x) = x\,f(x)$. Si trovino le equazioni delle rette tangenti ai grafici di *f* e di *g* nei rispettivi punti di ascissa $x = 3$ e si determini la misura, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto che esse formano. [a) $x = 2$, $x = 4$; b) $x = 6$; c) $y = -x + 9$; $y = 3x + 9$; $\approx 63°26'6''$]

95. (Liceo scientifico PNI 2012/13) Sia la funzione $f(x)=\frac{8}{1+e^{2-x}}$, si calcoli l'area della regione di piano delimitata da $f''(x)$ e dall'asse *x* sull'intervallo [0, 2]. $\left[2-\frac{8e^2}{\left(e^2+1\right)^2}\right]$

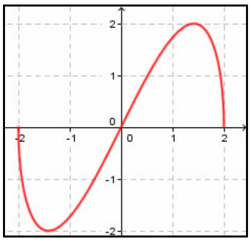
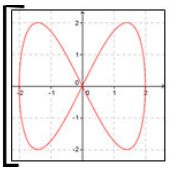
96. (Liceo scientifico 2012/13) Sia *f* la funzione definita, per tutti gli *x* reali, da $f(x)=\frac{8}{4+x^2}$. Si consideri la regione *R* compresa tra $f(x)$ e l'asse *x* sull'intervallo [0, 2]. Si provi che *R* è equivalente a un cerchio di raggio 1 e si provi altresì che la regione compresa tra $f(x)$ e tutto l'asse *x* è equivalente a quattro volte il detto cerchio. La regione *R*, ruotando attorno all'asse *y*, genera il solido *W*. Si scriva, spiegandone il perché, ma senza calcolarlo, l'integrale definito che fornisce il volume di *W*.

$$\left[\pi\cdot\int_1^2\left(\sqrt{\frac{8}{x}-4}\right)^2 dx=4\pi\cdot\left[ln(4)-1\right]\right]$$

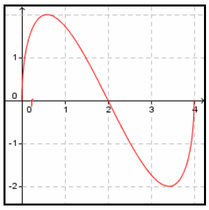
97. (Liceo scientifico 2012/13) La funzione *f* è definita da $f(x)=\int_0^x\left[cos\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]dt$ per tutti i numeri reali *x* appartenenti all'intervallo chiuso [0, 9]. a) Si calcolino $f'(\pi)$ e $f'(2\pi)$. b) Si tracci, in un sistema di coordinate cartesiane, il grafico Σ di $f'(x)$ e da esso si deduca per quale o quali valori di *x*, $f(x)$ presenta massimi o minimi. Si tracci altresì l'andamento di $f(x)$ deducendolo da quello di $f'(x)$. c) Si trovi il valor medio di $f'(x)$ sull'intervallo $[0, 2\pi]$. d) Sia *R* la regione del piano delimitata da Σ e dall'asse *x* per $0 \le x \le 4$; *R* è la base di un solido *W* le cui sezioni con piani ortogonali all'asse *x* hanno, per ciascun *x*, area $A(x) = 3sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$. Si calcoli il volume di *W*.

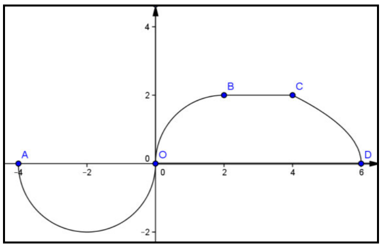
$$\left[\text{a) }\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\text{ b) }x_M=0;\ x_m=2\pi;\text{ c) }\frac{1}{2};\text{ d) }\frac{24}{\pi}\right]$$

98. (Liceo scientifico PNI 2012/13) Sia *f* la funzione definita per tutti gli *x* positivi da $f(x) = x^3\,ln(x)$. Sia *R* la regione delimitata da essa e dall'asse *x* sull'intervallo aperto a sinistra]0, 1]. Si calcoli l'area di *R*, illustrando il ragionamento seguito, e la si esprima in mm^2 avendo supposto l'unità di misura lineare pari a 1 *decimetro*. [625 mm^2]

99. (Liceo scientifico 2013/14)  A lato è disegnato il grafico Γ della funzione $x \cdot \sqrt{4-x^2}$. Si disegni la curva d'equazione $y^2 = x^2 \cdot (4-x^2)$ e si calcoli l'area della parte di piano da essa racchiusa.  $\left[\frac{2}{3} \right]$

100. (Liceo scientifico 2013/14) Un solido ha per base la regione R delimitata dal grafico di $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ e dall'asse x sull'intervallo [– 2; – 1]. In ogni punto di R di ascissa x, l'altezza del solido è data da $h(x) = \frac{1}{x^2}$. Si calcoli il volume del solido. $\left[\frac{\sqrt{e}-1}{e} \right]$

101. (Liceo scientifico PNI 2013/14) Sia $f(x) = (2-x) \cdot \sqrt{4x-x^2}$.  A lato è disegnato il grafico Γ di $f(x)$. a) Si calcoli l'area della regione compresa tra Γ e l'asse x. b) Sia $h(x) = sin(f(x))$, qual è il valore di $\int_0^4 h(x)\, dx$? $\left[\text{a) } \frac{16}{3}; \text{ b) } 0 \right]$

102. (Liceo Scientifico PNI 2013/14)  Sia $g(x)$ una funzione continua sull'intervallo chiuso [– 4, 6]. Il grafico di $g(x)$, disegnato a lato, passa per i punti $A \equiv (-4; 0)$, $O \equiv (0; 0)$, $B \equiv (2; 2)$, $C \equiv (4; 2)$, $D \equiv (6; 0)$ e consiste della semicirconferenza di diametro AO, dell'arco, quarto di circonferenza, di estremi O e B, del segmento BC e dell'arco CD di una parabola avente per asse di simmetria l'asse x. a) Posto $f(x) = \int_{-4}^{x} g(t)\,dt$, si calcolino $f(-4)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$. b) Per quali valori di $x \in [-4, 6]$, $f(x)$ è positiva, negativa o nulla? E per quali x è positiva, negativa o nulla la funzione derivata seconda $f''(x)$? c) La funzione presenta un massimo e un minimo assoluti? Qual è l'andamento di $f(x)$?

$$\left[\text{a) } 0; -2\pi; \frac{-8\pi - 3\cdot\sqrt{3}}{6}; -\pi; 4-\pi; \frac{20-3\pi}{3}; \text{b) } f(x) \begin{cases} < 0 & x \in \left(-4; 2+\frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\} \\ = 0 & x = 0 \vee = 2+\frac{\pi}{2}; \\ > 0 & x \in \left(2+\frac{\pi}{2}; 6\right] \end{cases} \right.$$

$$f''(x)\begin{cases} <0 & x\in(4;6) \\ =0 & x=2 \\ >0 & x\in(-2;2)\setminus\{0\}\end{cases}$$; c) $x_{min} = 0$, $x_{max} = 6$]

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente problema assegnato agli esami di Liceo scientifico 2015/16. *L'amministratore di un piccolo condominio deve installare un nuovo serbatoio per il gasolio da riscaldamento. Non essendo soddisfatto dei modelli esistenti in commercio, ti incarica di progettarne uno che risponda alle esigenze del condominio.*

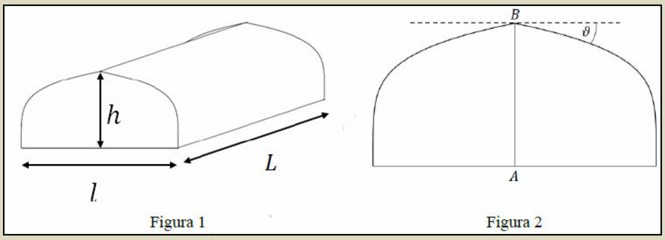


Figura 1 Figura 2

Allo scopo di darti le necessarie informazioni, l'amministratore ti fornisce il disegno in figura 1, aggiungendo le seguenti indicazioni:

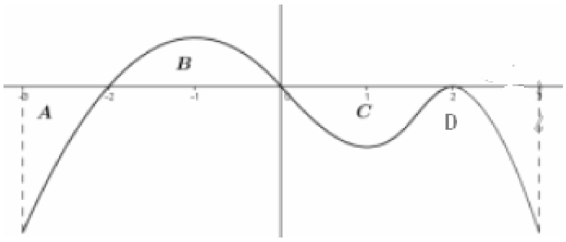
- *la lunghezza L del serbatoio deve essere pari a otto metri;*
- *la larghezza l del serbatoio deve essere pari a due metri;*
- *l'altezza h del serbatoio deve essere pari a un metro;*
- *il profilo laterale (figura 2) deve avere un punto angoloso alla sommità, per evitare l'accumulo di ghiaccio durante i mesi invernali, con un angolo $\vartheta \ge 10°$;*
- *la capacità del serbatoio deve essere pari ad almeno 13 m^3, in modo da garantire al condominio il riscaldamento per tutto l'inverno effettuando solo due rifornimenti di gasolio;*
- *al centro della parete laterale del serbatoio, lungo l'asse di simmetria (segmento AB in figura 2) deve essere installato un indicatore graduato che riporti la percentuale di riempimento V del volume del serbatoio in corrispondenza del livello z raggiunto in altezza dal gasolio.*

Considerando come origine degli assi cartesiani il punto A in figura 2, individua tra le seguenti famiglie di funzioni quella che meglio può descrivere il profilo laterale del serbatoio per $x \in [-1, 1]$, k intero positivo, motivando opportunamente la tua scelta:

$$f(x)=(1-|x|)^{\frac{1}{k}} \;;\; f(x)=-6|x|^3+9kx^2-4|x|+1 \,;\, f(x)=cos\left(\frac{\pi}{2}x^k\right)$$

La funzione cercata deve essere simmetrica rispetto all'asse y, e lo sono tutte, definita almeno in [–1; 1], e anche questa proprietà è verificata da tutte. Deve essere $f(-1) = f(1) = 0$ e $f(0) = 1$, le prime due condizioni sono verificate dalla seconda funzione solo se $k = 1$, $9k - 9 = 0 \Rightarrow k = 1$. Inoltre deve avere un punto angoloso in 0, con $f'(0)^- > 0$ e $f'(0)^+ < 0$. Possiamo eliminare $f(x)=cos\left(\frac{\pi}{2}x^k\right)$, che è sempre derivabile; e $f(x)=-6|x|^3+9x^2-4|x|+1$ (ricordiamo che deve essere $k = 1$), dato che: $f'(0)^- = \lim_{x\to 0^-}(18x^2+18x+4)=4>0$ e $f'(0)^+ = \lim_{x\to 0^+}(-18x^2+18x-4)=-4<0$, ma per esempio $18x^2 + 18x + 4 > 0 \Rightarrow x<\frac{-9-\sqrt{81-72}}{9}=\frac{-9-3}{9}=-\frac{4}{3}\vee x>\frac{-9+3}{9}=-\frac{2}{3}$. Invece la prima funzione verifica tutte le richieste: $f'(0)^- = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{k}\cdot(1+x)^{\frac{1}{k}-1}=\frac{1}{k}>0; f'(0)^+ = \lim_{x\to 0^+}-\frac{1}{k}\cdot(1+x)^{\frac{1}{k}-1}=-\frac{1}{k}<0$.

103. (Liceo scientifico 2014/15) La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3;3]$, il grafico Γ disegnato in figura. Γ presenta le tangenti orizzontali per $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Le aree delle regioni A, B, C e D sono rispettivamente 2, 3, 3 e 1. Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$ tale che $g(3) = -5$.



a) Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito. b) Individua i valori di $x \in [-3; 3]$, per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di x per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto. c) Calcola $g(0)$ e, se esiste, il $\lim_{x\to 0}\frac{1+g(x)}{2x}$. d) Sia $h(x) = 3 \cdot f(2x + 1)$, determina il valore di $\int_{-2}^{1} h(x)\,dx$.

$\left[\text{b) } x_M = 0;\ (-3; -1) \text{ e in } (1; 2);\ \text{c) } -1;\ 0;\ \text{d) } -\frac{9}{2}\right]$

104. (Liceo scientifico 2014/15) Il grafico della funzione $f(x)=\sqrt{x}\,(x\in\mathbb{R}, x\geq 0)$ divide in due porzioni il rettangolo $ABCD$ avente vertici $A \equiv (1; 0)$, $B \equiv (4; 0)$, $C \equiv (4; 2)$ e $D \equiv (1; 2)$. Calcolare il rapporto tra le aree delle due porzioni. $\left[\frac{2}{7} \vee \frac{7}{2}\right]$

105. (Liceo scientifico 2015/16) Con riferimento a quanto svolto nel box Lavoriamo insieme. 1)Determina il valore di k che consente di soddisfare i requisiti richiesti relativamente all'angolo ϑ e al volume del serbatoio. 2) Al fine di realizzare l'indicatore graduato, determina l'espressione della funzione $V(z)$ che associa al livello z del gasolio (in metri) la percentuale di riempimento V del volume da riportare sull'indicatore stesso. 3) Quando consegni il tuo progetto, l'amministratore obietta che essendo il serbatoio alto un metro, il valore z del livello di gasolio, espresso in centimetri, deve corrispondere alla percentuale di riempimento: cioè, ad esempio, se il gasolio raggiunge un livello z pari a 50 *cm* vuol dire che il serbatoio è pieno al 50%; invece il tuo indicatore riporta, in corrispondenza del livello 50 *cm*, una percentuale di riempimento 59,7%. Illustra gli argomenti che puoi usare per spiegare all'amministratore che il suo ragionamento è sbagliato; mostra anche qual è, in termini assoluti, il massimo errore che si commette usando il livello z come indicatore della percentuale di riempimento, come da lui suggerito, e qual è il valore di z in corrispondenza del quale esso si verifica.

$\left[k=5; V(z)=\frac{z\cdot(6-z^5)}{5}; err_{\max} \text{ per } z=\sqrt[5]{\frac{1}{6}}\right]$

106. (Liceo scientifico 2015/16) Nella figura 1 è rappresentato il grafico Γ della funzione continua f: $[0, +\infty) \to \mathbb{R}$, derivabile in $]0, +\infty)$, e sono indicate le coordinate di alcuni suoi punti.

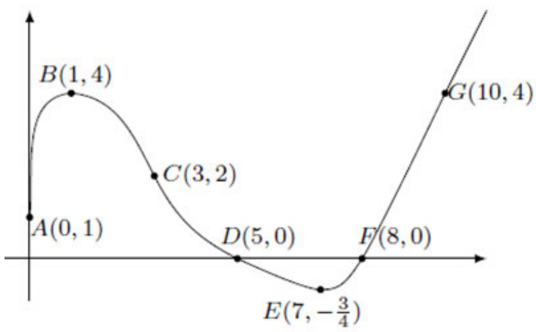


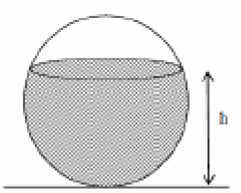
Figura 1

È noto che Γ è tangente all'asse y in A, che B ed E sono un punto di massimo e uno di minimo, che C è un punto di flesso con tangente di equazione $2x + y - 8 = 0$. Nel punto D la retta tangente ha equazione $x + 2y - 5 = 0$ e per $x \geq 8$ il grafico consiste in una semiretta passante per il punto G. Si sa inoltre che l'area della regione delimitata dall'arco $ABCD$, dall'asse x e dall'asse y vale 11, mentre l'area della regione delimitata dall'arco DEF e dall'asse x vale 1. 1) In base alle informazioni disponibili, rappresenta indicativamente i grafici delle funzioni $y = f'(x), F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Quali sono i valori di $f'(3)$ e $f'(5)$? Motiva la tua risposta. 2) Rappresenta, indicativamente, i grafici delle seguenti funzioni: $y = |f'(x)|$; $y = |f(x)|'$; $y = \frac{1}{f(x)}$ specificando l'insieme di definizione di ciascuna di esse. 3) Determina i valori medi di $y = f(x)$ e di $y = |f(x)|$ nell'intervallo [0,8], il valore medio di $y = f'(x)$ nell'intervallo [1,7] e il valore medio di $y = F(x)$ nell'intervallo [9,10]. 4) Scrivi le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione $F(x)$ nei suoi punti di ascisse 0 e 8, motivando le risposte.

[$f'(3) = -2, f'(5) = -½$; $(0; +\infty)$, $(0; +\infty)$, $(0; +\infty) \setminus \{5; 8\}$; 3/2, – 19/24, 37/3; $y = x$, $y = 10$]

107. (Liceo scientifico 2015/16) È noto che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$ Stabilire se il numero reale u, tale che $\int_{-\infty}^{u} e^{-x^2}\, dx = 1$ è positivo oppure negativo. Determinare inoltre i valori dei seguenti integrali, motivando le risposte: $A = \int_{-u}^{u} x^7 e^{-x^2}\, dx$; $B = \int_{-u}^{u} e^{-x^2}\, dx$; $C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2}\, dx$. $\left[u > 0; 0; 2 - \sqrt{\pi}; \sqrt{\frac{\pi}{5}}\right]$

108. (Liceo scientifico 2015/16) Un recipiente sferico con raggio interno r è riempito con un liquido fino all'altezza h.



Utilizzando il calcolo integrale, dimostrare che il volume del liquido è dato da: $V = \pi \cdot \left(rh^2 - \frac{h^3}{3}\right)$.

Quesiti assegnati in gare nazionali o internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.

CC = Cincinnati University Calculus Contest

HSMC = A&M University High School Mathematics Contest

HH = Houston High School Math Contest

RICE = Rice University Mathematics Tournament

Lavoriamo insieme

Il seguente quesito è stato assegnato agli HSMC nel 2007. *Calcolare* $\int_0^1 \binom{207}{7} \cdot x^{200} \cdot (1-x)^7 dx$.

Integriamo per parti: $\int_0^1 \binom{207}{7} \cdot x^{200} \cdot (1-x)^7 dx = \left[\binom{207}{7} \cdot \frac{x^{201}}{201} \cdot (1-x)^7\right]_0^1 - \int_0^1 \binom{207}{7} \cdot \frac{x^{201}}{201} \cdot (-7) \cdot (1-x)^6 dx =$

$= \binom{207}{7} \cdot \frac{1}{201} \cdot (1-1)^7 - \binom{207}{7} \cdot \frac{0^{201}}{201} \cdot 1^7 + \int_0^1 \binom{207}{7} \cdot \frac{7 \cdot x^{201}}{201} \cdot (1-x)^6 dx =$

$= \int_0^1 \frac{207 \cdot 206 \cdot \ldots \cdot 201}{7 \cdot 6 \cdot 5 \ldots \cdot 1} \cdot \frac{7 \cdot x^{201}}{201} \cdot (1-x)^6 dx = \int_0^1 \frac{207 \cdot 206 \cdot \ldots \cdot 200}{6 \cdot 5 \ldots \cdot 1} \cdot x^{201} \cdot (1-x)^6 dx = \int_0^1 \binom{207}{6} \cdot x^{201} \cdot (1-x)^6 dx$

Quindi: $\int_0^1 \binom{207}{7} \cdot x^{200} \cdot (1-x)^7 dx = \int_0^1 \binom{207}{6} \cdot x^{201} \cdot (1-x)^6 dx$. Non è difficile capire che ripetendo il procedimento troveremo: $\int_0^1 \binom{207}{6} \cdot x^{201} \cdot (1-x)^7 dx = \int_0^1 \binom{207}{5} \cdot x^{202} \cdot (1-x)^5 dx = \int_0^1 \binom{207}{4} \cdot x^{203} \cdot (1-x)^4 dx =$

$= \int_0^1 \binom{207}{3} \cdot x^{204} \cdot (1-x)^3 dx = \int_0^1 \binom{207}{2} \cdot x^{205} \cdot (1-x)^2 dx = \int_0^1 \binom{207}{1} \cdot x^{206} \cdot (1-x) dx = \int_0^1 \binom{207}{0} \cdot x^{207} dx =$

$= \int_0^1 x^{207} dx = \left[\frac{x^{208}}{208}\right]_0^1 = \frac{1}{208}$

1. (Rice 2007) Calcolare il volume di una clessidra, ottenuta ruotando il grafico di $y = sin^2(x) + \frac{1}{10}$, nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ attorno all'asse delle ascisse. $\left[\frac{97}{200}\pi^2\right]$
2. (Rice 2008) Calcolare $\int_{-\infty}^{x} t \cdot 2^t \cdot e^t \; dt$. $\left[\frac{x \cdot (2e)^x}{1+ln(2)} - \frac{(2e)^x}{[1+ln(2)]^2}\right]$
3. (HSMC 2006) Calcolare $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} \cdot \int_0^2 x^n \; dx$. [2]
4. (CC 2008) Calcolare $\int_0^1 \sqrt{x-x^2} \; dx$. $\left[\frac{\pi}{8}\right]$
5. (HSMC2009) Calcolare $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{5+4 \cdot cos(2x)}$. $\left[\frac{\pi}{18}\right]$

Lavoriamo insieme

Il seguente quesito è stato assegnato al 2009 University of Houston Math Contest.

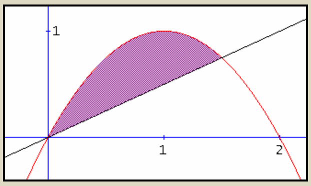
Se $\int_0^4 f(x) dx = 5, \int_2^4 f(x) dx = 7, \int_0^7 f(x) dx = 10$, *calcolare* $\int_7^2 f(x) dx$. Si ha: $\int_7^2 f(x) dx = -\int_2^7 f(x) dx$. D'altro canto si ha: $\int_2^7 f(x) dx = \int_2^4 f(x) dx + \int_4^7 f(x) dx = 7 + \int_0^7 f(x) dx - \int_0^4 f(x) dx = 7 + 10 - 5 = 12$. Quindi il valore cercato è – 12.

6. (HH 2012) Se $\int_1^4 f(x)\,dx = 5, \int_3^4 f(x)\,dx = 7, \int_1^8 f(x)\,dx = 11$, calcolare $\int_3^8 f(x)\,dx$. [– 13]

Questions in English

Working together

This is a question assigned at HSMC in 2005. *The diagram shows the area under* $y = 2x - x^2$, *above the x–axis and a line y = mx. Find the slope m of the line which divides the area in half.*



Consider the intersections between the line and the parabola.

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = mx \end{cases} \Rightarrow x^2 + (2-m)\cdot x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2-m \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2-m \\ y = m\cdot(2-m) \end{cases}$$

The area under the parabola above the line is $\int_0^{2-m} (2x - x^2 - mx)\,dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - m\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^{2-m} =$

$= \left[x^2 \cdot \left(1 - \frac{m}{2} - \frac{x}{3}\right)\right]_0^{2-m} = (2-m)^2 \cdot \left(1 - \frac{m}{2} - \frac{2-m}{3}\right) = (2-m)^2 \cdot \frac{(2-m)}{6} = \frac{(2-m)^3}{6}$. The area under the parabola and the line is $\int_0^{2-m} mx\,dx + \int_{2-m}^{2} (2x - x^2)\,dx = \left[m\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^{2-m} + \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{2-m}^{2} = \frac{m\cdot(2-m)^2}{2} + 4 - \frac{8}{3} -$

$-(2-m)^2 \cdot \left(1 - \frac{2-m}{3}\right) = (2-m)^2 \cdot \left(\frac{m}{2} - 1 + \frac{2-m}{3}\right) + \frac{4}{3} = (2-m)^2 \cdot \frac{m-2}{6} + \frac{4}{3} = \frac{4}{3} - \frac{1}{6}\cdot(2-m)^3$.

Areas must be equal: $\frac{(2-m)^3}{6} = \frac{4}{3} - \frac{(2-m)^3}{6} \Rightarrow \frac{(2-m)^3}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow (2-m)^3 = 4 \Rightarrow 2 - m = \sqrt[3]{4} \Rightarrow m = 2 - \sqrt[3]{4}$.

7. (HSMC 2000) Suppose *f* is a positive continuous function on the interval [–2; 3] and A(*t*) is the area of the region bounded by the graph of *y* = *f*(*x*) and the lines *y* = 0; *x* = –2 and *x*= *t* for *t* between –2 and 3: Compute $\lim_{t \to 3^-} \frac{A(3) - A(t)}{3 - t}$. [*f*(3)]

8. (CC 2009) Calculate $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + sin(x)}\,dx$. [2]

9. (Rice 2009) At RMT 2009 is a man named Bill who has an infinite amount of time. This year, he is walking continuously at a speed of $\frac{1}{1+t^2}$, starting at time t = 0. If he continues to walk for an infinite amount of time, how far will he walk? $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

10. (HH 2012) The region in the first quadrant bounded by the graph of $y = e^{2x}$, the vertical line $x = ln(3)$, and the *x*–axis is revolved about the *y*–axis. Find the volume of the solid that is generated. [$\pi \cdot (9 \cdot ln(3) - 4)$]

11. (AK 2012) Calculate the volume of the solid of revolution generated by the region bounded by the curve $x = \sqrt{25 - y^2}$ and the lines *x* = 0 and *x* = 3, rotated around the *y*–axis. $\left[\frac{244\pi}{3}\right]$

Quelli che … vogliono sapere di più

Equazioni differenziali

Gli integrali indefiniti sono un caso particolare di un più generale e importante oggetto matematico, infatti determinare le primitive della funzione $f(x)$, equivale a risolvere l'equazione $g'(x) = f(x)$, in cui l'incognita da trovare è $g(x)$, la cui soluzione formale è appunto $g(x) = \int f(x)\,dx$. L'equazione che cerchiamo di risolvere non ha come incognita uno o più numeri reali, come siamo stati abituati in algebra, ma una funzione. Diamo un nome particolare a questo tipo di equazioni.

Definizione 4

Un'equazione le cui incognite sono una o più funzioni, si chiama **equazione funzionale**.

Gli integrali indefiniti sono particolari equazioni funzionali, anche se l'incognita non è presente come funzione, ma come sua derivata.

Definizione 5

Un'equazione funzionale, in cui è presente la derivata di qualsiasi ordine della funzione incognita, si chiama **equazione differenziale**.

Esempio 19

L'equazione $y' \cdot sin(y) = ln(x) + y - 1$, in cui $y = f(x)$ è la funzione incognita da determinare, è un'equazione differenziale.

Cercheremo di risolvere queste equazioni in seguito, intanto cominciamo a catalogare le equazioni differenziali.

Definizione 6

Data un'equazione differenziale in una sola incognita, diciamo suo **ordine** l'ordine massimo della derivata della funzione incognita; diciamo suo **grado** l'esponente massimo della derivata di ordine massimo presente.

Esempio 20

- Un integrale è un'equazione differenziale del primo ordine (si dice anche *lineare*) e di primo grado.
- L'equazione $y'' + ln(y) = x^2$, è del secondo ordine e di primo grado.
- L'equazione $2(y'')^3 + y^{IV} - x = (y^{IV})^2$, è di quarto ordine e di secondo grado.
- Sia l'equazione di Malthus $p'(t) = k \cdot p(t)$ che quella di Pearl e Reed sono lineari di primo grado.

Ovviamente le equazioni differenziali più semplici saranno quelle di primo grado e primo ordine, che ovviamente non sono solo gli integrali.

Esempio 21

L'equazione differenziale $y' + y + 1= 0$ è del primo ordine e di primo grado e non è un integrale semplice.

Definizione 7

Un'equazione differenziale di primo ordine si chiama **equazione differenziale lineare**; se presenta solo i termini y' e y si dice **lineare omogenea**.

Esempio 22

Le equazioni differenziali seguenti sono tutte lineari: $y' + xy = 0$; $y' + 2y + x - 3 = 0$. La prima di esse è omogenea, la seconda no.

Riferendoci all'esempio precedente pensiamo che la seconda equazione dovrebbe essere più semplice da risolvere della prima, perché in essa i coefficienti delle incognite sono numeri, mentre nella prima il coefficiente di y è variabile, x.

Definizione 8

Un'equazione differenziale lineare in cui i coefficienti dell'incognita, comunque essa si presenti, sono numeri reali, si dice **equazione differenziale lineare a coefficienti costanti**.

Abbiamo detto che in generale un'equazione differenziale ha infinite soluzioni.

Esempio 23

L'equazione differenziale $xy'+\frac{1}{y'}-y=0$ ha come sue soluzioni per esempio le funzioni $y_1 = x + 1$ e $y_2=3x+\frac{1}{3}$. Infatti abbiamo: $y_1' = 1$ e $y_2' = 3$, da cui: $x\cdot 1+\frac{1}{1}-(x+1)=0; x\cdot 3+\frac{1}{3}-\left(3x+\frac{1}{3}\right)=0$. Ovviamente ciò non significa che ogni funzione è soluzione della data equazione, per esempio non lo è la funzione $y_3 = x$, dato che si ha: $x\cdot 1'+\frac{1}{1}-x=1$.

Poniamo ancora qualche definizione.

Definizione 9

Una soluzione di un'equazione differenziale si chiama suo **integrale particolare**.

Esempio 24

Le funzioni $y_1 = x + 1$ e $y_2=3x+\frac{1}{3}$, sono entrambe integrali particolari dell'equazione $xy'+\frac{1}{y'}-y=0$.

Definizione 10

Un'espressione parametrica che contenga infinite soluzioni di un'equazione differenziale si chiama suo **integrale generale**.

Esempio 25

$y = cx + \frac{1}{c}$ (*), con c numero reale non nullo, rappresenta l'integrale generale dell'equazione $xy'+\frac{1}{y'}-y=0$, infatti si ha: $y' = c$ e $x\cdot c+\frac{1}{c}-\left(cx+\frac{1}{c}\right)=0, \forall c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (*). In tal modo però non otteniamo tutti gli integrali particolari, per esempio $y=2\cdot\sqrt{x}$ è un integrale particolare, infatti: $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}$ e $x\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}-2\cdot\sqrt{x}=x\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\frac{x-x}{\sqrt{x}}=0$; eppure esso non rientra negli integrali del tipo (*).

In considerazione dell'esempio precedente abbiamo la seguente definizione.

Definizione 11

Un'integrale particolare che non faccia parte dell'integrale generale di un'equazione differenziale si chiama suo **integrale singolare**.

Cominciamo a considerare più in dettaglio qualche tipo di equazione differenziale.

Esempio 26

L'equazione differenziale $yy' = cos(x)$, si risolve facilmente tenendo conto che $y = y(x)$ e quindi $y' = \frac{dy}{dx}$, se quindi trattiamo questa espressione differenziale alla stregua di una frazione, l'equazione si può riscrivere: $y\ dy = cos(x)\ dx$ e quindi adesso possiamo risolverla semplicemente integrando termine a termine, poiché ogni membro contiene una sola delle due variabili, nonché il relativo fattore differenziale. Si ha perciò: $\int y\, dy = \int cos(x)\, dx$, che si risolve ovviamente scrivendo una sola volta, a scelta nel primo o secondo membro, il parametro additivo c. Abbiamo quindi: $\frac{y^2}{2} = sin(x) + c \Rightarrow y = \pm\sqrt{2sin(x) + 2c}$, che è l'integrale generale, il cui dominio è ovviamente dato dai valori x per i quali $2sin(x) + 2c \geq 0$.

Le precedenti equazioni meritano una classificazione.

Definizione 12

Un'equazione differenziale che può scriversi nella forma $y' = f(x) \cdot g(y)$ si dice **equazione differenziale a variabili separabili**.

Si ha il seguente ovvio risultato.

Teorema 10

L'integrale generale dell'equazione differenziale a variabili separabili $y' = f(x) \cdot g(y)$, supposte $f(x)$ e $g(y)$ integrabili e $g(y) \neq 0$, si ottiene risolvendo l'equazione $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x)\, dx$.

Dimostrazione sulla falsariga dell'esempio 26.

Consideriamo adesso le equazioni differenziali lineari.

Esempio 27

- L'equazione differenziale $y' + y = 0$, è lineare a coefficienti costanti. Per risolverla la riscriviamo *scorporando* le variabili della derivata: $dy + y\ dx = 0$, così ci accorgiamo che essa è a variabili separabili, poiché possiamo scriverla $\frac{dy}{y} = -dx$ e quindi si ha: $\int \frac{1}{y} dy = -\int dx \Rightarrow ln(y) = -x + c \Rightarrow y = e^{-x+c}$.
- L'equazione differenziale $y' + xy = 0$, è lineare a coefficienti variabili ed è ancora a variabili separabili, infatti può scriversi: $\frac{dy}{y} = -x\,dx$ che si risolve: $\int \frac{1}{y} dy = -\int x\, dx \Rightarrow ln(y) = -\frac{x^2}{2} + c \Rightarrow y = e^{-\frac{x^2}{2}+c}$.
- L'equazione differenziale $y' + xy = x$, è lineare a coefficienti variabili ma non è a variabili separabili.
- L'equazione differenziale di Malthus $p' = kp$ è anch'essa a variabili separabili. Si ha: $\frac{dp}{dt} = kp \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{dp}{kp} = dt \Rightarrow \frac{ln(kp)}{k} = t + c \Rightarrow ln(kp) = kt + kc$. Possiamo indicare con $Ct = kt + kc$, ottenendo: $kp = e^{Ct}$ $\Rightarrow p = p_0 \cdot e^{kt}$, in cui abbiamo incluso tutte le costanti nell'unica p_0, che indica il valore della popolazione al tempo $t = 0$.

Abbiamo quindi visto che le equazioni differenziali lineari omogenee sono a variabili separabili e quindi le sappiamo risolvere, vediamo di risolvere anche quelle non omogenee. Abbiamo altresì visto che entrambe le equazioni differenziali lineari omogenee avevano come integrale generale un'espressione esponenziale. In effetti in generale si ha: $dy + f(x)\, y\, dx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -f(x)dx \Rightarrow \int \frac{1}{y}dy = -\int f(x)dx \Rightarrow y = e^{-\int f(x)dx}$. Questo ci porta a pensare che anche l'equazione differenziale non omogenea $y' + f(x)\, y = g(x)$, abbia, almeno come un suo integrale particolare, la funzione $y = e^{-\int f(x)dx}$.

Esempio 28

L'equazione differenziale $y' + xy = x$, ha come suo integrale particolare $y = e^{-\int x dx} \Rightarrow y = e^{-\frac{x^2}{2}}$? Verifichiamo. Si ha: $y' = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, da cui $-x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = x$. La risposta è negativa.

Il risultato che risolve la questione precedente è il seguente.

Teorema 11

$y = e^{-\int f(x)dx} \cdot \left[\int e^{\int f(x)dx} \cdot g(x)dx + c \right]$ è l'integrale generale dell'equazione $y' + f(x) \cdot y = g(x)$, differenziale lineare non omogenea.

.

Dimostrazione omessa

Esempio 29

Risolviamo l'equazione differenziale non omogenea: $y' + xy = x$, usando il risultato del teorema precedente. Si ha: $\int x dx = \frac{1}{2}x^2$, quindi $y = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left[\int e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x dx + c \right] \Rightarrow y = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left[e^{\frac{x^2}{2}} + c \right] \Rightarrow y = 1 + c \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$. Verifichiamo:

$$y' = -c \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow -c \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + x \cdot \left(1 + c \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \right) = x \Rightarrow \cancel{-c \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}} + x + \cancel{c \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}} = x.$$

Per concludere questa breve introduzione alle equazioni differenziali consideriamo quelle lineari omogenee di ordine n e a coefficienti costanti. Cioè equazioni del tipo $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$. Enunciamo i seguenti risultati.

Teorema 12

Data l'equazione differenziale omogenea $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$, se $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sono suoi integrali particolari, allora anche $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$, $c_k \in \mathbb{R}$, $1 \le k \le n$, è un integrale particolare.

Dimostrazione

Infatti, dire che y_1 è un integrale particolare vuol dire che si ha: $a_0 y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y_1' + a_n y_1 = 0$, analogamente per gli altri integrali, quindi si ha: $a_0 y_2^{(n)} + a_1 y_2^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y_2' + a_n y_2 = 0, \ldots, a_0 y_n^{(n)} + a_1 y_n^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y_n' + a_n y_n = 0$; d'altro canto $D^{(k)}(c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n) = c_1 y_1^{(k)} + c_2 y_2^{(k)} + \ldots + c_n y_n^{(k)}$. Pertanto avremo: $a_0 \cdot (c_1 y_1^{(n)} + c_2 y_2^{(n)} + \ldots + c_n y_n^{(n)}) + a_1 \cdot (c_1 y_1^{(n-1)} + c_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}) + \ldots + a_{n-1} \cdot (c_1 y_1' + c_2 y_2' + \ldots + c_n y_n') + a_n \cdot (c_1 y + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n) = c_1 \cdot (a_0 y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y_1' + a_n y_1) + c_2 \cdot (a_0 y_2^{(n)} + a_1 y_2^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y_2' + a_n y_2) + \ldots + c_n \cdot (a_0 y_n^{(n)} + a_1 y_n^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y_n' + a_n y_n) = 0$, che è proprio quello che volevamo dimostrare.

Il risultato precedente ci suggerisce quindi di cercare degli integrali particolari dell'equazione differenziale.

Esempio 30

Consideriamo l'equazione differenziale omogenea $y'' + 5y' + 6y = 0$. Poiché $D^{(k)}(e^{ax}) = a^k \cdot e^{ax}$, pensiamo che esistano dei valori reali di a per cui $y = e^{ax}$, possa essere un integrale particolare dell'equazione data. Vediamo di determinare un tale a. Sostituiamo nell'equazione data $y = e^{ax}$, $y' = ae^{ax}$, $y'' = a^2e^{ax}$, ottenendo: $a^2e^{ax} + 5ae^{ax} + 6e^{ax} = 0 \Rightarrow e^{ax} \cdot (a^2 + 5a + 6) = 0 \Rightarrow a^2 + 5a + 6 = 0 \Rightarrow a = -2 \lor a = -3$. Quindi abbiamo trovato due integrali particolari: $y = e^{-2x}$ e $y = e^{-3x}$.

Quanto visto prima non è un caso, ma fa parte di un risultato più generale, che prima di enunciare facciamo precedere da una definizione.

Definizione 13

Data l'equazione differenziale omogenea $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0$, l'equazione algebrica $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, si dice **equazione ausiliaria della data equazione differenziale**.

Possiamo enunciare il risultato cercato.

Teorema 13

Data l'equazione differenziale omogenea $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0$, siano $h_1, h_2, \ldots, h_n$ le soluzioni, reali o complesse, della sua equazione ausiliaria. Allora $y = e^{h_kx}, 1 \le k \le n$ sono tutti suoi integrali particolari.

Dimostrazione omessa

Per capire meglio il precedente risultato consideriamo qualche esempio.

Esempio 31

- L'equazione differenziale $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$, ha come ausiliaria l'equazione $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$, le cui soluzioni sono $x = -2, 1, 3$; pertanto sono suoi integrali particolari $y = e^{-2x}$, $y = e^x$ e $y = e^{3x}$.
- L'equazione differenziale $y'' + y = 0$, ha come ausiliaria l'equazione $x^2 + 1$, le cui soluzioni sono $x = \pm i$. Pertanto sono suoi integrali particolari $y = e^{-ix}$, $y = e^{ix}$

Il secondo esempio mostra una soluzione che per il momento è solo simbolica, dato che non sappiamo dare significato a una potenza a base reale ed esponente complesso. Pertanto abbiamo bisogno di una definizione, per ottenere una migliore espressione.

Definizione 14

Si ha: $e^{a+ib} = e^a \cdot [cos(b) + i\ sin(b)]$.

Non giustifichiamo la precedente definizione, perché avremmo bisogno di approfondire altri temi che ci porterebbero ad allungare eccessivamente la trattazione. Osserviamo soltanto che, come potevamo aspettarci, una potenza a esponente complesso è ancora un numero complesso.

Esempio 32

Grazie alla definizione precedente possiamo quindi dire che $y = e^{\pm ix} = cos(x) \pm i\ sin(x)$ sono integrali particolari dell'equazione $y'' + y = 0$.

Adesso è il momento di trovare l'integrale generale di un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti.

Teorema 14

Data l'equazione differenziale omogenea $a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} \cdot y' + a_ny = 0$, e siano $h_1, h_2, \ldots, h_n$ le soluzioni, reali o complesse, della sua equazione ausiliaria. Allora l'integrale generale è

- $y = c_1 e^{h_1 x} + c_1 e^{h_2 x} + \ldots + c_1 e^{h_n x}$, se tutte le soluzioni dell'ausiliaria sono distinte;
- Per ogni soluzione dell'ausiliaria di molteplicità *k*, il generico addendo $c_m e^{h_m x}$ del precedente caso, sarà sostituito da $\left(c_1 + c_2 x + x^2 c_3 + \ldots + c_k x^{k-1}\right) e^{h_m x}$.

Dimostrazione omessa

Chiariamo il risultato precedente con degli esempi che si avvalgono di risultati parziali già trovati negli esempi precedenti.

Esempio 33

- L'integrale generale dell'equazione differenziale $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$ è $y = a \cdot e^{-2x} + b \cdot e^{x} + c \cdot e^{3x}$.
- L'integrale generale dell'equazione differenziale $y'' + y = 0$ è $y = a \cdot e^{-ix} + b \cdot e^{ix}$, che può anche scriversi $y = a\,[cos(x) + i\,sin(x)] + b\,[cos(x) - i\,sin(x)]$, o meglio, $y = a \cdot cos(x) + b \cdot i\,sin(x)$.
- L'equazione differenziale $y^{IV} - 2y'' + y = 0$ ha come ausiliaria $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$, che può anche scriversi $(x^2 - 1)^2 = 0$ e perciò ha soluzioni $x = \pm 1$, entrambe di molteplicità 2. Quindi l'integrale generale è $y = (a + bx) \cdot e^{-x} + (c + dx) \cdot e^{x}$.

Non consideriamo le equazioni non omogenee, chiudiamo invece con un'importante applicazione.

Esempio 34

L'equazione fondamentale della meccanica è $F = m \cdot a$, che può anche scriversi $F = m \cdot y''$, in cui $y = s(t)$ è la funzione spazio al variare del tempo. Spesso nei problemi di meccanica si cerca di determinare la legge dello spostamento, conoscendo la posizione e la velocità iniziale della particella. In pratica cerchiamo di risolvere un sistema del tipo $\begin{cases} m \cdot y''(t) = F \\ y(0) = s_o \\ y'(0) = v_0 \end{cases}$, in cui fra gli infiniti integrali della funzione cerchiamo quell'unico che ha un certo valore e una certa derivata all'istante iniziale.

Il problema precedente, di determinare un integrale particolare di una data equazione differenziale ha un nome.

Definizione 15

Data un'equazione differenziale, il cui integrale generale dipende da *n* parametri, la determinazione di un integrale particolare che verifica le *n* condizioni $y(x_0) = a_0$, $y'(x_0) = a_1$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$, si chiama **problema di Cauchy ai valori iniziali**.

Anche in questo caso chiariamo con un esempio.

Esempio 35

Data l'equazione differenziale $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$ che abbiamo visto avere come integrale generale $y(x) = a \cdot e^{-2x} + b \cdot e^{x} + c \cdot e^{3x}$, vogliamo trovare il suo integrale particolare che verifica le condizioni $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$. Dato che si ha: $y'(x) = -2a \cdot e^{-2x} + b \cdot e^{x} + 3c \cdot e^{3x}$ e $y''(x) = 4a \cdot e^{-2x} + b \cdot e^{x} + 9c \cdot e^{3x}$ basta risolvere il sistema: $\begin{cases} a \cdot e^{-2 \cdot 0} + b \cdot e^{0} + c \cdot e^{3 \cdot 0} = 1 \\ -2a \cdot e^{-2 \cdot 0} + b \cdot e^{0} + 3c \cdot e^{3 \cdot 0} = 0 \\ 4a \cdot e^{-2 \cdot 0} + b \cdot e^{0} + 9c \cdot e^{3 \cdot 0} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 1 \\ -2a + b + 3c = 0 \\ 4a + b + 9c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{15} \\ b = \dfrac{7}{6} \\ c = -\dfrac{3}{10} \end{cases}$. Pertanto l'integrale particolare cercato è $y(x)=\frac{2}{15}e^{-2x}+\frac{7}{6}e^{x}-\frac{3}{10}e^{3x}$.

Non approfondiamo ulteriormente, invece concludiamo dicendo che non sempre i problemi di Cauchy hanno soluzioni.

L'angolo storico

Le equazioni differenziali hanno un ruolo molto importante in tutte le scienze, per esempio nella determinazione dei modelli di crescita delle popolazioni. Uno dei primi modelli del genere è dovuto a Thomas Malthus (1766 – 1834), il quale ipotizzò che la crescita della popolazione, non solo umana, dipendesse in modo proporzionale dal numero di abitanti già presenti. Quindi indicando con $p(t)$ il numero di abitanti al tempo t, la loro variazione è ovviamente di tipo differenziale, cioè $p'(t)$. Perciò secondo Malthus per ogni popolazione esiste una costante k per la quale si ha: $p'(t) = k \cdot p(t)$. Ovviamente questo modello non è realistico, poiché presuppone che la popolazione cresca senza alcun limite. Questo fatto è chiaramente impossibile per diversi fattori, intanto la popolazione ha a disposizione un numero limitato di metri quadrati su cui stare, così come ha un numero limitato di beni di cui disporre e con i quali vivere. Per questo successivamente Pearl e Reed modificarono il modello malthusiano, ipotizzando appunto che vi fosse un valore limite, M, al di là del quale la popolazione non possa crescere. Hanno perciò ipotizzato che la proporzione fosse con il fattore $p\cdot\left(1-\frac{p}{M}\right)$ e quindi l'equazione differenziale relativa è diventata: $p'(t)=k\cdot(t)\cdot\left(1-\frac{p(t)}{M}\right)$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Per una molla di massa m di costante elastica k, vale cosiddetta legge di Hooke: $F = -k \cdot x$, in cui x è il tratto di cui la molla viene dilatata o compressa. Ovviamente x è dipendente dal tempo, quindi in effetti dovremmo scrivere $F = -k \cdot x(t)$. Del resto la forza elastica verifica anche la seconda legge della dinamica: $F = m \cdot a$ e visto che l'accelerazione è la derivata seconda dello spazio rispetto al tempo, possiamo scrivere $F = m \cdot x''(t)$. Quindi l'equazione risolvente è differenziale: $m \cdot x''(t) = -k \cdot x(t) \Rightarrow m \cdot x''(t) + k \cdot x(t) = 0$. Questa è un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine.

Determinare ordine e grado delle seguenti equazioni differenziali

Livello 1

1. $y'' + y' - x = 0$; $xy''^2 + y^{V} - sin(x) = y^3$; $y^3 + ln(x)y''' - y = x^2$ [(II, I) ; (IV, II) ; (III, I)]
2. $xy + (y')^4 - 2x = 0$; $y^5 + y^{VI} + x^4 = (y')^3$; $(y'')^4 + y'' - 3y = x^5$ [(I, IV) ; (VI, I) ; (II, IV)]

Tradurre in equazione differenziale i seguenti problemi

Livello 2

3. II legge della Dinamica ; Oscillatore armonico di pulsazione ω. [$m \cdot x''(t) = F$; $x''(t) = -\omega^2 \cdot x(t)$]
4. Moto di una molla soggetta a una forza di attrito $F = c \cdot x'(t)$ [$m \cdot x''(t) + c \cdot x'(t) + k \cdot x(t) = 0$]
5. Diminuzione del principio attivo di un medicinale proporzionale al tempo. [$y'(t) = -k \cdot y(t)$]
6. Diminuzione del tasso di decadimento radioattivo al passare del tempo. [$y'(t) = -k \cdot y(t)$]

Livello 3

7. Circuito RL alimentato da tensione costante V e attraversato da corrente $i(t)$ [$V = R \cdot i(t) + L \cdot i'(t)$]
8. Circuito RLC alimentato da tensione variabile $V(t)$ $\left[L \cdot i''(t) + R \cdot i'(t) + \frac{i(t)}{C} = V'(t)\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo stabilire se la funzione $y(x) = cos(x) + sin(x) + \frac{8}{3}sin^2(x)$ è un integrale particolare dell'equazione differenziale $y'' + y = 8cos^2(x)$. Verifichiamo: $y'(x) = -sin(x) + cos(x) + \frac{8}{3}sin(2x)$ e quindi $y''(x) = -cos(x) - sin(x) + \frac{16}{3}cos(2x)$. Sostituiamo: $\cancel{-cos(x)} - \cancel{sin(x)} + \frac{16}{3}cos(2x) + \cancel{cos(x)} + \cancel{sin(x)} + \frac{8}{3}sin^2(x)$ $= \frac{16}{3} \cdot \left(1 - 2sin^2(x)\right) + \frac{8}{3}sin^2(x) = \frac{16}{3} - \frac{32}{3}sin^2(x) + \frac{8}{3}sin^2(x) = \frac{16}{3} - 8sin^2(x)$. Che non è un suo integrale particolare.

Verificare se i seguenti sono integrali particolari delle rispettive equazioni differenziali

Livello 1

9. $(y = 2, y' + y - y^2 + 2 = 0)$; $\left(y = \frac{\left(x^2+1\right)^2}{x}, y' + 3xy - 2x = 0\right)$; $\left(y = \frac{1}{x}, xy' - 2y + xy^2 + \frac{2}{x} = 0\right)$ [Sì ; No ; Sì]
10. $(y = x, xy' - 2y + xy^2 + \frac{2}{x})$; $(y = x + 1, xy' - cos(y') - y = 0)$; $(y = x, xy' - cos(y') - y = 0)$ [No ; No ; Sì]
11. $(y = x + e, xy' - e^{y'} - y = 0)$; $(y = 2x + e^2, xy' - e^{y'} - y = 0)$ [Sì ; Sì]
12. $(y = 2cos(2x), y'' + 4y = 0)$; $(y = 3cos(2x) - 2sin(2x), y'' + 4y = 0)$ [Sì ; Sì]

Livello 2

13. $\left(y=\frac{1}{\sqrt{e^{-x^2}-1}}, y'-xy-xy^3=0\right)$; ($y = 2e^{2x}\,cos(3x)$, $y'' - 4y' + 13y = 0$) [Sì ; Sì]

14. ($y = e^{2x} - \frac{5}{2}x$, $y'' - 2y' + 5 = 0$) ; $\left(y=e^{2x}+e^{-2x}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{4}-\frac{x}{8}+\frac{1}{8}, y''-4y'-x^2+2x=0\right)$ [No ; Sì]

Livello 3

15. $p(t)=\frac{Mp_0}{p_0+(M-p_0)\cdot e^{-kt}}$, per l'equazione di Pearl e Reed: $p'(t)=k\cdot p(t)\cdot\frac{M-p(t)}{M}$. [Sì]

16. $x(t) = A \cdot cos(\omega t) + B \cdot sin(\omega t)$, per l'equazione dell'oscillatore armonico di pulsazione ω (Es. 3). [Sì]

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere l'equazione differenziale $x\cdot y' = ln(x)\cdot y$. Possiamo scrivere: $x\cdot\frac{dy}{dx}=ln(x)\cdot y$ e ancora $\frac{dy}{y}=\frac{ln(x)}{x}dx$. Quindi l'equazione è a variabili separabili. Integriamo membro a membro, ottenendo:

$$\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{ln(x)}{x}dx \Rightarrow ln(y)=\frac{ln^2(x)}{2}+c \Rightarrow y=e^{ln^2(x)/2+c}$$

Verifichiamo: $y'=e^{ln^2(x)/2+c}\cdot 2\cdot\frac{ln(x)}{2}\cdot\frac{1}{x}=e^{ln^2(x)/2+c}\cdot\frac{ln(x)}{x}$, quindi sostituendo:

$$\cancel{x}\cdot e^{ln^2(x)/2+c}\cdot\frac{ln(x)}{\cancel{x}}=ln(x)\cdot e^{ln^2(x)/2+c}.$$

Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali a variabili separabili

Livello 1

17. $y' + xy = 0$; $y' + ln(x)y^2 = 0$; $xy' + y^3 = 0$ $\left[y=e^{c-\frac{x^2}{2}}; y=\frac{1}{x\cdot ln(x)-x-c}; y^2=\frac{1}{2\cdot ln(x)-2c}\right]$

18. $e^xy' - y = 0$; $y' + e^xy = 0$; $(x^2 + 1)\cdot y' - \frac{1}{y} = 0$ $\left[y=e^{c-e^{-x}}; y=e^{c-e^x}; y^2=2tan^{-1}(x)+c\right]$

19. $\sqrt{1-x^2}\cdot y'=\frac{x}{sin(y)}$; $(1+ x)\cdot y' + (1 - x)\cdot y = 0$ $\left[y=cos^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}-c\right); y=\frac{e^{x+c}}{(x+1)^2}\right]$

Livello 2

20. $(1 + e^x)\cdot y' = e^{2x}\cdot e^y$; $\sqrt{1-x^2}\cdot y'=\frac{1}{ln(y)}$ $\left[y=ln\left(\frac{1}{ln(e^x+1)-e^x-c}\right); y\cdot(ln(y)-1)=sin^{-1}(x)+c\right]$

21. $y' + ln(x)\cdot y^2 = 0$; $(x^2 - x)\cdot y' = \sqrt{y}$ $\left[y=\frac{1}{x\cdot ln(x)-x-c}; y=\frac{1}{4}\cdot\left[ln\left(\frac{x-1}{x}\right)+c\right]^2\right]$

22. $\frac{y'}{ln(x)}=e^{3y}\cdot ln(x)$ $\left[y=-\frac{1}{3}\cdot ln\left[6x\cdot ln(x)-3x\cdot ln^2(x)-6x-3c\right]\right]$

23. $\left(sin(x)+cos(x)\right)\cdot y=\dfrac{sin(x)-cos(x)}{y^2}$ $\left[y=\sqrt[3]{3c-ln\left[cos(x)+sin(x)\right]^3}\right]$

Livello **3**

24. $y' = x + y + 1$ (sostituire $t = x + y + 1$ e differenziare in modo opportuno) $[y = e^{x+1+c} - 2 - x]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere l'equazione differenziale lineare del primo ordine: $y' + \dfrac{y}{x} = cos(x)$. Ricordiamo il risultato del Teorema 11: $y=e^{-\int f(x)dx}\cdot\left[\int e^{\int f(x)dx}\cdot g(x)dx+c\right]$, in cui si ha: $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g(x) = cos(x)$. Abbiamo quindi: $y=e^{-\int 1/x dx}\cdot\left[\int e^{\int 1/x dx}\cdot cos(x)dx+c\right]=e^{ln(1/x)}\cdot\left[\int e^{ln(x)}\cdot cos(x)dx+c\right]=\dfrac{1}{x}\cdot\left[\int x\cdot cos(x)dx+c\right]$

Il secondo integrale si calcola per parti: $\int x\cdot cos(x)dx=x\cdot sin(x)-\int 1\cdot sin(x)dx=x\cdot sin(x)+cos(x)$, quindi alla fine si ha: $y=\dfrac{1}{x}\cdot\left[x\cdot sin(x)+cos(x)+c\right]\Rightarrow y=sin(x)+\dfrac{cos(x)}{x}+\dfrac{c}{x}$.

Risolvere le seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine

Livello **1**

25. $y' + \dfrac{y}{x} = 1$; $y' + \dfrac{y}{x} = x^2$; $y' + y = e^{2x}$ $\left[y=\dfrac{x^2+2c}{2x};y=\dfrac{x^4+4c}{4x};y=\dfrac{1}{3}e^{2x}+ce^{-x}\right]$

26. $y' + \dfrac{y}{x+1} = sin(x)$; $y' + y = x^3$ $\left[y=cos(x)-\dfrac{sin(x)+c}{x+1};y=ce^{-x}+x^3-3x^2+6x-6\right]$

Livello **2**

27. $y' + \dfrac{y}{x} = e^x$; $y'+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{1}{x^3+1}$ $\left[y=\dfrac{e^x\cdot(x-1)+c}{x};y=\dfrac{ln\left(x^3+1\right)+3c}{3x^2}\right]$

28. $y'-2\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{x^2+1}$; $y'-4\dfrac{y}{x}=\dfrac{x}{x^2+1}$ $\left[y=cx^2-x-x^2tan^{-1}(x);y=\dfrac{x^4\cdot ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)+2cx^4-x^2}{2}\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere l'equazione differenziale del terzo ordine: $y''' - y'' + y' - y = 0$. Essa e lineare a coefficienti costanti, pertanto consideriamo la sua ausiliaria: $p^3 - p^2 + p - 1 = 0$, che si risolve fattorizzando a coppie: $p^2 \cdot (p - 1) + p - 1 = 0 \Rightarrow (p^2 + 1)\cdot (p - 1) = 0$, ed ha perciò le soluzioni $p = 1, i, -i$. Usando il risultato del Teorema 12 possiamo dire che l'integrale generale è $y = a\cdot e^x + b\cdot e^{ix} + c\cdot e^{-ix}$. O meglio ancora: $y = a \cdot e^x + b \cdot [cos(x) + i\cdot sin(x)] + c \cdot [cos(x) - i \cdot sin(x)] \Rightarrow y = a \cdot e^x + (b + c) \cdot cos(x) + i \cdot (b - c) \cdot sin(x)$. Verifichiamo: $y' = a\cdot e^x - (b + c) \cdot sin(x) + i \cdot (b - c) \cdot cos(x)$; $y'' = a\cdot e^x - (b + c) \cdot cos(x) - i \cdot (b - c) \cdot sin(x)$; $y''' = a\cdot e^x + (b + c) \cdot sin(x) - i \cdot (b - c) \cdot cos(x)$. Sostituiamo: $a \cdot e^x + (b + c) \cdot sin(x) - i \cdot (b - c) \cdot cos(x) - [a \cdot e^x - (b + c) \cdot cos(x) - i \cdot (b - c) \cdot sin(x)] + a \cdot e^x - (b + c) \cdot sin(x) + i \cdot (b - c) \cdot cos(x) - [a \cdot e^x + (b + c) \cdot cos(x) + i \cdot (b - c) \cdot sin(x)] = 0$. Facilmente si vede che l'espressione è nulla.

Risolvere le seguenti equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti

Livello 1

29. $y'' + y' - 6y = 0$; $y'' + 4y' + 4y = 0$; $y'' + 7y' - 10y = 0$
$[y = a \cdot e^{2x} + b \cdot e^{-3x}$; $y = (a + bx) \cdot e^{-2x}$; $y = a \cdot e^{2x} + b \cdot e^{5x}]$

30.

31. $9y'' - 6y' + y = 0$; $4y'' + y = 0$; $y''' - y'' + y' - y = 0$
$\left[y=(a+bx)\cdot e^{\frac{x}{3}}; y=ae^{2x}+be^{-3x}; y=(a+b)\cdot cos\left(\frac{x}{2}\right)+i\cdot(a-b)\cdot sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]$ $[y = a \cdot e^{2x} + b \cdot e^{-3x}]$

32. $6y'' - y' - y = 0$; $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ $\left[y=a\cdot e^{\frac{1}{2}x}+b\cdot e^{-\frac{1}{3}x}; y=\left(a+bx+cx^2\right)e^{x}\right]$

33. $y'' - 2y = 0$; $y^{IV} - 2y'' + y = 0$ $\left[y=a\cdot e^{\sqrt{2}x}+b\cdot e^{-\sqrt{2}x}; y=(a+bx)e^{x}+(c+dx)e^{-x}\right]$

Livello 2

34. $y'' - 2y' - y = 0$; $y''' + y'' - y' - 2y = 0$ $\left[y=a\cdot e^{(1-\sqrt{2})x}+b\cdot e^{(\sqrt{2}+1)x}; y=a\cdot^{x}+b\cdot e^{-x}+c\cdot e^{-2x}\right]$

35. $y''' - y'' - y' + y = 0$; $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 0$ $[y = (a + bx)\, e^{x} + c \cdot e^{-x}$; $y = a + (b + cx + dx^2)\, e^{x}]$

36. $y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = 0$ $[y = (a + bx + cx^2 + dx^3)\, e^{-x}]$

37. $y^{IV} - 16y = 0$ $[y = a \cdot e^{2x} + b \cdot e^{-2x} + (c + d)\, cos(2x) + i \cdot (c - d)\, sin(2x)]$

38. $y^{IV} + 2y'' + y = 0$ $[y = (a + c + (b + d) \cdot x)\, cos(x) + i \cdot (a - c + (b - d) \cdot x)\, sin(2x)]$

Livello 3

39. $y''' - y = 0$ $\left[y=a\cdot e^{x}+e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left[(b+c)\cdot cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+i(b-c)\cdot sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]\right]$

40. $y^{IV} + 16y = 0$ $\left[y=\left((a+b)e^{-\sqrt{2}x}+(c+d)e^{\sqrt{2}x}\right)cos\left(\sqrt{2}x\right)-i\cdot\left((a-b)e^{-\sqrt{2}x}+(c-d)e^{\sqrt{2}x}\right)sin\left(\sqrt{2}x\right)\right]$

41. $4y^{IV} - 4y''' - 3y'' + 2y' + y = 0$ $\left[y=(a+bx)e^{x}+(c+dx)e^{-\frac{1}{2}x}\right]$

42. $2y^{IV} + 5y''' + 3y'' - y' - y = 0$ $\left[y=\left(a+bx+cx^2\right)e^{-x}+d\cdot e^{\frac{1}{2}x}\right]$

43. $y^{VIII} + 3y^{VI} + 3y^{IV} + y'' = 0$
$[y = a + bx + ((e + h)\, x^2 + (d + g)\, x + c + f)\, cos(x) + i \cdot ((e - h)\, x^2 + (d - g)\, x + c - f) \cdot sin(x)]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere il seguente problema di Cauchy: $\begin{cases} y'''-y''+y'-y=0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1 \\ y''(0)=-1 \end{cases}$. Ci riferiamo al precedente box, in cui abbiamo già calcolato le derivate dell'integrale generale, per scrivere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} a\cdot e^0+(b+c)\cdot cos(0)+i\cdot(b-c)\cdot sin(0)=0 \\ a\cdot e^0-(b+c)\cdot sin(0)+i\cdot(b-c)\cdot cos(0)=1 \\ a\cdot e^0-(b+c)\cdot cos(0)-i\cdot(b-c)\cdot sin(0)=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ a+i\cdot(b-c)=1 \\ a-b-c=-1 \end{cases}$$

Sommando prima e terza otteniamo: $2a = -1$, da cui $a = -\frac{1}{2}$ e il sistema è $\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b - c = \frac{1}{2i} \\ b + c = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1-3i}{4} \\ c = \frac{1+3i}{4} \end{cases}$.

Pertanto l'integrale particolare cercato è $y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}cos(x) + \frac{3}{2}sin(x)$.

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

***Livello* 1**

44. $(y' - y = 0, y(0) = 1)$; $(y' + y = 0, y(0) = 1)$; $(y' - y^2 = 0, y(0) = 1)$ $\left[y = e^x; y = e^{-x}; y = \frac{1}{1-x}\right]$

45. $(y' - x^2y = 0, y(0) = 0)$; $(y' - x^2y = 0, y(0) = 1)$ $(y' - e^xy = 0, y(0) = 1)$ [$\varnothing$] $\left[\varnothing; y = e^{\frac{x^3}{3}}; y = e^{e^x-1}\right]$

46. $\left(y' - \frac{y^2}{x} = 1, y(1) = 1\right)$; $(y' + xy = x, y(0) = 0)$; $(y' + y = x^2, y(0) = 0)$

$\left[y = \frac{1}{1-ln(x)}; y = 1 - e^{\frac{x^2}{2}}; y = \frac{1-e^{x^3}}{x}\right]$

***Livello* 2**

47. $(y'' - 5y' + 6y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1)$; $(y'' - 2y' + y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1)$ $[y = -e^{2x} + e^{3x}; y = x\cdot e^x]$

48. $(y'' + y' = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1)$; $(y'' + y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1)$ $[y = 1 - e^{-x}; y = sin(x)]$

49. $(y'' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0)$; $(y'' - y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1)$ $\left[y = cos(x); y = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}\right]$

50. Legge del decadimento radioattivo (vedi esercizio 6), indicando con N_0 il valore della radioattività all'inizio dell'osservazione e con λ la costante di decadimento. $[N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}]$

***Livello* 3**

51. $y''' - y' = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0$ $\left[y = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}\right]$

52. $y''' - y'' = 0, y(1) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 1$ $[y = e^x - x - e + 2]$

53. $y''' - y'' - y' = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -1$ $[y = -3 + (3 - 2x)\, e^x]$

54. $y^{IV} - y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = -1, y'''(0) = -1$ $[y = sin(x) + cos(x)]$

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi.
I temi completi dei Licei Scientifici per gli ultimi anni sono scaricabili, con soluzione, dal sito
http://matdidattica.altervista.org/esamidistato.htm

1. (Liceo scientifico 2014/2015) Di quale delle seguenti equazioni differenziali la funzione $y = \frac{ln(x)}{x}$ è soluzione? a) $y'' + 2\frac{y'}{x} = y$; b) $y' + xy'' = 1$; c) $xy' = \frac{1}{x} + y$; d) $x^2y'' + xy' + \frac{2}{x} = y$ [d)]

Quesiti assegnati in gare nazionali o internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
CB = College Board HH = Houston High School Math Contest

1. (HH 2003) Determinare tutti i numeri reali A per i quali ogni funzione $y=\frac{A}{1+ke^{-3t}}$, con k costante, sia soluzione dell'equazione differenziale $y' = y(3 - y)$, in ogni punto del suo dominio. [$0 \vee 3$]
2. (HH 2003) Sapendo che $f''(t) = 6e^{-3t}$ per ogni t e che $f(0) = 0$ e $f'(0) = 4$, determinare $f(t)$. $\left[\frac{2}{3}e^{-3t}+6t-\frac{2}{3}\right]$
3. (HH 2003) La massa corporea m di Fred verifica l'equazione differenziale $\frac{dm}{dt}=\frac{C-40m}{8000}$, in cui t è misurato in giorni, C è l'apporto energetico misurato in Cal/giorno. Se la massa di Fred è attualmente 100 Kg ed egli ingerisce 3000 Cal/giorno, fra quanti giorni la sua massa sarà 90 Kg? [≈102]
4. (HH 2004) Determinare il valore della costante k in modo che $y = 2x - kx^2$ sia soluzione dell'equazione differenziale $xy' = y - x^2$. [1]
5. (CB 2005) Data l'equazione differenziale $y' = -\frac{1}{2}xy^2$. Determinare il suo integrale particolare che verifica la condizione iniziale $f(-1) = 2$. $\left[y=\frac{4}{x^2+1}\right]$
6. (CB 2007) Data l'equazione differenziale $y' = \frac{1}{2}x + y - 1$. Se $y = f(x)$ è un suo integrale particolare che verifica la condizione iniziale $f(0) = 1$, per $x = 0$ $f(x)$ ha estremo relativo? E se sì di che tipo? Determinare poi per quali m e b, $y = mx + b$ è soluzione dell'equazione data. [Sì; minimo; $m=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$]

Questions in English

Working together

This is a question assigned at HH in 2010. *A cup of coffee, cooling off in a room at temperature* 20°C, *has cooling constant* $k = 0.09\ min^{-1}$. *Assume the temperature of the coffee obeys Newton's Law of Cooling:* $-k\cdot(T-T_0)=\frac{dT}{dt}$, *where* T_0 *is the surrounding temperature*. a) *Show that the temperature of the coffee is decreasing at a rate of* 5.4°C/*min when its temperature is* $T = 80$°C.

Substituting $T = 80$ in the Newton's Law we have: $\frac{dT}{dt} = -0.09 \cdot (80 - 20) = -5.4$

b) *The coffee is served at a temperature of* 90°. *How long should you wait before drinking it if the optimal temperature is* 65°C?

Solve $\frac{dT}{dt} = -0.09\cdot(T - 20) \Rightarrow \int\frac{dT}{T-20}=-\int 0.09dt \Rightarrow ln(T-20)=-0.09t+c \Rightarrow T-20=Ce^{-0.09t}$, where $C = e^c$. At $t = 0$ we have $T = 90$ and so $c = 70$. The time at which $T = 65$ is then $70\ e^{-0.09t} + 20 = 65 \Rightarrow$ $t=\frac{ln\left(\frac{45}{70}\right)}{-0.09}=-\frac{100}{9}\cdot ln\left(\frac{9}{14}\right)$

7. (HH 2002) A bacteria-infested swimming pool was chemically treated this morning, and since then, the bacteria count has been decreasing at rate proportional to the count itself. An hour ago, the count was a third of what it was two hours ago. For safety, the count must be ≤ 1% of what it is now. When will that be? [≈ 4.2 hours]

8. (HH 2006) Find the general solution of $y' = y\,(y - 2)$. Find the particular solution that satisfies initial condition $y(0) = 0.5$. $\left[y = \dfrac{2}{1 - ce^{2x}}; y = \dfrac{2}{1 - 3e^{2x}}\right]$

9. (HH 2006) Given that $f''(t) = e^{-2t} + cos\left(\dfrac{t}{2}\right)$ for all t, find an explicit formula for $f(t)$ if $f(0) = f'(0) = 0$.

$$\left[f(t) = \frac{1}{4}e^{-2t} - 4cos\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}t + \frac{15}{4}\right]$$

10. (CB 2006) Consider the differential equation $y' = (y - 1)^2\, cos(\pi x)$. There is a horizontal line with equation $y = c$ that satisfies this differential equation. Find the value of c. [1] Find the particular solution $y = f(x)$ with the initial condition $f(1) = 0$. $\left[y = 1 - \dfrac{\pi}{sin(\pi x) + \pi}\right]$

11. (HH 2007) A cup of coffee at 96°C is set on a table in an air-conditioned classroom. It cools to 60°C in 10 minutes, and then to 40°C in another 10 minutes. What is the temperature of the room? (recall Newton's law of cooling) [15°]

12. (HH 2008) The levels of a sedative in a patient's blood were monitored to determine the appropriate time for an operation. Every fifteen minutes a blood sample was taken to determine the concentration C of the sedative in milligrams per litre, and then recorded in the table of data shown below. a) Estimate the rate of change of concentration with respect to time at 30 minutes and 60 minutes. Is the rate of change of concentration with respect to time t a constant? [No, it is variable] b) Show that the rate of change is roughly proportional to the concentration. Write this relationship as a differential equation leaving the constant of proportionality, k, undetermined. [$C' = kC$] c) Solve the differential equation from part (b) and choose the constant of proportionality, k, so that the solution satisfies both the entries C(0) = 20 and C(60) = 1.31 from the table. Write the constant of proportionality accurate to 4 decimal places. [$C(t) = 20e^{-0.454t}$]

Time(*min*)	Concentration *C* (*mg*/*l*)
0	20
15	110.21
30	5.15
45	2.68
60	1.31
75	0.72

13. (HH 2012) If $\dfrac{dy}{dx} = y\, tan(x)$ and $y = 3$ when $x = 0$, then, when $x = \dfrac{\pi}{3}$, y is? [6]

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_5_11.htm

12. Incertezza e realtà fisica

12.1 Il calcolo delle probabilità

Prerequisiti

- Enunciato logico.
- Insiemi, sottoinsiemi e operazioni su di essi.
- Rappresentazione di un insieme per elenco e mediante i diagrammi di Eulero – Venn.
- Sottoinsiemi di un insieme.
- Cardinalità di un insieme.
- Frazioni.
- Percentuali.
- Calcolo combinatorio

Obiettivi

- Valutare la possibilità di accadere degli eventi quotidiani.
- Calcolare le probabilità laplaciane di semplici eventi.
- Riconoscere eventi equiprobabili.
- Comprendere la nozione di evento aleatorio.
- Distinguere fra i diversi punti di vista probabilistici.
- Calcolare le probabilità frequentiste a partire da tabelle di dati.
- Risolvere semplici problemi di calcolo delle probabilità.
- Distinguere eventi compatibili da eventi incompatibili.
- Distinguere eventi indipendenti da eventi dipendenti.
- Comprendere il reale significato della legge dei grandi numeri.
- Conoscere e sapere usare le più diffuse distribuzioni di probabilità

Contenuti

- Concetto di evento aleatorio e diversi punti di vista della probabilità
- Probabilità frequentista
- Probabilità secondo Laplace di eventi semplici
- Probabilità dell'unione di eventi elementari
- Estrazioni con e senza rigenerazione
- Probabilità condizionata
- Eventi dipendenti ed eventi indipendenti
- Teorema di Bayes e Legge dei grandi numeri

Parole Chiave

Fenomeno – Evento aleatorio – Eventi compatibili – Eventi incompatibili

Richiamiamo le conoscenze

Le percentuali

Che significa calcolare il 30% di una quantità? Semplicemente dividere la quantità in 100 parti e di queste prenderne 30. Ovviamente significa anche moltiplicare la quantità per la frazione $\frac{30}{100}=\frac{3}{10}$. Così per esempio il 30% di € 1500 è € 1500 · $€150\cancel{0}\cdot\frac{3}{\cancel{10}}$ = € 450. Il ricorso alle percentuali è legato sostanzialmente al fatto che noi utilizziamo un sistema di numerazione posizionale *decimale* e quindi il dieci e le sue potenze sono numeri in qualche modo *privilegiati*, con i quali quindi abbiamo maggiore consuetudine. Trasformare una frazione in percentuale quindi equivale a scriverla con denominatore 100. Ciò potrà essere fatto perciò soltanto se il suo denominatore contiene solo potenze di 2 e/o di 5. In tutti gli altri casi avremo solo dei valori approssimati.

Esempio A

I $\frac{3}{8}$ di una quantità, in percentuale possono essere scritti trasformando prima il denominatore nella potenza di 10 più piccola possibile. Poiché 8 = 2^3 essa è 10^3, quindi $\frac{3}{8}=\frac{3\cdot 5^3}{2^3\cdot 5^3}=\frac{375}{1000}$. Adesso dividiamo tutto per 10, per ottenere appunto una frazione percentuale: $\frac{37,5}{100}=37,5\%$. Invece i $\frac{7}{15}$ di una quantità non possono scriversi come una percentuale *esatta*, poiché 15 non è un divisore di alcuna potenza di 10. Poiché $\frac{100}{15}\approx 6,7$ possiamo dire che $\frac{7}{15}$ ≈ 7 · 6,7% ≈ 46,7%.

Esempio B

Un paio di pantaloni costano € 40,00 prima dei saldi. Se viene operato uno sconto del 15% quanto costano adesso i pantaloni? Basta moltiplicare il prezzo iniziale per 1 – 0,15 = 0,8, = 85%. ottenendo € 34,00.
Se invece sapessimo che un paio di pantaloni prima dei saldi costavano € 53,00 e dopo € 37,00 e volessimo sapere che sconto è stato applicato? Lo sconto assoluto è stato di € 16,00. Che percentuale è questa del prezzo iniziale? Cioè come si scrive in percentuale $\frac{16}{53}$? Poiché 53 non contiene solo potenze di 2 e/o 5 (in effetti non ne contiene proprio nessuna), il risultato sarà approssimato: ≈ 30,19%.

Verifiche

***Livello* 1**

Esprimere sotto forma percentuale le seguenti frazioni

1. $\frac{4}{25}$; $\frac{11}{4}$; $\frac{7}{20}$; $\frac{23}{125}$; $\frac{12}{50}$; $\frac{32}{75}$ [16% ; 275% ; 35% ; 18,4% ; 24% ; ≈ 42,7%]
2. $\frac{17}{18}$; $\frac{13}{32}$; $\frac{31}{64}$; $\frac{3}{40}$; $\frac{24}{19}$; $\frac{15}{28}$ [≈94,4% ; 40,625% ; 48,4375% ; 7,5% ; ≈126,3% ; ≈ 53,6%]
3. Un oggetto di € 25,00 viene scontato del 17% qual è il suo prezzo scontato? [€ 20,75]
4. L'IVA è al 20% e su un certo oggetto vale € 5,30. Quanto costa l'oggetto al netto dell'IVA? [€ 26,50]
5. Quest'anno il prezzo netto dell'oggetto precedente non è aumentato, ma l'IVA è passata al 21%. Quanto costa l'oggetto oggi? [€ 32,07]
6. La Benzina il mese scorso costava mediamente € 1,753. Questo mese costa mediamente € 1,778. Qual è stato l'aumento medio mensile? [≈ 1,4%]
7. Un oggetto ha un prezzo al pubblico di € 19,00. Al netto dell'IVA al 21% quanto costerebbe l'oggetto? [€ 15,01]

***Livello* 2**

8. Un certo prodotto viene scontato prima del 10% e poi del 20%, ciò equivale a scontare il prodotto in unica soluzione di quanto? [28%]
9. Un certo prodotto viene scontato prima del 10% e poi di un certo valore x %, se ciò equivale a scontare il prezzo iniziale del 37%, quanto vale x? [30]
10. Le azioni di un certo titolo in borsa calano in un giorno del 4%, il giorno successivo di che percentuale devono aumentare perché il valore sia quello del giorno prima? [≈ 4,17%]
11. Dati i numeri 4 e 7, in percentuale quanto 3 è più piccolo di 8? [62,5%]
12. Il prezzo della benzina a seguito della crisi petrolifera è aumentato del 12%, dopo qualche tempo, a seguito di una scelta dell'OPEC è diminuito del 12%. Che relazione c'è fra il prezzo prima della crisi e quello dopo la decisione dell'OPEC? [È diminuito del 1,44%]

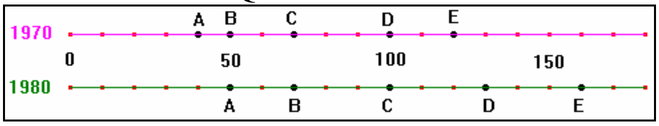
***Livello* 3**

13. Siano dati due numeri reali x e y, con $x < y$. In percentuale quanto x è minore di y? $\left[100 \cdot \frac{y-x}{y}\right]$
14. Un prodotto è scontato del p%, successivamente del q%, ciò equivale a scontare il prezzo iniziale di quale percentuale? $\left[p+q-\frac{pq}{100}\right]$
15. La popolazione di una certa città dal 1980 al 1990 è aumentata del p%, dal 1990 al 2000 è aumentata del q%. Quale è stato l'aumento percentuale dal 1980 al 2000? $\left[\frac{100p+100q+pq}{100}\right]$
16. Un dato prodotto prima è aumentato del p%, poi è diminuito del p%. Che relazione c'è fra il prezzo finale e quello iniziale? [È diminuito del $\frac{p^2}{100}$%]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
AHSME = Annual High School Mathematics Examination — AMC = American Mathematical Contest
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest

1. (AHSME 1995) Se $M = 30\%\ Q$, $Q = 20\%\ P$, e $N = 50\%\ P$, allora $\frac{M}{N}$ è? [B]
   A) $\frac{3}{250}$ B) $\frac{3}{25}$ C) 1 D) $\frac{6}{5}$ E) $\frac{4}{3}$
2. (AHSME 1997) Se a è il 50% più grande di c, e b è il 25% più grande di c, allora a quanto è più grande di b, in percentuale? A) 20% B) 25% C) 50% D) 100% E) 200% [A]
3. (AHSME 1998) Un oratore ha parlato per 60 minuti a una folta platea. Il 20% dei presenti ha ascoltato l'intero discorso, metà del resto ha sentito un terzo del discorso e l'altra metà i due terzi. Qual è il numero medio di minuti ascoltato dai presenti? A) 24 B) 27 C) 30 D) 33 E) 36 [D]
4. (AMC 2001) Nel luogo in cui abita Kristin si paga il p% per i primi \$28000 e il (p + 2) % per la parte che supera i \$28000. Kristin nota che lei ha pagato il (p + 0,25) % sul totale del suo imponibile. Quanto è questo imponibile? [\$ 32000]
5. (AHSME 1988) Nel seguente diagramma indichiamo le popolazioni di cinque città, espresse in migliaia di abitanti, nei due censimenti del 1970 e 1980. Quale delle città ha avuto un maggiore incremento percentuale nel decennio? [C]



6. (HSMC 2007) John prepara un drink mescolando succhi di mela, arancia e ananas. Per fare ciò usa 2,2 litri in più di succo di mela rispetto al doppio degli altri succhi insieme. La miscela risultante contiene il 70% di succo di mela. Quanti litri di drink ha preparato? [22]

Questions in English

7. (HSMC 2000) At Pigskins High School 20% of the boys and 80% of the girls attended a football game. If 45% of the student body is female, what percent of the school population attended the game? [47%]
8. (HSMC 2000) A man has 2 investments: one paying a 6% annual interest and the other paying 5%. The 5% investment is \$680 more than half the 6% one. If the total return after one year is \$102, find the investment at 5%. [1080]
9. (HSMC 2000) The number n_2 is 25% more than the number n_1, the number n_3 is 20% more than n_2, and n_4 is x % less than n_3. For what value of x is $n_4 = n_1$? $\left[33+\frac{1}{3}\right]$
10. (HSMC 2002) Increasing x by y % gives 12 whereas decreasing x by y percent gives 8. Find x. [10]
11. (HSMC 2002) A merchant gives a 20% discount on a coat, followed by a 30% discount, followed by a 10% discount. Each new discount is applied to the price of the coat after the previous discount. What single percent discount is equivalent to these three successive discounts? Express your answer as a decimal. [0,496]
12. (HSMC 2008) Sarah paid \$81 for a dress that had been discounted 25% and then marked down an additional 10%. Taking both discounts into consideration, determine the original price. [\$120]
13. (HSMC 2005) Suppose that you own some stock in an Internet company. One day your stock goes up in value by a %, the next day it drops in value by b % and the third day it goes up in value by c %, where a, b and c are all positive integers. The result is that your stock is worth exactly the same as at the beginning of the first day. Find the smallest value of $a + b + c$. [86]
14. (HSMC 2005) In an election, there were two candidates. One of them received 65% of the votes and got 1500 votes more than his competitor. How many people voted? [5000]
15. (HSMC 2007) More than 93% of the students in a math class are girls, but there is at least one boy in the class. What is the smallest possible size of the class out of the following choices:
    A) 13 B) 14 C) 15 D) 20 E) 21 [C]

Concetto di evento aleatorio e diversi punti di vista della Probabilità

L'eccitazione che un giocatore prova quando scommette è uguale a ciò che potrebbe vincere moltiplicato per la probabilità di ottenerlo. Blaise Pascal (1623-1662)

Nella vita di ogni giorno si ha spesso a che fare con questioni il cui accadere è legato al caso. Vediamo qualche esempio.

Esempio 1

Marco domani vorrebbe andare al mare, ma non vuole rischiare di rovinarsi la giornata, così prima di partire ascolta le previsioni del tempo. Il servizio meteorologico prevede una bella giornata di sole sulla spiaggia dove vuole recarsi Marco. Così l'indomani il giovane parte fiducioso. Purtroppo, appena dopo mezzogiorno, si alza un vento improvviso e, dopo qualche ora, un acquazzone costringe i bagnanti a una fuga precipitosa.

Chissà a quanti di noi sono successe disavventure come quelle del nostro Marco. In questi casi ci siamo affrettati a inveire contro l'ufficio meteorologico, accusando i suoi impiegati di incompetenza. Il problema reale è che le previsioni del tempo dipendono da moltissimi fattori, che fanno sì che anche le più accurate possano risultare false. Vediamo altri esempi ancora più efficaci.

Esempio 2

Matteo si reca al casinò a giocare alla roulette. Poiché si sente molto furbo, decide di vedere un po' cosa accade prima di cominciare a puntare. Per ben 5 volte esce il rosso. Matteo a questo punto è quasi sicuro che adesso uscirà il nero, quindi punta una bella somma su tale colore. Purtroppo ancora una volta esce il rosso. Naturalmente adesso Matteo è proprio sicuro che uscirà il nero, così punta tutto ciò che ha. Non vi meraviglierete se vi dirò che Matteo è dovuto tornare a casa in autostop perché non gli erano rimasti neppure i soldi per il treno!

Il precedente esempio è abbastanza familiare. Quanti di noi non hanno fatto come Matteo, puntando su un certo numero del lotto che non esce da innumerevoli settimane o dilapidando piccole fortune per comprare centinaia di biglietti *gratta e vinci*, con la convinzione che "prima o poi dovremo vincere!". Tutti questi fatti possono essere affrontati con l'aiuto della matematica, ed è ciò che ci apprestiamo a fare in questa unità didattica. In pratica vogliamo studiare, con l'aiuto della matematica, ciò che non è matematico, ossia ciò che è legato al caso, il cui accadere quindi non è certo, ma è invece possibile. Noi però associamo a un certo fatto un numero che in qualche modo misuri quella che chiamiamo la sua *probabilità di succedere.* Spesso nel linguaggio quotidiano usiamo la parola "probabilità", facendola anche precedere dai comparativi più e meno. Diciamo per esempio che è più probabile che una squadra di calcio di serie A batta una squadra di serie C; che è meno probabile che in agosto piova in Sicilia piuttosto che in Veneto; che è ugualmente probabile che lanciando un dado venga fuori un numero pari o un numero dispari e così via. Adesso vediamo come sia possibile rendere più rigoroso tutto ciò.
Se un fatto ha più probabilità di accadere di un altro, vogliamo sapere di quanto è più probabile, ma soprattutto vogliamo che tutti associno a questo evento la stessa probabilità. Quel che vogliamo fare perciò è il **Calcolo delle Probabilità**, la quale disciplina si occupa di stabilire una "misura" numerica della possibilità di realizzarsi di un avvenimento (il lancio di un dado; l'estrazione di cinque numeri in una ruota al gioco del lotto; il risultato finale o intermedio di un incontro di calcio; l'esito del volo di un aereo da una località all'altra, ...), che può avere esiti diversi (esce il numero due o il cinque, esce il 13 ma non il 27, vince una squadra o l'altra, il volo arriva puntuale o in ritardo, ...).
Prima di vedere come associare a un dato avvenimento un numero che misuri la sua probabilità di accadere, dobbiamo stabilire come interpretarlo.

Il problema

Domenica vi sarà la partita fra la squadra degli Angeli neri e quella dei Diavoli bianchi; su quale delle due conviene puntare?

Possiamo interpretare il problema in almeno tre modi diversi. Vediamoli.

1. Diciamo che se la partita si effettua e si conclude normalmente quello che può succedere è uno solo dei tre seguenti eventi: *vince la prima squadra*, *vince la seconda squadra*, *vi è un pareggio*. In questo ordine di idee associamo a ciascuno dei tre possibili avvenimenti la probabilità $\frac{1}{3}$ di accadere. Così non stiamo privilegiando nessuno dei tre fatti.
2. Consideriamo quello che è successo fra le due squadre nei passati 10, 20, 100 incontri. Supponiamo per esempio che, nei passati 100 incontri, gli Angeli abbiano vinto 35 volte, i Diavoli 42 volte e i rimanenti incontri siano finiti in pareggio. In questo caso vi è la probabilità $\frac{35}{100}=\frac{7}{20}$ che vincano gli Angeli, $\frac{42}{100}=\frac{21}{50}$ che vincano i Diavoli e $\frac{23}{100}$ che le squadre pareggino.
3. Infine vi è l'approccio delle agenzie di scommesse, che, dopo avere considerato una serie di fatti (la situazione attuale delle due squadre, a che posto sono in classifica, quale delle due formazioni gioca in casa, quale delle due risulta più in forma, se vi sono delle assenze importanti in una delle due squadre o in entrambe, se vi è una particolare rivalità e via dicendo) assegnano una loro probabilità all'evento. Cioè stabiliscono quanto sono disposti a rischiare in caso che perdano la scommessa. Per esempio se pagano €10,00, quando noi puntiamo € 7,50, vuol dire che per l'agenzia la probabilità che l'evento si verifichi, è $\frac{7,5}{10}=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$.

Ciascuno dei tre punti di vista precedenti rappresenta un importante concezione della probabilità.
Il primo viene detto **probabilità classica** o **secondo Laplace**, il secondo **concezione frequentista** e il terzo **concezione soggettivista**.
Quale delle tre è migliore, più efficace, misura meglio il rischio? Dipende dall'evento da studiare, così nel caso particolare, è la terza. Se però il fenomeno fosse stato l'estrazione di un certo numero al lotto, probabilmente sarebbe stato migliore il secondo punto di vista e se invece avessimo avuto a che fare con la vincita di un premio a una lotteria scolastica sarebbe stata preferibile la prima. Quindi non vi è una concezione della probabilità migliore delle altre. Perché più semplici da inquadrare, noi preferiamo trattare solo le prime due. In entrambe consideriamo il concetto di fenomeno come ente primitivo.

L'antologia

Il problema di studiare gli eventi reali che non hanno un esito sempre certo, è stato considerato praticamente da sempre nella storia delle Matematiche, soprattutto in considerazione delle scommesse attorno ai giochi.

Galileo Galilei, *Sopra le scoperte dei dadi*, 1612

> *"Che nel gioco dei dadi alcuni punti sieno più vantaggiosi di altri, vi ha la sua ragione assai manifesta, la quale è, il poter quelli più facilmente e più frequentemente scoprirsi, che questi, il che dipende dal potersi formare con più sorte di numeri: onde il 3. e il 18. come punti, con tre numeri comporre, cioè questi con 6.6.6. e quelli con 1.1.1. e non altrimenti, più difficili sono a scoprirsi, che v.g.(1) il 6. o il 7., li quali in più maniere si compongono, cioè il 6. con 1.2.3. e con 2.2.2. e con 1.1.4. ed il 7. con 1.1.5., 1.2.4, 1.3.3., 2.2.3."*

Ossia è più facile che esca un 7 di un 6, lanciando tre dadi, dato che il 7 si può ottenere in 4 modi diversi e il 6 il tre modi. Aggiunge poi.

> *"Tuttavia ancorché il 9. e il 12. in altrettante maniere si compongano in quante il 10. e l'11. perlochè d'equal uso devriano esser reputati; si vede non di meno, che la lunga osservazione ha fatto dai giocatori stimarsi più vantaggioso il 10. e l'11. che il 9. e il 12."*

(1) *Verbi gratia*, è il nostro moderno *Per esempio*.

cioè nonostante (apparentemente aggiungiamo noi), 9, 10, 11 e 12 hanno lo stesso numero di possibili combinazioni, l'esperienza di gioco mostra che 10 e 11 escono con maggiore frequenza. Galileo spiega l'arcano facendo vedere che in realtà il numero di modi possibili debba contarsi in modo opportuno. Lo vedremo meglio nel seguito.

Successivamente, nel 1654, il cavaliere di Méré, Antoine Gombaud (1610 – 1685), noto giocatore, pensò di porre a un suo amico, il grande matematico Blaise Pascal, alcuni quesiti sempre riguardanti il gioco dei dadi. Pascal scrisse a un altro grande matematico dell'epoca: Pierre de Fermat esponendo la questione.
Vediamo un esempio di tali problemi, considerando il seguente passo, estratto da una

Lettera spedita da Pascal a Fermat, mercoledì 29 luglio 1654.

> *"Ecco il modo in cui io saprò il valore di ciascuna delle possibilità che hanno due giocatori, quando, per esempio, si vince in 3 lanci e ciascuno ha scommesso 32 pistole (2). Supponiamo che il primo di loro abbia già due punti e l'altro 1. Adesso devono effettuare un altro lancio, il cui risultato potrà essere uno dei seguenti. Se vince il primo, egli vincerà l'intera posta, cioè 64 pistole. Se invece vince l'altro, il punteggio diverrà 2 a 2, di conseguenza se essi si accorderanno per dividere la posta, ciascuno riavrà indietro le sue 32 pistole. Consideriamo allora, Signore, che se vince il primo avrà 64 pistole, se invece dovesse perdere, ne avrà 32. Se il gioco dovesse interrompersi prima di questo quarto lancio e la posta dovesse essere divisa, il primo dovrebbe dire "Io sono certo di avere 32 pistole, anche se questo lancio non mi sarà favorevole. Le altre 32 pistole può darsi che le vinca io come può essere che le vinca tu. Perciò queste 32 pistole le divideremo e le altre 32 saranno invece tutte mie". Così il primo dovrebbe avere 48 pistole e il secondo 16.*
> *Adesso supponiamo che il primo abbia 2 punti e il secondo nessuno e che si apprestino ad effettuare il terzo lancio. Se esso sarà favorevole al primo, egli vincerà 64 monete; se vince l'altro, il punteggio sarà 2 a 1, come nel caso precedente già trattato. Ma ho già mostrato che in quel caso il primo riceverebbe 48 pistole e il secondo 16. Perciò se il gioco dovesse interrompersi prima del terzo lancio, il primo potrebbe dire: "Se vinco, guadagnerò tutta la posta, 64 pistole, se perdo, 48 pistole saranno legittimamente mie. Perciò dammi 48 monete e le rimanenti 16 le divideremo metà ciascuno." Così il primo avrà 48 più 8 pistole, cioè 56.*
> *Ora supponiamo che il primo abbia solo un punto e l'altro nulla. Vedete, Signore, che se effettuiamo un lancio, e sarà favorevole al primo, egli avrà 2 punti e l'altro zero, se quindi il gioco dovesse interrompersi dopo il lancio gli andrebbero 56 monete. Se dovesse perdere saranno in parità e, interrompendo il gioco, avrebbero 32 monete a testa. Egli dovrebbe allora dire all'avversario: "Se non volete continuare a giocare, datemi le 32 monete di cui sono certo e dividiamo quel che resta sottraendo queste monete da 56; quel che prenderei, se il lancio fosse a mio favore, cioè 24 monete, le divideremo fra noi a metà. Così voi prenderete 12 pistole e io 32 più 12, cioè 44.*

Nel 1657 l'olandese Christian Huygens, proprio traendo spunto dalla lettura della corrispondenza fra Fermat e Pascal, scrisse un articolo riguardante il gioco dei dadi. Nel 1713 fu pubblicato dallo svizzero Jacques Bernoulli l'*Ars conjectandi* (Arte di congetturare), in cui venivano riportate alcune formule utilizzate ancora oggi. Da allora molti altri eminenti matematici si sono occupati del calcolo delle probabilità che oggi viene considerata una delle più importanti discipline matematiche.
Nei paragrafi seguenti vogliamo considerare più in dettaglio queste questioni.

(2) La pistola era una moneta di uso comune in Francia, ai tempi di Pascal.

Verifiche

Stabilire quale fra i tre punti di vista probabilistici è più indicato nel trattamento dei seguenti fenomeni. Nelle risposte F = Frequentista, C = Classica, S = Soggettivista

Livello 1

1. Probabilità che nella prossima estrazione del lotto della ruota di Venezia esca il 12. [F o C]
2. Probabilità che il mio primogenito sia un maschio. [C o S]
3. Probabilità che la Ferrari vinca il prossimo Gran Premio automobilistico. [S]
4. Probabilità che il volo Milano – Roma delle 16:00 arrivi con meno di dieci minuti di ritardo. [F o S]
5. Probabilità di ottenere un voto sufficiente nel prossimo compito di matematica. [S]
6. Probabilità di ricevere una motocicletta in regalo per il prossimo compleanno. [S]
7. Probabilità che il prezzo della benzina non aumenti più del 10 % nel prossimo anno. [F o S]
8. Probabilità di fare 14 al totocalcio giocando 4 colonne diverse. [C]
9. Probabilità di vincere il premio più ricco al "gratta e vinci" acquistando 10 tessere. [C]
10. Probabilità di selezionare il numero di cellulare di un amico digitando delle cifre a caso. [C]
11. Probabilità di avere un incidente andando a sciare. [S]
12. Probabilità di incontrare una diva del cinema sull'aereo. [S]
13. Probabilità di trovare un biglietto da 100 euro facendo una passeggiata. [S]
14. Probabilità di avere un poker servito. [C]
15. Probabilità di ottenere 6 lanciando un dado regolare. [C]

Lavoriamo insieme

La probabilità soggettivista viene definita come il rapporto fra la somma X che un individuo coerente scommette per ricevere una somma $Y > X$, se vince, cioè $P = \frac{X}{Y}$. Così se un'agenzia di scommesse per ogni euro scommesso paga € 1,25 per l'accadere di un certo evento (vittoria di una squadra, numero di gol segnati, …), vuol dire che essa assegna all'evento una probabilità $\frac{1}{1,25} = \frac{100}{125} = \frac{4}{5} =$ 80% di accadere.

Livello 1

16. Se un'agenzia di scommesse paga € 1,30 per ogni euro scommesso se accade l'evento E, che probabilità essa assegna all'accadere dell'evento? [≈ 77%]
17. Massimo per una scommessa è disposto a pagare € 6,50 se perde ottenendo € 7,00 se vince. Che probabilità egli assegna all'accadere dell'evento? [≈ 93%]
18. Teresa ritiene che un certo fatto ha la probabilità di accadere del 40%, se perciò scommettesse un euro, quanto vorrebbe ricevere in cambio? [€ 2,50]
19. Franco ritiene che un certo fatto ha la probabilità di accadere del 27%, se perciò scommettesse € 5,25, quanto vorrebbe ricevere in cambio? [€ 19,44]

La concezione frequentista

Non è certo che tutto sia incerto.
Blaise Pascal, *Pensees.* 1670.

Cominciamo subito con un esempio

Esempio 3

Nella tabella seguente è riportata la Popolazione residente in Italia al 21 Ottobre 2001, suddivisa per fasce geografiche (dati ISTAT).

Italia Nord-Occidentale	Italia Nord-Orientale	Italia Centrale	Italia Meridionale	Italia Insulare	Italia
14769	10569	10716	13786	6466	56306

Per determinare la probabilità frequentista che il 21/10/01, un residente italiano scelto a caso fosse dell'Italia Meridionale dobbiamo semplicemente calcolare la percentuale di residenti meridionali rispetto al totale, cioè $\frac{13786}{56306} \approx 24{,}5\%$. Quindi la seguente tabella delle frequenze ci fornisce informazioni sia sulla percentuale dei residenti italiani ripartiti geograficamente sia la percentuale frequentista che uno di essi scelto a caso appartenga a una data area geografica.

Italia Nord-Occidentale	Italia Nord-Orientale	Italia Centrale	Italia Meridionale	Italia Insulare	Italia
14769	10569	10716	13786	6466	56306
≈ 26,23%	≈18,77%	≈19,03%	≈24,48%	≈11,48%	100,00%

Ancora un esempio.

Esempio 4

Temperatura	Frequenza	Percentuale
27,45	12	10%
27,46	15	12,5%
27,47	18	15%
27,48	25	20,83%
27,49	34	28,33%
27,50	12	10%
27,51	4	3,33%

Un'altra applicazione della concezione frequentista di probabilità è nei risultati provenienti da misurazioni effettuate in laboratori. Poiché anche gli strumenti più perfezionati sono sempre soggetti a errori, si usa la tecnica delle prove ripetute sempre nelle stesse condizioni. Così facendo, si ottengono dei dati sui quali si lavora in modo probabilistico, assegnando poi alla grandezza considerata, come valore misurato, quello più frequente. Supponiamo, per esempio, di avere misurato per 120 volte la temperatura di un certo oggetto fisico, sforzandoci di ripetere l'esperimento esattamente nelle stesse condizioni, ottenendo i risultati riportati nella tabella in alto. Stavolta la frequenza è data dal numero di volte in cui si è presentato il singolo evento. I valori percentuali sono ottenuti dividendo la frequenza singola per 120, totale delle misurazioni, e moltiplicando per 100. Questi ultimi valori sono espressi con 2 cifre decimali. Possiamo quindi dire che la probabilità che l'oggetto abbia una temperatura pari a 27,49° è circa del 28,33%, che abbia una temperatura compresa tra 27,46° e 27,50° è data dalla somma delle percentuali relative a tutte le temperature comprese tra le due, ed è circa del 86,67%.

Adesso possiamo definire cosa intendiamo per probabilità frequentista.

Definizione 1

Dato un fenomeno F che può avere un numero finito di diversi esiti: $E_1, E_2, \ldots, E_h$ e che viene ripetuto un numero N di volte nelle stesse condizioni, diciamo **probabilità frequentista** che il fenomeno F si presenti con un dato esito E_k il rapporto fra il numero delle prove in cui si è ottenuto E_k e il numero N delle prove.

Di seguito elenchiamo le critiche più comuni contro la precedente definizione.

1. Chi ci assicura che il fenomeno venga ripetuto esattamente nelle stesse condizioni?
2. Chi ci assicura che gli esiti ottenuti non siano condizionati dal modo in cui stiamo effettuando l’esperimento?
3. Chi ci assicura che i valori da noi ottenuti possano essere “generalizzati”, assegnandoli cioè a fenomeni analoghi che però si verificano in altri luoghi e sotto altre condizioni?

In pratica le tre obiezioni precedenti, che sono solo alcune di quelle possibili, possono essere concentrate nella seguente domanda: *Chi mi dice che sono così bravo da riuscire a ripetere un esperimento esattamente nello stesso modo ogni volta?*
Per esempio, se voglio utilizzare la probabilità frequentista per stabilire quali numeri usciranno la settimana prossima sulla ruota di Napoli, mi avvarrò delle tabelle dei risultati delle ultime 100, 200, 1000 estrazioni.
Ma esse sono state fatte tutte esattamente allo stesso modo? Anche se adesso le estrazioni sono automatizzate, siamo sicuri che le macchine e i loro software sono stati regolati tutti allo stesso modo? Che non vi sia un bug che le faccia funzionare in modo errato? Che le condizioni del tempo non le condizionano e così via? La risposta è sempre la stessa: in matematica o accettiamo un sistema assiomatico senza ulteriori discussioni o, se non ci convince, lo cambiamo con un altro. Dopo di che qualsiasi risultato otteniamo, purché correttamente ottenuto, lo accettiamo.

Verifiche

Livello 1

1. Nella tabella seguente sono riportati i dati degli stranieri residenti in Italia secondo il censimento I-STAT 2001. Determinare le diverse probabilità frequentiste che uno straniero residente in Italia nel 2001, scelto a caso, appartenesse ad una delle date aree geografiche

Italia Nord Occidentale	367008
Italia Nord-Orientale	289011
Italia Centrale	224027
Italia Meridionale	75239
Italia Insulare	32078
Italia	**987363**

[37,17%; 29,27%; 22,69%; 7,62%; 3,25%]

2. Nel 1997 l'ISTAT ha calcolato che fra il totale dei maschi residenti in Italia, 4334989 avevano un'età compresa tra 0 e 14 anni, 20751462 un'età compresa tra 15 e 64 anni e 8353829 un'età superiore ai 65 anni. Qual è la probabilità che un maschio scelto a caso dall'elenco dell'anagrafe del 1997 risulti avere un'età inferiore ai 15 anni? [≈ 12,7%]
3. Nella tabella seguente, dati ISTAT, sono riportati il numero di ricoveri ospedalieri per malattie infettive regolarmente denunciati nel 1997 in Italia. Determinare la probabilità che un paziente ricoverato in un ospedale italiano per una malattia infettiva fosse affetto da a) TBC polmonare ; b) Epatite o salmonellosi ; c) Malattia infettiva diversa dall'AIDS [a) ≈ 10,35% ; b) ≈ 76,11% ; c)≈ 90,12%]

Infezione	Numero infettati
Epatite	13183
Salmonellosi non tifoidale	16020
AIDS	3790
TBC polmonare	3972
TBC extra polmonare	1402

4. Nella seguente tabella, dati ISTAT, sono riportati i dati relativi al censimento 2001 della popolazione delle province del Piemonte, suddivise per sesso. Calcolare la probabilità che un cittadino scelto a caso fra i residenti del Piemonte in quel censimento fosse a) della provincia di Asti ; b) un maschio della provincia di Biella ; c) una femmina della provincia di Cuneo; d) non della provincia di Torino ; e) un maschio [≈ 4,98% ; ≈ 4,43% ; ≈ 13,12% ; ≈ 49,05% ; ≈ 48,27%]

Capoluogo	Totale	Maschi	Femmine
Torino	2122704	1023748	1098956
Vercelli	176641	84997	91644
Biella	187041	89151	97890
Verbano-Cusio-Ossola	158999	76735	82264
Novara	344010	165379	178631
Cuneo	554992	272303	282689
Asti	207671	100464	107207
Alessandria	414384	198269	216115
Piemonte	**4166442**	**2011046**	**2155396**

5. Nella tabella seguente, dati ISTAT, sono riportati il numero di morti fra le donne, registrati in Italia nel 1996, suddivise per causa di morte. Determinare la probabilità che una donna morta in Italia nel 1996 sia morta per a) malattia dell'apparato digerente ; b) un tumore ; c) una malattia

Causa di morte	Numero di morti
Malattie infettive	1262
Tumori escluso seno e utero	65690
Tumori seno e utero	14511
Malattie sistema circolatorio	129886
Malattie ischemiche	34427
Malattie apparato respiratorio	12682
Malattie apparato digerente	12304
Mal definite	4383
Cause violente	11316
Altre	33001

[≈ 6,08% ; ≈ 39,61% ; ≈ 75,95%]

6. Nella tabella seguente, dati ISTAT, sono riportati il numero di diplomati e laureati nell'A.A. 1997/98 nelle università statali italiane, suddivisi per indirizzi di studio. Determinare la probabilità che uno studente scelto a caso fra quelli diplomati o laureati in una università statale italiana nell'A.A. 1997/98 a) avesse conseguito il titolo in un indirizzo scientifico ; b) fosse una femmina diplomata in educazione fisica ; c) fosse un maschio laureato in un indirizzo linguistico d) fosse una femmina laureata in lettere o un maschio in Ingegneria ; e) non fosse né un maschio laureato in Agraria, né una femmina laureata in Architettura [≈ 3,67% ; ≈ 1,60% ; ≈ 1,15% ; ≈ 16,80% ; ≈ 96,10%]

Indirizzo	Totale	Maschi	Femmine
Agrario	2636	1606	1030
Architettura	7234	3700	3534
Chimico–farmaceutico	4411	1704	2707
Economico–statistico	24306	12801	11505
Geo–biologico	5275	1982	3293
Giuridico	18632	8060	10572
Ingegneria	14806	12770	2036
Insegnamento	3838	379	3459
Letterario	12219	2830	9389
Linguistico	8106	679	7427
Medico	10685	4205	6480
Politico–sociale	10094	4212	5882
Psicologico	2678	482	2196
Scientifico	4836	2620	2216
Educazione fisica	2171	1007	1164
T O T A L E	131927	59037	72890

7. Nella tabella seguente, dati ISTAT, sono riportati il numero di impiegati nelle strutture ospedaliere pubbliche italiane nel 1997, suddivisi per qualifica. Determinare la probabilità che un impiegato a caso scelto fra quelli che prestavano servizio in un ospedale italiano nel 1997, fosse a) un medico ; b) un tecnico o un amministrativo. [≈ 17,51% ; ≈ 28,17%]

Qualifica	Numero di impiegati
Medici	98637
Personale sanitario ausiliario	306045
Personale tecnico	124337
Personale amministrativo	34383

8. Nella tabella seguente, dati ISTAT, sono riportati il numero di controlli effettuati su alcune colture per stabilire quante di esse avevano residui dannosi di fitofarmaci. Determinare la probabilità che, scegliendo a caso fra quelle esaminate a) un'arancia, risulti dannosa ; b) una verdura, sia dannosa ; c) una coltura, non sia dannosa ; d) una coltura fra quelle dannose, sia una fragola ; e) è più probabile scegliere una clementina o una qualsiasi coltura dannosa?

[≈ 0,35% ; ≈ 5,16% ; ≈ 95,14% ; ≈ 10,90% ; coltura dannosa]

Coltura	Esaminati	Dannosi
Actinidie	70	3
Arance	284	1
Carciofi	257	3
Cavolfiori	69	2
Cavoli broccolo	107	0
Clementine	210	8
Fragole	409	23
Lattughe	654	44
Mele	60	2
Patate	144	1
Pere	101	2
Pesche	493	24
Pomodori	217	5
Radicchi	181	7
Sedani	205	20
Uve da tavola	877	66
TOTALE	4338	211

Probabilità secondo Laplace

Le Probabilità devono essere trattate in modo analogo alle misure delle grandezze fisiche; cioè non possono essere conosciute mai esattamente, ma solo entro certe approssimazioni. *Emil Borel* (1871 – 1956)

Consideriamo adesso il secondo punto di vista della probabilità, cominciando con una definizione.

Definizione 2

Dato un fenomeno F, diciamo suo **spazio degli eventi** E l'insieme di tutti i possibili modi, diversi fra di loro, in cui F può presentarsi.

Esempio 5

- Se F è il fenomeno punteggio del lancio di un dado regolare (cioè a forma di cubo e con i punteggi da 1 a 6 posti sulle sue facce), non truccato (ossia non vi è nessun marchingegno che favorisca l'uscita di una faccia piuttosto di un'altra), il suo spazio degli eventi sarà l'insieme $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Se F è il fenomeno estrazione di un numero al gioco della tombola avremo invece $E = \{1, 2, 3, ..., 89, 90\}$.

La concezione alla base del concetto di probabilità classica anche detta secondo Laplace, è il fatto che ognuno dei modi in cui si può presentare il fenomeno deve essere considerato ugualmente possibile. Quindi non possiamo utilizzarla se, ad esempio, dobbiamo valutare la probabilità che si effettui il volo Milano Parigi delle ore 17:00 del 15 maggio prossimo. Infatti la probabilità che tale evento si verifichi è vicina a uno, in un giorno normale, e vicina a zero in un giorno di sciopero.

Definizione 3

Diciamo **evento aleatorio** o semplicemente **evento**, un sottoinsieme dello spazio degli eventi E di un fenomeno F.

Che cosa significa?

Aleatorio Dal latino *alea* che significa dado, è legato quindi alla nascita *storica* del calcolo delle probabilità.

Esempio 6

- Lanciando un dado regolare, l'evento *uscita di un numero pari* è il sottoinsieme $\{2, 4, 6\}$ dello spazio degli eventi $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Estraendo il primo numero sulla ruota di Napoli, l'evento *uscita di un numero pari o multiplo di* 7 è il sottoinsieme $\{2, 4, 6, ..., 88, 90, 7, 21, ..., 77\}$.

Definizione 4

Diciamo numero dei **casi possibili** di un dato evento la cardinalità dello spazio di eventi E a cui esso appartiene; numero dei **casi favorevoli** al suo accadere, la propria cardinalità.

Esempio 7

- Nell'evento *uscita di croce nel lancio di una moneta non truccata*, il numero dei casi possibili è 2 (esce Testa o Croce), quello dei casi favorevoli all'evento è 1 ({Croce}).
- Nell'evento *uscita di un numero pari nel lancio di un dado*, il numero dei casi possibili è 6, quello dei casi favorevoli è 3.
- Nell'evento *uscita di un numero dispari maggiore di* 37, *come primo estratto sulla ruota di Venezia*, i casi possibili sono 90, i casi favorevoli 27 (la cardinalità dell'insieme $\{39, 41, 43, \dots, 87, 89\}$).

Adesso siamo in grado di definire cosa intendiamo per probabilità secondo Laplace.

Definizione 5

Dato un evento il cui spazio degli eventi sia finito, diciamo sua **probabilità secondo Laplace** il rapporto fra il numero dei casi favorevoli al suo verificarsi e quello dei casi possibili, nell'ipotesi che tutti i casi abbiano la stessa possibilità di accadere.

Anche per questa definizione passiamo in rassegna alcune delle critiche più frequenti.

1. La definizione è circolare, dato che definiamo il concetto di *probabile* con quello meno chiaro di *equipossibile*.
2. La probabilità laplaciana di un evento è sempre un numero razionale compreso fra 0 e 1 e non un numero reale.
3. Qual è il modo corretto di stabilire quali fatti sono importanti perché si abbia un certo esito piuttosto che un altro?

A queste obiezioni potremmo rispondere che

1. supponiamo, in fiducia, che tutti gli esiti siano *equipossibili* (se la moneta non è truccata c'è la stessa possibilità che lanciandola esca Testa o Croce).
2. in alcuni casi possiamo generalizzare la probabilità laplaciana in modo da ottenere probabilità non razionali;
3. siamo noi stessi a stabilire quali fatti influenzano gli esiti e a escludere quelli indipendenti (come il colore, il peso o l'immagine presente su una moneta). Questo fa sì che questa concezione della probabilità venga anche chiamata *a priori*.

Ricordiamo che, in base alla definizione, vale 0 la probabilità dell'evento formato dall'insieme vuoto e 1 quella dell'evento cosiddetto universale, cioè quello che coincide con lo spazio degli eventi.

Esempio 8

- Consideriamo il fenomeno *lancio di un dado regolare*, il cui spazio degli eventi è $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. La probabilità dell'evento a) *esce il punteggio* 2 è $\frac{1}{6}$, poiché l'unico caso favorevole è {2}; b) *esce un numero pari* è $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, dato che i casi favorevoli sono {2, 4, 6}; c) *esce un numero minore di* 8 è $\frac{6}{6} = 1$, infatti i casi favorevoli coincidono con quelli possibili; d) *esce un numero maggiore di* 10 è $\frac{0}{6} = 0$, stavolta è l'insieme vuoto a rappresentare i casi favorevoli.
- Adesso prendiamo in considerazione il fenomeno *estrazione di una pallina da un'urna contenente* 10 *palline rosse,* 20 *bianche e* 30 *verdi*, il cui spazio degli eventi è formato da 10 + 20 + 30 = 60 palline. La probabilità dell'evento a) *esce una pallina rossa* è $\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$; b) *esce una pallina bianca* è $\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$; c) *esce una pallina verde* è $\frac{30}{60}=\frac{1}{2}$.

Riferendoci all'ultimo esempio, notiamo che i tre eventi che abbiamo considerato esauriscono tutte le possibilità. Se estraiamo una pallina essa può avere uno solo dei tre colori detti; quindi, se sommiamo le tre probabilità, dovremmo avere la certezza. Infatti $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$.

Talvolta si preferisce parlare della probabilità di un evento in termini percentuali, cioè trasformando la frazione relativa in una equivalente con denominatore 100. In questo modo però non otterremo sempre frazioni con numeratore intero, dato che 100 è divisibile solo per 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100.

Esempio 9

Le probabilità $\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{3}{5},\frac{7}{10},\frac{11}{20},\frac{8}{25},\frac{47}{50}$, saranno trasformate facilmente in frazioni percentuali, moltiplicando numeratore e denominatore per il numero che fa divenire il denominatore uguale a 100.

$$\frac{1}{2}=\frac{50}{100}=50\%;\frac{3}{4}=\frac{75}{100}=75\%;\frac{3}{5}=\frac{60}{100}=60\%;\frac{7}{10}=\frac{70}{100}=70\%;$$
$$\frac{11}{20}=\frac{55}{100}=55\%;\frac{8}{25}=\frac{32}{100}=32\%;\frac{47}{50}=\frac{94}{100}=94\%.$$

Definizione 6

Un evento si dice

- **evento certo** se ha probabilità 1 di accadere;
- **evento probabilisticamente impossibile** un se ha probabilità zero di accadere.

Esempio 10

- Sono eventi certi: *l'uscita di un numero intero inferiore a 7 nel lancio di un dado regolare*; *l'estrazione di una pallina verde da un'urna che contiene solo palline verdi; l'estrazione di una carta di seme rosso da un mazzo che contiene solo le carte di cuori*.
- Sono eventi probabilisticamente impossibili: *l'uscita di un numero intero superiore a 6 nel lancio di un dado regolare; l'estrazione di una pallina verde da un'urna che non contiene palline verdi; l'estrazione di una carta di seme rosso da un mazzo che contiene solo le carte di fiori*.

Nella definizione 6 abbiamo parlato di evento probabilisticamente impossibile e non semplicemente di evento impossibile. Ciò perché vogliamo distinguere gli eventi che hanno probabilità zero di accadere dagli eventi fisicamente impossibili. Infatti, dire che l'evento è probabilisticamente impossibile non equivale a dire che non è possibile che esso si manifesti. Vediamo qualche esempio.

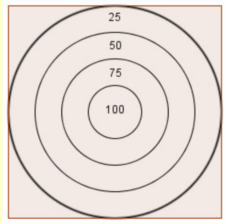
Esempio 11

- Consideriamo l'evento *estrazione di una pallina rossa da un'urna che contiene solo palline verdi*. Questo fatto è fisicamente impossibile, quindi in questo caso il concetto di impossibilità probabilistica coincide con quello intuitivo che usiamo nel linguaggio ordinario.
- Consideriamo l'evento *nel lancio di una moneta regolare essa rimanga in piedi*. Quanti sono i casi a essa favorevoli? Certamente zero, quindi anche la probabilità a esso associata è zero. Eppure questo evento non è fisicamente impossibile. Non vi è alcuna legge fisica che lo impedisca, così l'evento non è impossibile nel senso comune della parola, ma ha probabilità zero di verificarsi.
- L'evento *uscita di una pallina rossa da un'urna che contiene* 10^{10000} *palline nere e una rossa*, non è probabilisticamente impossibile; infatti la probabilità che si verifichi anche se è un numero molto vicino a zero, non è esattamente zero.

La probabilità laplaciana così come è definita è un numero razionale ed è legata a due numeri interi, il numero dei casi possibili e quello dei casi favorevoli. Essa può quindi essere utilizzata solo quando abbiamo a che fare con insiemi finiti; talvolta, però, può essere utilizzata per risolvere problemi relativi a insiemi infiniti. Vediamo un esempio.

Esempio 12

Supponiamo di avere un bersaglio come quello nella figura seguente, sul quale lanciamo delle freccette. Supponiamo inoltre di avere la certezza che comunque lanciamo la freccetta, purché la lanciamo in direzione del bersaglio, questa lo colpirà, perché, per esempio, il bersaglio è una potente calamita e la freccetta ha la punta metallica. Vogliamo calcolare la probabilità di colpire il centro che è la zona in cui si fanno più punti. Possiamo usare la definizione laplaciana? Quanti sono i casi favorevoli a tale evento? Quanti quelli possibili? In questo caso dovremmo contare quanti sono i punti che contiene il bersaglio e quanti di questi rientrano all'interno del centro, ma è ovvio che sono infiniti in entrambi i casi, quindi questo procedimento è privo di senso. Come fare allora? Una maniera di valutare il numero dei punti del bersaglio è quella di considerare la sua area. Così, l'intero bersaglio ha area 16 cm^2, mentre quella della zona centrale è $\pi\ cm^2$. Possiamo allora dire che la probabilità di colpire il centro sarà uguale a $\frac{\pi}{16} \approx 19,6\%$. Questo esempio mostra anche un caso in cui la probabilità è misurata da un numero non razionale.



Spesso nel calcolo delle probabilità si fanno errori banali perché ci si lascia fuorviare dalle apparenze. Vediamo un esempio.

Esempio 13

In una scuola si effettua una lotteria, inserendo in un'urna 12 palline rosse e 6 gialle e, in un'altra urna, 20 palline rosse e 10 gialle. A turno si chiama ciascun alunno e gli si chiede di scegliere l'urna nella quale pescare una pallina. Chi sceglierà una pallina gialla vincerà un premio. Rita viene chiamata per prima. Dopo aver pensato un po' decide di scegliere di pescare nella seconda urna, perché in essa vi sono più palline gialle che nella prima. Rita ha avuto ragione nella sua scelta?
La probabilità non è un numero assoluto, bensì un rapporto, quel che conta quindi non è quante palline gialle vi sono in ciascuna urna, ma quante ve ne sono rispetto al totale. Così la probabilità di estrarre una pallina gialla dalla prima urna è $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$; quella di estrarla dalla seconda urna è $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$. Quindi in questo caso non vi è alcun vantaggio a scegliere un'urna piuttosto che un'altra.

Definizione 7

Diremo **equiprobabili** due eventi relativi allo stesso spazio degli eventi, che hanno la stessa probabilità di verificarsi.

Un'altra interessante questione riguarda i giochi e in particolare come si fa in modo da rendere equilibrata la condizione fra gli scommettitori.

Esempio 14

Supponiamo che Aldo e Bea scommettano sul lancio di due monete regolari. In particolare Bea punta 1 euro sull'evento *uscita di* 2 *teste*, quanto dovrebbe avere come corrispettivo in caso di vincita? Aldo le propone 2 euro, ma Bea non è convinta, infatti lei osserva che possono accadere 4 fatti, indichiamo con T l'uscita di testa e con C quella di croce, {(T, T), (T, C), (C, T), (C, C)} e di questi 4 solo uno la fa vincere, quindi Aldo ha il triplo di probabilità di vincere di quanta ne abbia Bea, mentre con la proposta di Aldo lei vincerebbe solo il doppio di quanto invece vincerebbe Aldo.

Il precedente esempio ci suggerisce di porre la seguente definizione.

Definizione 8

Dato un gioco fra N avversari, ciascuno dei quali ha una probabilità p_h ($1 \le h \le N$) di vincere, diremo che il gioco è **equo** se ogni giocatore puntando 1, in caso di vincita ottenga $\frac{1}{p_h}$.

Esempio 15

- Quindi il gioco esposto nell'esempio precedente risulta equo se puntando 1 euro, Aldo, che ha probabilità $\frac{3}{4}$ di vincere riceve $\frac{4}{3} \approx 1,33$ euro in caso di vincita e Bea ne riceve 4.
- Non è equo per esempio il gioco del lotto. Per esempio puntando € 1,00 su un certo ambo, in caso di vincita si riceveranno € 250,00, ma la probabilità di fare ambo puntando su due numeri è

$$\frac{\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} = \frac{\frac{\cancel{88 \cdot 87 \cdot 86}}{\cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}}}{\frac{90 \cdot 89 \cdot \cancel{88 \cdot 87 \cdot 86}}{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}}} = \frac{20}{90 \cdot 89} = \frac{2}{801}$$

pertanto dovrebbero riceversi € 400,50, affinché il gioco sia considerato equo.

In effetti potevamo anche dire che un gioco è equo se si ha una vincita pari a $\frac{1}{p_h} - 1$ volta la puntata.

I protagonisti

**Jacques Bernoulli** nacque a Basilea il 27 dicembre 1654. Nella sua famiglia una dozzina almeno dei componenti (in particolare si ricordano suo fratello Johann e suo zio Daniel), si occuparono di matematica, fisica, ingegneria, … con ottimi risultati. Si laureò in teologia nel 1676, ma poi si occupò di matematica. Fu il primo a usare il termine integrale nel 1690, inventò il calcolo delle variazioni e studiò diverse importanti curve, fra le quali la cosiddetta catenaria e la cicloide. Nell'*Ars conjectandi*, enunciò la famosa legge dei grandi numeri. Morì nella sua città natale il 16 agosto 1705.

**Christiaan Huyghens** nacque ad Aia in Olanda il 14 aprile 1629, studiò legge all'Università di Leida dal 1645 al 1647, poi dal 1647 al 1649 si trasferì al Collegio d'Orange a Breda, dove oltre a studiare legge si interessò di matematica. Successivamente si occupò di ottica e della costruzione di orologi. Importante il suo trattato *De ratiociniis in ludo aleae* (Sui ragionamenti nel giuoco dei dadi) del 1655 che può essere considerato come il primo relativo al calcolo delle probabilità. Morì nella sua città natale l'8 luglio 1695.

**Pierre Simon Laplace** nacque a Beaumont–en–Auge in Francia il 28 Marzo 1749. All'età di 16 anni fu ammesso all'Università di Caen per studiare teologia, ma si occupò prevalentemente di matematica. I suoi risultati furono così lusinghieri che all'età di 19 anni, su raccomandazione di D'Alembert, fu nominato professore di matematica alla Scuola Militare di Parigi. In quegli anni esaminò fra gli altri il giovane Napoleone Bonaparte. Durante la Rivoluzione Francese fu uno di quelli che lavorò alla sistemazione del Sistema metrico decimale. Durante l'impero napoleonico fu senatore, anche se per solo sei settimane. Nel 1817, durante la restaurazione borbonica, fu nominato marchese. Si occupò di cosmologia; a questo avviso ricordiamo i suoi fondamentali trattati *Exposition du système du monde* del 1796 e soprattutto il *Traité de Mécanique Céleste*, in 5 volumi pubblicato nell'arco di 26 anni, dal 1799 al 1825. I suoi contributi alla teoria della probabilità sono contenuti in *Théorie analitique des probabilités* del 1812 e in *Essai philosophique des probabilités* del 1814. Morì a Parigi il 5 Marzo 1827.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Consideriamo il fenomeno *estrazione di una carta da un mazzo di* 40 *carte da scopa*, il cui spazio degli eventi, è {asso di denari, due di denari, …, fante di bastoni, cavallo di bastoni, re di bastoni}, ed ha 40 elementi. La probabilità dell'evento

- *esce una figura* è $\frac{12}{40}=\frac{3}{10}$, dato che i casi favorevoli sono i 12 elementi seguenti: {fante di denari, cavallo di denari, re di denari, …, fante di bastoni, cavallo di bastoni, re di bastoni}.
- *esce una carta di denari* è $\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$, poiché i casi favorevoli sono: {asso di denari, due di denari, …, re di denari}.
- *esce il tre di bastoni* è $\frac{1}{40}$, infatti l'unico caso favorevole è {tre di bastoni}.

Livello **1**

1. Estraiamo un numero a caso dall'insieme *A* = {100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1100, 1110, 1111}, con quale probabilità contiene più 1 che 0? Contiene un numero dispari di 1? $\left[\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right]$
2. Estraiamo un numero a caso dall'insieme *B* = {1, 2, 4, 8, 9, 12, 16, 25, 36}, con quale probabilità esso è un quadrato perfetto? È una potenza di 2? $\left[\frac{2}{3};\frac{5}{9}\right]$
3. Estraiamo un numero a caso dall'insieme *C* = {12, 123, 131, 132, 124, 125, 152}, con quale probabilità contiene più cifre dispari che cifre pari? Più cifre pari che cifre dispari? Ha cifre la cui somma è un numero pari? Il cui prodotto è dispari? $\left[\frac{5}{7};\frac{1}{7};\frac{4}{7};\frac{1}{7}\right]$
4. Dall'insieme *D* = {6, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32} estraiamo un numero a caso, con quale probabilità è divisibile per 4? È divisibile per 6? Ha più di 6 divisori? Ha meno di 4 divisori? $\left[\frac{7}{8};\frac{3}{8};\frac{1}{8};0\right]$
5. In un'urna immettiamo 100 palline indistinguibili al tatto: 50 bianche, 20 nere e 30 rosse. Estraiamo una pallina a caso con quale probabilità essa è di colore bianco? Nero? Rosso? $\left[\frac{1}{2};\frac{1}{5};\frac{3}{10}\right]$
6. Lanciamo un dado a 12 facce, su ciascuna delle quali è impresso uno dei primi 12 numeri naturali. Con quale probabilità uscirà fuori un numero divisibile per 4? $\left[\frac{1}{4}\right]$
7. Lanciamo un dado a 20 facce, con quale probabilità uscirà un punteggio rappresentato da un numero primo? Con quale un numero multiplo di 5? $\left[\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right]$
8. Da un mazzo di carte italiane da 40 estraiamo una carta, con quale probabilità ha un valore compreso tra 2 e 5? Con quale probabilità ha un valore compreso tra 3 e 6 ed è di bastoni? $\left[\frac{2}{5};\frac{1}{10}\right]$
9. Qual è la probabilità di estrarre una figura rossa da un mazzo di 52 carte da poker? $\left[\frac{3}{26}\right]$
10. Qual è la probabilità di ottenere un numero multiplo di 5 come primo estratto nella ruota di Napoli? Se non escono numeri multipli di 5 da 500 settimane come primi estratti nella ruota di Napoli, la precedente probabilità cambia? Giustificare la risposta. $\left[\frac{1}{5};no\right]$
11. Con riferimento al precedente quesito, se i numeri fossero 92, la probabilità cambierebbe? E se fossero

95? Giustificare la risposta. [Sì; No]
12. Nel gioco della briscola gli assi e i tre sono chiamati carichi, le carte con punteggio 2, 4, 5, 6 e 7 si chiamano lisci. Determinare la probabilità che estraendo a caso una carta da un mazzo regolare di 40, essa sia a) un carico; b) un liscio. $\left[\frac{1}{5};\frac{1}{2}\right]$
13. Nel gioco della briscola l'asso vale 11 punti, il tre 10 punti, il re 4 punti, il cavallo 3 punti, il fante o donna 2 punti. Qual è la probabilità di estrarre una carta da un mazzo regolare di 40, il cui valore sia maggiore o uguale a 3 punti? $\left[\frac{2}{5}\right]$
14. Sue Ellen deve pensare a un numero di 3 cifre multiplo di 7; con quale probabilità la sua amica Marianna riuscirà a indovinarlo al primo tentativo? $\left[\frac{1}{128}\right]$
15. Gianluca dice a Federica di essere nato in Gennaio in un giorno il cui valore numerico è pari ma non divisibile per 3; qual è la probabilità che Federica lo indovini al primo tentativo? Se Gianluca fosse nato in Aprile o in Febbraio sarebbe cambiato il precedente risultato? Giustificare la risposta. $\left[\frac{1}{10};no\right]$
16. In un urna sono posti sei bigliettini con i seguenti nomi di donna: Anna, Barbara, Carla, Dafne, Erica, Federica. Determinare la probabilità che estraendo un bigliettino questo abbia scritto un nome che contenga a) la lettera a; b) solo un tipo di vocale; c) più vocali che consonanti; d) un numero di consonanti doppie del numero di vocali; e) tante vocali quante consonanti. $\left[1;\frac{1}{3};\frac{1}{6};0;\frac{1}{3}\right]$
17. Un numero è scelto a caso nel seguente insieme: {0,25; 0,5; 0,75; 0,8; 1; 2; 2,2; 3; 4; 9,7}. Qual è la probabilità che il suo reciproco sia maggiore di 1? $\left[\frac{2}{5}\right]$
18. A una casa da gioco di Las Vegas chi lanciando due dadi, a forma di cubo, ottiene 7, riceverà la posta che ha puntato moltiplicata per il reciproco della probabilità che ha di effettuare quel lancio. Se Tom ha fatto 7 e ha ricevuto \$ 150, quanto aveva puntato? [\$ 25]
19. Da un mazzo di 52 carte da poker viene eliminato l'asso di picche, le carte sono mescolate e la carta superiore è eliminata senza guardarla. Qual è la probabilità che tale carta sia un asso? $\left[\frac{3}{51}\right]$
20. Gianluca deve telefonare a Lucilla, che ha recentemente cambiato numero telefonico, ma non è sicuro dell'ultima cifra di tale numero. Se la sua scheda telefonica è quasi esaurita e gli permette di effettuare solo due telefonate, qual è la probabilità che riesca a indovinare il numero di Lucilla? $\left[\frac{1}{5}\right]$

Lavoriamo insieme

In un'urna vi sono alcune palline bianche, 20 palline rosse e 30 verdi, se la probabilità di estrarre una pallina bianca è $\frac{2}{7}$, quante sono le palline bianche? Dire che la probabilità di estrarre una pallina bianca è $\frac{2}{7}$, equivale a dire che se tutte le palline nell'urna le suddividiamo in 7 parti uguali, le bianche rappresentano 2 di questi gruppi, quindi le altre palline, che sono 20 + 30 = 50, rappresentano gli altri 5 gruppi. Ma allora ogni gruppo contiene 10 palline e le bianche sono 20.

Livello 2

21. In un'urna vi sono alcune palline bianche, 24 rosse e 40 verdi, se la probabilità di estrarre una pallina bianca è $\frac{13}{17}$, quante sono le palline bianche? [208]
22. In un'urna vi sono alcune palline bianche, 25 rosse e 10 verdi, se la probabilità di estrarre una pallina rossa è $\frac{5}{12}$, quante sono le palline bianche? [25]

23. In un'urna vi sono alcune palline bianche, 15 rosse e 20 verdi, se la probabilità di estrarre una pallina verde è $\frac{7}{15}$, quante sono le palline bianche? [Impossibile]

24. La probabilità di ottenere un numero multiplo di 13 come primo estratto nella ruota di Napoli è la stessa di ottenere un numero multiplo di k. Quali valori può assumere k? [14; 15]

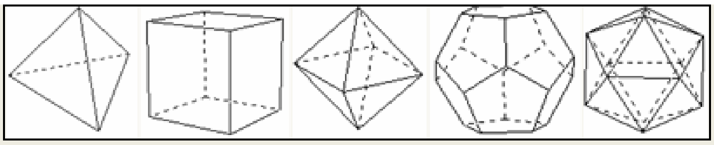
25. Con riferimento al precedente quesito, esistono numeri interi k per cui la probabilità di estrarre un multiplo di k coincida con la probabilità di estrarre un multiplo di 8? [No]

26. Con riferimento al precedente quesito, da un certo valore di k minore di 90, la probabilità di estrarre un multiplo di k non varia. Quanto vale k e qual è la detta probabilità? $\left[46; \frac{1}{90}\right]$

27. Lanciamo una moneta regolare in aria per due volte successive. Qual è la probabilità che entrambe le volte otteniamo testa? $\left[\frac{1}{4}\right]$

28. Lanciando due dadi otteniamo punteggi che vanno da 2 a 12. Per ciascun punteggio determinare la relativa probabilità di ottenerlo. $\left[\frac{1}{36};\frac{1}{18};\frac{1}{12};\frac{1}{9};\frac{5}{36};\frac{1}{6};\frac{5}{36};\frac{1}{9};\frac{1}{12};\frac{1}{18};\frac{1}{36}\right]$

Giochiamo alla matematica



Anche se i dadi più usati hanno forma di cubo, in altri giochi si usano anche dadi a 8, 12 o 20 facce. Ciò dipende dal fatto che deve essere garantita l'equipossibilità e nessuna faccia deve essere privilegiata e questo è possibile solo se i dadi sono poliedri regolari, ossia poliedri le cui facce sono tutte poligoni regolari dello stesso tipo e gli angoli diedri sono tutti fra loro isometrici. Si dimostra che di poliedri del genere ve ne sono solo 5 e sono quelli che andiamo adesso a illustrare. . Essi, nell'ordine, sono denominati: tetraedro, esaedro o cubo, ottaedro, dodecaedro, icosaedro. Hanno rispettivamente, 4, 6, 8, 12 e 20 facce. Questi sono gli unici tipi di dadi che consentono giochi equi.

Livello 2

29. Determinare quanti sono i casi possibili ottenibili lanciando due dadi a forma del solido indicato. Quale punteggio è il più probabile? Quanto vale questa probabilità? a) Tetraedro ; b) Ottaedro ; c) Dodecaedro ; d) Icosaedro $\left[\text{a) } 8,5,\frac{1}{2}\text{ ; b) } 64,9,\frac{1}{8}\text{; c) } 144,13,\frac{1}{12}\text{; d) } 400,21,\frac{1}{20}\right]$

30. Tenuto conto del precedente quesito, rispondere nel caso di un ipotetico dado a n facce. $\left[n^2; n+1; \frac{1}{n}\right]$

31. In un gioco è richiesto il lancio di due dadi a forma di cubo. Magda ha solo un dado a forma di dodecaedro. Ella dice che non cambia nulla, perché in ogni caso due dadi a forma di cubo e un dado a forma di dodecaedro hanno sempre un totale di 12 facce. Secondo te ha ragione? Giustifica la risposta. [No, perché i casi possibili sono rispettivamente 36 e 144]

32. Quanti sono i casi possibili lanciando 3 dadi? E 4 dadi? E n dadi? [216; 1296; 6^n]

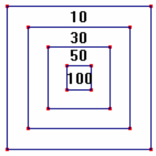
33. Uno dei primi problemi di probabilità fu presentato a Galileo da un giocatore di dadi, il quale aveva osservato che in un gioco dell'epoca, nel quale si lanciavano 3 dadi regolari a forma di cubo, i punteggi 10 e 11 si ottenevano più frequentemente dei punteggi 9 e 12. Calcolare le rispettive probabilità dei due eventi. $\left[\frac{1}{8};\frac{7}{72}\right]$

34. Giorgio ha acquistato tutti i biglietti di una lotteria che contengono la lettera G. Sapendo che un biglietto della lotteria è formato da due lettere scelte fra le 26 dell'alfabeto anglosassone e da un numero di 3 cifre, determinare la probabilità di Giorgio di vincere il premio. [≈ 7,5%]

35. Con riferimento al precedente quesito, se i numeri avessero 5 cifre cambierebbe la probabilità? Se le lettere fossero 4 cambierebbe la probabilità? Giustificare le risposte. [No; Sì]

36. In un'urna sono posti 100 bigliettini, ciascuno dei quali porta scritto uno dei diversi numeri naturali fra 1 e 100. Si estrae un bigliettino e ci viene detto che esso è un multiplo di *n*. Se sappiamo che la probabilità di effettuare una tale estrazione è $\frac{9}{100}$, quanto vale *n*? [11]

37. In figura è rappresentato un bersaglio in cui ciascun settore ha un contorno di forma quadrata. Le dimensioni di ciascun contorno sono, in *cm,* rispettivamente 7, 5, 3 e 1. Si ipotizzi che ogni qualvolta si lancia una freccetta questa colpisca sempre il bersaglio. Determinare la probabilità che lanciando una sola freccetta si ottenga punti a) 50 b) 30



$\left[\frac{8}{49};\frac{16}{49}\right]$

38. Con riferimento al problema precedente, se il punteggio di ciascun settore dovesse essere inversamente proporzionale alla probabilità di ottenerlo, lasciando inalterato il punteggio 10, quanto dovrebbero valere gli altri punteggi? [15; 30; 240]

39. Fra tutti i numeri naturali di tre cifre, si sceglie un numero a caso. Qual è la probabilità che sia una potenza di 2? Una potenza di 3? Una potenza di un numero primo? $\left[\frac{1}{450};\frac{1}{450};\frac{7}{900}\right]$

40. Lanciando due dadi a forma di cubo, non truccati, qual è la probabilità di ottenere due numeri la cui somma rappresenti un numero primo? $\left[\frac{1}{3}\right]$

41. Due numeri primi vengono scelti a caso dai primi dieci numeri primi. Qual è la probabilità che la loro somma faccia 24? $\left[\frac{1}{15}\right]$

42. Un numero è scelto a caso fra i numeri primi minori di 100. Qual è la probabilità che esso contenga il 9 come una delle sue cifre? $\left[\frac{6}{25}\right]$

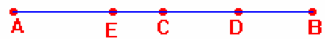
43. La probabilità che accada l'evento *A* è $\frac{2}{3}$, quella che accada *B* è $\frac{3}{4}$, con quale probabilità *p* accadono sia *A* che *B*? $\left[\frac{5}{12}\le p\le\frac{2}{3}\right]$

44. Ciascuno dei 1347 studenti di una scuola riceve un tesserino identificativo numerato progressivamente da 1 a 1347. Jasmine è superstiziosa e crede che il 7 le porti sfortuna. Con quale probabilità Jasmine riceverà un tesserino non sfortunato? Quale fra le dieci cifre è quella con la quale si ha maggiore probabilità di non ricevere un tesserino che la contenga? E con quale fra le dieci cifre la probabilità è maggiore? $\left[\frac{101}{449};8\vee 9;1\right]$

Lavoriamo insieme

Prendo 100 bigliettini e su ognuno di essi scrivo uno dei diversi 100 numeri naturali. Poi prendo altri bigliettini e su ognuno di essi scrivo uno dei diversi numeri primi inferiori a 100. Ripeto più volte quest'ultima operazione, in modo però che ogni numero primo sia ripetuto lo stesso numero di volte. Fatto ciò inserisco tutti i bigliettini in un'urna e ne estraggo uno. Dato che ho calcolato che la probabilità di estrarre un bigliettino con su scritto 7 è $\frac{1}{40}$, quanti bigliettini ho scritto per ciascun numero primo? Quanti sono i numeri primi inferiori a 100? Scriviamoli: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Sono 25. Abbiamo già scritto i numeri primi nella prima trascrizione dei 100 numeri naturali. Se non inseriamo altri bigliettini la probabilità di ottenere 7, così come di qualsiasi altro numero compreso tra 1 e 100, è evidentemente $\frac{1}{100}$. Inserendo un altro gruppo di biglietti con su scritti i numeri primi, avremo 125 bigliettini su due dei quali vi è scritto 7. Quindi la probabilità è salita a $\frac{2}{125}$. Con un secondo gruppo di 25 numeri primi diviene $\frac{3}{150}=\frac{1}{50}$. In generale inserendo x gruppi di 25 bigliettini, la probabilità di estrarre 7 è $\frac{x+1}{100+25x}$, che deve essere uguale a $\frac{1}{40}$, quindi deve essere $40x + 40 = 700 + 175x \Rightarrow x = 4$. Possiamo quindi concludere che abbiamo scritto un totale di 4 bigliettini per ogni numero primo.

Livello 2

45. Claudia e Tom giocano con due dadi a forma di cubo e hanno stabilito che chi per primo ottiene 7, riceverà un numero di caramelle uguale al numero di quelle che già possiede moltiplicato per il reciproco della probabilità che ha di effettuare quel lancio. Se Tom ha fatto 7 e ha ricevuto 150 caramelle, quante ne aveva? [25]
46. Riccardo ha scommesso con un amico che lanciando due dadi riesce a ottenere 8 al primo tentativo; per aumentare la sua probabilità di vincere aggiunge un puntino in una delle facce di uno solo dei due dadi. In quale faccia deve aggiungere il puntino? [Quella con 1]
47. In un'urna sono posti dei bigliettini con su scritti tutti i numeri naturali non superiori a 100. Sappiamo che vi è 1 bigliettino per ogni numero non superiore a 50, mentre vi sono tre bigliettini che portano scritto lo stesso numero se esso è superiore a 50. Determinare la probabilità che venga estratto un quadrato perfetto. $\left[\frac{13}{197}\right]$
48. Il segmento AB in figura è il doppio di AC, il triplo di AE e il quadruplo di DB. Scelto un punto a caso su AB, qual è la probabilità che appartenga anche a EC? 

$\left[\frac{1}{6}\right]$
49. Giocando una sola colonna al totocalcio, gli eventi *fare* 14 e *fare zero*, sono equiprobabili? Giustificare la risposta. [No]
50. Consideriamo i numeri usciti in una certa estrazione sulla ruota di Milano. Quale fra i seguenti eventi è più probabile: *escono i numeri* 1, 2, 3, 4, 5 oppure *escono i numeri* 13, 41, 25, 78, 61? Giustificare la risposta. [Sono equiprobabili]
51. Consideriamo il gioco della roulette e i punteggi usciti in tre giocate successive. Quale fra i seguenti eventi è più probabile: *escono i numeri* 13, 14, 15 oppure *escono i numeri* 13, 12, 11 o *escono i numeri* 13, 13, 13? Giustificare la risposta. [Sono equiprobabili]
52. In un'urna che contiene 100 palline numerate da 1 a 100, se ne estrae una. Determinare la probabilità che la pallina estratta abbia un'etichetta il cui numero sia multiplo di 13. Determinare nello stesso fenomeno eventi equiprobabili al precedente. [7%]
53. Si lancia un dado e si valuta il punteggio ottenuto. Determinare quale fra i seguenti eventi relativi al punteggio ottenuto sono equiprobabili all'evento punteggio pari. Punteggio a) *dispari*; b) *multiplo di* 3; c) *primo*; d) *il cui quadrato è maggiore di* 13; e) *il cui quadrato contiene la cifra* 6. [a), c), d)]
54. Lanciamo due dadi regolari a forma di cubo e valutiamo i punteggi ottenuti. Quale punteggio è equiprobabile a 6? [15]
55. Il signor Gianni ha giocato i numeri 13, 41 e 72 come terno secco, sono però usciti i numeri 13, 41 e 71. Allora il signor Gianni dice di non avere vinto per un punto. Ha ragione a dire così? Giustificare la risposta. [No]
56. Lanciando una moneta 6 volte è più probabile ottenere la sequenza TCTCTC oppure TTTCCC? Giustificare la risposta. [Sono equiprobabili]
57. Da un mazzo di 52 carte da poker estraiamo una carta. Quale fra i seguenti eventi è equiprobabile all'evento la carta ha un valore superiore al 7? La carta a) *è una figura*; b) *è di seme rosso*; c) *ha un punteggio pari*; d) *ha un punteggio la somma delle cui cifre è multipla di* 3; e) *ha un punteggio il cui quadrato contiene una sola volta la cifra* 1. [e]
58. Consideriamo gli insiemi X = {5, 6, 7, 8}, Y = {4, 5, 7, 9, 11}, W = {0, 3, 5, 7, 8} e Z = {0, 2, 4, 6}. Determinare la probabilità che scegliendo due insiemi a caso: la loro unione abbia un numero pari di elementi; la loro differenza in almeno uno dei due sensi, abbia 3 elementi; la loro intersezione abbia 1

elemento la loro differenza simmetrica abbia un numero dispari di elementi. $\left[\frac{2}{3};\frac{5}{6};\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right]$

59. Data la funzione f: $A = \{-1, -2, -3, -4, -5\} \to B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ definita dalla legge $f(x) = -x$. Determinare la probabilità che scelto un elemento a caso in A esso appartenga al dominio di f. Determinare la probabilità che scelto un elemento a caso in B esso appartenga al codominio di f. $\left[\frac{3}{5};\frac{1}{2}\right]$

60. Due panini al prosciutto e due al salame vengono foderati di carta stagnola e messi in un sacchetto. Qual è la probabilità che prendendo due panini a caso, siano entrambi imbottiti allo stesso modo?

61. Lanciamo 3 dadi. Con che probabilità si ottiene un punteggio pari; divisibile per 5. $\left[\frac{1}{2};\frac{43}{216}\right]$

62. In un sacchetto sono poste 5 bacchettine di legno, che misurano, in *cm*, rispettivamente 1, 2, 3, 4 e 5. Tiziana estrae a caso tre bacchettine; qual è la probabilità che con esse si possa costruire un triangolo? Suggerimento: tenere conto della disuguaglianza triangolare. $\left[\frac{2}{5}\right]$

63. La questione è la stessa dell'esercizio precedente, ma le bacchette misurano, in *cm* 3, 3, 4, 5 e 5. Qual è la probabilità che Tiziana formi un triangolo isoscele; equilatero; rettangolo; rettangolo e isoscele. $\left[\frac{3}{5};0;\frac{3}{10};0\right]$

Lavoriamo insieme

Per salire su un aereo 123 passeggeri si mettono in fila. Il primo di essi ha perduto il suo talloncino del check-in, quindi si siede su un posto a caso. Gli altri hanno invece il loro talloncino, quindi si sistemano nel loro posto se libero, se no in un posto a caso. Con quale probabilità l'ultimo dei passeggeri si siederà nel posto assegnato dal talloncino?

Il problema sembra molto complicato, non lo è se lo interpretiamo bene. Supponiamo che il primo si sieda sulla prima poltrona. Ci sono due possibilità: o ha trovato il suo posto o è seduto nel posto di un altro. Nel primo caso tutti siederanno al proprio posto, quindi anche l'ultimo. Nel secondo invece, a un certo momento il passeggero del posto 1 dovrà scegliere un altro posto, se è quello del primo, di nuovo tutti, tranne questi due saranno al loro posto. Diversamente sceglierà un altro posto. A questo punto non è difficile capire che l'ultimo ha due possibilità o trova il proprio posto libero o trova libero il posto del primo, quindi la probabilità cercata è del 50%.

Livello 3

64. Dato uno spazio di eventi finito, è sempre possibile trovare un evento la cui probabilità di accadere è $\frac{1}{2}$? Giustificare la risposta. [No, se la cardinalità dello spazio è dispari]

65. Usando le cifre da 1 a 3, due bambini scrivono ciascuno un numero di tre cifre. Determinare la probabilità che a) abbiano scritto lo stesso numero; b) esattamente una cifra sia stata scritta nella stessa posizione; c) almeno una cifra sia scritta nella stessa posizione; d) due cifre siano scritte esattamente nella stessa posizione. $\left[\frac{1}{27};\frac{12}{27};\frac{19}{27};\frac{6}{27}\right]$

66. Un punto è scelto a caso all'interno di un quadrato. Qual è la probabilità che il triangolo formato dal punto e dagli estremi di un lato del quadrato sia un triangolo acutangolo? [1]

67. Esprimere in formula la probabilità che di due eventi A e B se ne verifichi a) esattamente uno; b) al massimo uno. $[P(A) + P(B) - 2\,P(A \cap B);\ 1 - P(A \cap B)]$

68. Tagliamo una cordicella a caso, qual è la probabilità che i due pezzi siano tali che il più lungo sia il triplo del più corto? $\left[\frac{1}{2}\right]$

69. Con riferimento al problema precedente, qual è la probabilità che il pezzo più lungo sia n volte il più

corto? $\left[\frac{1}{n+1}\right]$

70. Una bacchetta di 2,5 *m* si rompe in due parti, qual è la probabilità che sommando le misure dei due pezzi rotti e arrotondandone il valore all'intero più vicino si ottenga 3? Per esempio se i due pezzi misurano 0,43 e 2,07, sommeremo 0 + 2 = 2. $\left[\frac{2}{5}\right]$
71. In un grosso scatolone sono contenuti calzini rossi e calzini blu in numero non superiore a 1991. Scegliendo due calzini a caso la probabilità che siano entrambi rossi o entrambi blu è 50%, quanti calzini rossi vi sono, al massimo, nello scatolone? [990]
72. Scriviamo le lettere della parola PRESTO su sei bigliettini, che estraiamo casualmente uno alla volta, formando così una nuova parola. Con quale probabilità tale parola inizia e finisce per vocale? $\left[\frac{1}{15}\right]$
73. Esprimere in formula la probabilità che di tre eventi A, B e C se ne verifichi a) esattamente uno.
$[P(A) + P(B) + P(C) - 2\,P(A\cap B) - 2\,P(B\cap C) - 2\,P(A\cap C) + 3\,P(A\cap B\cap C)]$
b) esattamente due $[P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(B\cap C) - P(A\cap C) + P(A\cap B\cap C)]$
c) almeno 1. $[1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(A\cap B) + P(B\cap C) + P(A\cap C) - P(A\cap B\cap C)]$

Lavoriamo insieme

Nel gioco delle 3 carte, si deve indovinare una carta fra tre nascoste; affinché il gioco sia equo quante volte la posta dovrebbe pagare il banco in caso di vittoria dell'avversario?

La probabilità che una persona vinca puntando a caso è $\frac{1}{3}$, pertanto dovrebbe ricevere 3 volte la posta.

Livello 1

74. Il gioco della roulette è equo? Giustificare la risposta. [No, perché puntando su un numero si vince 36 volte la posta, mentre la probabilità è $\frac{1}{37}$ o $\frac{1}{38}$, seconda che vi sia 0 o anche 00]
75. Con riferimento al quesito precedente, quanto dovrebbe riceversi puntando € 1,00 su un numero, se il gioco fosse equo, nei due casi? [€ 37,00; € 38,00]
76. In un gioco testa/croce quante volte dovrebbe pagarsi la posta, perché sia considerato equo? [due]
77. In un gioco in cui si lancia un dado e si punta sull'uscita di un dato punteggio, quante volte dovrebbe pagarsi la posta, perché sia considerato equo? [sei]
78. In un gioco in cui si lanciano due dadi e si punta sull'uscita del 12, quante volte dovrebbe pagarsi la posta, perché sia considerato equo? [36]
79. Quante volte al massimo si paga la posta puntando sull'uscita di un dato punteggio nel lancio di tre dadi regolari? Quante al minimo? [216; 8]
80. Con riferimento al precedente quesito su quali punteggi si deve puntare nei due casi? [3 o 18; 11]
81. Nel gioco del lotto puntando € 1,00 su un numero se ne ricevono € 11,23 in caso di vincita. Quanti se ne dovrebbero ricevere nel caso di gioco equo? [€ 18,00]

Livello 2

82. Se il lotto fosse equo quante volte dovrebbe pagarsi la posta per il terno secco? [11748]
83. In un gioco equo in cui in cui si lanciano due dadi la posta viene pagata sei volte, su che punteggio si scommette? E se si paga 8 volte? [7; Impossibile]
84. In un gioco equo in cui in cui si lanciano tre monete regolari quanto viene pagata la posta per l'uscita di 1 testa e 2 croci, indipendentemente dall'ordine? $\left[\frac{8}{3}\right]$
85. Con riferimento al quesito precedente, su quale evento si paga 4 volte la posta?
[Più teste che croci o Più croci che teste]
86. In un gioco equo in cui si lanciano cinque monete regolari quanto viene pagata la posta se escono più teste che croci? [2]

87. Con riferimento al quesito precedente, cambia la risposta se si lanciano 6 monete? E 7 monete? [Sì, diventa 32/11; no]

88. Nel gioco del lotto puntando € 1,00 su un numero, ma giocandone tre (che significa che si vince purché ne esca uno almeno dei tre), in caso di vincita se ne ricevono € 3,74 per ciascuno dei numeri usciti. Quanti se ne dovrebbero ricevere nel caso di gioco equo? [€ 6,30]

89. Con riferimento al quesito precedente se si punta su un *estratto determinato*, cioè il numero deve essere estratto in un certo ordine (per esempio puntiamo sul fatto che il 17 sia estratto come terzo numero) si riceve 18,33 volte la posta. Quanto dovrebbe riceversi in caso di gioco equo? [30]

Livello 3

90. Nel gioco della roulette il banco vuole avere un vantaggio del 10%, cioè vuole pagare l'uscita di un numero rosso il 90% di quanto pagherebbe se il gioco fosse equo. Puntando € 5, quanto si dovrebbe ricevere in caso di vincita, nei due casi in cui c'è solo lo 0 o anche 00? [€ 9,25; € 9,50]

91. In relazione al precedente quesito, nella realtà il banco paga 2 volte la posta, quindi che vantaggio percentuale ha? [2,7%; 5,3%]

92. Se il lotto fosse equo, giocando 3 numeri, quante volte dovrebbe essere pagata la posta se puntassi sull'ambo? [137]

93. Con riferimento al quesito precedente, poiché in realtà viene pagata 83,33 volte la posta, che vantaggio percentuale ha il banco? [39,18%]

94. Che percentuale della vincita *equa* viene pagata per una quaterna secca, che paga 120000 volte la posta? [23,48]

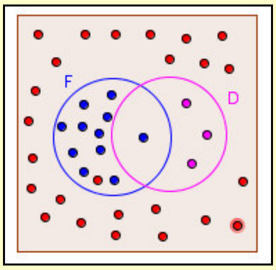
Probabilità dell'unione di eventi elementari

Ogni cosa esistente nell'Universo è il frutto del caso e della necessità. Democrito

Fin qui abbiamo considerato solo l'accadere di un singolo evento; adesso vogliamo trattare invece dell'accadere di eventi formati dall'unione di due o più di essi.

Esempio 16

Da un mazzo di 40 carte da scopa si estragga una carta, qual è la probabilità che essa sia una figura o una carta di denari? Come si vede stiamo considerando non un singolo evento, ma due. Il primo si riferisce all'estrazione di una figura, il secondo a quello di una carta di denari. Cominciamo con il calcolare le probabilità dei singoli eventi. Nel primo caso essa è $\frac{12}{40}=\frac{3}{10}$, nel secondo è $\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$. Cosa dobbiamo fare di questi due numeri? Per risolvere la questione ci viene in aiuto l'insiemistica.



Nella figura precedente abbiamo rappresentato in un diagramma di Eulero – Venn, l'insieme F delle figure e l'insieme D delle carte di denari, all'interno dello spazio ambiente, rappresentato dal rettangolo, dell'insieme C delle carte. Osserviamo che determinare il numero di casi favorevoli equivale a trovare la cardinalità di $F \cup D$. Possiamo dire che $|F \cup D| = |F| + |D|$? No, perché in questo modo conteremmo per due volte l'elemento intersezione, cioè la donna di denari. Quindi la corretta legge da applicare è: $|F \cup D| = |F| + |D| - |F \cap D|$. Pertanto i casi favorevoli sono 10 + 4 – 1 = 13: la probabilità cercata è perciò $\frac{13}{40}$.

Tenuto conto dell'esempio precedente possiamo enunciare il seguente risultato.

Teorema 1

La probabilità dell'evento unione di due eventi A e B è data da: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

È chiaro che nell'ipotesi in cui $A \cap B = \varnothing$ allora la formula precedente diviene più semplicemente

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Vogliamo distinguere le due formule, usando una opportuna terminologia.

Definizione 9

Due eventi A e B appartenenti allo stesso spazio degli eventi E, sono **compatibili** se $A \cap B \neq \varnothing$. Due eventi non compatibili li diciamo **incompatibili**.

Esempio 17

I seguenti sono esempi di eventi compatibili

- *Nel lancio di un dado esce un punteggio multiplo di* 3 *o un numero primo*. Infatti il punteggio 3 rappresenta sia un multiplo di 3 sia un numero primo. Tenuto conto che vi sono due multipli di 3 e tre numeri primi, la probabilità è perciò $\frac{2+3-1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$;
- *Nell'estrazione di una carta da un mazzo di 52 da poker esce un asso o una carta di quadri*. L'asso di quadri è l'elemento comune. La probabilità è perciò $\frac{4+13-1}{52}=\frac{16}{52}=\frac{4}{13}$;

- *Alla roulette esce un numero pari o un numero le cui cifre hanno per somma* 4. In questo caso gli elementi comuni sono 4 e 22 (gli altri due casi favorevoli al secondo evento: 13 e 31, non sono da considerarsi, perché non sono pari). Tenuto conto che i possibili punteggi sono 37, da 0 a 36, la probabilità è $\frac{19+4-2}{37}=\frac{21}{37}$;
- *Al totocalcio esce una colonna che contiene cinque vittorie in casa o sei pareggi*. Può uscire una colonna con cinque 1, sei X e due 2; oppure sei 1, sei X e un 2; o ancora cinque 1 e otto X, e così via. Non calcoliamo la probabilità perché lo studente non ha le necessarie conoscenze matematiche.

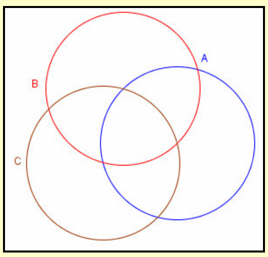
Sono invece esempi di eventi incompatibili i seguenti:

- *Nel lancio di due dadi esce un punteggio multiplo di* 4 *o un numero primo*. Non vi sono multipli di 4 che sono numeri primi. La probabilità è $\frac{2+5+1}{36}+\frac{1+2+4+6+2}{36}=\frac{8}{36}+\frac{15}{36}=\frac{23}{36}$;
- *Nell'estrazione di una carta da un mazzo di* 52 *da poker esce un asso o un due*. Non vi sono carte il cui punteggio valga contemporaneamente uno e due. La probabilità è $\frac{4}{52}+\frac{4}{52}=\frac{8}{52}=\frac{2}{13}$;
- *In una estrazione della tombola il primo estratto è un numero da* 1 *a* 5 *o da* 20 a 25;
- *Al totocalcio esce una colonna che contiene sette vittorie in casa o nove pareggi*. Se escono sette 1, vi sono solo altri sei diversi risultati.

Si possono considerare anche eventi unione di più di due eventi; in generale basta considerare la relativa rappresentazione insiemistica tenendo conto di quante volte compare lo stesso evento.

Esempio 18

Determinare la probabilità che da un'urna contenente 2000 biglie numerate da 1 a 2000, se ne estragga una il cui numero verifichi una almeno delle seguenti tre proprietà: sia un numero divisibile per 4; sia un numero divisibile per 3 minore di 953; sia un numero divisibile per 6 compreso fra 540 e 1082.
In generale la rappresentazione grafica delle 2000 biglie è quella mostrata di seguito. In essa A rappresenta l'insieme dei numeri divisibili per 4, B l'insieme dei numeri divisibili per 3 e minori di 953 e C l'insieme dei numeri divisibili per 6 compresi fra 540 e 1082. Dobbiamo determinare $P(A\cup B\cup C)$. Noi diciamo che la formula da applicare è la seguente: $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$. Ciò perché gli elementi di $A \cap B$, di $B \cap C$ e $A \cap C$ vengono contati due volte e devono perciò essere sottratti dal totale; in questo modo però vengono a mancare gli elementi di $A \cap B \cap C$, che devono quindi essere aggiunti.



Andiamo adesso a calcolare le cardinalità dei predetti insiemi. I numeri divisibili per 4 da 1 a 2000 vanno da $4 \cdot 1$ a $4 \cdot 500$, sono perciò 500. I numeri divisibili per 3 minori di 953 vanno da $3 \cdot 1$ a $3 \cdot 317 = 951$, perciò sono 317. Allo stesso modo C è formato dai numeri da $6 \cdot 90 = 540$ a $6 \cdot 180 = 1080$, quindi ha 91 elementi. In $A \cap B$ sono contenuti i numeri divisibili sia per 4 che per 3, quindi per 12, minori di 953. Essi sono i numeri da $12 \cdot 1$ a $12 \cdot 79 = 948$, perciò $|A \cap B| = 79$. In $A \cap C$ vi sono i numeri divisibili per 12 compresi tra 540 e 1082, cioè i numeri da $12 \cdot 45 = 540$ a $12 \cdot 90 = 1080$, quindi $|A \cap C| = 90 - 45 + 1 = 46$. In $B \cap C$ vi sono i numeri divisibili per 6 compresi tra 540 e 952 e vanno da $6 \cdot 90 = 540$ a $6 \cdot 158 = 948$. Ne abbiamo 69. Infine in $A \cap B \cap C$ vi sono i numeri divisibili sia per 3 che per 4, cioè per 12, compresi fra 540 e 780, cioè i numeri da $12 \cdot 45 = 540$ a $12 \cdot 65 = 780$, sono un totale di $65 - 45 + 1 = 21$. La probabilità cercata è perciò: $P(A \cup B \cup C) = \frac{500+317+91-79-46-69+21}{2000}=\frac{735}{2000}=0{,}3675$.

In effetti vale il seguente risultato, simile a quello dello stesso nome enunciato nell'unità sul calcolo combinatorio:

Teorema 2 (di inclusione-esclusione)

La probabilità dell'evento unione di n eventi si ottiene sommando le probabilità dei singoli eventi, sottraendo le probabilità di tutti gli eventi intersezione a due a due, aggiungendo le probabilità degli eventi intersezione a tre a tre, sottraendo le probabilità di tutti gli eventi intersezione a quattro a quattro, e così via, alternando somme e sottrazioni, fino all'evento intersezione di tutti gli n eventi.

Evidenziamo particolari eventi incompatibili.

Definizione 10

Diciamo evento **complementare** di un dato evento A, definito in uno spazio di eventi E, l'evento B, anch'esso definito in E, tale che $A \cup B = E$ e $A \cap B = \emptyset$.

Notazione 1

Dato un evento A indichiamo il suo **evento complementare** con A^c.

Dal teorema 1, segue immediatamente il seguente risultato.

Corollario 1

Vale la seguente formula: $P(A^c) = 1 - P(A)$

Dimostrazione.

Dato che $E = A \cup A^c$ e che $A \cap A^c = \emptyset$, il teorema 1 diviene: $P(E) = P(A) + P(A^c) \Rightarrow 1 = P(A) + P(A^c)$. Ricavando rispetto a $P(A^c)$, otteniamo la tesi.

Consideriamo qualche esempio.

Esempio 19

Una casalinga trova nel frigorifero sei uova, è certa che due di essi siano guasti, perché li ha comprati il mese scorso, ma non ricorda quali, dato che anche le uova più fresche le ha riposte accanto alle altre. Che probabilità ha di prendere due uova entrambe buone? In questo caso è più semplice calcolare la probabilità dell'evento complementare, cioè che ella estragga almeno un uovo marcio. Supponiamo che le uova siano numerate da 1 a 6. Per calcolare i casi possibili dobbiamo calcolare in quanti modi possiamo scegliere due oggetti diversi fra 6 tenendo conto che la scelta dipende anche dall'ordine. Quindi dobbiamo calcolare le disposizioni di 6 oggetti di classe 2, che sono $6 \cdot 5 = 30$. Adesso supponiamo che le uova marce siano quelle il cui numero è 1 e 2 (per il nostro studio non è importante la scelta dei numeri delle uova marce). In quanti modi possiamo prendere le uova in modo che uno dei due almeno sia marcio? Stavolta dobbiamo supporre di avere già scelto un uovo marcio, che si fa in 2 modi, e poi dobbiamo scegliere il secondo fra i 5 oggetti rimanenti, che si fa in 5 modi. Poiché l'ordine conta abbiamo un totale di 20 casi. Però alcuni li abbiamo contati due volte, cioè (1, 2) e (2, 1). Quindi alla fine i casi favorevoli sono diciotto. Perciò la probabilità che almeno un uovo sia marcio è $\frac{10+10-2}{30}=\frac{3}{5}$. A questo punto la probabilità che nessuna delle uova scelte sia marcia è la complementare, cioè $\frac{2}{5}$.

L'esempio precedente si inquadra in un problema più generale.

Definizione 11

Dato un insieme contenente alcuni oggetti che verificano una data proprietà P e i rimanenti oggetti che non la verificano, estraiamo a caso k oggetti dall'insieme, diciamo che abbiamo ottenuto ***h* successi** (con $h \leq k$) se esattamente h degli estratti verificano la proprietà P.

Esempio 20

Nell'esempio precedente la proprietà era *essere un uovo buono* e noi abbiamo determinato la probabilità di ottenere 2 successi su due estrazioni.

Vale il seguente risultato.

Teorema 3

Dato un insieme con n elementi, $m \le n$ dei quali verificano la proprietà P, allora la probabilità che scelti a caso $h \le m$ degli n elementi esattamente $k \le h$ di questi verifichino la proprietà P è $\dfrac{\binom{m}{k} \cdot \binom{n-m}{h-k}}{\binom{n}{h}}$

Dimostrazione

Consideriamo prima un caso particolare. Supponiamo di avere 20 palline numerate in un'urna, 8 delle quali bianche e le rimanenti 12 di altri colori. Estraiamo 5 palline e vogliamo determinare la probabilità che esattamente 3 di queste siano bianche. La formula che dobbiamo dimostrare è perciò $\dfrac{\binom{8}{3} \cdot \binom{12}{2}}{\binom{20}{5}}$.

Infatti il numero dei casi possibili è ovviamente $\binom{20}{5}$, dato che dobbiamo contare tutti i modi in cui possiamo scegliere 5 oggetti da 20, senza che risulti influente l'ordine di scelta. Per quanto riguarda i casi favorevoli, fra le cinquine scelte a noi interessano quelle del tipo BBBNN (dove B indica Bianco e N non bianco). Ovviamente le 3 palline bianche si scelgono dalle 8 totali in $\binom{8}{3}$ modi e per ognuna di queste scelte vi sono $\binom{12}{2}$ modi di scegliere le 2 palline non bianche dalle 12 totali. La dimostrazione generale si ottiene facilmente da questo caso.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Determiniamo la probabilità che lanciando 2 dadi non truccati a forma di cubo, si ottenga un punteggio multiplo di 3 o di 6. Poiché i multipli di 6 sono anche multipli di 3 il secondo evento è contenuto nel primo, quindi $P(A \cup B) = P(A)$, dove A è punteggio uguale a 3, 6, 9, 12. Questi 4 eventi sono tutti incompatibili, quindi basta sommare le rispettive probabilità.

Si ha: $P(3) = \frac{2}{36}$ (gli eventi sono 1 + 2 e 2 + 1), $P(6) = \frac{5}{36}$ (1 + 5, 2 + 4, …, 5 + 1), $P(9) = \frac{4}{36}$ (3 + 6, 4+ 5, 5 + 4, 6 + 3), $P(12) = \frac{1}{36}$ (6 + 6). Quindi la probabilità è $\frac{2+5+4+1}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

Livello 1

1. Siano due eventi A e B, appartenenti allo stesso spazio degli eventi, con $P(A) = \frac{2}{7}$ e $P(B) = \frac{17}{21}$, è richiesto il calcolo di $P(A \cup B)$. Perché senza conoscere nei dettagli gli eventi A e B, possiamo dire che gli eventi sono compatibili? Giustificare la risposta.
2. Se due eventi hanno probabilità $\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{5}$, possiamo dire che sono incompatibili? E che sono compatibili? Giustificare la risposta. [No; No]
3. Se due eventi hanno probabilità $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{5}$, possiamo dire che sono sicuramente complementari? Giustificare la risposta. [No]
4. La condizione $P(A) = 1 – P(B)$ è necessaria o sufficiente affinché A e B siano complementari? [Necessaria]
5. Lanciando due dadi non truccati qual è la probabilità di ottenere un numero pari o uno multiplo di 3? $\left[\frac{2}{3}\right]$
6. Lanciando due dadi non truccati qual è la probabilità di ottenere un punteggio le cui cifre sono una doppia dell'altra o un numero divisibile per 6? $\left[\frac{1}{6}\right]$
7. Dall'insieme dei primi 10 numeri primi scegliamo a caso un elemento. Qual è la probabilità che una delle sue cifre sia 3 o 5? Che una delle sue cifre sia il 3 o la sua cifra delle decine sia 1? $\left[\frac{2}{5};\frac{3}{5}\right]$
8. Determinare la probabilità che estraendo 1 carta da un mazzo di 52 carte da poker, essa sia una figura o una carta di quadri. $\left[\frac{11}{26}\right]$
9. Determinare la probabilità che estraendo 1 carta da un mazzo di 52 carte da poker, essa sia una carta di quadri o una carta il cui punteggio è superiore a 7. $\left[\frac{31}{52}\right]$
10. Determinare la probabilità che scegliendo a caso un numero fra i primi 50 numeri naturali esso sia pari o multiplo di 5. $\left[\frac{3}{5}\right]$
11. Determinare la probabilità che scegliendo a caso un numero fra i primi 100 numeri naturali esso sia pari o primo. $\left[\frac{1}{2}\right]$

12. Scegliamo a caso due distinti numeri dall'insieme dei primi dieci numeri primi, con quale probabilità la loro somma è 24? $\left[\frac{1}{15}\right]$

13. Da un mazzo di carte italiane da 40 estraiamo una carta, quali fra i seguenti eventi sono compatibili con l'evento la carta estratta è una figura di spade? A) *la carta estratta è una figura* B) *la carta estratta è una carta di denari* C) *la carta estratta ha un valore numerico compreso tra* 3 *e* 7 D) *la carta estratta ha un valore numerico superiore a* 5 E) *la carta estratta è una donna*. [A, D, E]

14. Lanciamo un dado a forma di icosaedro, solido regolare con 20 facce, quali fra i seguenti eventi sono compatibili con l'evento esce un punteggio divisibile per 4? *esce un punteggio* A) *dispari* B) *primo* C) *multiplo di* 3 D) *multiplo di* 5. E) *le cui cifre non hanno per somma* 3. [C, D, E]

15. In un campeggio vi sono 200 persone, 120 sono italiane, le altre straniere. 50 degli italiani e 60 degli stranieri sono donne. Scelto un ospite a caso fra ai presenti, con quale probabilità è una donna o non è di nazionalità italiana? Con quale probabilità è di nazionalità italiana o un maschio? $\left[\frac{13}{20};\frac{7}{10}\right]$

16. Abbiamo colorato alcune bandierine completamente verdi, altre completamente rosse e altre rosse e verdi. Se la probabilità di estrarre una bandiera completamente rossa è 0,48 e quella di estrarre una bandiera rossoverde è 0,24, con quale probabilità estraiamo una bandiera completamente verde? [0,28]

Lavoriamo insieme

In un'urna sono poste 3000 palline, numerate da 1 a 3000. Si eliminano tutte quelle che contengono i numeri da 1 a 137 e i numeri da 2735 a 3000. Estratta una pallina, con che probabilità essa ha un numero che è multiplo di 2 o di 3 o di 5? Ci viene richiesto di calcolare la probabilità dell'unione di 3 eventi a due a due compatibili. Indichiamo i tre eventi con *A*, *B* e C. dobbiamo determinare

$$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Nell'urna sono rimaste le palline con numeri da 138 a 2734, che sono 2734 – 138 + 1 = 2597. Quante di queste sono pari? La metà più uno, poiché iniziamo e finiamo con un numero pari, cioè $P(A) = \frac{1299}{2597}$.

Quanti sono i multipli di 3? Il più piccolo è $138 = 3 \cdot 46$, il più grande è $2733 = 3 \cdot 911$. Quindi:

$$P(B) = \frac{911-46+1}{2597} = \frac{866}{2597}.$$

I multipli di 5 vanno da $140 = 5 \cdot 28$ a $2730 = 5 \cdot 546$, sono quindi 546 – 28 + 1 = 519. $P(C) = \frac{519}{2597}$.

Un numero multiplo di 2 e di 3 sarà multiplo di 6, pertanto consideriamo i numeri da $138 = 6 \cdot 23$ fino a $2730 = 6 \cdot 455$.

Allo stesso modo i multipli di 2 e 5 sono multipli di 10, vanno perciò da $140 = 10 \cdot 14$ a $2730 = 10 \cdot 273$.

Infine i multipli di 3 e 5 sono multipli di 15.

Consideriamo i numeri da $150 = 15 \cdot 10$ a $2730 = 15 \cdot 182$. Abbiamo perciò

$$P(A \cap B) = \frac{455-23+1}{2597} = \frac{433}{2597}; P(A \cap C) = \frac{273-14+1}{2597} = \frac{260}{2597}; P(B \cap C) = \frac{182-10+1}{2597} = \frac{173}{2597}$$

Concludiamo con i multipli di 2, 3 e 5, cioè con i multipli di $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, che vanno da $150 = 30 \cdot 5$ a $2730 = 30 \cdot 91$, e sono 91 – 5 + 1 = 87. La probabilità cercata è allora pari a

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{1299+866+519-433-260-173+87}{2597} = \frac{1905}{2597} \approx 73\%.$$

Livello 2

17. Il 25% di ragazzi di una classe conosce il russo e il 40% il tedesco. Sapendo che la probabilità di scegliere uno studente a caso che parli russo o tedesco è 50%, quale percentuale di ragazzi parla entrambe le lingue? [15%]

18. Determinare la probabilità che, da un'urna contenente 2000 biglie numerate da 1 a 2000, se ne estragga una il cui numero verifichi una almeno delle seguenti tre proprietà: a) sia un numero divisibile per 5; b) sia un numero divisibile per 8 maggiore di 956; c) sia un numero divisibile per 7 compreso fra 547 e 1256. $\left[\frac{51}{2000}\right]$

19. Determinare la probabilità che, da un'urna contenente 1750 biglie numerate da 1 a 1750, se ne estragga una il cui numero verifichi una almeno delle seguenti tre proprietà: a) sia un numero divisibile per 4; b) sia un numero divisibile per 6 minore di 1324; c) sia un numero divisibile per 9 compreso fra 123 e 1507. $\left[\frac{629}{1750}\right]$

20. Determinare la probabilità che da un'urna contenente 2000 biglie numerate da 1 a 2000, se ne estragga una il cui numero verifichi una sola delle seguenti tre proprietà: a) sia un numero divisibile per 3; b) sia un numero divisibile per 6 maggiore di 831; c) sia un numero divisibile per 9 compreso fra 248 e 1487. $\left[\frac{3}{20}\right]$

21. Determinare la probabilità che scegliendo un numero di 3 cifre esso risulti divisibile per 3 o con la cifra delle unità uguale a 2 o con la cifra delle decine uguale a 7. $\left[\frac{207}{50}\right]$

22. I ragazzi di un triennio di una stessa sezione sono 75. Si sa che 48 di essi giocano a basket, 45 a calcio, 58 a tennis, 28 a basket e calcio, 37 a calcio e tennis, 40 a basket e tennis e 25 a tutti e tre gli sport. Qual è la probabilità che scegliendo a caso uno degli studenti, esso pratichi uno solo o nessuno dei tre sport? $\left[\frac{4}{15}\right]$

23. Lanciamo 3 dadi e i punteggi ottenuti li scriviamo uno accanto all'altro a formare un numero di 3 cifre. Qual è la probabilità che tale numero sia un multiplo di 3 o di 5? $\left[\frac{89}{216}\right]$

24. In un'urna sono poste 3000 palline, numerate da 1 a 3000. Si eliminano tutte quelle che contengono i numeri da 1 a 242 e i numeri da 2912 a 3000. Si estrae quindi una pallina, determinare la probabilità che essa abbia un numero che sia multiplo di uno almeno fra i numeri 4, 6 o 10. $\left[\frac{979}{2669}\right]$

25. In un'urna sono poste 3000 palline, numerate da 1 a 3000. Si eliminano tutte quelle che contengono i numeri da 123 a 314 e i numeri da 1241 a 2310. Si estrae quindi una pallina, determinare la probabilità che essa abbia un numero che sia multiplo di 8 o multiplo di 12 o multiplo di 18. $\left[\frac{169}{869}\right]$

26. Determinare la probabilità che da un'urna contenente 2000 biglie numerate se ne estragga una il cui numero verifichi esattamente due delle seguenti tre proprietà: sia un numero divisibile per 6; sia un numero divisibile per 7 minore di 856; sia un numero divisibile per 9 compreso fra 125 e 458. $\left[\frac{9}{500}\right]$

27. Siano date le funzioni $f : x \to -x$ e $g: x \to -2x + 1$, entrambe definite su $M = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$ ed a valori in $P = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Determinare la probabilità che a) scelto un elemento a caso in M esso appartenga al dominio di f o a quello di g; b) scelto un elemento a caso in P esso appartenga al codominio di f o a quello di g. $\left[1; \frac{2}{3}\right]$

Livello 3

28. Stabilire la formula per calcolare $P(A \cup B \cup C \cup D)$.

$[P(A) + P(B) + P(C) + P(D) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(A\cap D) - P(B\cap C) - P(B\cap D) - P(C\cap D) + P(A\cap B\cap C) + P(A\cap B\cap D) + P(A\cap C\cap D) + P(B\cap C\cap D) - P(A\cap B\cap C\cap D)]$

29. Determinare la probabilità che, scegliendo un numero di 3 cifre, esso risulti divisibile per 5 o con la cifra delle decine uguale a 1 o con la cifra delle centinaia uguale a 2 o con la somma delle cifre uguale a 8. $\left[\frac{113}{300}\right]$

30. Determinare la probabilità che estraendo il primo numero sulla ruota di Milano questo verifichi una almeno delle seguenti proprietà: a) sia multiplo di 3; b) abbia almeno una cifra uguale a 4; c) il prodotto delle sue cifre sia maggiore di 10; d) il suo quadrato sia minore di 50. $\left[\frac{7}{18}\right]$

31. Consideriamo gli insiemi $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 4, 5, 6\}$, C = {2, 5} $D = \{0, 1, 3, 4\}$ ed $E = \{0, 2, 3\}$. Determinare la probabilità che scegliendo due insiemi a caso la loro unione abbia sei elementi o la loro intersezione sia vuota. $\left[\frac{2}{5}\right]$

32. Consideriamo gli insiemi $A = \{3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 5, 6, 7\}$, C = {0, 1} $D = \{1, 4, 6\}$. Determinare la probabilità che scegliendo due insiemi a caso la loro unione abbia sei elementi o la loro differenza simmetrica abbia tanti elementi quanto la loro unione o che la loro intersezione non sia vuota. $\left[\frac{2}{3}\right]$

33. Il cavaliere De Mere e il duca di Brianchon giocano a dadi, al cavaliere mancano due vittorie per aggiudicarsi l'intera posta, al duca bisognano tre vittorie. Qual è la probabilità che vinca il cavaliere? $\left[\frac{3}{5}\right]$

Lavoriamo insieme

- Determiniamo la probabilità che, lanciando 7 monete non truccate, si ottengano esattamente 2 teste. Il numero dei casi possibili è $2^7 = 128$, tante quante le disposizioni con ripetizione dei due simboli T e C fino a un massimo di 7 volte. I casi favorevoli sono invece tutte le permutazioni della parola TTCCCCC, cioè sono $\frac{7!}{2!\cdot 5!} = \frac{7\cdot \cancel{6}^{3}\cdot \cancel{5!}}{\cancel{2}\cdot \cancel{5!}} = 21$, quindi la probabilità cercata è $\frac{21}{128}$.
- Invece qual è la probabilità che si ottengano almeno 2 teste (cioè due teste o più di due)? Per semplicità indichiamo con P_h la probabilità che escano esattamente h ($h = 0, 1, \ldots, 7$) teste. La probabilità cercata è una probabilità unione di eventi incompatibili ed è uguale a $P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7$. Vi è un modo più semplice. Consiste nell'osservare che la detta probabilità può calcolarsi come l'evento complementare dell'evento *esce al più* 1 *testa*. Così la probabilità sarebbe semplicemente $1 - P_0 - P_1$. Per i casi favorevoli, nel caso di P_0, ossia nessuna testa, vi è un solo caso favorevole (CCCCCCC). Per P_1 invece ve ne sono 7 (il caso TCCCCCC e gli altri 6 che si ottengono da esso facendo ruotare il simbolo T nelle 7 diverse posizioni). Infine la probabilità cercata è $1 - \frac{1}{2^7} - \frac{7}{2^7} = \frac{128-1-7}{128} = \frac{120}{128} = \frac{15}{16}$.

Livello 3

34. Determinare la probabilità che lanciando 8 monete ci siano a) esattamente 3 teste; b) almeno 3 teste; c) al più 3 teste. $\left[\frac{7}{32}; \frac{219}{256}; \frac{93}{256}\right]$

35. Lanciamo 6 monete, se la probabilità di ottenere esattamente k teste è $\frac{15}{64}$, quanto è k? [4]

36. Lanciamo n monete, se la probabilità di ottenere esattamente 6 teste è $\frac{99}{512}$, quanto è n? [12]

37. Lanciamo 7 monete, se la probabilità di ottenere almeno k teste è $\frac{1}{2}$, quanto è k? [4]

Per questi esercizi è opportuno l'uso di una calcolatrice o di un software tipo CAS

38. In un'urna vi sono 25 palline rosse e 15 di altri colori, estraiamo 8 palline a caso, con che probabilità sono a) tutte rosse; b) tutte non rosse; c) esattamente 5 di esse rosse. $\left[\frac{115}{8177};\frac{1}{11951};\frac{11270}{35853}\right]$

39. In un'urna vi sono 20 palline rosse e 10 di altri colori, estraiamo 5 palline a caso, con che probabilità sono a) la maggior parte rosse; b) la maggior parte non rosse. $\left[\frac{6403}{7917};\frac{1514}{7917}\right]$

40. In un'urna vi sono 100 palline numerate da 1 a 100. Estraiamo 5 palline a caso, con che probabilità sono a) tutte pari; b) almeno 2 pari; c) esattamente 2 pari. $\left[\frac{1081}{384124};\frac{7864}{9603};\frac{6125}{19206}\right]$

41. In un'urna vi sono 2 palline rosse e 3 bianche, estraiamo 2 palline a caso, la probabilità di ottenerne solo una bianca è la stessa di ottenere solo la prima bianca? Se la risposta è negativa calcolare le due probabilità. $\left[No;\frac{3}{5};\frac{3}{10}\right]$

42. Determinare la probabilità che lanciando 5 monete regolare si ottengano a) esattamente 3 teste; b) 3 teste nei primi 3 lanci e 2 croci negli altri due. $\left[\frac{5}{16};\frac{1}{32}\right]$

Estrazioni con e senza rigenerazione

Ottenere in un gioco onesto di dadi tre punteggi uguali, è un avvenimento naturale e così deve essere considerato; e anche se si ripete una seconda volta. Ma se accade una terza e quarta volta l'uomo prudente deve cominciare a sospettare. *Girolamo Cardano, De Vita Propria Liber*

Abbiamo parlato spesso di estrazioni di carte, di palline e così via e abbiamo spesso considerato il fatto che gli oggetti estratti non venissero reinseriti di nuovo nell'urna, come per esempio si fa nel gioco del lotto. Vi sono però dei casi, come per esempio nel gioco della roulette, in cui invece ogni volta che si gioca si ripete sempre la stessa situazione, è come se estraessimo una pallina da un'urna che ne contiene 35 (da 0 a 34) e, dopo averne registrato il numero, la rimettessimo nell'urna per la successiva estrazione. Ovviamente ciò incide sul calcolo della probabilità di un evento che riguarda più estrazioni.

Esempio 21

Da un'urna contenente 20 palline bianche e 30 nere si estraggano due palline, qual è la probabilità che siano entrambe bianche? La domanda posta non permette una sola soluzione, ciò appunto perché non abbiamo precisato se la prima pallina estratta debba essere solo annotata e poi rimessa nell'urna, concorrendo così anche alla seconda estrazione o debba essere invece eliminata dall'urna. In ogni caso la probabilità che la prima pallina estratta sia bianca è $\frac{2}{5}$, mentre per la seconda estrazione

- se rimettiamo la pallina estratta per prima nell'urna anche la seconda pallina avrà probabilità $\frac{2}{5}$ di essere bianca;
- se invece eliminiamo la pallina dall'urna, vi sono 49 palline da considerare, 19 delle quali sono bianche, quindi la probabilità è divenuta $\frac{19}{49}$.

Poniamo alcune definizioni.

Definizione 12

Data l'estrazione di più di un oggetto da un'urna che contiene almeno due oggetti, diciamo che l'estrazione avviene **con rigenerazione** se ogni oggetto che si estrae viene registrato e poi rimesso nell'urna. Se invece gli oggetti estratti sono eliminati, diciamo che l'estrazione avviene **senza rigenerazione**.

Passiamo adesso alla risoluzione del problema.

Esempio 22

- Dato che estraiamo due palline, stiamo considerando delle coppie (p_1, p_2), quindi dobbiamo contare quante sono le coppie diverse che possiamo estrarre dall'urna. Nel caso della rigenerazione abbiamo a che fare con disposizioni con ripetizione, quindi avremo un totale di 50^2 casi possibili e di 20^2 casi favorevoli. Nel caso della mancata rigenerazione invece abbiamo a che fare con disposizioni semplici, quindi avremo un totale di $50 \cdot 49$ casi possibili e di $20 \cdot 19$ casi favorevoli. Quindi le probabilità cercate, nei diversi casi con e senza rigenerazione, sono $\frac{20 \cdot 20}{50 \cdot 50} = \frac{4}{25}$ e $\frac{20 \cdot 19}{50 \cdot 49} = \frac{38}{245}$. Notiamo che la prima probabilità (6%) è leggermente superiore alla seconda (≈ 15.5 %). Possiamo anche usare il calcolo combinatorio, scrivendo $\frac{D'_{20,2}}{D'_{50,2}}$ e $\frac{D_{20,2}}{D_{50,2}}$ rispettivamente.

- Se invece avessimo estratto 5 palline e ne avessimo volute solo 3 bianche i casi favorevoli sarebbero stati $D'_{20,3} \cdot D'_{30,2}$, quindi la probabilità sarebbe stata $\frac{D'_{20,3} \cdot D'_{30,2}}{D'_{50,5}}$, nel caso con rigenerazione. Ovviamente nell'altro caso sarebbe $\frac{D_{20,3} \cdot D_{30,2}}{D_{50,5}}$.

In vista del precedente esempio possiamo dire che vale quindi il seguente risultato generale.

Teorema 4

Data un'urna che contiene n oggetti di un tipo e m diversi (con $k \leq n + m$), la probabilità che estraendo k oggetti ve ne siano esattamente $h \leq k$ del primo tipo è $\frac{D'_{n,h} \cdot D'_{m,k-h}}{D'_{n+m,k}}$ o $\frac{D_{n,h} \cdot D_{m,k-h}}{D_{n+m,k}}$ a seconda che vi sia o no rigenerazione.

Vediamo un caso un po' più complesso.

Esempio 23

Supponiamo di voler considerare, sempre con i dati dell'esempio precedente, la probabilità di estrarre due palline di diverso colore. Stavolta dobbiamo considerare, rimanendo inalterato il numero dei casi possibili, le coppie di elementi del tipo (b, n) oppure (n, b). Abbiamo quindi una probabilità unione di eventi incompatibili, pertanto dobbiamo sommare le singole probabilità. Quindi, nell'ipotesi di rigenerazione esse sono:

$\frac{20 \cdot 30}{50^2} + \frac{30 \cdot 20}{50^2} = 2 \cdot \frac{6}{25} = \frac{12}{25}$; invece, nel caso senza rigenerazione, sono: $\frac{20 \cdot 30}{50 \cdot 49} + \frac{30 \cdot 20}{50 \cdot 49} = 2 \cdot \frac{12}{49} = \frac{24}{49}$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Estraiamo 5 palline da un'urna che ne contiene 7 bianche e 3 nere. Qual è la probabilità che esattamente 3 delle palline estratte siano bianche?

Nell'ipotesi di estrazione con rigenerazione avremo: $\frac{D'_{7,3} \cdot D'_{3,2}}{D'_{10,5}} = \frac{7^3 \cdot 3^2}{10^5} = \frac{3087}{100000}$.

Senza rigenerazione invece è: $\frac{D_{7,3} \cdot D_{3,2}}{D_{10,5}} = \frac{\cancel{7 \cdot 6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{\cancel{10} \cdot \cancel{9}^3 \cdot 8 \cdot \cancel{7 \cdot 6}} = \frac{1}{24}$

I precedenti valori devono essere moltiplicati per 10. Così le probabilità richieste valgono: $\frac{3087}{10000} \approx 31\%$ e $\frac{5}{12} \approx 42\%$.

Negli esercizi seguenti se non è specificato altrimenti, devono considerarsi le diverse ipotesi con e senza rigenerazione. Sia un'urna con n palline, di cui m bianche e (n – m) nere, si estraggano k palline; determinare la probabilità

***Livello* 1**

1. (n = 23, m = 15, k = 2, tutte nere) ; (n = 40, m = 25, k = 3, tutte bianche) $\left[\left(\frac{64}{529}, \frac{28}{253}\right); \left(\frac{125}{512}, \frac{115}{494}\right)\right]$
2. (n = 27, m = 13, k = 4, tutte nere) ; (n = 15, m = 3, k = 5, tutte bianche) $\left[\left(\frac{38416}{531441}, \frac{77}{1350}\right); \left(\frac{1}{5^5}, 0\right)\right]$
3. (n = 32, m = 6, k = 4, solo una bianca) ; (n = 18, m = 13, k = 5, solo 3 bianche) $\left[\left(\frac{6591}{16384}, \frac{390}{899}\right); \left(\frac{274625}{944784}, \frac{715}{2142}\right)\right]$
4. Abbiamo 11 palline numerate da 1 a 11 all'interno di un'urna. Ne estraiamo 6 a caso senza reimmissione, con che probabilità la somma dei numeri ottenuti è dispari? $\left[\frac{118}{231}\right]$

Lavoriamo insieme

In un'urna vi sono 10 palline bianche e 15 rosse. Estraiamo quattro palline, con quale probabilità ve ne sono solo 2 bianche? Se le bianche sono le prime due la probabilità è $\frac{10^2 \cdot 15^2}{25^4} = \frac{36}{625}$ o $\frac{10 \cdot 9 \cdot 15 \cdot 14}{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22} = \frac{63}{1012}$ a seconda che vi sia o no rigenerazione. Però non è detto che le estratte bianche siano le prime due, quindi dobbiamo calcolare in quanti modi possono essere estratte le due bianche, il che, in ogni caso avviene in $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ modi, quindi le probabilità corrette sono: $\frac{36}{625} \cdot 6 = \frac{216}{625}$ o $\frac{63}{1012} \cdot 6 = \frac{189}{506}$.

Negli esercizi seguenti se non è specificato altrimenti, devono considerarsi le diverse ipotesi con e senza rigenerazione

***Livello* 2**

5. Da un'urna con 5 palline bianche, 10 nere, 8 verdi e 6 gialle estraiamo con rigenerazione due palline. Con quale probabilità sono a) dello stesso colore; b) di diverso colore? $\left[\frac{225}{841}; \frac{616}{841}\right]$
6. Da un'urna con 50 palline, 10 bianche, 20 rosse e 20 nere, si estraggono 3 palline. Determinare la probabilità che esse siano tutte dello stesso colore. $\left[\frac{17}{125}; \frac{6}{49}\right]$

7. Da un'urna con 35 palline, 15 rosse, 7 verdi e 13 nere, si estraggono 3 palline. Determinare la probabilità che siano tutte di diverso colore. $\left[\frac{234}{1225};\frac{39}{560}\right]$

8. Da un'urna con 26 palline, 12 bianche e 14 nere, si estraggono 3 palline. Determinare la probabilità che fra di esse ve ne sia almeno una bianca. $\left[\frac{1854}{2197};\frac{43}{50}\right]$

9. In un'urna vi sono 12 biglie indistinguibili al tatto, metà bianche e metà nere. Se ne estraggono 3 senza rigenerazione. Determinare la probabilità che a) siano tutte bianche; b) siano tutte dello stesso colore; c) almeno 2 siano bianche; d) almeno 2 siano dello stesso colore. $\left[\frac{1}{11};\frac{2}{11};\frac{1}{2};1\right]$

10. In un'urna vi sono delle biglie indistinguibili al tatto, 3 sono bianche, 7 verdi e 4 rosse. Se ne estraggono 4 senza rigenerazione. Determinare la probabilità che a) siano tutte verdi; b) siano tutte dello stesso colore; c) esattamente 2 siano dello stesso colore $\left[\frac{5}{13};\frac{36}{91};\frac{876}{91}\right]$

11. In un sacchetto sono messe 4 palline numerate, una riporta il numero 1, una il numero 6 e due il numero 9. Qual è la probabilità che, prendendo tre palline senza rigenerazione, il numero formato con i tre numeri estratti nell'ordine sia divisibile per 3? $\left[\frac{3}{4}\right]$

12. In un'urna abbiamo 3 palline numerate da 1 a 3. Estraiamo le palline in successione, con che probabilità le palline vengono estratte nell'ordine 123? E nell'ordine 321? E in un ordine predefinito? $\left[\frac{1}{6};\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right]$

13. Con riferimento al precedente quesito. Diciamo che si è verificato un accoppiamento se una delle palline viene estratta in un'estrazione che coincide con il numero che essa riporta, cioè la pallina numero 1 per prima o la numero 2 per seconda o la 3 per terza. Con che probabilità si verifica un solo accoppiamento? E solo 2 accoppiamenti? Almeno un accoppiamento? Almeno due? $\left[\frac{1}{2};0;\frac{2}{3};\frac{1}{6}\right]$

14. 20 pizze tutte con condimenti diversi devono essere consegnate a 20 diversi indirizzi, purtroppo a causa di un colpo di vento il fattorino perde il foglio con i corretti destinatari. Qual è la probabilità che esattamente 19 persone ricevano la pizza che hanno ordinato? [0]

15. Alessio ha comprato 1000 batterie per rivenderle. Nel deposito in cui le ha custodite vi è una infiltrazione di umidità, così 100 batterie vengono danneggiate. Alessio non si accorge di ciò pertanto mette in vendita ugualmente anche le batterie danneggiate, che risultano indistinguibili da quelle buone. Gianni va a comprare 4 batterie da Alessio per il suo giocattolo. Sapendo che questo giocattolo funziona solo se tutte le batterie sono perfettamente funzionanti, determinare la probabilità che il giocattolo di Gianni funzioni. [≈ 65%]

Lavoriamo insieme

Da un'urna con 10 palline bianche e 15 nere, estraiamo in successione tre palline, con quale probabilità almeno una delle tre palline è bianca? Dire almeno una bianca, significa che può accadere uno qualsiasi dei seguenti fatti: tutte bianche (una sola possibilità), due bianche e una rossa (tre possibilità a seconda che la pallina rossa venga estratta per prima, seconda o terza), una sola bianca e le altre rosse (Ancora tre possibilità). Tutti e sette i casi sono fra loro a due a due incompatibili, quindi dobbiamo sommare le sette probabilità.

Tutte le tre palline bianche si ottengono con probabilità $\frac{10}{25}\cdot\frac{9}{24}\cdot\frac{8}{23}=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{8}{23}=\frac{6}{115}$, siamo infatti nell'ipotesi di non restituzione. I tre casi in cui si estraggono due palline bianche sono fra loro equiprobabili, basta quindi calcolare una probabilità e moltiplicare poi per 3. Perciò abbiamo: $3\cdot\frac{10}{25}\cdot\frac{9}{24}\cdot\frac{15}{23}=\frac{27}{92}$. Infine la probabilità di ottenere una sola pallina bianca è $3 \cdot \frac{10}{25} \cdot \frac{15}{24} \cdot \frac{14}{23} = \frac{21}{46}$. Possiamo concludere che la probabilità di estrarre tre palline in modo che una almeno sia bianca è pari a $\frac{6}{115} + \frac{27}{92} + \frac{21}{46} = \frac{369}{460} \approx 80\%$.

Livello 3

16. Da un'urna con 20 palline bianche e 15 nere estraiamo tre palline. Con quale probabilità almeno una è nera? Considerare i casi con e senza restituzione. $\left[\frac{279}{343}; \frac{1081}{1309}\right]$
17. Da un'urna con 24 palline bianche e 18 nere estraiamo quattro palline. Con quale probabilità al massimo due sono bianche? Considerare i casi con e senza restituzione. $\left[\frac{513}{2041}; \frac{2958}{18655}\right]$
18. Da un'urna con 10 palline bianche, 12 rosse e 14 nere estraiamo tre palline. Con quale probabilità almeno una è bianca? Considerare i casi con e senza restituzione. $\left[\frac{3635}{5832}; \frac{227}{357}\right]$
19. In un'urna vi sono delle biglie indistinguibili al tatto, 5 sono bianche, 8 verdi e 10 rosse. Se ne estraggono 3 senza rigenerazione. Determinare la probabilità che a) almeno 2 siano verdi; b) almeno 2 siano dello stesso colore. $\left[\frac{68}{253}; \frac{1371}{1771}\right]$
20. Lanciamo una moneta regolare per 4 volte, con quale probabilità otteniamo a) almeno due volte testa; b) al massimo tre volte testa? $\left[\frac{11}{16}; \frac{15}{16}\right]$
21. Da un mazzo di 40 carte da scopa estraiamo in successione 3 carte, con quale probabilità almeno una delle carte estratte è un asso? $\left[\frac{421}{2470}\right]$
22. Da un mazzo di 40 carte da scopa estraiamo in successione 4 carte, con quale probabilità almeno due delle carte estratte sono re? $\left[\frac{2381}{91390}\right]$
23. Da un mazzo di 52 carte da ramino estraiamo in successione 3 carte, con quale probabilità sono tutte dello stesso seme? Con quale almeno due sono di cuori? $\left[\frac{22}{425}; \frac{64}{425}\right]$
24. Lanciamo un dado regolare a forma di cubo per tre volte di fila, con che probabilità otteniamo almeno un 6? $\left[\frac{91}{216}\right]$
25. Da un'urna con 12 palline bianche, 15 rosse e 18 nere estraiamo quattro palline con restituzione. Con quale probabilità ve ne sono a) almeno due dello stesso colore; b) esattamente due dello stesso colore; c) almeno due di colore diverso; d) esattamente due di colore diverso. $\left[\frac{20267}{16875}; \frac{14704}{16875}; \frac{10952}{16875}; \frac{35033}{50625}\right]$
26. In un'urna immettiamo tre bigliettini su ciascuno dei quali è scritto uno dei numeri 1, 2, 3. Estraiamo per tre volte un biglietto con reimmissione registrando il valore scritto. Se la somma dei tre numeri estratti è 6, qual è la probabilità che abbiamo estratto sempre 2? $\left[\frac{1}{7}\right]$
27. In un'urna vi sono un totale di 50 palline di due diversi colori: bianco e nero. Effettuiamo l'estrazione senza rigenerazione di due palline. Se la probabilità di estrarre due palline bianche supera di $\frac{2}{35}$ la probabilità di estrarre due palline di diverso colore, determinare quante sono le palline nere. Di quanto differiscono le due probabilità se l'estrazione avviene con rigenerazione? $\left[15; \frac{7}{100}\right]$

Giochiamo alla matematica

Consideriamo il cosiddetto paradosso dei compleanni. *Si vuol sapere qual è il minimo numero di persone che dobbiamo riunire per avere una probabilità superiore al 50% che almeno due di essi compiano il compleanno nello stesso giorno*.

Il problema è spesso frainteso, poiché la gente a cui viene posto di solito comincia a pensare quante persone conosce che compiono il compleanno nel loro stesso giorno. La richiesta non è questa, cioè quella di trovare due persone che compiono il compleanno in un dato giorno, ma in un giorno qualsiasi. Ovviamente se escludiamo il 29 febbraio come giorno, nel senso che anche quelli nati in questa data li consideriamo come nati il 28 febbraio, come banale applicazione del principio combinatorio dei cassetti, 366 persone danno la certezza, cioè probabilità 100%, che almeno due di essi compiano il compleanno lo stesso giorno. Se inseriamo il 29 febbraio basta mettere 367 persone. Questo fatto suggerisce che per una probabilità superiore al 50% debbano esservi parecchie persone, in genere la risposta più gettonata è la metà di 366, cioè 183. Invece la risposta è un numero molto più piccolo: ecco quindi il paradosso. Il modo più semplice di risolvere il problema è quello di ricorrere all'evento complementare, ossia calcolare la probabilità dell'evento *non ci sono due persone che compiono il compleanno lo stesso giorno*, quindi effettuiamo il complemento. Diciamo n il numero di persone presenti, con $n \geq 2$. Interpretiamo il problema come quello di estrarre con ripetizione da un'urna con 365 palline numerate palline sempre di numero diverso. Se le palline sono 2, la probabilità che la seconda sia diversa dalla prima estratta è ovviamente $\frac{364}{365}$, quindi la probabilità che due persone scelte a caso non abbiano lo stesso compleanno è $\frac{364}{365}$, e la probabilità che lo abbiano è $1 - \frac{364}{365} \approx$ 0,27%. Se le persone sono 3, allora la probabilità diventa $1 - \frac{364 \cdot 363}{365^2} \approx$ 0,82%. Quindi in generale se le persone sono k la probabilità cercata è $1 - \frac{364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365-k)}{365^k}$. Quindi si tratta di calcolare il primo valore di k per cui superiamo 0,5. Usando una calcolatrice o un CAS troviamo che ciò accade per $n = 23$, per cui la probabilità è circa 0,507. Quindi sono sufficienti 23 persone per avere il 50% di probabilità che due di esse compiano il compleanno lo stesso giorno.

Attività

Calcolare quante persone minimo servono perché la probabilità sia rispettivamente almeno del 60%, 70%, 80%, 90%. [27; 30; 35; 41]

Probabilità condizionata

Facciamo ora una considerazione importante. Nel caso di estrazione senza rigenerazione abbiamo calcolato il risultato della seconda estrazione supponendo che la prima estrazione fosse stata favorevole al nostro evento. Per esempio se estraiamo 2 palline da un'urna che ne contiene 50, 20 delle quali bianche, la probabilità che anche la seconda pallina estratta sia bianca dato che la prima lo era è $\frac{19}{49}$, perché nell'urna sono rimaste 49 palline, 19 delle quali bianche. Quindi abbiamo aggiunto l'ipotesi che la prima estrazione abbia avuto successo, diversamente non potrebbe accadere l'evento sperato.

Definizione 13

Dati due eventi A e B, diciamo probabilità di A **condizionata** dall'evento B, o anche **probabilità di *A* dato *B***, la probabilità che si verifichi A nell'ipotesi che si sia già verificato B.

Notazione 2

La probabilità di A dato B si indica con il simbolo $P(A|B)$.

Esempio 24

Estraiamo senza rigenerazione due palline da un'urna che ne contiene 10 bianche e 5 rosse. La probabilità di estrarre entrambe le palline bianche è $\frac{10 \cdot 9}{15 \cdot 14} = \frac{3}{7} \approx 43\%$. Infatti il supporre che sia accaduto l'evento prima pallina bianca, condiziona la seconda estrazione, lasciando nell'urna un totale di 14 palline, 9 delle quali bianche.

Modifichiamo l'esempio precedente.

Esempio 25

Con riferimento all'esempio precedente, supponiamo che una delle palline bianche contenga un piccolo difetto che la fa riconoscere facilmente al tatto, pertanto essa potrà essere estratta senz'altro per prima; varierà la probabilità precedente di estrarre entrambe le palline di colore bianco? Certamente sì, infatti, la probabilità che la prima pallina estratta sia bianca è adesso divenuta 1, dato che siamo in grado di riconoscerla al tatto, mentre la probabilità che la seconda estratta sia bianca, è rimasta $\frac{9}{14}$, e adesso misura la probabilità dell'intero evento. Quindi la probabilità è passata da uno scarso 43% a un più consistente 64%; il problema si è ridotto a quello di determinare la probabilità di estrarre una pallina bianca, da un'urna che contiene 9 palline bianche e 5 nere.

Vediamo ancora un esempio.

Esempio 26

Riprendiamo l'esempio della casalinga e delle uova marce. Supponiamo adesso che la massaia riconosca un uovo come buono, perché è l'unico sul cui guscio è leggibile la data di scadenza o perché ha un colore diverso dagli altri o per qualche altro motivo. Con questa condizione, la probabilità, com'era logico aspettarsi, è maggiore ed è precisamente $\frac{3}{5}$.

Osserviamo che negli esempi precedenti la *probabilità di B dato A*, si poteva calcolare modificando l'evento, ossia prendendo come casi possibili quelli di A e come casi favorevoli quelli di B che stanno anche in A. Ciò equivale a considerare come numero dei casi favorevoli la cardinalità dell'evento intersezione degli eventi A e B e come numero degli eventi possibili la cardinalità di A.
Così nell'esempio 25, indicando con b_1, la pallina bianca riconoscibile al tatto, l'intersezione fra gli eventi: prima estratta b_1, cioè $A = \{(b_1, b_2), (b_1, b_3), \ldots, (b_1, r_1), (b_1, r_2), \ldots, (b_1, r_5)\}$ e seconda estratta bianca diver-

sa da b_1, cioè B = {(b_1, b_2), …, (b_1, b_{10}), (b_2, b_3), …, (b_2, b_{10}), …, (r_5, b_2), (r_5, b_3), …, (r_5, b_{10})} era proprio l'insieme $A \cap B$ = {(b_1, b_2), (b_1, b_3), …, (b_1, b_{10})}, che ha appunto 9 elementi. Il numero dei casi possibili invece coincide con il numero di casi in cui si verifica il primo evento, quello dato, cioè A = {(b_1, b_2), (b_1, b_3), …, (b_1, b_{10}), (b_1, r_1), …, (b_1, r_5) }, che ha 14 elementi.
Possiamo quindi dire che vale il seguente risultato.

Teorema 5

Si ha $P\left(B \mid A\right) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Consideriamo il cosiddetto paradosso dei tre prigionieri. Due di tre prigionieri, indicati con *A*, *B* e *C*, sono stati condannati a morte. Qual è la probabilità che *A* non sia stato condannato a morte? I casi possibili coincidono con le combinazioni di 3 oggetti (i prigionieri) di classe 2 (i condannati), cioè $C_{3,2} = 3$. I casi favorevoli sono solo 1, quello in cui sono condannati *B* e *C*. Pertanto la probabilità è $\frac{1}{3}$. Adesso abbiamo il paradosso: cosa cambia per la probabilità precedente se sappiamo che *B* è stato condannato a morte? Apparentemente non dovrebbe cambiare nulla, dato che in ogni caso *A* sa già che uno degli altri due è sicuramente condannato a morte, in realtà invece cambia perché adesso sa chi dei due è stato condannato, quindi le sue informazioni sono aumentate, i casi possibili sono diminuiti, solo *AB* e *BC* possono accadere, quindi la probabilità, non essendo variati i casi favorevoli (*BC*), è aumentata al 50%.
Questo è noto anche come paradosso di Monty Hall perché negli anni ’60 negli USA una trasmissione televisiva a quiz, condotta da un certo Monty Hall, metteva in palio un’automobile, che veniva nascosta dietro una di 3 porte, nelle altre due vi era una capra. Dopo che il partecipante aveva fatto la scelta, Monty Hall apriva una delle altre due porte e mostrava che vi era una capra, quindi chiedeva al partecipante se voleva cambiare la sua scelta. In questo caso la domanda era però: *conviene cambiare scelta*? E la risposta è sì, perché possono accadere i seguenti tre fatti. Il concorrente ha scelto la porta con l’automobile, se cambia ha perso; se invece ha scelto una delle due porte in cui vi è una capra, se cambia sceglierà l’auto e perciò vincerà quindi scegliendo la sua probabilità di vittoria diventa $\frac{2}{3}$.

Livello 1

1. In una classe vi sono 15 maschi e 12 femmine, solo i maschi giocano a calcio. Qual è la probabilità che un maschio scelto a caso nella classe giochi a calcio? [1]
2. Se *A* è un sottoevento di *B*, quanto vale *P*(*B*|*A*)? Giustificare la risposta. . [1]
3. Elisabetta ha due figli, con quale probabilità sono entrambi maschi? E se si sa che non sono entrambe femmine? $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right]$
4. Lanciamo per 3 volte una moneta, con che probabilità otteniamo sempre la stessa faccia? E se sappiamo che la prima volta abbiamo ottenuto testa? $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right]$
5. Lanciamo per 3 volte un dado regolare, con che probabilità otteniamo sempre lo stesso punteggio? E se sappiamo che la prima volta abbiamo ottenuto un punteggio pari? $\left[\frac{1}{36};\frac{1}{36}\right]$
6. Dal sacchetto dei numeri della tombola estraiamo tre numeri senza rigenerazione, con che probabilità otteniamo tre numeri pari? E se sappiamo che la prima volta abbiamo ottenuto un punteggio minore di 20? $\left[\frac{43}{356};\frac{387}{3382}\right]$
7. Quattro carte sono disposte in fila una accanto all’altra con la faccia nascosta. Due delle carte sono di cuori, le altre di picche. Qual è la probabilità che due carte dello stesso seme siano messe una accanto all’altra? Quanto vale la precedente probabilità se sappiamo che la seconda carta è di cuori? $\left[\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right]$
8. Vengono lanciate tre monete bicolori, da una parte bianche e dall'altra nere, determinare la probabilità che tutte e tre abbiano la faccia nera rivolta verso l'alto. E se sappiamo che una almeno delle tre cade con la faccia nera rivolta verso l'alto? $\left[\frac{1}{8};\frac{1}{7}\right]$

9. Determinare la probabilità di ottenere esattamente 3 volte testa, lanciando 5 monete regolari. Quanto diventa la probabilità precedente nell'ipotesi di sapere che si ottiene testa nei primi due lanci? E se invece sappiamo che nei primi tre lanci si sono ottenute esattamente due teste? $\left[\frac{5}{16};\frac{3}{8};\frac{3}{16}\right]$

10. Il fornaio ha dimenticato di togliere 50 panini del giorno precedente, prima di inserirne 250 freschi. Qual è la probabilità che il primo cliente acquisti 3 panini tutti freschi? E se sappiamo che il primo panino è certamente fresco? [≈ 58%; ≈ 69%]

11. Con riferimento al problema precedente qual è la probabilità che il primo cliente acquisti solo 2 panini freschi? E se il primo panino è certamente fresco? E se il primo panino è certamente di ieri? [≈ 35%; ≈ 28%; ≈ 70%]

12. In un'urna c'è una pallina che sappiamo essere bianca o nera, ma non siamo certi quale sia il suo colore effettivo. Inseriamo nell'urna una pallina bianca. A questo punto estraiamo una pallina e questa è bianca, con quale probabilità la pallina rimasta è bianca? $\left[\frac{2}{3}\right]$

13. Da un mazzo formato da 3 carte nere e 4 bianche estraiamo due carte; con quale probabilità le due carte sono nere, dato che la prima lo è certamente? $\left[\frac{1}{3}\right]$

14. Lanciamo tre dadi; con quale probabilità otteniamo il punteggio 12, dato che il primo dado è truccato e permette solo l'uscita dei punteggi 4 e 5 con uguale probabilità? $\left[\frac{5}{18}\right]$

Livello 2

15. Vi sono 4 urne: la prima contiene 7 palline verdi e 4 rosse, la seconda 4 verdi e 2 rosse, la terza 2 verdi e 5 rosse, l'ultima 1 verde e 2 rosse. Estraendo da ciascuna urna una pallina qual è la probabilità che le palline estratte siano tutte verdi? Quale la probabilità che la seconda pallina estratta sia verde, dato che delle 4 palline estratte 3 sono verdi? Qual è la probabilità che 2 siano verdi, dato che la quarta estratta è verde? $\left[\frac{4}{99};\frac{71}{73};\frac{83}{189}\right]$

16. Disponiamo 8 carte, quattro rosse e quattro nere, in fila. Determinare la probabilità che a) vi siano almeno due carte dello stesso colore disposte una accanto all'altra; b) tutte le carte rosse siano una accanto all'altra. $\left[\frac{1}{35};\frac{1}{14}\right]$

17. Risolvere l'esercizio precedente supponendo che due carte nere siano riconoscibili dall'esterno, quindi si sa che sono state disposte al primo e ultimo posto. $\left[\frac{1}{15};\frac{1}{5}\right]$

18. In una scatola immettiamo delle monete secondo la seguente regola. Lanciamo una moneta in aria, se esce testa inseriamo 1 euro nella scatola, se esce croce mettiamo 5 euro. Determinare la probabilità che dopo quattro lanci, la scatola contenga a) 12 euro; b) 20 euro; c) 6 euro; d) 16 euro sapendo che nel primo lancio è uscita testa; e) 12 euro sapendo che nei due lanci dispari la moneta non ha avuto lo stesso esito. $\left[\frac{3}{8};\frac{1}{16};0;\frac{1}{8};\frac{1}{2}\right]$

19. Lanciamo due dadi regolari a forma di cubo. Determinare la probabilità che si ottenga 7 dato che a) si ottiene un punteggio dispari; b) si ottiene un punteggio superiore a 6; c) il primo dado mostra un punteggio dispari; d) il secondo dado mostra un punteggio pari; e) il punteggio di uno dei due dadi è dispari; f) i dadi hanno lo stesso punteggio; g) i dadi hanno diversi punteggi. $\left[\frac{3}{8};\frac{2}{7};\frac{1}{6};\frac{1}{6};\frac{2}{9};0;\frac{1}{5}\right]$

20. Di due eventi si sa che $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B|A) = \frac{1}{2}$. Possiamo dire che gli eventi A e B sono incompatibili? Giustificare la risposta. [No]

21. Sul tavolo vi sono tre carte di seme rosso e una di seme nero, Matteo sceglie a caso una carta e la tiene, Dorotea dopo di lui ne sceglie un'altra. Con quale probabilità Dorotea ha scelto la carta nera? $\left[\frac{1}{5}\right]$

22. Un giocatore di basket ha una media di successo nei tiri liberi di 0,75, considerando tale valore come la sua probabilità di fare canestro in un tiro libero, si determini con quale probabilità di fare canestro con un tiro libero nell'ipotesi che se dovesse sbagliare il primo avrebbe la possibilità di tirarne un altro? $\left[\frac{3}{16}\right]$

Livello 3

23. Dimostrare che $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$.
24. Dimostrare che $P(A|B) + P(A^C|B) = 1$. (A^C è l'evento complementare di A).
25. Dimostrare o mostrare un controesempio del fatto che non è vero che $P(A|B) + P(A|B^C) = 1$.
26. Dimostrare o mostrare un controesempio del fatto che non è vero che $P(A|B) + P(A^C|B^C) = 1$.
27. Lanciamo un dado regolare a forma di cubo per tre volte, determinare le diverse probabilità che la prima volta che otteniamo 6 è al primo, secondo, terzo lancio. $\left[\frac{1}{6}; \frac{5}{36}; \frac{25}{216}\right]$
28. Con riferimento al problema precedente determinare la probabilità che il 6 si ottenga per la prima volta al n – esimo lancio. $\left[\frac{5^{n-1}}{6^n}\right]$

Giochiamo alla matematica

Consideriamo il seguente problema noto sotto il nome di paradosso dell'asso a sorpresa, enunciato dal matematico inglese Henry Whitehead nel 1939. Supponiamo di avere quattro carte, l'asso di picche, l'asso di cuori e due altre carte. Se si prendono due carte contemporaneamente, qual è la probabilità di avere entrambi gli assi?

- Indichiamo con AC l'asso di cuori, con AP quello di picche, con C_1 e C_2 le altre due carte. I casi possibili, tutti ugualmente possibili, sono i seguenti 6: (AC, AP), (AC, C_1), (AC, C_2), (AP, C_1), (AP, C_2), (C_1, C_2). Non abbiamo considerato gli altri sei casi che si ottengono dai precedenti scambiando di posto le carte, perché esse vengono prese contemporaneamente. Vi è un solo caso favorevole: (AP, AC). Quindi la probabilità cercata è $\frac{1}{6}$.
- Supponiamo ora che per qualche motivo uno degli assi, non sappiamo però quale, sia riconoscibile e venga perciò pescato certamente. Qual è allora la probabilità che anche la seconda carta estratta sia un asso?. Il caso favorevole è sempre uno, mentre quelli possibili sono diventati 5, dato che non potrà più capitare il caso (C_1, C_2); quindi la probabilità è adesso $\frac{1}{5}$.
- Adesso abbiamo il fatto paradossale. Supponiamo che la carta riconoscibile sia non un asso qualsiasi ma quello di cuori; la probabilità che sia estratto anche l'altro asso è variata? Intuitivamente pensiamo di no, invece i casi possibili sono divenuti 3, cioè i seguenti: (AC, C_1), (AC, C_2), (AC, AP). Quindi la probabilità adesso vale $\frac{1}{3}$. In effetti la cosa non dovrebbe apparire strana, dato che l'informazione *asso di cuori* è più ricca dell'informazione *asso*, quindi ecco perché la probabilità aumenta.

Eventi dipendenti ed eventi indipendenti

Potremmo esserci fatti l'idea che l'accadere di un evento condizioni sempre la probabilità di un altro evento a cui esso è legato, ma se abbiamo svolto gli esercizi in modo consapevole abbiamo visto che ciò non è sempre vero.

Esempio 27

- Due carte rosse e due nere sono mescolate e disposte in una fila. Vogliamo determinare la probabilità che le carte siano disposte in modo che quelle di uguale colore siano fra loro adiacenti. Indichiamo con R le carte rosse e con N quelle nere, senza bisogno di distinguerle fra di loro. I casi favorevoli al nostro evento sono evidentemente i seguenti due: RRNN e NNRR. I casi possibili sono dati dal modo di disporre due delle carte di uguale colore nelle quattro posizioni disponibili, sono quindi i seguenti 6: RRNN, RNRN, RNNR, NRRN, NRNR, NNRR. Infine la probabilità richiesta vale $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
- Adesso supponiamo di sapere che la carta messa sul tavolo per seconda è nera, dato che il suo bordo è segnato. Quanto vale adesso la probabilità? I casi favorevoli sono adesso rappresentati solo da NNRR, ma anche i casi possibili sono diminuiti, diventando 3, dato che i casi in cui la seconda carta non è nera non possono più accadere. Quindi i casi possibili sono: RNRN, RNNR, NNRR. La probabilità è rimasta $\frac{1}{3}$.

Nell'esempio precedente abbiamo visto che la conoscenza del fatto che una carta fosse nera non ha influenzato il valore della probabilità, cioè $P(B|A) = P(B)$. Ciò significa che l'evento A non ha influito sull'accadere dell'evento B, infatti ne ha lasciata invariata la probabilità.

Definizione 14

Diciamo che l'evento B è **stocasticamente indipendente** dall'evento A se $P(B|A) = P(B)$.

Abbiamo usato l'aggettivo stocastico (che deriva dal greco *stochastikós*, congetturale) per distinguere il concetto di indipendenza per così dire *quotidiano* secondo il quale due eventi sono indipendenti se non hanno nulla in comune.
Passiamo a un'altra questione. Se B è indipendente da A, possiamo dire che anche A è indipendente da B?
La risposta è positiva ed è fornita dal seguente teorema.

Teorema 6

Si ha: $P(B|A) = P(B) \Rightarrow P(A|B) = P(A)$

Dimostrazione

Si ha: $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B \mid A) \cdot P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A) \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$

Dalla dimostrazione precedente deriviamo un'altra definizione di eventi indipendenti.

Definizione 15

Due eventi A e B appartenenti allo stesso spazio degli eventi vengono detti **stocasticamente indipendenti** se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Vediamo qualche esempio.

Esempio 28

Data un'urna con 20 palline bianche e 10 nere, consideriamo gli eventi *estrazione della prima pallina bianca* ed *estrazione della seconda pallina bianca*. Essi sono fra loro stocasticamente indipendenti solo se l'estrazione avviene con rigenerazione. Infatti sia la probabilità che la prima pallina estratta sia bianca, come la probabilità che la seconda pallina estratta sia bianca è $\frac{2}{5}$. Pertanto la probabilità che entrambe siano bianche è, $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$. Il che è in accordo con la definizione 15.

Non dobbiamo confondere l'indipendenza di un evento da un altro con la loro incompatibilità, con il fatto cioè che i due eventi non possano accadere contemporaneamente.

Esempio 29

Lanciamo due monete e consideriamo gli eventi *uscita di una sola testa* e *uscita di entrambe le teste*. I due eventi sono evidentemente incompatibili, non sono però fra loro indipendenti. Infatti l'evento intersezione dei due è evidentemente l'evento nullo, quindi vale zero la sua probabilità, mentre nessuno dei due eventi ha probabilità zero di accadere, pertanto non è verificata la definizione 15, che caratterizza gli eventi indipendenti.

Possiamo definire indipendenti due eventi quando il verificarsi dell'uno non influisce sul verificarsi dell'altro.

Esempio 30

Vediamo alcuni casi di eventi indipendenti e dipendenti.

- Se lancio una moneta e un dado, gli esiti dei due eventi sono indipendenti, infatti il sapere che è uscito testa o croce non ha alcuna influenza sull'uscita del punteggio del dado.
- Nell'estrazione del numero del biglietto vincente di una lotteria i cui numeri sono formati da 6 cifre e in cui ogni cifra viene estratta da una diversa urna, l'estrazione di ciascuna cifra è indipendente dall'uscita di tutte le altre.
- Nell'estrazione dei cinque numeri di una stessa ruota nel gioco del lotto, l'estrazione di ogni numero invece influenza l'uscita del successivo. Se il primo estratto è 12 nessuno degli altri quattro può essere 12, quindi i quattro eventi successivi alla prima estrazione sono tutti dipendenti dagli eventi che li hanno preceduti.
- In un campionato di calcio gli eventi *vince la squadra A* e *vince la squadra B* sono indipendenti se le squadre non giocano fra di loro. Se giocano fra di loro invece gli eventi sono dipendenti, infatti la vincita di *A* influirà sulla vincita di *B* che non potrà accadere.

Nella seguente definizione generalizziamo il concetto di eventi indipendenti, nel caso in cui gli eventi siano più di due.

Definizione 16

n eventi: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ appartenenti allo stesso spazio degli eventi, si dicono **fra di loro indipendenti** se, per ogni possibile gruppo di *k* eventi, con $2 \le k \le n$, si ha $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_k)$.

In particolare il problema dei successi è importante negli eventi ripetuti.

Definizione 17

Dato un evento diciamo **prove ripetute indipendenti di Bernoulli**, la probabilità che in *n* ripetizioni dell'evento si ottengano esattamente *h* volte gli stessi risultati.

Esempio 31

Il lancio ripetuto di una moneta o di un dado è un classico esempio di prove ripetute indipendenti di Bernoulli.

Vi è un interessante risultato relativo alle prove di Bernoulli.

Teorema 7

Dato un evento che ha probabilità p di accadere e $(1 - p)$ di non accadere, la probabilità che in n prove ripetute indipendenti l'evento si verifichi esattamente $k \leq n$ volte è $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

Dimostrazione

Se effettuiamo un solo esperimento la probabilità che si verifichi l'evento 0 volte, cioè non si verifichi è ovviamente $(1 - p)$; che si verifichi 1 volta è p. Quindi la formula è vera.

Se effettuiamo due esperimenti la probabilità che si verifichi 0 volte è $(1 - p)^2$, poiché gli eventi sono indipendenti; che si verifichi una volta è invece $2 \cdot p \cdot (1 - p)$ poiché l'evento può verificarsi la prima o la seconda volta; che si verifichi entrambe le volte è p^2.

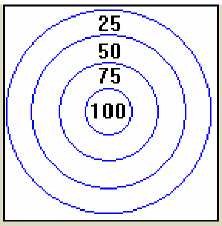
Ma allora in generale la probabilità che si verifichi esattamente le prime $k \leq n$ volte è $p^k \cdot (1 - p)^{n - k}$, per trovare la probabilità che si verifichi invece k volte qualsiasi, dobbiamo moltiplicare per tutti i modi in cui possono verificarsi i k casi, cioè nel modo di scegliere k elementi non ordinati da n, che sono appunto in numero di $\binom{n}{k}$.

Esempio 32

- La probabilità di ottenere esattamente 5 volte testa lanciando una moneta regolare 12 volte è $\binom{12}{5} \cdot 0,5^5 \cdot 0,5^7 = \binom{12}{5} \cdot 0,5^{12} \approx 19,3\%$.
- La probabilità di ottenere esattamente 4 volte il punteggio 3 lanciando un dado regolare 6 volte è $\binom{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0,8\%$.

Verifiche

Lavoriamo insieme



Il bersaglio in figura ha un raggio di 7 cm, le circonferenze hanno tutte lo stesso centro e il diametro che diminuisce di 2 *cm* passando da una a quella di diametro immediatamente inferiore, la zona centrale ha un diametro di 1 *cm*. Se una freccetta è lanciata a caso è certo che colpirà il bersaglio. Qual è la probabilità di totalizzare 125 punti in due lanci successivi?
125 punti possono totalizzarsi sommando i punteggi 50 + 75, oppure 25 + 100. La probabilità che una freccetta colpisca i vari settori, da quello più esterno a quello più interno, è rispettivamente pari a: $\frac{49-25}{49}=\frac{24}{49};\frac{25-9}{49}=\frac{16}{49};\frac{9-1}{49}=\frac{8}{49};\frac{1}{49}$. I due lanci sono indipendenti e i due eventi (50+75 e 25+100) sono incompatibili, quindi la probabilità cercata sarà $2 \cdot (P[(50, 75)] + P[(25, 100)]) = 2 \cdot (P(50) \cdot P(75) + P(25) \cdot P(100)) = 2\cdot\left(\frac{24}{49}\cdot\frac{16}{49}+\frac{8}{49}\cdot\frac{1}{49}\right)=\frac{16}{49}\approx 32\%$.

Livello 1

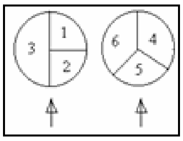
1. Qual è la probabilità che lanciando tre dadi non truccati essi non mostrino tutti e tre lo stesso numero? E la probabilità che mostrino tre numeri diversi? $\left[\frac{35}{36};\frac{5}{9}\right]$
2. Determinare la probabilità che lanciando un dado ed estraendo una pallina da un'urna che ne contiene dodici numerate da 1 a 12, si ottengano in entrambi i casi due numeri primi. $\left[\frac{5}{24}\right]$
3. Qual è la probabilità che nelle estrazioni del lotto in una certa ruota i primi due estratti siano 1 e 2, nell'ordine? E se non conta l'ordine? $\left[\frac{1}{8010};\frac{1}{4005}\right]$
4. Se alla roulette è uscito il rosso per 7 volte di fila, all'ottava giocata la probabilità che esca nero quanto vale? $\left[\frac{18}{37}\right]$
5. Scegliamo a caso due carte da un mazzo di carte italiane da 40, l'evento *la prima carta estratta è un asso* e l'evento *la seconda carta estratta è un re* sono indipendenti? [No]
6. Scegliamo una carta da un mazzo di carte italiane da 40, la registriamo e poi la rimettiamo nel mazzo. Con che probabilità ripetendo 4 volte l'operazione otteniamo sempre un asso? [0,01%]
7. Con riferimento al precedente esercizio, se estraiamo 4 carte successivamente, senza reimmetterle, quanto vale la probabilità? [≈ 0,001%]
8. Qual è la probabilità che scegliendo a caso 4 carte da un mazzo di carte italiane da 40 siano tutte di bastoni? E con reimmissione? [≈ 0,2%; 0,01%
9. Qual è la probabilità che scegliendo a caso 3 carte da un mazzo di carte da ramino da 52 siano tutte rosse? E con reimmissione? $\left[\approx 1,3\%;\frac{1}{8}\right]$
10. Con che probabilità in tre giocate successive alla roulette esce un numero minore di 10? [0,1%]

Lavoriamo insieme

Con che probabilità alla roulette esce per 5 volte di fila un numero rosso? Alla roulette di solito vi sono 37 numeri, 18 rossi (i dispari), 18 neri (i pari) e lo zero. In alcune versioni vi è anche il doppio zero, ovviamente né 0 né 00 sono considerati rosso o nero. Ogni lancio della pallina può considerarsi come una prova ripetuta indipendente bernoulliana, in cui la probabilità che esca rosso è $\frac{18}{37}$ o $\frac{18}{38}=\frac{9}{19}$, pertanto la probabilità che su 5 lanci di pallina tutte e 5 le volte si ottenga rosso è $\binom{5}{5}\cdot\left(\frac{18}{37}\right)^5\cdot\left(\frac{19}{37}\right)^0 \approx 2,7\%$ o $\left(\frac{9}{19}\right)^5\cdot\left(\frac{19}{38}\right)^0 \approx 2,4\%$.

Livello 2

11. Con riferimento al bersaglio del box lavoriamo insieme, qual è la probabilità, gettando tre freccette, di totalizzare 150 punti? [≈ 6,6%]
12. Qual è la probabilità, lanciando per 6 volte una moneta, di ottenere esattamente 4 volte testa? Almeno 4 volte testa? $\left[\frac{15}{64};\frac{11}{32}\right]$
13. Qual è la probabilità che lanciando 5 volte un dado regolare a forma di cubo, si ottenga esattamente 4 volte il punteggio 1? $\left[\frac{25}{7776}\right]$
14. Qual è la probabilità che lanciando 4 volte un dado regolare a forma di cubo, si ottenga esattamente 3 volte un punteggio inferiore a 3? $\left[\frac{20}{81}\right]$
15. Lanciamo una moneta regolare per 3 volte, con quale probabilità otteniamo due volte testa e una volta croce? $\left[\frac{3}{8}\right]$
16. Qual è la probabilità che lanciando per 10 volte una moneta regolare si ottengano più teste che croci? $\left[\frac{193}{512}\right]$
17. Lanciamo una moneta regolare per 5 volte, con quale probabilità otteniamo sempre testa? Con quale sempre croce? $\left[\frac{1}{32};\frac{1}{32}\right]$
18. Lanciamo un dado regolare a forma di cubo per tre volte di fila, con che probabilità otteniamo sempre 6? Con quale probabilità otteniamo sempre lo stesso numero? $\left[\frac{1}{216};\frac{1}{36}\right]$
19. Gianni lancia 2 monete regolari, Luca ne lancia tre. Qual è la probabilità che Luca ottenga più teste di Gianni? $\left[\frac{1}{2}\right]$
20. In una certa nazione si è stabilito che la probabilità che un neonato sia femmina è del 53%. Calcolare la probabilità che una famiglia che ha due bambini li abbia a) entrambi maschi; b) entrambe femmine; c) di sesso diverso. [≈ 22,1%; ≈ 28,1%; ≈ 49,8%]
21. Con riferimento al precedente quesito, se la probabilità che una famiglia con 2 bambini abbia un maschio e una femmina è del 49,7%, con che probabilità uno almeno dei neonati è maschio? [≈ 46%]
22. Con riferimento ai precedenti quesiti, se la probabilità di avere una femmina è del 55%,con che probabilità una famiglia con 3 bambini ha: a) 3 maschi; b) 2 maschi e 1 femmina; c) 2 femmine e 1 maschio; d) 3 femmine. [≈ 9,1%; ≈ 33,4%; ≈ 40,8%; ≈ 16,6%]
23. Con riferimento al precedente quesito, con che probabilità una famiglia di 3 figli ha 2 maschi e 1 femmina se il primogenito è maschio? E se invece è femmina? [49,5%; 20,25%]

24. 

I due dischi in figura vengono ruotati e i numeri che si fermano sotto la freccia vengono sommati. Un dispositivo evita che la freccia si fermi esattamente al confine fra due zone. Qual è la probabilità che tale somma sia un numero pari? (nella prima figura le due parti piccole sono uguali fra loro e metà della grande; nella seconda le tre parti sono uguali). $\left[\frac{5}{12}\right]$

Livello 3

25. Provare che $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P[C|(A \cap B)]$.
26. Provare che $P[(A \cup B)|C] = P(A|C) + P(B|C) - P[(A \cap B)|C]$.
27. Il proprietario di un cinema multisala ha stabilito che nell'ultimo anno il 5% degli spettatori che hanno comprato il biglietto non ha poi assistito allo spettacolo. Perciò un giorno vende 102 biglietti per una sala da 100, con che probabilità gli spettatori che effettivamente vanno al cinema trovano posto seduti? [≈ 95,6%]
28. Se il proprietario del quesito precedente si fosse accontentato di una probabilità del 90%, quanti biglietti avrebbe potuto vendere? [Sempre 102]
29. Sempre con riferimento al quesito del cinema, se vendendo 102 biglietti la probabilità sarebbe stata di circa l'81,4%, quanta percentuale di spettatori non si era presentata l'anno precedente? [≈ 3%]
30. Anna dice che domani uscirà con Paolo con il 55% di probabilità se piove e il 30% se non piove. Le previsioni del tempo danno una probabilità del 40% che domani piova. Qual è la probabilità che domani Anna esca con Paolo? [40%]
31. In un'urna sono poste 50 palline verdi e 50 blu, indistinguibili al tatto. Prendiamo due palline a caso, se sono entrambe verdi le mettiamo in un contenitore A, se entrambe blu in un contenitore B, diversamente in un contenitore C. Dopo avere estratto in questo modo tutte le palline dall'urna, con che probabilità in A e in B vi saranno lo stesso numero di palline? [1]

Teorema di Bayes e legge dei grandi numeri

Concludiamo considerando il problema dell'estrazione di un campione da un altro campione.

Esempio 33

In una fabbrica di piatti di ceramica vi sono 2 forni in funzione. Considerando quel che è successo negli anni precedenti, si è calcolato che in media il 2% dei piatti prodotti giornalmente dal primo forno e il 3% di quelli prodotti dall'altro risultano difettosi. Supponiamo che ogni forno produca lo stesso numero di piatti e che alla fine della giornata essi vengano messi nello stesso magazzino risultando così indistinguibili. Qual è la probabilità che scegliendo a caso uno dei piatti dal magazzino, fra quelli prodotti in uno stesso giorno, questo risulti difettoso?

Per semplificare non consideriamo espressioni letterali, ma supponiamo che nel magazzino vi siano 200 piatti, 100 dei quali prodotti dal primo forno e i rimanenti 100 dall'altro. Questa ipotesi non influenza il risultato, ma semplifica i calcoli. Da un punto di vista frequentista, vuol dire che 2 + 3 = 5 piatti risulteranno difettosi. Pertanto la probabilità richiesta è $\frac{5}{200} = \frac{1}{40}$ = 2,5%. Adesso vogliamo sapere invece qual è la probabilità che il piatto scelto sia difettoso e sia stato cotto nel primo forno. In questo caso i piatti difettosi prodotti dal primo forno sono solo 2, pertanto la probabilità cercata è $\frac{2}{200} = \frac{1}{100}$ = 1%.

Rendiamo un po' più complesso l'esempio precedente.

Esempio 34

Supponiamo che i forni in funzione siano 3, ciascuno dei quali fornisce rispettivamente il 25%, il 30% e il 45% della produzione giornaliera. Indagini statistiche hanno appurato che la percentuale di piatti difettosi prodotti giornalmente da ciascun forno è rispettivamente del 2%, 4% e 1%. Supponiamo di prendere un piatto a caso fra tutti quelli prodotti in un certo giorno, se tale piatto è difettoso quali sono le probabilità che esso sia stato prodotto dal primo forno? Per semplificare i conti supponiamo che ciascun forno produca rispettivamente e quotidianamente 2500, 3000 e 4500 piatti. Quindi di questi vi saranno rispettivamente 50, 120 e 45 piatti difettosi. Perciò la probabilità che il piatto sia difettoso e prodotto dal primo forno sarà $\frac{50}{50+120+45} = \frac{50}{215} \approx 0.232$.

Adesso vediamo di interpretare in modo diverso il precedente problema.

Esempio 35

Indichiamo con A l'evento *piatto scelto difettoso*, con B_1 l'evento *piatto prodotto dal primo forno*, con B_2 l'evento *piatto prodotto dal secondo forno* e con B_3 l'evento *piatto prodotto dal terzo forno*. Quel che vogliamo determinare praticamente è la probabilità $P(B_1|A)$, cioè la probabilità che il piatto sia stato prodotto dal primo forno, dato che è difettoso. Essa è diversa da $P(A|B_1)$, dalla probabilità cioè che il piatto è difettoso, dato che è stato prodotto dal primo forno. Si ha: $P(A) = P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + P(B_3 \cap A)$, infatti un piatto difettoso deve essere prodotto da uno e uno solo dei tre forni. Quindi i tre eventi sono incompatibili. Abbiamo $P(B_1|A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)}$, ma anche $P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$, quindi $P(A \cap B_1) = P(B_1) \cdot P(A|B_1)$. Perciò $P(B_1|A) = \frac{P(A \mid B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)}$. Ragionando in modo analogo otteniamo queste altre uguaglianze: $P(A \cap B_2) = P(B_2) \cdot P(A|B_2)$ e $P(A \cap B_3) = P(B_3) \cdot P(A|B_3)$. Ciò vuol dire che $P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + P(B_3) \cdot P(A|B_3)$. Unendo tutti questi risultati, abbiamo trovato la seguente formula: $P(B_1|A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A \mid B_1)}{P(B_1) \cdot P(A \mid B_1) + P(B_2) \cdot P(A \mid B_2) + P(B_3) \cdot P(A \mid B_3)}$. Quindi sostituendo i valori numerici, dato che: $P(B_1) = 0{,}25$; $P(B_2) = 0{,}3$; $P(B_3) = 0{,}45$; $P(A|B_1) = 0{,}02$; $P(A|B_2) = 0{,}04$; $P(A|B_3) = 0{,}01$, avremo: $P\left(B_1 \mid A\right) = \dfrac{0,25 \cdot 0,02}{0,25 \cdot 0,02 + 0,3 \cdot 0,04 + 0,45 \cdot 0,01} = \dfrac{0,005}{0,0215} \approx 0.232$, che coincide con il valore trovato nell'esempio precedente. Applicando formule analoghe a quella qui stabilita otteniamo: $P(B_2|A) \approx 0,558$ e $P(B_3|A) \approx 0,209$.

Ripetendo il procedimento dell'esempio precedente, possiamo ottenere un risultato più generale per determinare la probabilità condizionata di un evento, dato un altro, nell'ipotesi che questo secondo evento possa accadere insieme a un certo numero di altri eventi.

Teorema 8 (di Bayes)

In uno stesso spazio degli eventi elementari, siano gli eventi A e B_i ($1 \le i \le n$), a due a due incompatibili e tali che $\sum_{i=1}^{n} P(B_i) = 1$, vale la seguente formula detta di Bayes: $P\left(B_k \mid A\right) = \dfrac{P(B_k) \cdot P(A \mid B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)}$.

Nel precedente teorema è un'ipotesi fondamentale il fatto che gli eventi si escludano a vicenda e che nel loro complesso diano la certezza. In questi casi si parla di **probabilità a posteriori**, a differenza di quelle che abbiamo finora considerato dette **a priori**. Infatti in quel caso assumiamo alcuni fatti generali come certi, tipo l'equipossibilità dei diversi casi, quindi supponiamo una verità *a priori*. Invece in questo caso la probabilità si basa sul verificarsi di un dato evento, quindi è *a posteriori*.

I protagonisti

Thomas Bayes nacque a Londra nel 1702 e morì a Tunbridge Wells, un paesino a 35 miglia da Londra, nel 1761. Figlio di un pastore protestante, egli stesso divenne pastore della Cappella Presbiteriana di Tunbridge nel 1720. Si occupò specialmente di calcolo delle probabilità, il suo più importante trattato: *Essay toward solving a problem in the doctrine of chances*, fu pubblicato postumo nel 1764. In esso, fra le altre cose, enunciò l'importante teorema che adesso porta il suo nome.

Chiudiamo il paragrafo considerando una famosa legge enunciata da Jacques Bernoulli che lega la probabilità classica laplaciana a quella frequentista.

Legge dei grandi numeri.

All'aumentare del numero di ripetizioni indipendenti di una prova nelle stesse condizioni, il rapporto fra la frequenza dell'occorrenza di un evento e il numero di prove si avvicina sempre di più alla probabilità laplaciana dell'evento.

Cosa vuol dire la precedente legge? Abbiamo visto che la probabilità laplaciana di ottenere testa lanciando una moneta regolare è 50%; se noi lanciamo 100 volte una moneta nelle stesse condizioni, quindi servendoci per esempio di uno strumento che ripeta il lancio con le stesse modalità, difficilmente otterremo 50 volte testa e 50 volte croce. Se però aumentiamo il numero di lanci la differenza fra le due frequenze tenderà a divenire sempre più piccola in rapporto al numero di lanci.
Così se, per esempio, in 100 lanci otteniamo 46 teste e 54 croci, vi è una differenza relativa dell'8%, ma se ripetiamo 1000 volte il numero di lanci, potremmo, per esempio, ottenere 512 teste e 488 croci. Anche se la differenza assoluta è aumentata, da 8 è passata a 24, quella relativa è diminuita dall'8% al 2,4%.
Spesso la legge dei grandi numeri viene male interpretata e viene fornita come giustificazione del fatto che prima o poi dovrà accadere un certo evento. Infatti se alla roulette esce per sette volte di fila il rosso, la legge dei grandi numeri non dice che le successive sette volte dovrà uscire il nero, ma solo che, se la pallina viene lanciata altre mille volte, è alta la probabilità che il numero di volte che esca rosso sia abbastanza uguale al numero di volte che esca il nero. Il problema è, che non sappiamo quantificare che significa abbastanza e soprattutto che non vi sarà una regolarità nelle estrazioni. Potranno esservi decine di uscite successive del rosso come diversi lanci alternati di rosso e nero.
Ovviamente ciò non accade se gli eventi non sono indipendenti. Per esempio se estraiamo delle carte da un mazzo da ramino, se nelle prime 25 carte ve ne erano 18 rosse, la probabilità che la successiva estratta sia nera è aumentata, dato che adesso nel mazzo vi sono più carte nere che rosse.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Gli studenti di un istituto, nell'ambito del progetto di prevenzione AIDS, si sottopongono al test per stabilire se risultano HIV positivi. Quel che può accadere è uno dei seguenti quattro fatti:
1. uno studente risulta positivo ed è effettivamente malato;
2. uno studente risulta positivo ma non è effettivamente malato;
3. uno studente risulta negativo ed è effettivamente sano;
4. uno studente risulta negativo ma è effettivamente malato;

Naturalmente i quattro fatti non sono equipossibili. Supponiamo che lo 0,2% degli studenti del nostro campione siano effettivamente malati ma di essi, solo il 99,8% risulti positivo al test. Analogamente supponiamo che lo 0,3% dei sani risulti positivo al test.
Vogliamo determinare con quale probabilità *uno studente testato positivamente risulti effettivamente malato* e con quale probabilità invece *uno studente testato negativamente risulti effettivamente malato*.
Per fissare le idee e poter lavorare con numeri interi, supponiamo che gli studenti siano molto numerosi: 1000000. Ciò significa che lo 0,2%, cioè 2000 di essi sono effettivamente malati.
Nel gruppo 1 vi sono coloro che sono malati e sono testati positivamente, cioè il 99,8% di 2000, ossia 1996 studenti.
Nel gruppo 2 ci sono i sani che vengono testati come malati, essi sono lo 0,3% dei sani, cioè di 998000, sono perciò 2994.
Nel gruppo 3 ci sono i sani che vengono riconosciuti come tali, sono perciò 995006.
Infine nel gruppo 4 ci sono i malati che risultano sani, sono quindi i 4 studenti malati non testati al punto 1.
Allora se un malato è riconosciuto come tale vuol dire che appartiene al gruppo 1, in cui vi sono 1996 individui; questi sono i casi favorevoli. Vuol dire però anche che risulta positivo al test, quindi appartiene al gruppo 1 o al gruppo 2, pertanto i casi possibili sono 1996 + 2994 = 4990. Quindi la probabilità che sia malato e venga riconosciuto come tale è $\frac{1996}{4990} = 0{,}4 = 40\%$.
Se invece il paziente è testato negativamente appartiene ai gruppi 3 o 4, perciò i casi possibili sono 995006, i casi favorevoli sono il numero di individui del quarto gruppo, cioè 4. Quindi la probabilità di essere malato ma di risultare negativo al test HIV è appena di 4 su 995006 che è circa lo 0,0004%.
Per risolvere il problema possiamo anche applicare il Teorema di Bayes, in cui con A indichiamo l'evento *x risulta positivo*, con B_1 l'evento *x è malato* e con B_2 l'evento *x non è malato*. Allora la probabilità che uno studente che risulta positivo sia effettivamente malato è: $P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \mid B_1) \cdot P(B_1)}{P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(A \mid B_2) \cdot P(B_2)}$.
Abbiamo: $P(A|B_1) = 0{,}998$; $P(B_1) = 0{,}002$; $P(A|B_2) = 0{,}003$, $P(B_2) = 0{,}998$. Supponiamo che lo 0,2% degli studenti del nostro campione siano effettivamente malati ma, di essi, solo il 99,8% risulti positivo al test. Quindi : $P(B_1 \mid A) = \frac{0.998 \cdot 0.002}{0.998 \cdot 0.002 + 0.003 \cdot 0.998} = 40\%$, che coincide con quanto trovato prima per altra via.

Livello 2

1. Supponiamo che esista un test per riconoscere se una persona è o no ammalata di diabete, il quale abbia una efficacia del 98%, cioè solo il 98% di coloro che risultano positivi al test sono effettivamente malati, mentre il 2% no. Se il 3% della popolazione è effettivamente malato di diabete e Martina è stata giudicata positiva al test, con che probabilità è effettivamente malata? [≈ 60,2%]
2. In una classe vi sono il 30% di ragazze. Il 40% dei maschi ed il 60% delle femmine pratica almeno uno sport. Con quale probabilità, scelto a caso uno studente che pratica uno sport è maschio? Con che probabilità scelto a caso uno studente che non pratica alcuno sport è una femmina? [≈60,8%; ≈22,2%]
3. Negli U.S.A. viene usata talvolta la cosiddetta macchina della verità, per stabilire se un indagato mente o no. Supponiamo che una data macchina abbia un'affidabilità del 92% (cioè riconosce se un indagato mente o dice la verità nel 92% dei casi) e che il 63% degli indagati è colpevole. Con quale probabilità una persona riconosciuta colpevole con l'ausilio della macchina della verità lo è realmente? Con quale probabilità una persona riconosciuta innocente lo è veramente? [≈ 95,1%; ≈ 87,1%]

4. Un'urna contiene 10 palline bianche e 15 nere, una seconda urna contiene 8 bianche e 5 nere. Lanciamo una moneta regolare, se esce testa estraiamo una pallina dalla prima urna, se no dalla seconda. La pallina estratta è bianca, con quale probabilità è stata estratta dalla prima urna? Con quale dalla seconda? $\left[\frac{13}{33};\frac{20}{33}\right]$

5. Con riferimento al precedente quesito, stavolta l'urna la scegliamo lanciando un dado regolare, se esce un punteggio inferiore a 5 scegliamo la prima urna, se no la seconda. Quanto valgono adesso le probabilità? $\left[\frac{13}{23};\frac{10}{33}\right]$

6. In una fabbrica di lampadine vi sono due diversi impianti in funzione. Il primo produce il 25% del totale giornaliero, il secondo il 75%. La percentuale di lampadine difettose sul totale, provenienti dai tre impianti è 1% e 2%. Con quale probabilità una lampadina difettosa scelta a caso, è stata prodotta dal secondo impianto? [≈ 85,7%]

7. Nella tabella seguente sono riportati i dati Istat relativi al nu mero di giornali stampati in Italia e poi suddivisi per aree geografiche, nel 1997. Scelto un giornale scelto a caso, fra quelli pubblicati nel 1997, troviamo che è un quotidiano, determinare la probabilità che sia stato stampato nelle diverse aree geografiche. [≈ 19,9%; ≈ 8,9%; ≈ 7,9%; ≈ 6,1%]

Tipologia	Italia	Nord Ovest	Nord Est	Centro	Mezzogiorno
Quotidiani	2182636	710106	518242	508116	445254
Settimanali	810749	307618	197214	149026	157514

8. Nella tabella seguente sono riportati i dati Istat relativi al numero di famiglie italiane dei Censimenti 1991 e 2001, suddivise per numero medio di componenti. Scelta una famiglia a caso, troviamo che ha mediamente 3 componenti, determinare la probabilità che faccia parte del censimento 1991. Con che probabilità se la famiglia scelta è del 2001 ed ha mediamente 4 componenti? [≈ 48,4%; ≈ 19%]

Numero Componenti	1	2	3	4	5	6 o più
1991	4099970	4920050	4410961	4228722	1576409	672891
2001	5427621	5905411	4706206	4136206	1265826	369406

Livello 3

9. Esprimere il Teorema di Bayes al caso in cui gli eventi B_i sono 3.

$$\left[P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \mid B_1)\cdot P(B_1)}{P(A \mid B_1)\cdot P(B_1) + P(A \mid B_2)\cdot P(B_2) + P(A \mid B_3)\cdot P(B_3)}\right]$$

10. Un'industria produce lampadine utilizzando tre diversi impianti, che indichiamo con *A*, *B* e *C*, ciascuno dei quali produce lo stesso numero di lampadine. Alla fine della giornata le lampadine vengono poste in uno stesso deposito e risultano indistinguibili. Le percentuali di lampadine difettose provenienti dai diversi impianti sono 2%, 4% e 1% rispettivamente. Determinare la probabilità che, scegliendo una lampadina a caso fra quelle prodotte questa sia difettosa e a) prodotta dall'impianto *B*; b) non sia stata prodotta dall'impianto *A*; c) prodotta dall'impianto C. [≈57,1%; ≈71,4%; ≈14,3%]

11. Con riferimento al problema precedente, le percentuali di lampadine difettose prodotte da ciascun impianto siano rispettivamente m_1, m_2 e m_3 (con $m_1 + m_2 + m_3 < 1$). Determinare la probabilità che una lampadina scelta a caso sia difettosa e sia stata prodotta dall'impianto *A*. $\left[\frac{m_1}{m_1+m_2+m_3}\right]$

12. Con riferimento all'esercizio 10, si supponga che il tasso di produzione non sia uguale per tutti gli impianti, ma sia rispettivamente nelle seguenti proporzioni: metà per *A*, un terzo per *B* e un sesto per *C*. Restando inalterata la percentuale di lampadine difettose prodotte da ciascun impianto, determinare la probabilità che trovata una lampadina difettosa questa sia stata prodotta rispettivamente da uno dei tre impianti. [40%; ≈ 53,3%; ≈ 6,7%]

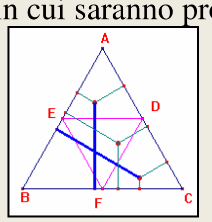
13. Rispondere al problema precedente nell'ipotesi che le percentuali di produzione di ciascun impianto siano p_1, p_2 e p_3 (con $p_1 + p_2 + p_3 = 1$) e le rispettive percentuali di lampadine difettose siano m_1, m_2 e m_3 (con $m_1 + m_2 + m_3 < 1$). $\left[\frac{m_1\cdot p_1}{m_1\cdot p_1+m_2\cdot p_2+m_3\cdot p_3}\right]$

14. Da un'indagine statistica svolta in una università statunitense si è stabilito che il 63% degli studenti è americano, il 24% europeo, il 3% africano e il resto asiatico. Le percentuali di studenti maschi per ciascuna delle precedenti aree geografiche sono rispettivamente del 47%, 62%, 84% e 64%. Con quale probabilità uno studente maschio scelto a caso fra quelli iscritti all'Università, proviene da ciascuno dei continenti? [≈ 55,4%; ≈ 27,9%; ≈ 4,8%; ≈ 12%]

Intervallo matematico

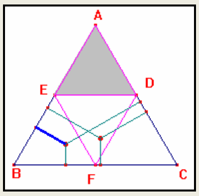
- La probabilità non è transitiva, nel senso che non sempre se $P(A) > P(B)$ e $P(B) > P(C)$ allora $P(A) > P(C)$. Consideriamo il seguente esempio. Abbiamo 4 strani dadi, le cui facce hanno i seguenti punteggi: A: {0, 0, 4, 4, 4, 4} B: {3, 3, 3, 3, 3, 3} C: {2, 2, 2, 2, 6, 6} D: {1, 1, 1, 5, 5, 5}. Facciamo il seguente gioco fra due persone. Ciascuno sceglie uno dei dadi e lo lancia, vince chi ha il punteggio più alto. Se vengono scelti i dadi indicati con A e B, avremo che chi ha scelto A ha una probabilità di vincere sull'altro pari al numero di volte in cui in A esce il 4 e in B qualsiasi cosa, cioè $\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$. Scegliendo i dadi B e C, la probabilità che vinca B è data dal numero di volte che nel dado C non esca il 6 e in B qualsiasi cosa, cioè ancora $\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$. Lanciando C e D, vince chi sceglie C tutte le volte in cui esce 6 in C e in D qualsiasi cosa (12 volte) oppure esce 2 in C e 5 in D (altre 12 volte), quindi ancora una volta la probabilità è $\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$. Quindi è più probabile che A vinca su B, che B vinca su C e che C vinca su D. Pensiamo perciò che, grazie alla transitività, sia anche più probabile che A vinca su D. Ma A vince su D solo se in A esce il 4 e in D esce 1, il che accade in un totale di 12 casi, perciò la probabilità è solo di $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$.

Adesso vogliamo vedere un applicazione di *probabilità geometrica*.

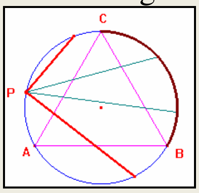
- *Con quale probabilità un bastoncino di spezza in tre pezzi che possono poi costituire i lati di un triangolo*? La risposta dipende dal modo di spezzare il bastoncino. Infatti, supponiamo prima che spezzare il bastoncino equivalga a scegliere due punti su di esso in cui saranno prodotte le fratture. Allora la probabilità può trovarsi considerando la seguente figura. 

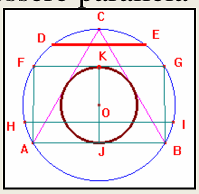
Abbiamo un triangolo equilatero *ABC*, la cui altezza rappresenta il bastoncino da spezzare. Non è difficile mostrare che tale altezza è uguale alla somma dei segmenti di perpendicolare condotti da un qualsiasi punto interno al triangolo ai suoi lati. Ora, se il punto è scelto all'interno del triangolo equilatero *DEF*, formato unendo i punti medi dei lati di *ABC*, allora i tre sementi costituiranno un triangolo, perché è soddisfatta la disuguaglianza triangolare. Se invece il punto viene scelto all'esterno di tale triangolo, ciò non è più possibile, dato che uno dei tre lati (quello dal bordo ingrassato) è maggiore della somma degli altri due. Quindi la probabilità è data dal rapporto delle aree dei due triangoli equilateri. Poiché *DEF* è un quarto di *ABC*, anche la probabilità cercata è $\frac{1}{4}$.
- Se invece rompiamo prima il bastoncino in due parti e poi scelta a caso una delle due parti la rompiamo a caso, la risposta è diversa. Infatti, se dei primi due pezzi scegliamo il lato più corto per romperlo ulteriormente, evidentemente non possiamo costruire alcun triangolo. Se scegliamo il pezzo più lungo invece, supposto che il pezzo più corto sia rappresentato dal segmento di perpendicolare che a noi appare verticale, nella figura seguente, una parte, quella grigia, risulta non utilizzabile, cioè il punto in cui spezzare il bastoncino più lungo non vi può appartenere. Ancora una volta la regione accettabile è il triangolo *DEF*, che adesso però rappresenta solo $\frac{1}{3}$ della zona accessibile (il quadrilatero *BCDE*). Dato

che il bastoncino più lungo si sceglie con probabilità $\frac{1}{2}$, la probabilità complessiva è adesso $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

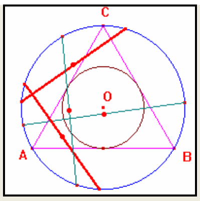


Altro esempio di probabilità geometrica è il cosiddetto paradosso di Bertrand.

- Consideriamo una circonferenza all'interno della quale inscriviamo un triangolo equilatero. Poi tracciamo una corda a caso, qual è la probabilità che tale corda abbia una misura non inferiore a quella del lato del triangolo equilatero? La risposta dipende dal modo di procedere. Infatti, prima supponiamo che per tracciare la corda si fissi un punto sulla circonferenza e sia la scelta dell'altro estremo a determinare la misura della corda. Quindi la casualità della scelta della corda dipende dalla casualità della scelta del suo secondo estremo. Ci riferiamo alla seguente figura, in cui *ABC* è il triangolo equilatero e *P* è il punto scelto sulla circonferenza. 

Per capire come affrontare il problema, supponiamo che il punto *P* coincida con uno dei vertici del triangolo equilatero, per esempio con *A*. Allora se come secondo estremo della corda scegliamo un punto che appartiene all'arco *Bc*, diverso da *C* e da *B*, la misura della corda sarà chiaramente sempre inferiore alla misura della corda *BC*. Quindi i casi favorevoli sono costituiti numericamente dai punti dell'arco *BC*, ma tali punti sono infiniti, quindi non ha senso. Consideriamo perciò la misura dell'arco, che è $\frac{1}{3}$ della circonferenza. I casi possibili sono invece tutti i punti della circonferenza. Infine la probabilità cercata è $\frac{1}{3}$.
- Adesso cambiamo il punto di vista. Invece di fissare un estremo della corda fissiamo la sua direzione, ossia supponiamo per esempio che la corda sia tracciata a caso ma in modo da essere parallela al lato *AB* di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza. Lo illustriamo in figura. 

In questo caso ci conviene considerare la circonferenza inscritta in *ABC*. La corda parallela ad *AB* e tangente alla circonferenza inscritta misura quanto *AB*, poiché il quadrilatero *ABGF* è un rettangolo. Allora è facile capire che solo se la corda congiunge due punti appartenenti agli archi *FA* e *BG* rispettivamente, ha misura non inferiore a *AB*. Dobbiamo quindi calcolare le misure degli archi *GF* e *AB*. Per rendere più semplice il procedimento, consideriamo la misura del segmento *KJ*. *L*'altezza *CJ* del triangolo viene divisa da *FG* nel rapporto $\frac{1}{3}$. Questo fatto è dovuto a quel che sappiamo sul baricentro *O* del triangolo *ABC* e al fatto che *KO* e *OH* sono raggi della stessa circonferenza. Allora possiamo considerare come la probabilità cercata, il rapporto fra la misura del segmento *KJ* (casi favorevoli) e la misura del diametro (casi possibili). In questo caso perciò la probabilità varrebbe $\frac{1}{2}$.
- Possiamo considerare ancora un'altra possibilità ossia che si consideri il punto medio della corda. In questo caso solo le code il cui punto medio è interno al cerchio inscritto nel triangolo risolvono il problema. Poiché l'area di questo cerchio è $\frac{1}{4}$ dell'area del cerchio grande, dato che il suo raggio è metà del raggio del cerchio maggiore, anche la probabilità cercata è $\frac{1}{4}$. Quindi il fatto che il risultato non sia assoluto ma dipenda dal punto di vista appare paradossale, ciò è dovuto solo alla mancanza di chiarezza



su ciò che si intende per corda casuale.

Attività

1. Mostrare che ogni quaterna di dadi che si ottiene da quelli mostrati aggiungendo o moltiplicando tutte le facce per uno stesso numero, è non transitiva.
2. Mostrare che la quaterna di dadi A: {1, 6, 6, 6, 11, 11} B: {2, 5, 5, 5, 10, 10} C: {4, 4, 4, 8, 9, 9} D: {{3, 3, 7, 7, 7, 12} è non transitiva.

L'angolo di Derive

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%208/8-4-1.exe puoi scaricare un'applicazione che ti mostra come simulare problemi probabilistici con Derive. Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%208/8-4-1.dfw ti scarichi il file.

L'angolo di Excel

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%208/8-4-2.exe puoi scaricare un'applicazione che ti mostra come simulare problemi probabilistici con Excel.
Scarichi il file Excel su
http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%208/8-4-2.xlsx

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

1. Dimostrare che il numero di eventi (inclusi quello impossibile e quello certo) che si possono formare su uno spazio di eventi con N elementi è pari a $2N$.
2. Dimostrare che il numero di modi di suddividere un insieme N elementi in k sottoinsiemi ordinati e a due a due disgiunti tali che ciascuno di essi abbia h_1, h_2, …, h_k, elementi, con $h_1 + h_2 + \ldots + h_k = N$, è uguale a $\binom{N}{h_1}\cdot\binom{N-h_1}{h_2}\cdot\binom{N-h_1+h_2}{h_3}\cdot\ldots\cdot\binom{N-h_1-h_2-\ldots-h_{k-1}}{h_k}$.
3. Dimostrare che se in un'urna abbiamo N sfere numerate da 1 a N, la probabilità che estraendo in sequenza le palline a caso, vi siano esattamente $h < N$ accoppiamenti è $\frac{1}{h!}\cdot\sum_{k=0}^{N-h}\frac{(-1)^k}{k!}$.
4. Dimostrare che se in un'urna abbiamo N sfere numerate da 1 a N, la probabilità che estraendo in sequenza le palline a caso, vi sia almeno 1 accoppiamento è $\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}$.
5. CAS In una fabbrica si effettuano delle campionature di controllo, scegliendo a caso alcuni dei prodotti e verificando se sono difettosi; se almeno il 10% del campione verificato è difettoso tutta la produzione viene distrutta. Se su 1000 pezzi prodotti quelli difettosi sono 75 ed effettuiamo il controllo su 100 pezzi scelti a caso, con che probabilità distruggeremo tutta la produzione? [≈ 20,7%]
6. Una moneta ha un difetto di fabbricazione che fa sì che la sua probabilità di ottenere testa lanciandola è di $\frac{2}{3}$. Determinare la probabilità che lanciando 50 volte la moneta, si ottengano un numero pari di teste. [50%]
7. A, B e C sono ai vertici di un triangolo equilatero, ciascuno con in mano una pistola. A colpisce sempre il bersaglio, B colpisce con una probabilità dell'80%, C con una del 50%. A sorte ciascuno dei tre spara a uno degli altri due, ammettendo che ciascuno dei tre adotti la strategia a egli favorevole e che la gara finisce quando solo uno dei tre sopravvive, chi ha più probabilità di uscire vivo? [*C*]
8. Con riferimento al quesito precedente, determinare le probabilità di sopravvivenza dei tre. *Suggeri-*

mento: attenzione al fatto che per B e C si devono considerare infiniti casi.

$$\left[P(A)=\frac{1}{10};P(B)=\frac{8}{45};P(C)=\frac{47}{90}\right]$$

9. In un gioco equo in cui si lanciano n monete regolari quanto viene pagata la posta se escono più teste che croci?

$$\left[\begin{cases} 2 & n \text{ dispari} \\ \dfrac{2^{2k+1}}{2^{2k}-\binom{2n}{n}} & n \text{ pari}\end{cases}\right]$$

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi
I temi completi dei Licei Scientifici per gli ultimi anni sono scaricabili, con soluzione, dal sito

http://matdidattica.altervista.org/esamidistato.htm

1. (Liceo scientifico PNI 1992/93) Un imputato innocente deve essere giudicato da una giuria composta da tre giurati il cui verdetto finale è raggiunto a maggioranza. I tre giurati A, B e C assumono la loro decisione indipendentemente. A e B hanno probabilità p ($0 < p < 1$) di decidere per l'assoluzione, mentre il giurato C decide in base al risultato ottenuto nel lancio di una moneta. a) Si calcoli la probabilità che l'imputato sia assolto. b) Supponendo di sostituire il giurato C con un altro giurato D che ha probabilità $p' \neq p$ ($0 < p' < 1$) di decidere per l'assoluzione, si verifichi che la probabilità di assoluzione per l'imputato è maggiore che nel caso precedente se e solo se $p' > \frac{1}{2}$. c) Qualora gli imputati siano tre e siano giudicati, indipendentemente tra di loro, dalle giurie prima considerate, si esprima la probabilità dei seguenti eventi, E_1: *la giuria composta da A, B, C ne assolve due su tre*, E_2 : *la giuria composta da A, B, D ne assolve tre su tre*; E_3 : *la giuria composta da A, B, D assolve almeno un imputato*. d) In particolare per $p = \frac{3}{4}$ si determini il valore di p' in modo che sia $P(E_1) = P(E_2)$.
[a) p; b) $p^2 + 2pp' \cdot (1 - p)$; c) $p(E_1) = 3p^2 \cdot (1 - p)$, $p(E_2) = [p^2 + 2pp' \cdot (1 - p)]^3$, $p(E_3) = 1 - \{1 - [p^2 + 2pp' \cdot (1 - p)]\}^3$; d) $p' = \frac{1}{2}$]
2. (Liceo scientifico suppletiva PNI 1992/93) Una macchina produce pezzi meccanici. Ogni pezzo prodotto ha una probabilità $0 < p < 1$ di essere funzionante e probabilità $q = 1 - p$ di essere difettoso. a) Presi a caso k pezzi prodotti si esprima la probabilità dei seguenti eventi: E_1: *tutti i k pezzi sono funzionanti*; E_2: *uno solo dei k pezzi è difettoso*; E_3: *almeno uno dei k pezzi è difettoso*. b) Per ogni k si determini p in modo tale che $P(E_1) = P(E_2)$. c) Per $p = \frac{5}{6}$ si calcoli la probabilità dell'evento E_4 : *il primo pezzo difettoso è il* 10° *prodotto dal momento in cui la macchina entra in funzione*. d) Per $p = \frac{9}{10}$ si calcoli la probabilità dell'evento E_5 : *si ha al massimo* 1 *pezzo difettoso nei primi* 10 *prodotti*. [a) $P(E_1) = p^k$; $P(E_2) = k \cdot p^{k-1} \cdot (1 - p)$; $P(E_3) = 1 - p^k$; b) $\frac{k}{k+1}$; c) $\frac{5^9}{6^{10}}$; d) $\frac{19 \cdot 9^9}{10^{10}}$]
3. (Liceo scientifico PNI 1995/96) Paolo e Giovanni sono due amici appassionati di tiro con l'arco: Paolo colpisce il centro del bersaglio nel 75% dei casi, Giovanni nell'80%. Decidono di fare una gara osservando le seguenti regole: lanceranno una moneta per decidere chi tirerà per primo: se esce testa sarà Paolo, se esce croce sarà Giovanni; tireranno a turno e vincerà chi per primo farà centro. Il candidato: a) calcoli la probabilità che Giovanni vinca al quinto tiro; [0,001] b) calcoli la probabilità che Paolo vinca al quarto tiro; [≈ 0,037] c) se in un certo tiro fissato, ad esempio il quindicesimo, si ottiene centro per la prima volta, calcoli la probabilità che a tirare sia stato Paolo. [$\approx 2{,}9 \cdot 10^{-10}$]
4. (Liceo scientifico PNI 2001/02) Il seguente è uno dei celebri problemi del *Cavaliere di Mèré* (1610 –

1685), amico di Blaise Pascal: giocando a dadi è più probabile ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado, oppure almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi? [≈ 51,8%; ≈ 49,1%]

5. (Liceo scientifico PNI 2001/02) Assumendo che i risultati X, 1, 2, delle 13 partite del Totocalcio siano equiprobabili, calcolare la probabilità che tutte le partite, eccetto una, terminino in parità. [≈ 1,18%]
6. (Liceo scientifico PNI 2002/03) Tre scatole A, B e C contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose. A contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose, B ne contiene 500 con il 20% difettose e C ne contiene 1000 con il 10% difettose. Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Quale è la probabilità che essa sia difettosa? [≈ 11,7%]

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente problema assegnato agli esami di Liceo scientifico PNI 2004/05.
Quale è la probabilità di ottenere 10 *lanciando due dadi? Se i lanci vengono ripetuti quale è la probabilità di avere due* 10 *in sei lanci? E quale è la probabilità di avere almeno due* 10 *in sei lanci?*

I casi possibili lanciando due dadi sono ovviamente $6^2 = 36$. Il punteggio 10 si ottiene solo come 4 + 6, 5 + 5 e 6 + 4. Quindi abbiamo 3 casi favorevoli e la probabilità è 3/36 = 1/12 ≈ 8,3%.
Se lanciamo per 6 volte avremo a che fare con prove bernoulliane indipendenti ripetute, in cui il successo ha probabilità 1/12, l'insuccesso 11/12, quindi la probabilità di avere due successi è

$$\binom{6}{2}\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^2\cdot\left(\frac{11}{12}\right)^4=\frac{73205}{995328}\approx 7,4\%$$

Averne almeno 2 equivale al complementare di averne 0 o 1. La probabilità è perciò

$$1-\binom{6}{0}\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^0\cdot\left(\frac{11}{12}\right)^6-\binom{6}{1}\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^1\cdot\left(\frac{11}{12}\right)^5=\frac{248117}{2985984}\approx 8,3\%$$

7. (Liceo scientifico PNI 2005/06) Un tiratore spara ripetutamente ad un bersaglio; la probabilità di colpirlo è di 0,3 per ciascun tiro. Quanti tiri deve fare per avere probabilità maggiore o uguale di 0,99 di colpirlo almeno una volta? [13]
8. (Liceo scientifico PNI 2006/07) Si scelga a caso un punto *P* all'interno di un triangolo equilatero il cui lato ha lunghezza 3. Si determini la probabilità che la distanza di *P* da ogni vertice sia maggiore di 1. [≈ 60%]
9. (Liceo scientifico PNI 2007/08) Siano dati un cono equilatero e la sfera in esso inscritta. Si scelga a caso un punto all'interno del cono. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno alla sfera. $\left[\frac{5}{9}\right]$
10. (Liceo scientifico PNI 2007/08) In una classe composta da 12 maschi e 8 femmine, viene scelto a caso un gruppo di 8 studenti. Qual è la probabilità che, in tale gruppo, vi siano esattamente 4 studentesse? [≈ 27,5%]
11. (Liceo scientifico PNI 2008/09) Una moneta da 2 euro (il suo diametro è 25,75 *mm*) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle quadrate di lato 10 *cm*. Quale è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella? (cioè non tagli i lati dei quadrati). [≈ 55%]
12. (Liceo scientifico PNI 2010/11) Un test di esame consta di dieci domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere l'unica risposta corretta fra quattro alternative. Qual è la probabilità che, rispondendo a caso alle dieci domande, almeno due risposte risultino corrette? [≈ 75,6%]
13. (Liceo scientifico PNI 2011/12) Una moneta da 1 euro (il suo diametro è 23,25 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle esagonali (regolari) di lato 10 cm. Quale è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella (cioè non tagli i lati degli esagoni)? [≈ 78%]
14. (Liceo scientifico PNI 2011/12) Un'azienda industriale possiede tre stabilimenti: A, B e C. Nello stabilimento A si produce la metà dei pezzi, e di questi il 10% sono difettosi. Nello stabilimento B si produce un terzo dei pezzi, e il 7% sono difettosi. Nello stabilimento C si producono i pezzi rimanenti, e il 5% sono difettosi. Sapendo che un pezzo è difettoso, con quale probabilità esso proviene dallo stabilimento A? [≈ 61%]
15. (Liceo scientifico PNI 2012/13) In un gruppo di 10 persone il 60% ha occhi azzurri. Dal gruppo si se-

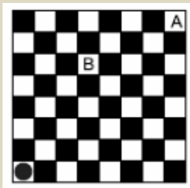
lezionano a caso due persone. Qual è la probabilità che nessuna di esse abbia occhi azzurri? $\left[\frac{2}{15}\right]$

16. (Liceo scientifico PNI 2013/14) 20 palline sono poste in un'urna, 5 per ogni colore: rosso, verde, giallo e bianco. Dall'urna si estraggono a caso, senza reimbussolamento, 3 palline. Si valutino le seguenti probabilità: esattamente 1 pallina è rossa; le 3 palline sono di colori differenti. $\left[\frac{35}{76} \approx 46\%; \frac{25}{57} \approx 44\%\right]$
17. (Liceo scientifico PNI 2013/14) La *zara* è un gioco d'azzardo di origine araba che conobbe particolare fortuna in Italia in epoca medievale – ne parla anche Dante nella *Divina Commedia* – e si giocava con 3 dadi. Si confronti la probabilità di ottenere in un lancio la somma 9 con quella di ottenere 10. $\left[p_9 = \frac{25}{216}; p_{10} = \frac{27}{216}\right]$
18. (Liceo scientifico 2014/15) Lanciando una moneta sei volte qual è la probabilità che si ottenga testa "al più" due volte? Qual è la probabilità che si ottenga testa "almeno" due volte? $\left[\frac{11}{32}; \frac{57}{64}\right]$
19. (Liceo scientifico 2014/15) I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, 6 *cm*, 6 *cm* e 5 *cm*. Preso a caso un punto *P* all'interno del triangolo, qual è la probabilità che *P* disti più di 2 *cm* da tutti i tre vertici del triangolo? [≈ 0,54]
20. Un test è costituito da 10 domande a risposta multipla, con 4 possibili risposte di cui solo una è esatta. Per superare il test occorre rispondere esattamente almeno a 8 domande. Qual è la probabilità di superare il test rispondendo a caso alle domande? $\left[\frac{436}{4^{10}} \approx 0{,}04\%\right]$

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente problema assegnato agli esami di Liceo scientifico 2015/16.

Una pedina è collocata nella casella in basso a sinistra di una scacchiera, come in figura. Ad ogni mossa, la pedina può essere spostata o nella casella alla sua destra o nella casella sopra di essa. Scelto casualmente un percorso di 14 mosse che porti la pedina nella casella d'angolo opposta A, qual è la probabilità che essa



passi per la casella indicata con B?

Ogni percorso di 14 mosse si ottiene con 7 mosse a destra (D) e 7 mosse in alto (A), quindi un generico percorso è una permutazione della "parola" DDDDDDDAAAAAAA, perciò i possibili percorsi sono $\frac{14!}{7!\cdot 7!} = 3432$. I percorsi che dalla pedina portano a B, sono tanti quante le permutazioni della parola DDDAAAAA, cioè sono $\frac{8!}{3!\cdot 5!} = 56$. Per ognuno di questi percorsi ci sono altri $\frac{6!}{4!\cdot 2!} = 15$ percorsi che portano ad A (permutazioni di DDDDAA). Infine la probabilità è $\frac{56 \cdot 15}{3432} \approx 24{,}5\%$.

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
AMC = American Mathematical Contest
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest
MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM
RICE = Rice University Mathematics Tournament

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere un quesito assegnato nel 2007 agli HSMC. *Lanciamo una moneta non truccata per* 2007 *volte. Indichiamo con p_1 la probabilità di ottenere un numero di teste doppio del numero di croci e con p_2 la probabilità di ottenere un numero di croci pari a* 1338. *Trovare* $\frac{p_1}{p_2}$. p_1 è la probabilità di ottenere, su 2007 lanci, 669 croci, quindi: $p_1 = \frac{\binom{2007}{669}}{2^{2007}}$. Mentre avremo: $p_2 = \frac{\binom{2007}{1338}}{2^{2007}}$. I due valori sono uguali perché $\binom{2007}{669} = \binom{2007}{2007-669} = \binom{2007}{1338}$. Quindi il rapporto richiesto è 1.

1. (AHSME 1970) Consideriamo l'insieme A dei numeri naturali di 5 cifre in cui la somma delle cifre è 43. con quale probabilità un numero scelto a caso da A è divisibile per 11? $\left[\frac{1}{5}\right]$
2. (AHSME 1973) Abbiamo due carte, una rossa da entrambi i lati e l'altra rossa da una parte e nera dall'altra. Scegliamo a caso una delle due carte e la poniamo sul tavolo, se la parte rivolta verso di noi è rossa, con quale probabilità è rossa anche l'altra parte? $\left[\frac{2}{3}\right]$
3. (AHSME 1974) Lanciamo un dado regolare a forma di cubo per 6 volte, con quale probabilità otteniamo per almeno cinque volte un punteggio non inferiore a 5? $\left[\frac{13}{729}\right]$
4. (AHSME 1976) Si consideri l'insieme dei punti che, nel piano cartesiano ortogonale, hanno entrambe le coordinate intere che in valore assoluto non superano 4. Se ne scelga uno a caso, qual è la probabilità che il punto scelto disti dall'origine non più di due unità? Suggerimento: si consideri la circonferenza con centro nell'origine e raggio 2 unità $\left[\frac{13}{81}\right]$
5. (AHSME 1977) Lanciamo tre dai regolari a forma di cubo per tre volte, con quale probabilità otteniamo tre numeri che possano essere messi in modo da costituire una progressione aritmetica di ragione 1? $\left[\frac{1}{9}\right]$
6. (AHSME 1979) Consideriamo l'insieme A delle coppie di numeri interi in valore assoluto non superiori a 6. Scelta una coppia (b, c) a caso da A, con quale probabilità l'equazione $x^2 + bx + c = 0$ non ha soluzioni reali? $\left[\frac{111}{121}\right]$
7. (AHSME 1986) Dall'insieme dei primi 10 numeri naturali scegliamo sei numeri a caso e li ordiniamo secondo grandezza, con che probabilità il secondo più piccolo è 3? $\left[\frac{1}{3}\right]$
8. (AHSME 1988) Dall'insieme dei primi 9 numeri naturali scegliamo due numeri a caso, anche uguali fra loro, e li sommiamo, fra le dieci cifre quale è più probabile che costituisca la cifra delle unità di tale somma? [0]
9. (AHSME 1990) Dall'insieme dei primi 100 numeri naturali scegliamo due numeri a caso, a e b, quindi formiamo il numero $3^a + 7^b$. Con quale probabilità la sua cifra delle unità è 8? $\left[\frac{3}{16}\right]$

10. (AHSME 1995) Se a, b e c sono 3 numeri, non necessariamente distinti, scelti a caso e con reimmissione dall'insieme {1, 2, 3, 4, 5}, determinare la probabilità che $ab + c$ sia pari. $\left[\frac{59}{125}\right]$

11. (AHSME 1996) 4 punti distinti, A, B, C, e D, sono scelti a caso da un insieme di 1996 punti posti a uguali distanze su una circonferenza. Con che probabilità la corda AB interseca la corda CD? $\left[\frac{1}{3}\right]$

12. (AHSME 1996) Un dado regolare a 6 facce è lanciato 3 volte. Se la somma dei punteggi dei primi due lanci uguaglia il punteggio del terzo, determinare la probabilità che si sia ottenuto almeno un 2. $\left[\frac{8}{15}\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere un quesito assegnato nel 2008 agli HSMC. *Adriel colleziona palline blu e palline verdi. Le blu sono un numero dell'insieme* {2, 5, 6, 7, 11, 13}. *Se prendiamo a caso e contemporaneamente due palline dalla sua collezione, la probabilità che siano di diversi colori è* 0,5. *Quante sono le palline blu*?

Indichiamo con b il numero delle palline blu e con v quello delle verdi, per un totale di $b + v$ palline. Il numero di modi in cui possiamo scegliere due palline a caso e contemporaneamente è $\binom{b+v}{2}$. Il numero di casi favorevoli, cioè i modi di scegliere due palline di diverso colore, è invece $b \cdot g$. Quindi la probabilità è

$$\frac{b\cdot v}{\binom{b+v}{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{b\cdot v}{\frac{(b+v)\cdot(b+v-1)}{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow 4\cdot b\cdot v=(b+v)\cdot(b+v-1)\Rightarrow,$$

$$\Rightarrow b^2-2\cdot b\cdot v+v^2-b-v=0\Rightarrow v^2-(2\cdot b+1)\cdot v+b^2-b=0$$

Questa equazione, anche se in 2 incognite, si può considerare come una parametrica nell'incognita b, che è un numero naturale, quindi il discriminante deve essere un quadrato perfetto, cioè:

$$\Delta=(2b+1)^2-4\cdot(b^2-b)=4b^2+4b+1-4b^2+4b=8b+1$$

deve essere un quadrato perfetto. L'unico fra i valori che può assumere b per cui ciò accade è $b = 6$, nel qual caso $8b + 1 = 49$ e l'equazione diventa: $v^2-13\cdot v+30=0\Rightarrow v=\frac{13\pm 7}{2}=\prec\begin{matrix}10\\3\end{matrix}$. Quindi ci sono 6 palline blu e 3 o 10 verdi.

13. (AHSME 1996) Un'urna contiene palline di 4 colori: rosso, bianco, blu e verde. Quando estraiamo 4 palline senza restituzione, I seguenti eventi sono ugualmente probabili: a) *l'estrazione di* 4 *palline rosse*; b) *l'estrazione di* 1 *pallina bianca e di* 3 *rosse*; c) *l'estrazione di* 1 *pallina bianca*, 1 *blu e* 2 *rosse* d) *l'estrazione di* 4 *palline tutte di diverso colore*. Quante sono al minimo le palline nell'urna? [B]

A) 19 B) 21 C) 46 D) 69 E) più di 69

14. (AHSME 1999) Un tetraedro le cui facce sono tutte triangoli equilateri ha una sfera inscritta e una circoscritta. Per ciascuna delle 4 facce c'è una sfera tangente esternamente alla faccia nel suo centro e alla sfera circoscritta. Un punto P è scelto a caso all'interno della sfera circoscritta. Con che probabilità P è interno a una delle 5 sfere più piccole? $\left[\frac{5}{27}\right]$

15. (AMC 2000) Il professor Gamble compra un biglietto di una lotteria, il cui numero è formato da 6 numeri distinti, scelti tra 1 e 46 compresi. Egli sceglie il biglietto in modo che la somma dei logaritmi in base 10 dei 6 numeri sia un intero. Sapendo che anche il numero estratto verifica la stessa proprietà, con che probabilità il Professor Gamble ha scelto il biglietto vincente? [25%]

16. (AMC 2001) Un punto P è scelto a caso nell'interno di un pentagono di vertici $A \equiv (0, 2)$, $B \equiv (4, 0)$, $C \equiv (2\pi +1, 0)$, $D \equiv (2\pi +1, 4)$, $E \equiv (0, 4)$. Qual è la probabilità che $A\hat{P}B$ sia ottuso? $\left[\frac{3}{8}\right]$

17. (HSMC 2003) Due numeri distinti sono scelti a caso dai primi 6 naturali. Con che probabilità il più piccolo diviso per il più grande rappresenta un numero decimale limitato? [60%]

18. (HSMC 2003) Un numero è scelto a caso fra tutti i numeri interi di 4 cifre. con che probabilità il numero sarà divisibile per 2, 3, 4, e 5? $\left[\dfrac{1}{60}\right]$

19. (HSMC 2006) Si costruisca una griglia formata da 9 punti, su 3 righe e 3 colonne. Quindi si scelgano a caso 3 punti, con che probabilità essi saranno allineati? $\left[\dfrac{2}{21}\right]$

20. (Rice 2006) La Rice University e la Stanford University preparano domande e corrispondenti soluzioni per una gara di matematica. Il gruppo della Rice scrive 10 domande l'ora e commette un errore nel calcolo delle soluzioni il 10% delle volte. Il gruppo Stanford scrive 20 problemi l'ora e sbaglia le soluzioni il 20% delle volte. Ogni gruppo lavora 10 ore e poi manda i problemi a Smartie che li controlla. Però Smartie non è così brava, quindi solo il 75% dei problemi che pensa siano sbagliati lo sono realmente. Inoltre crede che abbiano soluzioni errate il 20% delle domande Rice e il 10% di quelle Stanford. Qual è la probabilità che Smartie ritenga errata la soluzione corretta di un problema? $\left[\dfrac{1}{25}\right]$

21. (Rice 2006) Un cliente va in un supermercato- la probabilità che compri (a) pane è 60%, (b) latte è 50% (c) pane e latte è 30%. Con che probabilità il cliente comprerà almeno uno fra latte e pane? [80%]

Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnato nel 2003 agli HSMC.
5 cifre sono scelte a caso. Con che probabilità l'ultima cifra scelta è uguale a una delle prime 4?
Le cifre sono 10. Possiamo sceglierne 5 anche ripetute in $D^r_{10,5} = 10^5$ modi. Calcoliamo la probabilità cercata come la complementare del fatto che l'ultima prima sia diversa da tutte le altre. Scelte le prime 4, per ogni scelta la quinta la possiamo scegliere in $D^r_{9,4} = 9^4$ modi perché sia diversa da queste. Poiché la cifre sono 10, in effetti i casi favorevoli sono $10 \cdot 9^4$ e quindi la probabilità che l'ultima cifra sia diversa dalle precedenti è $\dfrac{10 \cdot 9^4}{10^5} = \left(\dfrac{9}{10}\right)^4 = 0,9^4 = 0,6561$. La probabilità cercata è 1 – 0,6561 = 0,3439.

22. (Rice 2006) Il polinomio $-400x^5 + 26660x^4 - 3602x^3 + 1510x^2 - 18x - 90$ ha 5 radici razionali. Supponiamo che si tiri ad indovinare una di queste radici (tenuto conto del teorema che stabilisce che le radici razionali di un polinomio sono fra i divisori del rapporto fra il termine noto e il coefficiente del monomio di grado massimo), con che probabilità si può determinare? $\left[\dfrac{5}{144}\right]$

23. (Rice 2006) Un aereo ha tre motori che funzionano indipendentemente. La probabilità che un motore si guasti è 1%. Con quale probabilità il volo si concluderà regolarmente se perché accada ciò basta almeno un motore funzionante? [99,9%]

24. (Rice 2006) Una compagnia assicurativa crede che la gente possa dividersi in 2 classi: quelli che sono portati per gli incidenti e quelli che non lo sono. Le loro statistiche mostrano che la gente della prima classe ha un incidente annuale con probabilità 40%, mentre questa probabilità è 20% per gli altri. Dato che il 30% della gente sono del primo tipo, con che probabilità un neo-assicurato avrà un incidente nel suo primo anno di assicurazione? [26%]

Lavoriamo insieme

Questo quesito è stato assegnato agli AHSME del 1996.
Un dado standard a sei facce è lanciato tre volte. Sapendo che la somma dei primi due lanci è uguale al punteggio del terzo lancio, qual è la probabilità che si sia ottenuto almeno un 2?
Ci sono i seguenti 15 modi in cui il terzo lancio possa essere somma dei primi due: (1,1,2) (2,1,3) (3, 1, 4) (4, 1, 5) (5, 1, 6) (1,2,3) (2,2,4) (3,2,5) (4,2,6) (1, 3, 4) (2,3,5) (3, 3, 6), (1, 4, 5) (2,4,6) (1, 5, 6). Poiché i tre lanci sono indipendenti, tutti i 15 esiti sono equiprobabili. Come si vede vi è almeno un 2 in 8 di questi eventi, quindi la probabilità richiesta è $\dfrac{8}{15}$.

25. (Rice 2007) Mary mette una pallina rossa e una blu in una scatola e due rosse in un'altra scatola. Poi dimentica in quale scatola ha messo le palline, perciò estrae una pallina da una scatola e scopre che è rossa, con quale probabilità la pallina rimasta nella scatola è blu? $\left[\frac{1}{3}\right]$

26. (Rice 2007) La squadra Rice ha probabilità $\frac{1}{3}$ di vincere una certa gara matematica. Se la Rice partecipa a 4 gare, con che probabilità vincerà almeno una volta? $\left[\frac{65}{81}\right]$

27. (Rice 2007) Tina scrive una lettera per ciascuna delle sue 4 amiche. Poi prepara e intesta una busta per ciascuna lettera, ma poi mette le lettere a caso nelle buste. Con che probabilità nessuna delle amiche riceverà la lettera a ella destinata? $\left[\frac{3}{8}\right]$

28. (HSMC 2007) Lanciamo una moneta regolare 2007 volte e registriamo la faccia ottenuta: testa o croce. Indichiamo con p_1 la probabilità che il numero di teste, alla fine dei lanci, sia il doppio del numero di croci e con p_2 la probabilità che il numero di croci sia 1338. Determinare $\frac{p_1}{p_2}$. [1]

29. (Rice 2007) Un numero x è scelto a caso nell'intervallo [0; 1], e un altro numero y in [−1; 1]. Determinare la probabilità che sia $x > y$. $\left[\frac{3}{4}\right]$

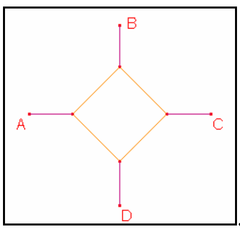
30. (Rice 2007) Andy e Bob giocano a ping-pong. A un certo punto Andy ha 17 punti e Bob 18. In ogni giocata, Andy ha il 50% di probabilità di fare un punto. Vince chi arriva prima a 21 punti. Con che probabilità Andy vincerà? $\left[\frac{11}{32}\right]$

31. (HSMC 2007) Un esperimento consiste nello scegliere, con reimmissione, un intero a caso fra i numeri da 1 a 9 inclusi. Se M indica un multiplo di 3 e N un numero non multiplo di 3, quale delle seguenti successioni ha più probabilità di essere scelta? a) MNNMN b) NMMN c) NMMNM d) NNMN [d]

32. (Rice 2007) Scott ha bevuto troppo la scorsa sera, così esce dal dipartimento di matematica, posto in (0; 0) e si rivolge verso l'asse y. La sua casa si trova in (4; 5) ed egli vi si dirige passando solo per punti reticolo, ogni passo che fa lo porta su uno di tali punti. Sapendo che fa ogni passo in direzione delle y positive o delle x positive, determinare la probabilità che Scott passi per la casa di Paula, che si trova in (2; 3), supposto che tutti i percorsi possibili siano ugualmente probabili. *Suggerimento*: scrivere tutti i possibili percorsi per arrivare a casa, notando che otterremo il triangolo di Tartaglia. $\left[\frac{10}{21}\right]$

33. (Rice 2007) Se a e b sono scelti a caso e indipendentemente nell'intervallo [−1; 1], con che probabilità sarà $|a| + |b| < 1$? [50%]

34. (Rice 2008) Negli antichi giochi Romani, i gladiatori combattevano contro i velociraptor. In una gara un velociraptor lottava contro n gladiatori. L'animale attaccava per primo un gladiatore, uccidendolo all'istante. Quindi attaccava un gladiatore alla volta, colpendo l'animale con probabilità $\frac{1}{2}$. Se sono necessari 10 colpi per uccidere un velociraptor, quanti gladiatori almeno devono combattere perché la probabilità di uccidere l'animale sia almeno $\frac{1}{2}$? *Suggerimento* determinare la media di attacchi. [21]

35. (Rice 2008) Daphne si trova nel labirinto schematizzato 

. Ella entra in A, e ad ogni bivio sceglie una direzione a caso (incluso tornare indietro). Una volta che Daphne raggiunge l'uscita non rientra. Con che probabilità uscirà da A? *Suggerimento* determinare le probabilità che esca da A provenendo da una delle 3 strade che portano ad A, quindi impostare un sistema. $\left[\frac{7}{15}\right]$

36. (Rice 2008) Due numeri sono scelti a caso nell'intervallo [0; 1]. Qual è la probabilità che essi differiscano più della loro media? $\left[\frac{1}{3}\right]$

37. (Rice 2008) Tre X, tre Y e tre Z sono messi a caso in una matrice 3 × 3. Qual è la probabilità che nessuna riga o colonna conterrà due lettere uguali? $\left[\frac{1}{280}\right]$

38. (Rice 2008) Lord Voldemort ogni giorno fa solo due cose: maledice Babbani e calcia cuccioli. Ogni Babbano che maledice ha il 50% di probabilità di morire, mentre ogni calcio a un cucciolo ha sempre successo. Ogni Babbano morto gli fornisce 3 unità di soddisfazione e ogni cucciolo colpito 2. Ogni volta che muoiono un numero pari di Babbani raddoppia la sua soddisfazione. Sapendo che ogni ora può o maledire un Babbano o calciare un cucciolo, quanti Babbani dovrebbe maledire in un giorno per massimizzare la sua soddisfazione attesa? [24]

39. (Rice 2008) Terence Tao gioca a pietra-carta-forbici usando la seguente strategia: all'inizio mostra sempre pietra; ad ogni giocata successive mostra un segno diverso da quello della giocata precedente, scegliendo fra i due segni con probabilità 50%. Con che probabilità alla quinta giocata mostrerà pietra? $\left[\frac{3}{8}\right]$

40. (Rice 2008) Sei persone fanno il seguente gioco: prendono un cubo inizialmente bianco. Uno alla volta i giocatori segnano una X su una faccia bianca del cubo e lo lanciano come un dado. Vince il primo a cui esce una X (ovviamente il giocatore 1 ha probabilità $\frac{1}{6}$ di vincere, il secondo, se non ha vinto il primo, $\frac{2}{6}$ e così via). Con che probabilità vincerà il sesto? $\left[\frac{5}{324}\right]$

41. (Rice 2008) Supponiamo che ogni famiglia ha probabilità di avere uno, due o tre figli pari a $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ rispettivamente. Supposto che tutti si sposano e avranno bambini, con che probabilità una coppia iniziale avrà esattamente quattro nipoti? $\left[\frac{27}{128}\right]$

42. (Rice 2008) Cody prepara la sua colazione guarnendo dei tacos con delle salse vendute in bottiglie da 88 mL. Ogni giorno mangia 3, 4 o 5 tacos con probabilità $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ rispettivamente. Per il primo taco, usa sempre 2 *ml* di salsa e per ogni taco aggiuntiva ne usa 1 *ml* in più rispetto al precedente. Se ha cominciato una nuova bottiglia, con che probabilità la svuoterà in 5 giorni? $\left[\frac{79}{288}\right]$

43. (Rice 2008) Un punto A si trova a 1000 piedi da un punto B. Una persona in A sceglie una direzione a caso e cammina per 1000 piedi in quella direzione. Con che probabilità arriverà a non più di 1000 piedi da B? $\left[\frac{1}{3}\right]$

44. (Rice 2008) Bill il mago ha tre carte A, B e C con su scritte dei numeri, precisamente: A: 2 3 5 7; B: 2 4 6 7; C: 2 3 6 1. Con queste fa il seguente gioco. Chiede ad un volontario di pensare un numero da 1 a 8, dicendogli solo in quali carte A, B o C si trova. In tal modo egli è sempre in grado di trovare il numero pensato. Un giorno Bill perde la carta C e non riesce a ricordare che numeri vi erano scritti. Così sceglie a caso 3 numeri diversi da 1 a 8 e li scrive su una carta. Che probabilità ha adesso Bill di indovinare qualsiasi numero pensi uno del pubblico? $\left[\frac{8}{35}\right]$

Questions in English

Working together

This question was assigned at AHSME in 1996. *Four distinct points, A, B, C, and D, are to be selected from* 1996 *points evenly spaced around a circle. All quadruples are equally likely to be chosen. What is the probability that the chord AB intersects the chord CD*?
Because all quadruples are equally likely, we need only examine the six clockwise orderings of the points: *ACBD*, *ADBC*, *ABCD*, *ADCB*, *ABDC*, and *ACDB*. Only the first two of these equally likely orderings satisfy the intersection condition, so the probability is $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

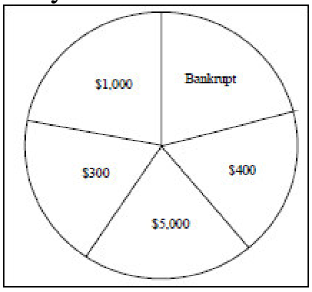
45. (AHSME 1997) Two six-sided dice are fair[3] in the sense that each face is equally likely to turn up. However, one of the dice has the 4 replaced by 3 and the other die has the 3 replaced by 4. When these dice are rolled, what is the probability that the sum is an odd[4] number? $\left[\frac{5}{9}\right]$
46. (AHSME 1999) 6 points on a circle are given. 4 of the chords joining pairs of the 6 points are selected at random. What is the probability that the four chords are the sides of a convex quadrilateral? $\left[\frac{1}{91}\right]$
47. (HSMC 1999) A basketball player is on the line to shoot a one-and-one free throw. (In a one-and-one situation, a second shot is allowed only if the first shot is successful.) If the player's free throw shooting average is 0.750, what is the probability that he will score exactly one basket? Express your answer as a common fraction. $\left[\frac{3}{16}\right]$
48. (HSMC 1999) Suppose a computer program generates random matrices of the form $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, where a, b, c, d are integers chosen at random from the set {–3; –2; –1; 0; 1; 2; 3}. What is the probability that such a matrix would have a zero determinant (this means that $ad - bc = 0$)? $\left[\frac{219}{16384}\right]$

Working together

This question was assigned at AHSME in 1995. *If a, b and c are three (not necessarily different) numbers chosen randomly and with replacement from the set* {1, 2, 3, 4, 5}, *the probability that ab* + c *is even is*?
The quantity $ab + c$ will be even if ab and c are both even or both odd. Furthermore, ab will be odd only when both a and b are odd, since there are 3 even numbers in the set, and the events are independent, the probability of ab being odd is $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$. Thus the probability of ab being even is $1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$. The probability of c being odd is $\frac{3}{5}$ and of being even is $\frac{2}{5}$. Hence, the required probability is $\frac{9}{25}\cdot\frac{3}{5}+\frac{16}{25}\cdot\frac{2}{5}=\frac{27+32}{125}=\frac{59}{125}$.

49. (HSMC 2000) Five people are asked (individually) to choose a random integer in the interval [1; 20]. What is the probability that everyone chooses a different number? $\left[\frac{2907}{5000}\right]$
50. (HSMC 2001) The probability that Patty passes a driving test is p and the probability that she fails is $6p^2$. Find the value p. $\left[\frac{1}{3}\right]$

[3] Onesti, cioè non truccati
[4] dispari

51. (HSMC 2001) On the game show Wheel of Fraction, you see the following spinner. Given that each region has the same area, what is the probability that you will earn exactly \$1700 in your first three spins? Express your answer as a common fraction.  $\left[\frac{6}{125}\right]$

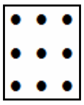
52. (HSMC 2002) Two standard six-faced dice are rolled. Jean wins if the product of the two numbers rolled is odd or a multiple of three, otherwise Allen wins. What is the probability that Jean wins? Express your answer as a common reduced fraction? $\left[\frac{2}{3}\right]$

53. (HSMC 2003) Two distinct numbers are chosen at random from the collection {1, 2, 3, 4, 5, 6}. What is the probability that the smaller number divided by the larger number is a terminating decimal? Express your answer as a common fraction. [60%]

Working together

This is a question assigned at HSMC in 2003.
A box contains 3 *fair*[5] *coins and* 7 *biased*[6] *coins. Whenever a fair coin is flipped, it comes up heads with probability* 0,5. *Whenever a biased coin is flipped, it comes up heads with probability* 0,6. *A coin is randomly chosen from the box and then flipped. What is the probability that it will come up heads*?
This is a question about conditional probabilities. Thus the probability that we have head is the sum between the probability that the coin is fair and head and the probability that it is biased and head. The events are independent, so $P(\text{heads}) = P(\text{fair}) \cdot P(\text{heads}|\text{fair}) + P(\text{biased}) \cdot P(\text{heads}|\text{biased})$. There are 3 fair coins over 10: $P(\text{fair}) = \frac{3}{10}$; there are 7 biased coins over 10: $P(\text{biased}) = \frac{7}{10}$. Hence the requested probability is:

$$P(\text{heads}) = 0{,}3 \cdot 0{,}5 + 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}15 + 0{,}42 = 0{,}57.$$

54. (HSMC 2003) What is the probability that four randomly selected points on the geoboard shown below are vertices of a square?  $\left[\frac{1}{121}\right]$

55. (HSMC 2004) A fair die is rolled three times. What is the probability that you get a larger number each time? $\left[\frac{5}{54}\right]$

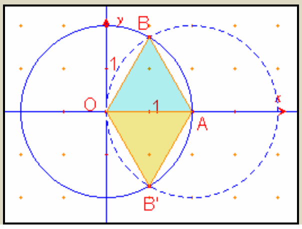
56. (HSMC 2005) If seven distinct fair six-sided dice are rolled, what is the probability the sum will be 10? [≈ 0,03%]

Working together

This is a question assigned at HSMC in 2004.
Two points are chosen at random on the unit circle $x^2 + y^2 = 1$. *What is the probability that the chord joining the two points has length at least* 1?
Rotate the coordinate axes so that one point has coordinates $A \equiv (1; 0)$. If points B and B' are on the circle 1 unit away from A, then OAB and OAB' are equilateral triangles. The probability of a point at least one unit

[5] Onesta, cioè non truccata
[6] truccata

from *A* is the ratio of the major arc between *B* and *B′* to the entire circle, which is $\frac{240}{360}=\frac{2}{3}$.



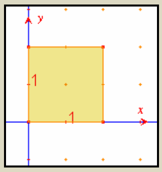
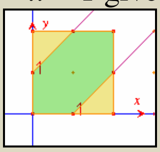
57. (HSMC 2005) If Ella rolls a standard six-sided die until she rolls the same number on consecutive rolls, what is the probability that her 10th roll is her last roll? $\left[\frac{5^8}{6^9}\right]$

58. (HSMC 2005) Two positive integers are chosen at random. What is the probability that their product is odd? Express your answer as a common fraction. $\left[\frac{1}{4}\right]$

59. (HSMC 2006) Five balls are numbered 1 through 5 and placed in a bowl. Josh will randomly choose a ball from the bowl, look at its number and then put it back into the bowl. Then Josh will again randomly choose a ball from the bowl and look at its number. What is the probability that the product of the two numbers will be even and greater than 10? Express your answer as a common fraction. $\left[\frac{1}{5}\right]$

Working together

This is a question assigned at HSMC in 2003. *Both x and y are positive numbers less than* 2. *Every positive number less than* 2 *is equally likely to be the value of x, and every positive number less than* 2 *is equally likely to be the value of y. What is the probability that x and y differ by less than* 1?

Possible values of *x* and *y* come from the square pictured whose area is 4.  The lines $x - y = 1$ and $y - x = 1$ give the boundary of the region of points $(x; y)$ with $|x - y| < 1$ (in green in the subsequent picture).  The probability that $(x; y)$ belongs to *S*, i.e. that $|x - y| < 1$ is $\frac{Area\ of\ S}{4}=\frac{3}{4}$.

60. (Rice 2009) Let *a*, *b*, *c*, and *d* be the numbers that show when four fair dice, numbered 1 through 6 are rolled. What is the probability that $|(a - 1)(b - 2)(c - 3)(d - 6)| = 1$? $\left[\frac{1}{324}\right]$

61. (Rice 2009) Frank alternates between clipping a weighted coin that has a $\frac{2}{3}$ chance of landing heads and a $\frac{1}{3}$ chance of landing tails and another weighted coin that has a $\frac{1}{4}$ chance of landing heads and a $\frac{3}{4}$ chance of landing tails. The first coin tossed is the $\frac{2}{3}$ – $\frac{1}{3}$ weighted coin. What is the probability that he sees two heads in a row before he sees two tails in a row? $\left[\frac{13}{33}\right]$

62. (MT1995) Triangles with sides (a, b, c) are randomly generated in the following manner: $c = 1$, $0<a\leq 1$, $0 < b \leq 1$. any value of (a, b, c) that does not satisfy the triangle inequality theorem, $a + b > c$, is discarde. What is the probability that a random triangle is obtuse? [≈ 0,57]

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia navale) Qual è la probabilità di estrarre da un'urna con 40 palline, numerate da 1 a 40, una pallina di numero divisibile per 8 o minore di 20? A) $\frac{1}{20}$ B) $\frac{11}{20}$ C) $\frac{11}{40}$ D) 2 E) 1
2. (Accademia navale) Nel gioco della tombola, qual è la probabilità che esca alla terza estrazione il numero 21, se non è già uscito nelle precedenti estrazioni? A) $\frac{1}{88}$ B) $\frac{1}{90}$ C) $\frac{21}{90}$ D) $\frac{1}{21}$ E) 0
3. (Accademia navale) In un sacchetto sono disposte 10 palline gialle, 2 rosse e una verde. Quale delle seguenti affermazioni è falsa? A) La probabilità di estrarre una pallina blu dal sacchetto è zero B) La probabilità di estrarre una pallina gialla dal sacchetto è maggiore della probabilità di estrarne una degli altri due colori C) La probabilità di estrarre una pallina dal sacchetto è uno D) La probabilità di estrarre una pallina gialla dal sacchetto è 10 E) La probabilità di estrarre una pallina verde dal sacchetto è minore della probabilità di estrarne una gialla o rossa
4. (Accademia militare) Tutti gli studenti di una classe praticano almeno uno sport tra lo sci e il nuoto. Il 60% degli studenti sa sciare e l'80% sa nuotare. Quale percentuale di studenti sa sia sciare sia nuotare?
A) 60% B) 48% C) 140% D) 40%
5. (Accademia militare) La probabilità che lanciando 3 volte un dado normale non truccato a 6 facce esca sempre un numero dispari è pari a: A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{36}$ C) $\frac{1}{18}$ D) $\frac{3}{6}$
6. (Accademia militare) In un casinò, alla roulette, si sono già verificate tre uscite consecutive di numeri rossi. Supponendo di non considerare lo zero, qual è la probabilità che nel giro successivo esca ancora un numero rosso e qual è la probabilità che, una volta uscito, esca per altre tre volte consecutive?
A) $\frac{1}{16};\frac{1}{128}$ B) $\frac{1}{2};\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{16};\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{2};\frac{1}{16}$
7. (Accademia militare) Un'urna contiene 48 palline di uguali dimensioni ma di colore diverso. Sapendo che le palline possono essere soltanto rosse, bianche o blu e che la probabilità di estrarre una pallina blu è pari a $\frac{5}{12}$, quante palline tra bianche e rosse sono contenute nell'urna? A) 22 B) 20 C) 26 D) 28
8. (Economia Università di Trento) Un'urna contiene 25 palline bianche e 75 palline nere. Se viene estratta una pallina nera, essa viene rimessa nell'urna; se viene estratta una pallina bianca, questa viene tolta e ne viene aggiunta una nera. La probabilità di avere nell'urna 24 palline bianche e 76 nere dopo due estrazioni (ed eventuali inserzioni) è: A) $\frac{5}{16}$ B) $\frac{7}{16}$ C) $\frac{151}{400}$ D) $\frac{149}{400}$
9. (Odontoiatria 1997) Una coppia vuole avere due figli dello stesso sesso: quanti figli deve avere per essere sicura che almeno due siano dello stesso sesso? A) 2 B) 3 C) 4 D) Non si può stabilire E) Più di 4
10. (Medicina 1997) Una scatola ha 60 biglietti numerati da 1 a 60. Estraendo un biglietto a caso, qual è la probabilità che il numero sia maggiore di 57 o minore di 4? A) $\frac{9}{3600}$ B) $\frac{9}{60}$ C) $\frac{1}{10}$ D) $\frac{5}{60}$ E) $\frac{50}{60\cdot 59}$
11. (Medicina 1997) La probabilità che lanciando simultaneamente due dadi si ottengano due numeri la cui somma vale 11 è, rispetto alla probabilità che si ottengano due numeri la cui somma vale 10:
A) non paragonabile, perché si tratta di eventi diversi B) minore C) maggiore
D) uguale E) circa doppia
12. (Ingegneria 2000) Un macchinario produce bulloni. Un bullone è ritenuto difettoso quando ha peso o dimensioni sbagliate. Il controllo di qualità mette in evidenza che il 5% dei bulloni prodotti ha almeno il peso sbagliato e che il 3% ha almeno le dimensioni sbagliate. Nell' ipotesi che il 2% dei bulloni prodotti abbia sia peso che dimensioni sbagliate, qual è la percentuale di bulloni difettosi che produce quel macchinario? A) 4% B) 10% C) non si può rispondere con i dati a disposizione D) 6% E) 8%
13. (Odontoiatria 2001) Due dadi vengono lanciati contemporaneamente. Qual è la probabilità di ottenere un punteggio minore o uguale a 4? A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{1}{18}$ E) $\frac{1}{9}$
14. (Odontoiatria 2002) Da un mazzo di 40 carte (10 cuori, 10 quadri, 10 fiori, 10 picche) se ne estraggono tre; qual è la probabilità che siano tre figure fra le dodici presenti, supponendo di non rimettere la carta

estratta nel mazzo? A) $\frac{11}{494}$ B) $\frac{33}{1600}$ C) $\frac{36}{1235}$ D) $\frac{9}{10}$ E) $\frac{33}{494}$

15. (Medicina 2002) In un vassoio ci sono 100 caramelle di cui 35 all'arancia, 33 alla menta e 32 al limone. Prendendo a caso una caramella dal vassoio, qual è la probabilità che non sia alla menta?
A) 0,33 B) 0,32 C) 0,65 D) 0,68 E) 0,67

16. (Odontoiatria 2002) Si ha un'urna contenente 8 palline bianche. Qual è il numero minimo di palline rosse che bisognerebbe aggiungere perché, estraendo due palline contemporaneamente, la probabilità che esse siano una bianca e una rossa sia $\frac{16}{45}$? A) 2 B) 3 C) 5 D) 8 E) 10

17. (Veterinaria 2003) Da un mazzo di 40 carte (10 cuori, 10 quadri, 10 fiori, 10 picche) se ne estraggono tre; qual' è la probabilità che siano tre assi fra i quattro presenti, supponendo di non rimettere la carta estratta nel mazzo? A) $\frac{4}{3705}$ B) $\frac{3}{10}$ C) $\frac{1}{120}$ D) $\frac{1}{2470}$ E) $\frac{3}{800}$

18. (Medicina 2003) Da un mazzo di 40 carte (10 cuori, 10 quadri, 10 fiori, 10 picche) se ne estraggono tre; qual è la probabilità che siano tutte e tre di fiori, supponendo di non rimettere la carta estratta nel mazzo? A) $\frac{3}{247}$ B) $\frac{9}{800}$ C) $\frac{25}{1482}$ D) $\frac{7}{10}$ E) $\frac{11}{247}$

19. (Odontoiatria 2004) Una moneta è lanciata quattro volte. Qual è la probabilità di ottenere due croci e due teste sapendo che la prima volta si è ottenuto croce? A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{3}{16}$ E) $\frac{5}{16}$

20. (Medicina 2004) Si hanno due dadi uguali con le facce di colori diversi. Ciascun dado ha due facce azzurre, due facce marroni e due facce verdi. La probabilità p che dopo un lancio simultaneo dei due dadi si ottengano facce dello stesso colore è: A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{3} < p < \frac{1}{2}$ D) $p < \frac{1}{6}$ E) $p > \frac{2}{3}$

21. (Medicina 2004) Qual è la probabilità che lanciando 6 volte una moneta escano esattamente 4 teste?
A) $\frac{15}{64}$ B) $\frac{1}{64}$ C) $\frac{15}{16}$ D) $\frac{1}{16}$ E) $\frac{5}{32}$

22. (Veterinaria 2004) Una moneta è lanciata quattro volte. Qual è la probabilità p di ottenere quattro croci sapendo che le prime due volte si è ottenuto croce? A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2} < p < \frac{3}{4}$ C) $p < \frac{1}{4}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{1}{4}$

23. (Veterinaria 2005) Un'urna contiene 12 palline, alcune bianche e altre rosse. È possibile che vi siano anche palline verdi, ma non siamo sicuri. Sapendo che probabilità di estrarre a caso dall'urna una pallina bianca o rossa è rispettivamente $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{4}$. Indicare se vi sono palline verdi e, in caso affermativo, il loro numero A) ce n'è 1 B) ce ne sono 2 C) ce ne sono 3 D) ce ne sono 4 E) non ce ne sono

24. (Scienze della formazione primaria, Università di Cagliari 2008-09) Su 10 lanci di dado il 6 esce 4 volte. Che probabilità c'è che il 6 esca pure all'undicesimo lancio?
A) 1 su 6 B) 4 su 6 C) 6 su 10 D) non è possibile stabilirlo a priori E) 10 su 6

25. (Scienze della formazione primaria, Università di Cagliari 2008-09) Estraendo un numero a caso dal sacchetto della tombola (che contiene tutti i numeri interi da 0 a 90), che probabilità c'è di pescare un numero che sia < di 30 o > di 60? A) $\frac{30}{90}$ B) $\frac{31}{90}$ C) $\frac{30}{60}$ D) $\frac{60}{90}$ E) $\frac{59}{90}$

26. (Veterinaria 2008) Se si lancia un dado 5 volte con quale probabilità il 2 esce esattamente 3 volte?
A) $\frac{2\cdot 5^3}{6^5}$ B) $\frac{5^2}{6^5}$ C) $\frac{1}{6^3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{5^2}{2\cdot 6^2}$

27. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza 2009) Quando piove ho l'80% di probabilità di essere di buon umore. Quando non piove ho il 90% di probabilità di essere di buon umore. La probabilità che domani piova è del 70%. Allora, che probabilità ho di essere di buon umore domani?
A) $\frac{83}{100}$ B) $\frac{80}{100}$ C) $\frac{63}{100}$ D) $\frac{56}{100}$

28. (Scuola superiore di Catania) Nell'estrazione del lotto dell'11/9/99 sulla ruota di Torino sono apparsi i numeri: 86, 44, 62, 34, 64 il cui massimo comune divisore è 2. Qual è la probabilità che, sulla stessa

ruota, alla prossima estrazione compaiano 5 numeri il cui MCD sia 5?

29. (Scuola superiore di Catania) Da un mazzo di carte francesi (52 carte) sono state tolte le regine (Q) e tutte le carte di fiori. Calcolare la probabilità che estraendo una carta da tale mazzo modificato essa sia di cuori.
30. (Scuola superiore di Catania) Dal gioco della tombola sono stati eliminati tutti i numeri che contengono almeno una cifra pari a 8. calcolare la probabilità che alla prima estrazione venga estratto un numero minore o uguale a 30.
31. (Scuola Superiore di Catania) Calcolare la probabilità P_1 di ottenere almeno un 6 nel lancio di 6 dadi. Provare che è maggiore di $\frac{1}{2}$. Generalizzare tale risultato scrivendo una formula per P_n, dove P_n è la probabilità di ottenere almeno n sei nel lancio di $6n$ dadi.
32. (Scuola Superiore di Catania) Nel classico gioco dell'oca c'è una pista suddivisa in caselle, contrassegnate dai numeri naturali positivi (in un certo senso lo 0 corrisponde al punto di partenza). Modifichiamo il gioco in modo che ogni giocatore, a turno, lancia una moneta equa e avanza di una casella se esce testa e di 2 se esce croce. Non sono previste caselle con comandi speciali (torna indietro, vai alla casella N, …). Qual è la probabilità che un giocatore passi per la casella 1? E per la 2? e per la 3? Dimostrare poi che per ogni $x > 2$, la probabilità di capitare nella casella x è la media aritmetica delle probabilità di capitare in ciascuna delle caselle precedenti. Se vi sono un totale di 20 caselle, qual è la casella in cui è più probabile finire? E quale quella in cui è meno probabile?
33. (Scuola Superiore di Catania) Ci sono due urne, esternamente uguali: la prima contiene 3 palline di cui una sola rossa, mentre la seconda contiene 5 palline, di cui una sola rossa. In un gioco, estraggo a sorte una pallina e vinco se è rossa. Mi vengono proposti due metodi per l'estrazione. *A*: scelgo a caso una delle due urne e da questa estraggo una pallina. *B*: Metto insieme le palline di entrambe le urne e, dopo aver rimescolato tutte le palline, estraggo una pallina dall'urna così formata. È più conveniente il metodo *A* o quello *B*? si consideri poi il caso più generale in cui le urne contengono n ed m palline, sempre una sola delle quali, in ciascuna urna, è rossa. Per quali valori di n ed m è più conveniente il metodo *A* e per quali il *B*) In quali casi i metodi sono equiprobabili?
34. (Scuola Superiore di Catania) Gigi e Mario giocano a testa o croce e ognuno di loro lancia n volte una moneta. A) calcolare la probabilità che Gigi ha di ottenere k volte testa. B) calcolare la probabilità che Gigi e Mario ottengano lo stesso numero di teste. C) Quest'ultimo evento è più o meno probabile di ottenerne un numero diverso? D) Ammettiamo ora che Mario lanci la moneta una volta in più di Gigi, ma che in caso di parità la vittoria sia attribuita a Gigi. Chi dei due è avvantaggiato?
35. (Medicina 2013) Recenti studi hanno riportato che nel 2006 il numero di donne sottoposte all'esame per la diagnosi del tumore al seno risultate positive è aumentato del 13% rispetto al 2005. Nello stesso lasso di tempo, il numero di esami effettuati è aumentato del 10%. Se le donne sottoposte a tale esame fossero rappresentative dell'intera popolazione, quale tra le seguenti affermazioni sarebbe vera? A) L'aumento dell'incidenza del tumore al seno non può essere calcolato se non si conosce il numero effettivo di esami eseguiti B) Se una percentuale maggiore di popolazione venisse sottoposta a tale esame, il tasso di positività aumenterebbe sicuramente C) La percentuale di donne risultate positive all'esame per la diagnosi del tumore al seno nel 2006 è aumentata poco meno del 3% rispetto al 2005 D) Il 13% delle donne sottoposte all'esame per la diagnosi del tumore al seno nel 2006 è risultato positivo E) La percentuale dell'intera popolazione femminile risultata positiva all'esame per la diagnosi del tumore al seno nel 2006 è aumentata del 13% rispetto al 2005
36. (Medicina 2013) Alan lancia contemporaneamente due dadi non truccati con le facce numerate da 1 a 6. Qual è la probabilità che esca lo stesso numero su entrambi i dadi? A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{36}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{18}$

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito

http://mathinterattiva.altervista.org/volume_5_12.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	2	3	4	5	6
C	A	D	D	A	B
7	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
D	C	B	B	C	D
13	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
B	A	E	A	D	A
19	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
C	A	B	E	E	A
25	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
E	A	A	$\frac{703}{36622439}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$
31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**
$\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{8}$; 2; 1	A; $P(A) > P(B)$ se $m \neq n$; $P(A) = P(B)$ se $m = n$	$P_1 = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$ $P_n = 1-\sum_{k=0}^{n-1}\binom{6n}{k}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^k\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{6n-k}$	$\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{2^n}$; $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\cdot\frac{1}{2^{2n}}$; Meno; Gigi	C	D

12 Incertezza e realtà fisica

12.1 Statistica inferenziale

Prerequisiti

- Statistica descrittiva
- Calcolo delle probabilità
- Rappresentazioni grafiche
- Calcolo integrale

Obiettivi

- Generalizzare i concetti della statistica descrittiva nel continuo
- Sapere scegliere il corretto modello statistico a seconda del problema
- Sapere determinare eventuali correlazioni fra dati statistici
- Sapere determinare eventuali associazioni fra dati statistici

Contenuti

- Variabili casuali
- Principali variabili casuali
- Stima e decisioni statistiche
- Correlazione lineare e metodo dei minimi quadrati

Parole Chiave

Correlazione – Covarianza – Distribuzione binomiale – Distribuzione normale – Distribuzione poissoniana – Gaussiana – Interpolante – Intervallo di confidenza – Minimi quadrati – Test di significatività – Variabili casuali o aleatorie

Richiamiamo le conoscenze

Richiamiamo alcune informazioni, già presentate molto più in dettaglio nel volume 2 di questo corso.

Definizione A

Dato un fenomeno indagato statisticamente, diciamo **frequenza assoluta** di una sua modalità il numero di volte in cui la stessa modalità si è presentata.

Definizione B

Dato un fenomeno indagato statisticamente diciamo **frequenza relativa** di una sua modalità il rapporto fra la frequenza assoluta della modalità e la cardinalità dell'insieme delle modalità.

Definizione C

Dato un fenomeno indagato statisticamente, diciamo sua **distribuzione statistica**, l'insieme delle coppie i cui elementi sono le modalità e le rispettive frequenze assolute.

Definizione D

La rappresentazione di una distribuzione statistica su un piano cartesiano ortogonale, in modo che ciascun dato, o classe di dati, sia rappresentato da un rettangolo di base arbitraria e altezza pari alla frequenza assoluta, si chiama **istogramma**.

Definizione E

La rappresentazione di una distribuzione statistica, in modo che l'intera distribuzione sia rappresentata da un cerchio suddiviso in settori circolari proporzionali alle relative frequenze assolute delle modalità, si chiama **aerogramma o diagramma a torta**.

Definizione F

Data una distribuzione statistica a valori numerici, chiamiamo suo **indice centrale** un elemento che rappresenti tutte le sue modalità.

Definizione G

Data una distribuzione statistica numerica di cardinalità finita diciamo **media aritmetica** delle sue modalità il numero ottenuto dal rapporto fra la somma delle modalità e la loro cardinalità totale.

Definizione H

Diciamo **moda** di una distribuzione statistica di cardinalità finita, la o le modalità che presentano la massima frequenza.

Definizione I

Data una distribuzione statistica numerica di cardinalità finita, ordinato in modo crescente o decrescente, diciamo sua **mediana**

- il numero che occupa la posizione $n + 1$, se i termini sono in numero dispari: $2n + 1$;
- la media aritmetica degli elementi che occupano le posizioni n e $(n + 1)$, se i termini sono in numero pari: $2n$.

Definizione J

Data una distribuzione statistica numerica di cardinalità finita di valori raggruppati per classi, diciamo **distribuzione delle frequenze relative cumulate**, l'insieme ordinato delle somme delle frequenze relative.

Definizione K

Data una distribuzione statistica numerica di cardinalità finita, orinata crescentemente o decrescentemente, diciamo suoi **quantili** i numeri, appartenenti alla distribuzione o media aritmetica di elementi successivi della distribuzione, che la dividono in n insiemi ugualmente numerosi e ordinati allo stesso modo. In particolare se $n = 4$ li chiameremo **quartili**, se $n = 10$ li chiameremo **decili**.

Definizione L

Data una distribuzione statistica formata da n elementi che indichiamo genericamente con x_i e la cui media aritmetica è μ, diciamo suo **scarto semplice medio** la quantità $S = \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i-\mu|}{n}$.

Definizione M

Data una distribuzione statistica formata da n elementi, ognuno dei quali è indicato genericamente con x_i e la cui media è μ, diciamo suo **scarto quadratico medio** la quantità $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}}$.

Definizione N

Data una distribuzione statistica chiamiamo sua **varianza**, il quadrato dello scarto quadratico medio: σ^2.

Definizione O

Diciamo **coefficiente di variazione** di una distribuzione statistica formata da n elementi, il rapporto $\frac{\sigma}{\mu}$, fra la sua media aritmetica μ e il suo scarto quadratico medio σ.

Teorema A

Data una distribuzione statistica numerica, finita di n elementi, se la mediana M_e appartiene alla classe $[a; b]$ si ha: $M_e = a + \frac{\frac{n}{2}-\sum_i f_i}{f_{Me}}\cdot(b-a)$, in cui con f_i abbiamo indicato le frequenze delle classi precedenti la classe mediana e con f_{Me} la frequenza della classe mediana.

Esempio A

Età	22-25	26-29	30-34	>=35
Numero di laureati	279	325	143	44

Nella tabella sono riportati il numero di laureati in Economia e commercio nell'Università di Bari nel 2004, suddivisi per classi di età (dati MIUR). Vogliamo sapere qual è la minima età del 50% dei laureati. Applichiamo il teorema precedente. La classe mediana è [26; 29] e la sua frequenza è 325; solo la classe [22; 25] precede la classe mediana e la sua frequenza è 279. Quindi $a = 26$, $b = 29$ e la formula diventa:

$$M_e = 26 + \frac{\frac{791}{2}-279}{325}\cdot(29-26) \approx 27{,}07\,.$$

Teorema B

Data una distribuzione statistica numerica, finita di n elementi, la cui distribuzione delle frequenze cumulate è $\{f_1, f_2, \ldots, f_h\}$, se si ha $f_{m-1} < 0{,}5$ e $f_m \geq 0{,}5$, allora la mediana M_e appartiene alla classe $[x_{m-1}; x_m]$, relativa a f_m e si ha: $M_e = x_{m-1} + \dfrac{0{,}5 - f_{m-1}}{f_m - f_{m-1}} \cdot (x_m - x_{m-1})$.

Esempio B

Considerando sempre la distribuzione dei laureati in Economia e Commercio, la distribuzione delle sue frequenze relative è $\left\{\dfrac{279}{791}; \dfrac{325}{791}; \dfrac{143}{791}; \dfrac{44}{791}\right\}$ = {≈ 0,35; ≈ 0,41; ≈ 0,18; ≈ 0,06}. Perciò la distribuzione delle frequenze relative cumulate è {≈ 0,35; ≈ 0,35 + 0,41 = 0,76; ≈ 0,76 + 0,18 = 0,94; ≈ 0,94 + 0,06 = 1}. Per calcolare la sua mediana, usando il Teorema B, la prima frequenza cumulata superiore a 0,5 è 0,76 che si riferisce alla classe [26; 29]. Quindi la formula diventa: $M_e = 26 + \dfrac{0{,}5 - 0{,}35}{0{,}76 - 0{,}35} \cdot (29 - 26) \approx 27{,}07$.

Teorema C

Data una distribuzione statistica numerica, finita di n elementi, la cui distribuzione delle frequenze cumulate è $\{f_1, f_2, \ldots, f_h\}$, se si ha $f_{m-1} < \dfrac{1}{h} \leq f_m$, allora il quantile q_h che divide la distribuzione in h insiemi ugualmente numerosi, appartiene alla classe $[x_{m-1}; x_m]$, relativa a f_m e si ha: $q_h = x_{m-1} + \dfrac{\frac{1}{h} - f_{m-1}}{f_m - f_{m-1}} \cdot (x_m - x_{m-1})$.

Esempio C

Classe di età	Freq. Ass.	Freq. Rel.	Freq. Rel. Cum.
22-25	279	0,35	0,35
26-29	325	0,41	0,76
30-34	143	0,18	0,94
35-37	44	0,06	1,00

Riportiamo i dati dei laureati in Economia e Commercio, scritti con le rispettive frequenze cumulate. Possiamo dire che il primo quartile appartiene alla classe [22; 25], la mediana e il terzo quartile a [26; 29], il quarto quartile è ovviamente l'estremo delle classi, cioè 37. Per calcolare il primo e il terzo quartile possiamo fare un ragionamento simile a quello fatto per la mediana, con una formula simile a quella stabilita nel Teorema 1: $q_1 = 22 + \dfrac{0{,}25 - 0}{0{,}35 - 0} \cdot (25 - 22) \approx 24{,}14; q_3 = 26 + \dfrac{0{,}75 - 0{,}35}{0{,}76 - 0{,}35} \cdot (29 - 26) \approx 28{,}93$. Quindi possiamo dire che il 25% dei laureati ha un'età non superiore a 24,14 anni e il 75% un'età non superiore a 28,93 anni.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Consideriamo i dati riortati in tabella

Stipendio	<1000	1000-1200	1201-1400	1401-1600	1601-1800	>1800
Num. Dipendenti	10	24	57	68	27	12

Per calcolare la mediana dobbiamo sostituire gli intervalli con il loro termine centrale, considerando tutti gli intervalli di uguale ampiezza, 200.

Stipendio	900	1100	1300	1500	1700	1900
Num. Dipendenti	10	24	57	68	27	12

Adesso costruiamo la tabella delle frequenze relative e cumulate, tenuto conto che il numero totale dei dipendenti è 198.

Stipendio	<1000	1000-1200	1201-1400	1401-1600	1601-1800	>1800
Frequenze Relative	0,05	0,12	0,29	0,34	0,14	0,06
Frequenze Cumulate	0,05	0,17	0,46	0,80	0,94	1,00

La mediana appartiene alla classe [1401; 1600], che è la prima la cui frequenza cumulata supera 0,50. Il suo valore preciso si ottiene con la formula stabilita dal Teorema 2: $M_e = x_{m-1} + \frac{0,5 - f_{m-1}}{f_m - f_{m-1}} \cdot (x_m - x_{m-1})$, che diventa: $M_e = 1401 + \frac{0,5-0,46}{0,80-0,46} \cdot 200 \approx 1424,53$. Ciò significa che almeno il 50% dei dipendenti ha uno stipendio non inferiore a € 1424,53. Potremmo calcolare anche il primo e terzo quartile: $q_1 = 1201 + \frac{0,25-0,17}{0,46-0,17} \cdot 200 \approx 1256,17; q_3 = 1401 + \frac{0,75-0,46}{0,80-0,46} \cdot 200 \approx 1571,59$. Quindi il 25% ha uno stipendio non superiore a € 1256,17 e il 75% non inferiore a € 1571,59.

1. Tenendo conto dei dati seguenti riferiti al numero di immatricolati al corso di laurea di Scienze Politiche dell'Università di Milano nell'A.A.2005/06, vogliamo sapere qual è il voto minimo che ha conseguito il 25% degli immatricolati e il voto massimo che ha conseguito il 75%. [66; 83]

Voto	60-69	70-79	80-89	90-100
Numero	706	521	257	247

2. Tenendo conto dei dati seguenti riferiti al numero di immatricolati al corso di laurea di Medicina Veterinaria dell'Università di Milano nell'A.A.2005/06, vogliamo sapere qual è l'età massima che hanno rispettivamente il 25%, il 50% e il 75% degli immatricolati. [18,7; 19,5; 20,9]

Età	18-19	20-22	23-28	>28
Numero	233	82	24	7

3. Tenendo conto dei dati seguenti riferiti al numero di immatricolati all'Università di Milano nell'A.A.2005/06, vogliamo sapere qual è l'età massima che hanno rispettivamente il 10%, il 30%, il 60% e l'80% degli immatricolati. [19,1; 19,5; 20,2; 22,2]

Età	18	19	20	21	22	23-28	>28
Numero	221	6.407	1.872	731	402	1051	967

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi.
I temi completi dei Licei Scientifici per gli ultimi anni sono scaricabili, con soluzione, dal sito
http://matdidattica.altervista.org/esamidistato.htm

4. (Liceo scientifico suppletiva PNI 1992/93) Per pianificare i trasporti in un centro cittadino si effettuano delle rilevazioni, in corrispondenza di un punto nevralgico, in due diverse fasce orarie. vengono rilevai il numero dei veicoli e il relativo numero di occupanti. I dati sono quelli della seguente tabella. Si

richiede di: rappresentare graficamente le distribuzioni statistiche; dare una descrizione, mediante indici statistici (media, moda, varianza) della situazione nelle due fasce orarie; utilizzare i dati della tabella per valutare la seguente affermazione: "Nelle ore di punta c'è un aumento sia del numero di auto sia del numero di occupanti per ogni auto".

Ore di punta		Altro orario	
n° occupanti	n° veicoli	n° occupanti	n° veicoli
1	250	1	77
2	135	2	75
3	42	3	28
4	47	4	0
		5	34

$\left[\mu_1 = \frac{139}{79}, \sigma_1^2 = \frac{5959}{6241}, \mu_2 = \frac{481}{214}, \sigma_2 = \frac{85145}{45796}\right.$; affermazione falsa]

5. (Liceo scientifico PNI 1994/95) Nella tabella seguente sono riportati i dati di un'indagine campionaria, relativamente ad alcune regioni e al 1990, sulla distribuzione delle abitazioni secondo la superficie abitata (area espressa in metri quadrati). Il candidato: a) stimi la superficie media abitata nelle tre regioni e la deviazione standard delle stime, assumendo come valore rappresentativo di ogni classe il valore medio; b) rappresenti mediante diagrammi opportuni le distribuzioni marginali, rispettivamente per regioni e per superficie. [μ: 79,7; 102,3; 92,3; σ: 1938; 18,8; 27,8]

Superficie Regione	50 – 95 m^2	96 –110 m^2	111 – 130 m^2	131 – 200 m^2
Liguria	130	11	6	5
Campania	362	1805	105	122
Sicilia	1068	430	203	149

6. (Istituto magistrale PNI suppletiva 1994/95) Nella tabella seguente sono riportate le distribuzioni (in percentuale) dei maschi e delle femmine in diverse classi di età, residenti in Italia nel 1992. Il candidato: a) rappresenti graficamente i dati mediante istogrammi, relativamente ai maschi e alle femmine; b) prendendo come valore rappresentativo di ogni classe il valore medio, determini la statura media e la deviazione standard delle due distribuzioni; c) sulla base delle due distribuzioni determini quale dei due sessi ha vita media maggiore, dandone giustificazione.
[b) $\mu_m = 34{,}4$; $\mu_f = 37{,}2$; $\sigma_m = 21{,}8$, $\sigma_f = 23{,}2$; c) le femmine]

Classi di età (anni)	0 –4	5 –14	15 – 19	20 – 39	40 – 59	60 – 74	75 –100
Maschi	3,6	16,3	8,7	28,2	25,4	11,6	3,5
Femmine	5,6	14,7	7,9	26,7	25,5	13,7	5,9

7. (Liceo scientifico PNI suppletiva 1994/95) Nella tabella seguente sono riportate le distribuzioni delle durate in anni (n = numero degli anni) delle pene per i condannati nel 1990 ad almeno un anno di carcerazione (escluso l'ergastolo), suddivise per sesso, secondo una indagine campionaria. Il candidato: a) stimi la durata media delle pene per maschi e femmine e le rispettive deviazioni standard, assumendo come valore rappresentativo di ogni classe il valore medio; b) rappresenti mediante diagrammi opportuni le distribuzioni marginali per sesso e per durata. [μ: 7,76; 6,9; σ: 7,24; 6,5]

Pene	$1 \le n < 2$	$2 \le n < 5$	$5 \le n < 10$	$10 \le n < 15$	$15 \le n \le 30$
Maschi	200	329	168	91	154
Femmine	13	17	11	5	6

8. (Liceo scientifico 2001/2002) Si consideri la seguente proposizione: "La media aritmetica di due numeri reali positivi, comunque scelti, è maggiore della loro media geometrica". Dire se è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta. [Falsa quando i numeri sono uguali, vera negli altri casi]
9. (Liceo scientifico PNI 2001/2002) Se a e b sono numeri positivi assegnati qual è la loro media aritmetica? Quale la media geometrica? Quale delle due è più grande? E perché? Come si generalizzano tali medie se i numeri assegnati sono n? [La media aritmetica fra due numeri diversi è sempre maggiore della media geometrica; se i numeri sono uguali le medie coincidono]
10. (Liceo scientifico PNI 2004/2005) Il 40% della popolazione di un Paese ha 60 anni o più. Può l'età media della popolazione di quel Paese essere uguale a 30 anni? Si illustri il ragionamento seguito per dare la risposta. [No]

Variabili casuali

La Statistica è il trionfo del metodo quantitativo, che a sua volta è la vittoria sulla sterilità e la morte
Hillaire Belloc (1870–1953)

Il problema

Considerando eventi reali, non sempre possiamo effettuare rilevazioni in modo ordinato e quindi siamo in qualche modo costretti a cercare un modello matematico, che è perciò una funzione reale di una o più variabili reali. Più in generale gli eventi quotidiani sono di tipo casuale, pertanto dovrebbero essere affrontati con metodi probabilistici.

Cominciamo a generalizzare i concetti già visti per le distribuzioni statistiche discrete e finite a quelle discrete e infinite o a quelle continue, tenendo conto che deve entrare in gioco la probabilità e quindi dobbiamo definire delle funzioni i cui valori siano appunto la probabilità che accada un dato evento.

Definizione 1

Dato uno spazio E di eventi elementari, chiamiamo **variabile casuale o aleatoria definita su** E, una funzione v: $E \to P \subseteq [0; 1]$, in modo che si abbia

- $\sum_{h=1}^{n} v(e_h) = 1$, se $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$
- $\int_a^b v(x)\,dx = 1$, se $E = [a; b]$.

Nella definizione precedente abbiamo differenziato i casi in cui E è discreto da quello in cui è continuo. In effetti però dovremmo anche considerare i casi in cui E è discreto e infinito e in cui è continuo su un intervallo di estremi infiniti. Per evitare di sovraccaricare le definizioni, anche per il seguito, intendiamo che in questi casi la somma diventa una serie numerica e l'integrale diventa generalizzato.
Quindi abbiamo due tipi di variabili casuali, quelle discrete, con spazio di eventi numerabile e quelle con spazio continuo. Entrambe sono definite in modo che il codominio sia un sottoinsieme di [0; 1] e la somma di tutti i valori, finiti o infiniti dia la *certezza*, ossia valga 1. In pratica una variabile casuale fornisce la probabilità che un certo evento accada.

Esempio 1

- Lo spazio degli eventi elementari nel lancio di un dado regolare è $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Una variabile casuale è perciò $v : E \to \left\{\frac{1}{6}\right\}$, dato che già sappiamo che la probabilità laplaciana che esca una qualsiasi delle 6 facce è $\frac{1}{6}$.
- Se abbiamo invece un dado che ha delle imperfezioni, rimanendo inalterato E, la variabile casuale che possiamo definire è $v : E \to P \subseteq [0, 1]$, con P non ben determinato dato che non sappiamo stimare le probabilità che hanno di accadere i diversi eventi elementari. In ogni caso però sarà $\sum_{h=1}^{6} v(h) = 1$.
- La funzione $v(x) = \frac{3}{20} \cdot (x^2 + x + 1)$ è una variabile casuale sull'intervallo [0; 2]. Intanto verifichiamo che è sempre positiva in [0; 2], in effetti su tutto $\mathbb{R}$, poiché $\Delta = 1 - 4 < 0$. Inoltre si ha:
$$\frac{3}{20} \cdot \int_0^2 \left(x^2 + x + 1\right) dx = \frac{3}{20} \cdot \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_0^2 = \frac{3}{20} \cdot \left(\frac{8}{3} + \frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}_{\,1}} + 2\right) = \frac{3}{20} \cdot \frac{8+6+6}{3} = \frac{3}{20} \cdot \frac{20}{3} = 1$$
Non è invece una variabile casuale sull'intervallo [0; 1] poiché

$$\frac{3}{20}\cdot\int_0^1\left(x^2+x+1\right)dx=\frac{3}{20}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{20}\cdot\frac{2+3+6}{6}=\frac{3}{20}\cdot\frac{11}{6}\neq 1$$

A questo punto dobbiamo fornire le nozioni per alcuni indici centrali da potere usare per le variabili statistiche.

Definizione 2

Data una variabile casuale v: $E \to P \subseteq [0; 1]$, diciamo sua **media aritmetica** la quantità:

- $\mu=\sum_{h=1}^{n} h\cdot v\left(e_h\right)$, se $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$
- $\mu=\int_a^b x\cdot v\left(x\right)dx$, se $E = [a; b]$

Notiamo che l'integrale rappresenta l'estensione nel continuo della media aritmetica ponderata nel caso discreto. Avendo a che fare con funzioni continue, la somma è sostituita dall'integrale e il totale dall'ampiezza dell'intervallo, che è il dominio dell'integrale.

Esempio 2

La media della variabile casuale degli esempi precedenti è

$$\frac{3}{20}\cdot\int_0^2 x\cdot\left(x^2+x+1\right)dx=\frac{3}{20}\cdot\int_0^2\left(x^3+x^2+x\right)dx=\frac{3}{20}\cdot\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^2=$$

$$=\frac{3}{20}\cdot\left(\frac{\cancel{16}^{4}}{\cancel{4}^{1}}+\frac{8}{3}+\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}^{1}}\right)=\frac{3}{20}\cdot\frac{12+8+6}{3}=\frac{3}{20}\cdot\frac{26}{3}=\frac{13}{10}$$

Facilmente possiamo generalizzare i cosiddetti quantili.

Definizione 3

Data una variabile casuale v: $E \to P \subseteq [0; 1]$, diciamo suo **quantile** il numero reale q per cui, dato $0 < p < 1$, si ha

- $\sum_{h=1}^{q} v\left(e_h\right)=p$ se $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$
- $\int_a^q v\left(x\right)dx=p$, se $E = [a; b]$.

Ovviamente se $p = \frac{1}{2}$ avremo la mediana, se $p = \frac{1}{4}$ il primo quartile e così via.

Esempio 3

Sempre con riferimento alla variabile vista negli esempi precedenti calcoliamo i suoi quartili.

$$\frac{3}{20}\cdot\int_0^q\left(x^2+x+1\right)dx=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{3}{20}\cdot\int_0^2\left(x^2+x+1\right)dx=\frac{3}{20}\cdot\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_0^q=\frac{1}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{3}{20}\cdot\left(\frac{q^3}{3}+\frac{q^2}{2}+q\right)=\frac{1}{4}\Rightarrow 2q^3+3q^2+6q-10=0$$

L'equazione si risolve con metodi numerici, per esempio facendosi aiutare da un CAS come Derive, ottenendo come unica soluzione reale $q \approx 0.94$. In modo analogo si ricavano la mediana:

$\frac{3}{20}\cdot\int_0^q\left(x^2+x+1\right)dx=\frac{1}{2}\Rightarrow q\approx 1,41$ e il terzo quartile $\frac{3}{20}\cdot\int_0^q\left(x^2+x+1\right)dx=\frac{3}{4}\Rightarrow q\approx 1,74$

Passiamo adesso agli indici di dispersione.

Definizione 4

Data una variabile casuale v: $E \to P \subseteq [0;\ 1]$ di media aritmetica μ, diciamo suo **scarto quadratico medio** la quantità

- $\sigma=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(e_i-\mu\right)^2\cdot v\left(e_i\right)}$, se $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$
- $\sigma=\sqrt{\int_a^b\left(x-\mu\right)^2\cdot v\left(x\right)dx}$, se $E = [a;\ b]$

Chiamiamo **varianza** la quantità σ^2.

Esempio 4

Calcoliamo lo scarto quadratico medio della variabile precedente, che abbiamo visto avere $\mu = \frac{13}{10}$. Si ha:

$$\sigma=\sqrt{\frac{3}{20}\cdot\int_0^2\left(x-\frac{13}{10}\right)^2\cdot\left(x^2+x+1\right)dx}=\sqrt{\frac{3}{2000}\int_0^2\left(100x^4-160x^3+9x^2-91x+169\right)dx}=$$

$$=\sqrt{\frac{3}{2000}\cdot\left[20x^5-40x^4+3x^3-\frac{91}{2}x^2+169x\right]_0^2}=\sqrt{\frac{27}{10}}\approx 1,64$$

Ovviamente abbiamo: $\sigma^2 \approx 1,64^2 \approx 2,69$.

Dato che non cambia il concetto di coefficiente di variazione esso vale circa $\frac{1,64}{1,3}\approx 1,26$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

- Consideriamo il lancio di due dadi regolari. Ricordiamo che i possibili punteggi vanno da 2 (quando esce 1 su entrambe le facce) a 12 (quando esce 6 su tutte e due le facce); che in generale tali punteggi non sono equiprobabili, per esempio 3 si può ottenere in due modi: (1, 2) o (2, 1), mentre 4 in tre modi: (1, 3) (2, 2) o (3, 1); i punteggi la cui somma è 14 hanno la stessa probabilità di accadere: per esempio 2 e 12, 3 e 11 e così via. A questo punto possiamo definire la variabile casuale associata $v : \{2, 3, \ldots, 12\} \to \left\{\frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \ldots, \frac{7}{36}\right\}$, con la seguente legge: $v(x) = v(14 - x) = \frac{x-1}{36}$, $1 \le x \le 6$.
- Se il dado non fosse regolare invece a priori non siamo in grado di determinare la singola probabilità per ciascuno dei punteggi ottenibili, quindi $v : \{2, 3, \ldots, 12\} \to [0; 1]$, ma in generale $v(x) = ?$.

Definire le variabili casuali associate ai seguenti eventi elementari

Livello 1

1. Lancio di una moneta regolare. $\left[v : \{T, C\} \to \left\{\frac{1}{2}\right\}, v(x) = \frac{1}{2}\right]$
2. Lancio di una moneta non regolare. $[v : \{T, C\} \to [0; 1], v(x) = ?]$
3. Sesso del primogenito di una data persona. $[v : \{M, F\} \to [0; 1], v(x) = ?]$
4. Risultato da totocalcio di una data partita di calcio. $[v : \{1, X, 2\} \to [0; 1], v(x) = ?]$
5. Estrazione di una carta da un mazzo di 4 carte diverse non segnate. $\left[v : \{A, B, C, D\} \to \left\{\frac{1}{4}\right\}\right]$
6. Estrazione di un numero dai primi 5 numeri interi. $\left[v : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \left\{\frac{1}{5}\right\}\right]$
7. Estrazione di un numero naturale di cui interessa stabilire se è pari o dispari. $\left[v : \mathbb{N} \to \left\{\frac{1}{2}\right\}\right]$
8. Estrazione di un numero naturale di cui interessa stabilire il suo resto nella sua divisione per 13. $\left[v : \mathbb{N} \to \left\{\frac{1}{13}\right\}\right]$
9. Estrazione di una pallina da un'urna che ne contiene 2 rosse e 2 blu, indistinguibili al tatto. $\left[v : \{R, B\} \to \left\{\frac{1}{4}\right\}\right]$

Livello 2

10. Estrazione di due carte da 4 carte non segnate, che contengono i diversi assi. $\left[v : \{(A_1, A_2), (A_1, A_3), \ldots, (A_3, A_4)\} \to \left\{\frac{1}{6}\right\}, v(x) = \frac{1}{6}\right]$
11. Estrazione senza rigenerazione di due palline da un'urna che ne contiene 2 rosse e 2 blu, indistinguibili al tatto. $\left[v : \{(R, R), (R, B), (B, B)\} \to \left\{\frac{1}{6}; \frac{2}{3}\right\}, v((R, R)) = v((B, B)) = \frac{1}{6}, v((R, B)) = \frac{2}{3}\right]$
12. Estrazione con rigenerazione di due palline da un'urna che ne contiene 2 rosse e 2 blu, indistinguibili al tatto. $\left[v : \{(R, R), (R, B), (B, B)\} \to \left\{\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right\}, v((R, R)) = v((B, B)) = \frac{1}{4}, v((R, B)) = \frac{1}{2}\right]$
13. Estrazione di un numero reale di cui interessa stabilire se è o no positivo. $\left[v : \mathbb{R} \to \left\{\frac{1}{2}\right\}\right]$

Lavoriamo insieme

Consideriamo la funzione $v(x) = e^x$, vogliamo stabilire se essa può essere considerata una variabile casuale in [0; 1]. La funzione è sempre positiva, ma $\int_0^1 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^1 = e - 1 \neq 1$. Pertanto la risposta è negativa. Chiediamoci allora se esiste un intervallo [0; a] in cui possa essere considerata una variabile casuale. Deve aversi: $\int_0^1 e^x\,dx = 1 \Rightarrow \left[e^x\right]_0^a = e^a - 1 = 1 \Rightarrow e^a = 2 \Rightarrow a = ln(2)$. Pertanto la funzione $v(x) = e^x$, è una variabile casuale solo nell'intervallo [0; $ln(2)$].

Stabilire quali delle seguenti funzioni possono essere considerate variabili casuali nei domini indicati, giustificando le risposte

Livello 1

14. $v(x) = x^2$, $x \in [0; 1]$; $v(x) = x^2$, $x \in [0; \sqrt[3]{3}]$; $v(x) = e^{-x}$, $x \in [-ln(2); 0]$ [No ; Sì ; Sì]

15. $v(x) = sin(x)$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; $v(x) = sin(x)$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$; $v(x) = cos(x)$, $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ [Sì ; No ; Sì]

16. $v(x) = \frac{1}{2}x$, $x \in [0; 2]$; $v(x) = -\frac{1}{2}x$, $x \in [-2; 0]$; $v(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [1; e]$ [Sì ; No ; Sì]

Livello 2

17. $v(x) = ln(x)$, $x \in [0; 1]$; $v(x) = ln(x)$, $x \in [1; e]$; $v(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $x \in [0; 1]$ [No ; Sì ; No]

18. $v(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$; $v(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 1 \\ 1 & 1 < x \le 2 \end{cases}$, $x \in [0; 2]$; $v(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 1 \\ 1 & 1 < x \le 2 \end{cases}$, $x \in [0; 1]$ [No ; Sì; No]

Determinare per quali valori reali assegnati ai parametri le seguenti funzioni possono essere considerate variabili casuali nei domini indicati

Livello 2

19. $v(x) = 3x^2 + 2x - 1$, $x \in [0; h]$; $v(x) = 3x^2 + 2x - 1$, $x \in \left[\frac{1}{2}; h\right]$; $v(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [0; h]$ [$\varnothing$; 1 ; $\varnothing$]

20. $v(x) = 12x^2 - 16x + 5$, $x \in [0; h]$; $v(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \left[\frac{1}{2}; h\right]$; $v(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in [\frac{1}{4}; h]$ $\left[\frac{1}{2}; \frac{e}{2}; 1\right]$

21. $v(x) = sin(2x)$, $x \in [0; h]$; $v(x) = e^{2x}$, $x \in [0; h]$; $v(x) = e^{-3x}$, $x \in [h; 0]$ $\left[\frac{\pi}{2}; ln\left(\sqrt{3}\right); ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)\right]$

Livello 3

22. $v(x) = x^2 - h$, $x \in [0; 1]$; $v(x) = \frac{1}{hx}$, $x \in [1; 2]$; $v(x) = \frac{1}{hx^2}$, $x \in [-2; -1]$ $\left[-\frac{2}{3}; ln(2); \frac{1}{2}\right]$

23. $v(x) = hx \cdot e^{-x^2}$, $x \in [0; +\infty)$; $v(x) = \frac{ln(x)}{x}$, $x \in [1; h]$; $v(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in [0; h]$ $\left[2; e^{\sqrt{2}}; tan(1)\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare la media aritmetica della variabile casuale $v(x) = e^x$, $x \in [0; ln(2)]$. Abbiamo definito $\mu = \int_a^b x \cdot v(x)\,dx$, quindi in questo caso si ha: $\mu = \left[x \cdot e^x\right]_0^{ln(2)} - \int_0^{ln(2)} e^x\,dx = \left[x \cdot e^x - e^x\right]_0^{ln(2)} = \left[e^x \cdot (x-1)\right]_0^{ln(2)}$ Abbiamo integrato per parti. Si ha: $e^{ln(2)} \cdot [ln(2) - 1] - e^0 \cdot [0 - 1] = 2 \cdot [ln(2) - 1] + 1 = ln(4) - 1 \approx 0{,}39$.

Calcolare la media aritmetica delle seguenti variabili casuali

Livello 1

24. $v(x) = x^2$, $x \in [0; \sqrt[3]{3}]$; $v(x) = e^{-x}$, $x \in [-ln(2); 0]$; $v(x) = sin(x)$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $\left[\frac{3\cdot\sqrt[3]{3}}{4}; ln\left(\frac{e}{4}\right); 1\right]$

25. $v(x) = cos(x)$, $x\in\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$; $v(x) = \frac{1}{2}x$, $x \in [0; 2]$; $v(x) = 12x^2 - 16x + 5$, $x\in\left[0; \frac{1}{2}\right]$ $\left[\frac{3\pi+2}{2}; \frac{4}{3}; \frac{7}{48}\right]$

26. $v(x) = ln(x)$, $x\in[1; e]$; $v(x) = 3x^2 + 2x - 1$, $x\in\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; $v(x) = \frac{1}{x}$, $x\in[1; e]$ $\left[\frac{e^2+1}{4}; \frac{175}{192}; e-1\right]$

27. $v(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{e}{2}\right]$; $v(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$; $v(x) = sin(2x)$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $\left[\frac{e-1}{2}; ln(4); \frac{\pi}{4}\right]$

Livello 2

28. $v(x) = \frac{1}{ln(2)x}$, $x\in[1; 2]$; $v(x) = 2x\cdot e^{-x^2}$, $x\in[0; +\infty)$ $\left[\frac{1}{ln(2)}; \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare la mediana della variabile casuale $v(x) = e^x$, $x \in [0; ln(2)]$.

Deve essere $\int_0^{M_e} e^x\,dx = 0{,}5$, cioè $\left[e^x\right]_0^{M_e} = 0{,}5 \Rightarrow e^{M_e} - 1 = 0{,}5 \Rightarrow e^{M_e} = 1{,}5 \Rightarrow M_e = ln(1{,}5) \approx 0{,}41$.

Calcolare i quantili richiesti, relativi alle seguenti variabili casuali

Livello 1

29. $v(x) = x^2$, $x \in [0; \sqrt[3]{3}]$, $q = 0{,}5$; $v(x) = e^{-x}$, $x \in [-ln(2); 0]$, $q = 0{,}25$ $\left[\frac{\sqrt[3]{12}}{2}; ln\left(\frac{4}{7}\right)\right]$

30. $v(x) = sin(x)$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $q = 0{,}75$; $v(x) = \frac{1}{2}x$, $x \in [0; 2]$, $q = 0{,}75$ $\left[cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right); \sqrt{2}\right]$

31. $v(x) = \frac{1}{x}$, $x\in[1; e]$, $q = 0{,}5$; $v(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$, $q = 0{,}1$ $\left[\sqrt{e} : \frac{10}{39}\right]$

32. $v(x) = e^{2x}$, $x \in \left[0; ln\left(\sqrt{3}\right)\right]$, $q = 0{,}2$; $v(x) = e^{-3x}$, $x \in \left[-ln\left(\sqrt[3]{4}\right); 0\right]$, $q = 0{,}5$ $\left[ln\left(\sqrt{\frac{7}{5}}\right); ln\left(\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\right)\right]$

Livello 2

33. $v(x) = 2x\cdot e^{-x^2}$, $x\in[0; +\infty)$, $q = 0{,}5$; $v(x) = \frac{ln(x)}{x}$, $x \in \left[1; e^{\sqrt{2}}\right]$, $q = 0{,}5$ $\left[\sqrt{ln(2)}; e\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare lo scarto quadratico medio della variabile casuale $v(x) = e^x$, $x \in [0; ln(2)]$. Abbiamo definito: $\sigma = \sqrt{\int_a^b (x-\mu)^2 \cdot v(x)\,dx}$, e tenuto conto che abbiamo già calcolato $\mu = ln(4) - 1$, dobbiamo calcolare $\sigma = \sqrt{\int_0^{ln(2)} (x - ln(4) + 1)^2 \cdot e^x\,dx}$. Per sempicità conviene lasciare il nome simbolico della media:

$$\sigma = \sqrt{\int_0^{ln(2)} (x-\mu)^2 \cdot e^x \, dx} = \sqrt{\left[(x-\mu)^2 \cdot e^x\right]_0^{ln(2)} - 2 \cdot \int_0^{ln(2)} (x-\mu) \cdot e^x \, dx} =$$

$$= \sqrt{\left[(x-\mu)^2 \cdot e^x - 2 \cdot (x-\mu) \cdot e^x\right]_0^{ln(2)} + 2 \cdot \int_0^{ln(2)} e^x \, dx} = \sqrt{\left[\left(x^2 - 2\mu x + \mu^2 - 2x + 2\mu\right) \cdot e^x + 2e^x\right]_0^{ln(2)}} =$$

$$= \sqrt{\left[\left(x^2 - 2\mu x + \mu^2 - 2x + 2\mu + 2\right) \cdot e^x\right]_0^{ln(2)}} = 1 - 2 \cdot ln^2(2) \approx 0,039$$

Abbiamo saltato i calcoli finali, nel complesso banali, anche se laboriosi.

Calcolare scarto quadratico medio delle seguenti distribuzioni statistiche, le medie sono state calcolate in precedenti esercizi

Livello 1

34. $v(x) = x^2$, $x \in [0; \sqrt[3]{3}]$; $v(x) = e^{-x}$, $x \in [-ln(2); 0]$; $v(x) = sin(x)$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ [≈ 0,28 ; ≈ 0,20 ; ≈ 0,38]

35. $v(x) = \frac{1}{2}x$, $x \in [0; 2]$; $v(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [1; e]$; $v(x) = ln(x)$, $x \in [1; e]$ [≈ 0,47 ; ≈ 0,49 ; ≈ 0,42]

36. $v(x) = 3x^2 + 2x - 1$, $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$; $v(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$; $v(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{e}{2}\right]$ [≈ 0,18 ; ≈ 1,63 ; ≈ 0,25]

Livello 2

37. $v(x) = \frac{1}{ln(2)x}$, $x \in [1; 2]$; $v(x) = 2x \cdot e^{-x^2}$, $x \in [0; +\infty)$ [≈ 0,29 ; ≈ 0,46]

Principali variabili casuali

Consideriamo adesso alcune variabili casuali, discrete e continue, che, per diversi motivi, hanno importanti applicazioni. Il caso teoricamente più auspicabile è quello in cui la variabile sia formata da valori uguali, in cui quindi tutto viene distribuito in modo uniforme.

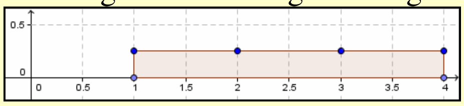
Definizione 5

La variabile casuale discreta v: $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \to \left\{\frac{1}{n}\right\}$ si chiama **uniforme discreta**.

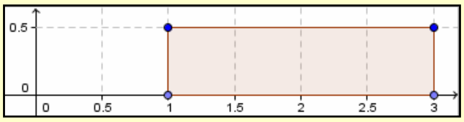
La variabile casuale continua v: $[a; b] \to \left\{\frac{1}{b-a}\right\}$ si chiama **uniforme continua**.

Esempio 5

- L'istogramma di una uniforme discreta o continua è ovviamente un rettangolo. Nella seguente figura mostriamo una distribuzione uniforme discreta di 4 valori.



- Ecco invece una uniforme continua sull'intervallo [1; 3].



Facilmente possiamo calcolare media, scarto quadratico medio e varianza di una tale distribuzione.

Teorema 1

Per una variabile casuale uniforme discreta si ha: $\mu = \frac{n+1}{2}, \sigma^2 = \frac{n^2-1}{12}$.

Dimostrazione per esercizio

Proviamo l'analogo risultato per il caso continuo.

Teorema 2

Per una variabile casuale uniforme continua si ha: $\mu = \frac{a+b}{2}, \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Dimostrazione

Per la definizione 3, si ha: $\mu = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{1}{\cancel{b-a}} \cdot \frac{\cancel{(b-a)} \cdot (a+b)}{2} = \frac{a+b}{2}$

Mentre per la definizione 5:

$$\sigma^2 = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \left[\frac{1}{3} \cdot \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3\right]_a^b \cdot \frac{1}{b-a} = \left[\frac{1}{3} \cdot \left(b - \frac{a+b}{2}\right)^3 - \frac{1}{3} \cdot \left(a - \frac{a+b}{2}\right)^3\right] \cdot \frac{1}{b-a} =$$

$$= \left\{\frac{1}{3} \cdot \left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^3\right]\right\} \cdot \frac{1}{b-a} = \left\{\frac{1}{24} \cdot \left[(b-a)^3 + (b-a)^3\right]\right\} \cdot \frac{1}{b-a} = \frac{\cancel{2} \cdot (b-a)^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{24}} \cdot \frac{1}{\cancel{b-a}} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Un'altra importante variabile casuale è quella che viene fuori dalle cosiddette prove ripetute indipendenti di Bernoulli, che abbiamo già considerato nella definizione 17 dell'unità 8.4.

Definizione 6

Dato un evento E che ha probabilità p di accadere e che sottoponiamo a n prove ripetute indipendenti. La variabile casuale discreta v: $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\} \to P \subseteq [0; 1]$, in cui e_k indica il fatto che E si verifichi esattamente k volte, definita da $v(e_k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, 0 \le k \le n$, si chiama **binomiale**.

Esempio 6

Un classico esempio di prove ripetute indipendenti di Bernoulli è il lancio di una moneta regolare n volte. Per esempio supponiamo di lanciarla 4 volte. Gli eventi possibili sono 5: $\{e_0, e_1, \ldots, e_4\}$, in cui e_t indica il fatto che si presentino esattamente t teste (o indifferentemente t croci). Ovviamente $p = \frac{1}{2}$, quindi la relazione della definizione 6 si semplifica in $v(e_t) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Così per esempio avremo: $v(e_0) = \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}, v(e_1) = \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}, v(e_2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$, per le note proprietà di simmetria dei coefficienti binomiali, $\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k}$, abbiamo $v(e_0) = v(e_4)$ e $v(e_1) = v(e_3)$. Quindi possiamo dire che il codominio della variabile è $\left\{\frac{1}{16}; \frac{1}{4}; \frac{3}{8}\right\}$. Osserviamo che ovviamente si ha: $2 \cdot \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = 1$.

Anche in questo caso possiamo calcolare facilmente la media e la varianza.

Teorema 3

Per una variabile casuale binomiale si ha: $\mu = np$, $\sigma^2 = np \cdot (1-p)$.

Dimostrazione

Dobbiamo calcolare $\mu = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, poiché il primo addendo è nullo. Adesso osserviamo che si ha: $k \cdot \binom{n}{k} = k \cdot \frac{n! \cdot (n-k)!}{k!} = \frac{n! \cdot (n-k)!}{(k-1)!} = n \cdot \frac{(n-1)! \cdot (n-k)!}{(k-1)!} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$.

Così si ha: $\mu = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = n \cdot p \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k}$.

Ricordiamo lo sviluppo del binomio di Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$ e teniamo conto che possiamo scrivere: $n - k = (n-1) - (k-1)$, per riscrivere: $\mu = np \cdot (p + 1 - p)^{n-1} = np$, che è proprio la prima tesi.

Omettiamo la dimostrazione che $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (k - np)^2 \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = np \cdot (1-p)$.

Verifichiamo il risultato precedente in un caso particolare.

Esempio 7

Consideriamo i dati dell'esempio 6. Dobbiamo calcolare

$$\sum_{k=0}^{4} k \cdot \binom{4}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left[0 \cdot \binom{4}{0} + 1 \cdot \binom{4}{1} + 2 \cdot \binom{4}{2} + 3 \cdot \binom{4}{3} + 4 \cdot \binom{4}{4}\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot (0 + 4 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 4) = \frac{32}{16} = 2$$

E in effetti $np = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$. Quindi mediamente lanciando per 4 volte una moneta regolare, ci aspettiamo di ottenere 2 teste. Per la varianza invece dobbiamo calcolare:

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^{4}(k-2)^2 \cdot \binom{4}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \cdot \left[4 \cdot \binom{4}{0} + 1 \cdot \binom{4}{1} + 0 \cdot \binom{4}{2} + 1 \cdot \binom{4}{3} + 4 \cdot \binom{4}{4}\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot (4+4+0+4+4) = \frac{16}{16} = 1$$

e $np(1 - p) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Vi sono diversi eventi, naturali e no, che seguono andamenti di tipo esponenziale, come abbiamo visto per esempio per i modelli di crescita delle popolazioni. È opportuno perciò definire una variabile casuale che tratti questo tipo di eventi.

Definizione 7

Dato uno spazio discreto E di eventi che si verificano successivamente ed indipendentemente in un certo intervallo di tempo, nel quale mediamente se ne verificano λ, la variabile casuale discreta $v: E \to P \subseteq [0; 1]$, $v(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, che calcola con che probabilità si verificano esattamente k di tali eventi, si chiama **poissoniana**.

Esempio 8

Se in un dato ufficio arrivano mediamente 10 chiamate ogni ora, per sapere con che probabilità si riceveranno, in una certa ora, 7 telefonate, possiamo usare proprio la poissoniana, ottenendo $e^{-10} \cdot \frac{10^7}{7!} \approx 0{,}09$,quindi la probabilità è di circa il 9%.

Anche in questo caso si ha un risultato generale per la media e la varianza.

Teorema 4

Per una variabile casuale poissoniana si ha: $\mu = \sigma^2 = \lambda$.
Dimostrazione omessa

Vale una importante relazione fra poissoniana e binomiale.

Teorema 5

Si ha $\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$.

Dimostrazione

Si ha: $\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} \cdot \left[\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n\right]^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{D_{n,k}}{n^k} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k}$, abbiamo indicato con $D_{n,k}$ il numero di disposizioni semplici. Tenuto conto che si ha: $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$, $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k = 1$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n^k} = 1$, quest'ultimo per il principio di sostituzione degli infiniti, si ottiene la tesi,

Il risultato precedente vuol significare che la poissoniana è una approssimazione della binomiale per $\lambda = pn$.

Esempio 9

- Per un difetto di fabbrica il 3% dei modelli di un'automobile è risultato avere un problema all'accensione. Con che probabilità, un concessionario che ha ordinato 15 di tali autovetture non ne riceve nessuna difettosa? Utilizzando la binomiale abbiamo: $\binom{15}{0} \cdot 0,03^0 \cdot 0,97^{15} \approx 0,633$. Utilizzando l'approssimazione poissoniana invece dobbiamo porre $\frac{\lambda}{15} = 0,03 \Rightarrow \lambda = 0,45$ e quindi: $e^{-0,45} \cdot \frac{0,45^0}{0!} = e^{-0,45} \approx 0,637$. Come si vede la differenza numerica fra i due valori, avviene solo a partire dal terzo decimale.
- Se la percentuale fosse stata maggiore del 10%, per esempio 13%, i valori ottenuti sarebbero stati invece abbastanza diversi. Infatti $\binom{15}{0} \cdot 0,13^0 \cdot 0,87^{15} \approx 0,123$, mentre $e^{-1,95} \approx 0,142$. In generale la differenza fra i risultati forniti dalle due variabili aumenta all'aumentare di *p*.

Possiamo dire che la poissoniana è una buona approssimazione della binomiale per $p \le 0,1$.
Adesso consideriamo la più importante e usata variabile casuale continua.

Definizione 8

La variabile casuale continua *v*: $(-\infty; +\infty) \to [0; 1]$, definita da $v(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$, si chiama **normale (o gaussiana) standardizzata.**

L'importanza della precedente variabile è dovuta al fatto che molte variabili aleatorie convergono verso questa per alti valori dei parametri. Consideriamo il seguente risultato.

Teorema 6

Per una variabile casuale normale standardizzata si ha: $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$.

Dimostrazione

Abbiamo: $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b x \cdot \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \left[e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_a^b = 0$. E: $\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$, purtroppo questo integrale non è elementare, si può però far vedere che $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$, pertanto abbiamo la tesi.

La dimostrazione precedente fa capire l'importanza della scelta dei parametri. Generalizziamo la gaussiana

Definizione 9

La variabile casuale continua *v*: $(-\infty; +\infty) \to \subseteq \mathbb{R}^+$, definita da $v(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}$, si chiama **normale o gaussiana.**

Vale il seguente risultato.

Teorema 7

Una variabile casuale normale ha media μ e varianza σ^2.

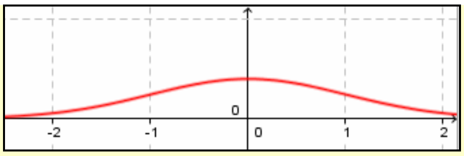
Dimostrazione omessa

Notazione 1

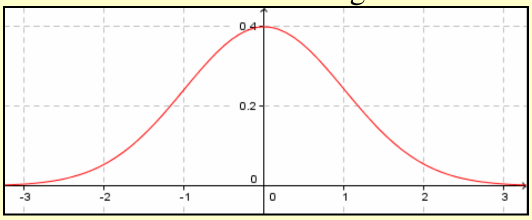
Una normale di media μ e varianza σ^2 si indica con $N(\mu; \sigma^2)$. Quindi $N(0; 1)$ è la normale standardizzata.

Esempio 10

Rappresentiamo graficamente a lato, con Geogebra, la normale.



Ci sarà certamente capitato di vedere la cosiddetta *curva a campana*, che viene utilizzata per esempio nella teoria degli errori sperimentali. La nostra curva appare molto più *piatta*, ciò dipende dal fatto che, proprio per mettere in risalto la forma a *campana*, si utilizza un sistema di riferimento dimetrico, in cui l'unità di misura delle ordinate è molto maggiore di quella delle ascisse. Nella figura a lato abbiamo ridisegnato la curva usando il rapporto $\frac{1}{5}$.



Il calcolo dell'integrale presente nella normale è possibile solo con metodi numerici, fino a non pochi anni fa venivano perciò usate apposite tavole che riportavano il calcolo per alcuni valori, adesso con la diffusione dei CAS ciò non è più necessario, come vedremo negli esempi. Visto il significato geometrico dell'integrale, calcolare $\int_a^b \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx$, equivale a calcolare quanto misura l'area del trapezoide della normale lungo l'intervallo $[a; b]$. Visto anche il suo legame con la probabilità esso equivale a stabilire con che probabilità la normale assume valori compresi tra a e b.

Esempio 11

Supponiamo di volere stabilire con che probabilità un valore della normale è compreso tra 0 e 2, dobbiamo quindi calcolare $\int_0^2 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx \approx 0,4772$. Possiamo quindi dire che vi è una probabilità di circa il 48% che la variabile normale assuma valori compresi tra 0 e 2.

Come ci comportiamo invece con le normali non standardizzate?

Teorema 8

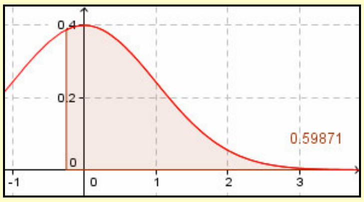
Una $N(\mu; \sigma^2)$, si trasforma in una $N(0; 1)$ con la posizione $\frac{x-\mu}{\sigma} = X$.

Dimostrazione per esercizio

Vediamo un'applicazione del precedente risultato.

Esempio 12

Supponiamo di volere stabilire con che probabilità un valore di $N(10; 12)$ è maggiore di 7. Prima applichiamo la trasformazione del Teorema 8: $X = \frac{7-10}{12} = -\frac{1}{4}$, dobbiamo quindi calcolare $\int_{-0,25}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx \approx 0,5987$. Vi è una probabilità di circa il 60% che $N(10; 12)$ assuma valori maggiori di 7. Come si vede in figura, Geogebra conferma il risultato ottenuto con un CAS. Potevamo calcolare anche



direttamente $\int_7^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-10)^2}{2\cdot 12}}}{\sqrt{12}\cdot\sqrt{2\pi}}\,dx \approx 0{,}5987$.

In effetti possiamo stimare il valore delle aree sottese dalla normale standardizzata una volta per tutte.

Esempio 13

Calcoliamo con Derive il valore di $N(0; 1)$ in intervalli $[-n; n]$, con $1 \le n \le 3$. Quindi possiamo dire che vi è circa il 68,2% di probabilità che un valore di $N(0; 1)$ appartenga a $[-1; 1]$; di circa il 95,4% che appartenga a $[-2; 2]$; di circa il 99,7% che appartenga a $[-3; 3]$.

$$ns(a, b) := \int_a^b \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{(2\cdot\pi)}}\,dx$$

```
VECTOR(ns(-n, n), n, 1, 3)
        [0.6826894921, 0.9544997361, 0.9973002039]
```

In effetti nel caso particolare di $N(0; 1)$, $[-n; n] = [\mu - n\sigma; \mu + n\sigma]$ e tenuto conto appunto del fatto che questa variabile non è altro che una standardizzazione, in modo che l'area valga 1, il risultato si può generalizzare a una variabile normale qualsiasi.

Teorema 9

Per una $N(\mu; \sigma^2)$, indicando con P la probabilità che un dato valore appartenga a un dato intervallo, si ha
- $P(\{\mu - \sigma < X < \mu + \sigma\}) \approx 68{,}3\%$;
- $P(\{\mu - 1{,}96\sigma < X < \mu + 1{,}96\,\sigma\}) \approx 95{,}0\%$;
- $P(\{\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma\}) \approx 95{,}5\%$;
- $P(\{\mu - 2{,}58\sigma < X < \mu + 2{,}58\sigma\}) \approx 99{,}0\%$;
- $P(\{\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma\}) \approx 99{,}7\%$

Dimostrazione per esercizio usando un CAS.

L'aver scelto 1,96 e 2,58 è dovuto solo al fatto che per tali valori le probabilità percentuali si avvicinano a valori interi, 95% e 99% rispettivamente.

I protagonisti

Siméon Denis Poisson nacque a Pithiviers il 21 giugno 1781. Ottenne fondamentali risultati soprattutto in fisica, famoso è il suo *Traité de mécanique*, in 2 volumi, rispettivamente del 1811 e del 1833. Si ricordano anche suoi importanti risultati in elettricità e magnetismo. Per quanto riguarda i suoi lavori di statistica, la distribuzione che porta il suo nome fu introdotta in un articolo del 1838: *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*. Morì a Parigi il 25 aprile 1840.
Gauss presentò per la prima volta a stampa la curva che oggi porta il suo nome in un lavoro del 1823: *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae*, in cui trattò della teoria degli errori sperimentali e in cui presentò anche il cosiddetto metodo dei minimi quadrati.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Supponiamo di avere incollato sul pavimento una sottile striscia di ferro lunga 1 *m* e supponiamo di lanciare su di essa una piccola calamita larga quanto la striscia. Possiamo affermare con buona certezza che, comunque lanciamo la calamita essa si attaccherà alla striscia. Questo significa che la probabilità che la calamità vada a finire su una posizione qualsiasi della striscia non dipende dalla posizione, quindi possiamo descrivere l'esperimento mediante una variabile uniforme. Pertanto per il Teorema 2, ci aspettiamo che lanciando un elevato numero di volte la calamita, il valore medio della distribuzione delle posizioni raggiunte sarà $\frac{1}{2}$.

Livello 1

Calcolare media e varianza delle seguenti variabili statistiche

1. Lancio di un dado regolare (può pensarsi descritto da una variabile uniforme). $\left[3,5;\frac{35}{12}\right]$
2. Estrazione di una carta da un mazzo da 40 (può pensarsi descritto da una variabile uniforme). $\left[20,5;\frac{1599}{12}\right]$
3. Scelta di un punto dell'intervallo [–1; 3] (può pensarsi descritto da una variabile uniforme). $\left[2;\frac{4}{3}\right]$
4. All'Opera lo spettacolo inizia esattamente alle 21:00, dopo tale orario nessuno viene ammesso. Tommaso non riesce ad arrivare prima delle 20:45 nelle vicinanze del teatro, dopodiché, a seconda del traffico impiega da 10 a 20 minuti per arrivare al teatro, seguendo una variabile uniforme. Con che probabilità riesce a vedere l'inizio dell'Opera? [50%]
5. La metropolitana della linea A della città di Mathville, dalle 6:00 alle 18:00 effettua corse ogni 5 minuti. Ipotizzando che l'orario in cui una persona arriva alla stazione sia rappresentato da una variabile casuale uniforme, con che probabilità la persona aspetterà meno di 2 minuti il treno? [40%]
6. Una linea di autobus effettua corse ogni 4 minuti, con che probabilità una persona aspetterà meno di 3 minuti l'arrivo di una vettura? [75%]

Livello 2

7. Con riferimento al problema della calamita del box lavoriamo insieme, con che probabilità essa andrà a finire nei primi o negli ultimi 20 *cm*? [40%]
8. Con riferimento al problema precedente, con che probabilità essa andrà a finire nei primi 30 *cm* o nell'intervallo [0,20 *cm* – 0,50 *cm*]? [50%]
9. Una linea di autobus effettua corse ogni 4 minuti, con che probabilità una persona aspetterà meno di 1 o più di 3 minuti? [50%]
10. Con riferimento al problema precedente, con che probabilità essa aspetterà più di 1 ma meno di 2 minuti? [25%]
11. Le corse di una linea di metropolitane sono ripartite come in tabella.

Fascia oraria	Frequenza
6:00 – 8:00; 12:00 – 14:00; 18:00 – 19:00	3^m
8:00 – 12:00	4^m
14:00 – 18:00	5^m
19:00 – 24:00;	10^m

Determinare la probabilità che un viaggiatore aspetti meno di 2 minuti se arriva casualmente a) dalle 6 alle 8; b) dalle 8 alle 12; c) dalle 19 alle 24. [≈ 67%; 50%; 20%]

Livello **3**

12. Con riferimento al problema delle corse della metropolitana, determinare la probabilità che un viaggiatore aspetti meno di 2 minuti se arriva casualmente a) dalle 7 alle 9; b) dalle 7 alle 10; c) dalle 13 alle 20; d) dalle 6 alle 24. [≈ 58%; ≈ 56%; ≈ 45%; ≈ 44%]

Lavoriamo insieme

Lanciamo una moneta per 100 volte e otteniamo 43 teste e 57 croci, ipotizziamo quindi che la moneta sia falsata e quindi che si abbia $p(\mathrm{T}) = 0{,}43$ e $p(\mathrm{C}) = 0{,}57$. Se tale ipotesi è corretta, lanciando per 4 volte la moneta, con che probabilità otteniamo esattamente 3 teste? E almeno 3 teste? Abbiamo a che fare con una variabile binomiale, quindi la prima probabilità è $\binom{4}{3}\cdot 0{,}47^3\cdot 0{,}53 \approx 0{,}22$. Per la seconda domanda dobbiamo calcolare $\binom{4}{3}\cdot 0{,}47^3\cdot 0{,}53+\binom{4}{4}\cdot 0{,}47^4 \approx 0{,}27$.

Livello **1**

13. Determinare media e varianza dell'evento lancio di una moneta regolare per 10 volte. [5; 2,5]
14. Determinare la probabilità che lanciando 7 volte una moneta regolare si ottengano esattamente 3 teste. [≈ 27,3%]
15. Si sa che mediamente il 2% dei pezzi prodotti da un macchinario non è idoneo alla vendita. Con che probabilità in una confezione da 150 pezzi ne troviamo 3 inidonei? [≈ 17%]
16. Nel 2012 in Italia per ogni 1000 bambini nati vivi, entro il primo anno di vita ne sono morti 3,36. Con che probabilità in un ospedale in cui sono nati complessivamente 1324 bambini, tutti siano sopravvissuti al primo anno? [≈ 0,84%]
17. Nel 2012 in Italia il tasso di alfabetizzazione era del 98,4%. Con che probabilità fra 150 abitanti scelti a caso, vi erano esattamente 5 analfabeti? [≈ 5,98%]
18. Nel 2012 in Italia il 9,8% della popolazione era classificato obeso. Con che probabilità scelte a caso 27 persone, vi erano esattamente 2 obesi? [≈ 25,6%]
19. Nel 2008 in Italia vi erano 4,242 medici per 1000 abitanti. Con che probabilità in quell'anno, scelta a caso una comitiva di 18 persone non vi si trovavano medici? [≈ 92,6%]
20. Lanciamo una freccia su un bersaglio e stimiamo di avere il 25% di probabilità di fare centro. Con che probabilità tirando 4 frecce non colpiamo mai il centro? [≈ 31,6%]
21. Con che probabilità lanciando 5 volte un dado non falsato, si ottiene sempre sei? E sempre lo stesso punteggio? [≈ 0,01%; ≈ 0,08%]
22. Con che probabilità estraendo 4 volte una carta a caso, con rigenerazione, da un mazzo da 40, si ottiene sempre il re di denari? E sempre un re? E sempre una figura? [≈ 0%; ≈ 0,01%; ≈ 0,81%]

Livello **2**

23. Determinare la probabilità che lanciando 7 volte una moneta regolare si ottengano più teste che croci. [50%]
24. Si sa che mediamente l'1,5% dei pezzi prodotti da un macchinario non è idoneo alla vendita. Con che probabilità in una confezione da 100 pezzi ne troviamo da 1 a 3 inidonei? [≈ 14%]
25. Nel 2012 in Italia il rapporto maschi/femmine alla nascita è stato del 1,06. Con che probabilità una famiglia che ha avuto 2 gemelli, li ha avuti entrambi maschi? [≈ 26%]
26. Il controllo di qualità di una certa industria prevede che alla fine della giornata si controllino a caso 100 pezzi prodotti, se più di 3 presentano imperfezioni si ferma la produzione e si procede a una revisione. Con che probabilità la produzione non si ferma, nonostante che la macchina produca il 5% di pezzi difettosi in totale? [≈ 25,8%]
27. L'over booking consiste nel vendere più biglietti della disponibilità, e ciò perché le statistiche precedenti hanno evidenziato che una certa percentuale di chi compra il biglietto, per diversi motivi non lo sfrutta. Se in un certo cinema la detta percentuale è del 12% e una sera per 100 posti disponibili si vendono 103 biglietti, con che probabilità tutti gli spettatori troveranno il posto? [≈ 99,9%]

28. Con riferimento al quesito della freccia. Con che probabilità tirando 4 frecce almeno 2 fanno centro? [≈ 26,2%]
29. Con che probabilità lanciando 5 volte un dado non falsato, si ottiene sei almeno 3 volte? E al più 3 volte? [≈ 3,6%; ≈ 99,7%]
30. Con che probabilità estraendo 3 volte una carta a caso, con rigenerazione, da un mazzo da 40, si ottengono al massimo 2 assi? Al minimo due carte dello stesso seme? [≈ 99,9%; ≈ 11,2%]

***Livello* 3**

31. CAS Se la probabilità che lanciando 4 volte una moneta si ottengano esattamente 3 teste è di circa 37%, qual è la probabilità che in un singolo lancio si ottenga testa? [≈ 0,63 ∨ ≈ 0,85]
32. Con riferimento al quesito sull'over booking, rimasti inalterati gli altri dati, quanti biglietti dovranno vendersi, affinché la probabilità che tutti gli spettatori trovino il posto sia inferiore al 90%? [108]

Lavoriamo insieme

In una scuola mediamente vi sono 15 studenti assenti al giorno. Qual è la probabilità che un certo giorno gli assenti siano 18? Questo è un caso tipicamente trattato dalla variabile poissoniana, che in questo caso ha λ = 15. Dobbiamo pertanto calcolare $v(18) = e^{-15} \cdot \frac{15^{18}}{18!} \approx 7{,}1\%$

***Livello* 1**

33. In un certo tratto di una strada statale si è stimato che settimanalmente avvengono 2 incidenti. Con che probabilità in una certa settimana non ci sono stati incidenti? [≈ 13,5%]
34. In un parcheggio di un ipermercato si registra un ingresso medio di 12 macchine al minuto. Con che probabilità, il minuto successivo all'ingresso della nostra macchina sono entrate 15 auto? [≈ 7,2%]
35. Un libro di 500 pagine contiene un totale di 128 errori di stampa, cioè una media di $\frac{128}{500}$ errori per pagina, con che probabilità una pagina scelta a caso è libera da errori? [≈ 77,4%]
36. Un call center di reclami, riceve una media di 34 chiamate l'ora, con che probabilità in una certa ora ne riceve 40? [≈ 3,8%]
37. In un compito di matematica assegnato in una classe di 24 studenti, vi sono state 8 insufficienze. Con che probabilità scelti 10 compiti a caso, uno solo di essi è insufficiente? [≈ 9,9%]

***Livello* 2**

38. Per stabilire se una roulette non è truccata abbiamo controllato le 148 partite di una serata, registrando 3 volte lo zero. Con che probabilità avremmo ottenuto questo risultato in caso di regolarità? Effettuare il calcolo prima con la binomiale e poi con la poissoniana. [≈ 19,5%; ≈ 19,6%]
39. Durante la nona settimana del 2012, coloro che hanno avuto l'influenza sono stati in numero di 4,19 per mille assistiti. Con che probabilità, in quella settimana, in una città di 25000 abitanti vi sono stati esattamente 100 influenzati? [≈ 2,9%]
40. Con riferimento al quesito del parcheggio con che probabilità entrano meno di 10 auto al minuto? Da 9 a 14 auto? [≈ 34,7%; ≈ 61,7%]
41. Con riferimento al quesito degli errori di stampa, con che probabilità non ve ne sono in 4 pagine scelte a caso? [≈ 35,9%]
42. Con riferimento al quesito del call center, con che probabilità ne riceve meno di 30? Fra 30 e 40? Meno di 25 o più di 40 ma meno di 50? [≈ 22,4%; ≈ 64,3%; ≈ 17,4%]
43. Con riferimento al quesito del compito di matematica, con che probabilità le insufficienze sono meno di 3? Più di 5? Da 2 a 4? [≈1,4%; ≈ 40,1%; ≈ 9,7%]

***Livello* 3**

44. Con riferimento al quesito del call center, con che probabilità ne riceve da 22 a 28 o da 25 a 32? [≈ 39,7%]

45. Con riferimento al quesito del compito di matematica, con che probabilità le insufficienze sono meno di 5 o più di 3? [≈ 59,2%]

Lavoriamo insieme

Nelle Università americane la votazione si basa sulla distribuzione normale. Intanto i voti non sono numerici ma indicati dalle lettere A, B, C, D, per i voti sufficienti e E oppure F per le insufficienze. Quindi si graduano solo le sufficienze, mentre le insufficienze sono racchiuse da due classi. Concentriamo l'attenzione solo sulle sufficienze. Stabilita la soglia della sufficienza, i voti che superano tale valore, numerico, vengono suddivisi in modo tale che il 15% ottenga A, il 35% B, il 35% C e il 15% D. Vediamo di capire perché si usa tale schema. In pratica si calcolano media e scarto quadratico medio della distribuzione, supposta normale, quindi chi ha un voto maggiore di $\mu + \sigma$ prende A; prende B chi ha un voto appartenente a $(\mu; \mu + \sigma)$; C per voti in $(\mu - \sigma; \mu)$; D per voti minori di $\mu - \sigma$. Di seguito vi è la verifica di quanto detto effettuata con Derive.

$$\left[\int_1^{\infty}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{(2\cdot\pi)}}dx,\ \int_0^{1}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{(2\cdot\pi)}}dx,\ \int_{-1}^{0}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{(2\cdot\pi)}}dx,\ \int_{-\infty}^{-1}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{(2\cdot\pi)}}dx\right]$$

$$[0.1586552539,\ 0.3413447460,\ 0.3413447460,\ 0.1586552539]$$

Livello 1

46. Un test viene associato a una $N(65; 15)$, con soglia di insufficienza 40, quali punteggi otterranno una A? Quali una D? [(90; 100); (40; 50)]
47. Un test viene associato a una $N(21; 5)$, quali punteggi otterranno una B? Quali una C? [(21; 26); (16; 20)]
48. 75 studenti superano un test, i cui risultati sono associati a una $N(23; 4)$. Quanti di essi ottengono A? [12]
49. N studenti superano un test, i cui risultati sono associati a una normale. Se 13 di essi ottengono B, quanti sono gli studenti? [38]
50. Una fabbrica produce lampadine la cui durata media in ore segue una $N(5000; 250)$. Quanto dovrebbe durare il 68,3% di esse? [Da 4750 a 5250 ore]
51. Una fabbrica produce gelati il cui peso in grammi segue una $N(80; 5)$. La produzione giornaliera è di 1500 unità, quanti di essi avranno un peso compreso tra 75 e 85 *gr*? [1024-1025]
52. Una fabbrica produce merendine il cui peso in grammi segue una $N(50; 2)$. Se circa 11938 di quelle prodotte oggi ha un peso compreso tra 46 *gr* e 54 *gr*, quante merendine sono state prodotte oggi all'incirca? [12500]
53. I voti finali all'esame di stato di una classe seguono una $N(\mu; \sigma)$. Se il 99,7% dei voti è compreso tra 65 e 78, quanto valgono media e scarto quadratico medio? [71,5; ≈ 2,17]

Negli esercizi seguenti è consigliabile usare un CAS

Livello 2

54. Da uno studio sulla malattia di Alzheimer, si ipotizza che il peso del cervello di un malato si distribuisca normalmente con $N(1076,80; 105,76)$, valori espressi in grammi. Con che probabilità un malato scelto a caso ha un cervello che pesa meno di 1000 grammi? E tra 850 e 950 grammi? E più di 900 grammi? [≈ 23,4%; ≈ 9,9%; ≈ 95,3%]
55. Il risultato di un esame universitario è valutato con una $N(23,4; 5,25)$. Con che probabilità uno studente ha avuto almeno 25? Un voto tra 20 e 24? Al massimo 27? Tenuto conto che il voto minimo è 0 e il massimo 30, nei calcoli sostituire questi due valori come estremi. [≈ 27,6%; ≈ 28,7%; ≈ 75,3%]
56. Per valutare la durata di un pneumatico si ipotizza un andamento del tipo $N(50000; 8500)$, misurato in *Km*. Con che probabilità un pneumatico dovrà essere sostituito prima di 35000 *Km*? Fra 48000 e 60000 *Km*? Dopo 65000 *Km*? [≈ 3,9%; ≈ 47,3%; ≈ 3,9%]
57. Una lampadina al sodio viene fornita dal produttore con una legge $N(11000; 1000)$ misurata in ore. Se un acquirente sostituisce la lampada dopo 9000 ore di funzionamento, possiamo dire che era difettosa? Giustificare la risposta. [Sì, perché la probabilità che duri da 0 a 9000 ore è di appena il 2,3%]

58. Una fabbrica produce latte in confezione da 1 *l* che segue una $N(1; 0{,}04)$. La produzione giornaliera è di 3000 unità, quante confezioni conterranno meno di 0,98 *l*? [Circa 926]

59. Un ipermercato confeziona pesche in cestini il cui peso in grammi segue una $N(975; 35)$. Se oggi sono state confezionate 148 ceste, quante all'incirca avranno un peso compreso tra 950*g* e 1000 *g*? [78]

60. Una fabbrica produce sferette di metallo il cui diametro in *mm*, segue una $N(37; 3)$. Se circa 4612 di quelle prodotte oggi ha un diametro compreso tra 35 *mm* e 41 *mm*, quante sferette sono state prodotte oggi all'incirca? [7027]

61. I voti in un compito di matematica seguono una $N(6; \sigma)$. Se il 60% dei voti è compreso tra 5 e 7, quanto vale lo scarto quadratico medio? [≈ 1,19]

Lavoriamo insieme

Le batterie prodotte da una fabbrica appositamente per un dato dispositivo elettronico, seguono una distribuzione normale. Si è visto che il 3,12% di esse dura meno di 1500 ore e il 2,14% più di 2000 ore. Vogliamo determinare media e scarto quadratico medio. Usando Derive calcoliamo dei valori approssimati della normale standardizzata per cui le aree sottese valgono 0,0312 e 0,0214 e li mostriamo di seguito.

$$\left[\text{SOLVE}\left(\int_{-\infty}^{a} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{(2\cdot\pi)}}\,dx = 0.0312,\ a\right),\ \text{SOLVE}\left(\int_{-\infty}^{a} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{(2\cdot\pi)}}\,dx = 1 - 0.0214,\ a\right)\right]$$

$$[a = -1.863442751,\ a = 2.025656473]$$

Sfruttiamo le proprietà di simmetria della normale. Standardizzando la generica $N(\mu; \sigma)$ abbiamo da risolvere il sistema: $\begin{cases} \dfrac{1500-\mu}{\sigma} = -1{,}86 \\ \dfrac{2000-\mu}{\sigma} = 2{,}03 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu \approx 1739{,}1 \\ \sigma \approx 128{,}5 \end{cases}$, quindi abbiamo a che fare con una $N(1739{,}1; 128{,}5)$.

Livello 3

62. L'area sottostante la curva normale standardizzata in $(0{,}25; x)$ è 0.293. Determinare x. [$1{,}23 < x < 1{,}24$]

63. I filoni di pane prodotti da un panificio industriale, seguono una distribuzione normale. Si è visto che il 4,15% dei filoni pesa meno di 970 *g* e il 3,71% più di 1023 *g*. Determinare media e scarto quadratico medio della distribuzione. [≈ 996,1 *g*; ≈ 15,1 *g*]

64. Le altezze degli studenti delle quinte classi di una grossa scuola superiore, seguono una distribuzione normale. Tenuto conto che il 3,05% è alto meno di 165 *cm* e il 4,38% più di 190 *cm*, determinare media e scarto quadratico medio della distribuzione. Quanta percentuale degli studenti ha un'altezza compresa tra 170 *cm* e 180 *cm*? [≈ 172,8 *cm*; ≈ 4,2 *cm*; ≈ 70%]

Stima e decisioni statistiche

Il problema

Per diversi motivi le indagini statistiche effettuate nei fenomeni reali non riguardano l'intera popolazione. Per esempio i cosiddetti exit poll che vengono svolte per le elezioni, sono interrogazioni di una parte molto piccola degli effettivi elettori. Ciò per varie ragioni soprattutto economiche, dato che non vi sarebbero sufficienti rilevatori e non si possono interrogare tutti gli elettori. Allo stesso modo per verificare che i fiammiferi prodotti da una fabbrica non siano difettosi non ha senso accenderli tutti, perché ogni prova è distruttiva. Quindi in pratica andiamo a effettuare quello che si chiama un campionamento. La questione è: che affidabilità hanno i risultati statistici del campione rispetto all'intera popolazione?

Il problema posto è sicuramente di difficilissima risoluzione, soprattutto nella prima ipotesi, in cui i risultati sono spesso affetti da errori derivanti dal fatto che parte degli elettori interrogati si rifiuta di rispondere o fornisce risposte false. E in effetti si è visto più volte che vi sono state grosse differenze fra gli exit poll e i risultati effettivi delle elezioni, a volte con maggioranze ribaltate. Ma anche in casi meno legati a comportamenti derivanti dall'uomo e che perciò possono essere falsati, la questione risulta ugualmente complicata. Per esempio se solo 2 dei 100 fiammiferi che abbiamo provato sono risultati difettosi, chi ci assicura che tale percentuale è di tutti i fiammiferi prodotti, anche solo in quella giornata? È possibile che in realtà quelli fossero gli unici 2 fiammiferi difettosi, o, viceversa, che i 98 fiammiferi funzionanti fossero gli unici fra quelli prodotti, o qualsiasi altro risultato. Ma ormai abbiamo imparato che la Statistica non è una scienza in cui si può parlare di certezze, ma solo di probabilità che accadano certi fatti.

Definizione 10

- Dato un universo statistico *U*, un suo sottoinsieme *C*, si chiama **campione statistico**.
- Data una grandezza statistica θ di un universo statistico *U*, una funzione che associa ad ogni possibile campione di *U* un valore di θ si chiama **stimatore puntuale di θ**.

Esempio 14

Supponiamo di volere determinare l'altezza media dei 1542 alunni di una scuola. Avendo così tanti alunni, per risparmiare tempo e denaro consideriamo un campione di 100 alunni prelevato in modo aleatorio, per esempio con un sorteggio. Supponiamo che la media di questo campione sia 170,17 *cm*. Questo valore è uno stimatore puntuale della media dell'altezza di tutti gli alunni.

Il problema è quello di stabilire il grado di fiducia da assegnare a ciascuno stimatore.

Definizione 11

Uno stimatore di un parametro θ si dice **corretto** o **unbiased** se la sua media è uguale a θ. Diversamente si chiama **stimatore distorto o biased**.

Esempio 15

Se nell'esempio precedente il campione fosse stato scelto sorteggiando solo i maschi, o comunque una percentuale di essi troppo diversa dalla realtà, lo stimatore sarebbe stato distorto poiché ovviamente il campione non sarebbe stato rappresentativo della popolazione formata anche da femmine, che per ragioni fisiologiche sappiamo ha una distribuzione delle altezze molto diversa da quella dei maschi.

Vale il seguente risultato.

Teorema 10

La media e la mediana di campioni estratti da una $N(\mu; \sigma^2)$, sono stimatori corretti di μ.
Dimostrazione omessa

In effetti ci si rende conto abbastanza facilmente che se il problema della stima di un valore è molto complicato possiamo renderlo più semplice se ci limitiamo a determinare non tanto un certo valore, quanto piuttosto un intervallo all'interno del quale si trova il parametro.

Esempio 16

Sempre con riferimento all'esempio 15, piuttosto che chiederci se la media delle altezze degli studenti della scuola sia proprio 170,17 *cm*, è più semplice chiedersi con quale probabilità la media appartiene per esempio all'intervallo [169; 172].

Definizione 12

Data una grandezza statistica θ di un universo statistico U, un intervallo all'interno del quale possa trovarsi θ si chiama **intervallo di confidenza per θ**.

Esempio 17

Ancora riferendoci all'esempio degli studenti l'intervallo [169; 172] è un intervallo di confidenza per la media.

Per i campioni statistici, il Teorema 9 viene così rideterminato.

Teorema 11

Un campione di $n > 30$ elementi, può essere considerato una $N(\mu_c; \sigma^2)$, in cui μ_c è la media campionaria. Allora vi sono i seguenti intervalli di confidenza $\left[\mu-\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ al 68,3%; $\left[\mu-\frac{1{,}96\sigma}{\sqrt{n}};\mu+\frac{1{,}96\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ al 95,0%; $\left[\mu-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}};\mu+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ al 95,5%; $\left[\mu-\frac{2{,}58\sigma}{\sqrt{n}};\mu+\frac{2{,}58\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ al 99,0%; $\left[\mu-\frac{3\sigma}{\sqrt{n}};\mu+\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ al 99,7%.

Dimostrazione omessa

Esempio 18

Se trattiamo la distribuzione delle altezze degli studenti come una $N(170{,}17; 2{,}13^2)$, possiamo dire che la probabilità che l'altezza media di tutti gli alunni della scuola sia compresa tra $\left[170{,}17-\frac{1{,}96\cdot 2{,}13}{10};170{,}17+\frac{1{,}96\cdot 2{,}13}{10}\right]$ ≈ [169,72; 170,62] è del 95%. Mentre è del 99% la probabilità che sia compresa in $\left[170{,}17-\frac{2{,}58\cdot 2{,}13}{10};170{,}17+\frac{2{,}58\cdot 2{,}13}{10}\right]$ ≈ [169,58; 170,76]. Ovviamente maggiore è la probabilità richiesta e più ampio sarà l'intervallo di confidenza.

Un'ultima questione riguarda la cosiddetta decisione statistica, ossia, dopo avere effettuato un'indagine statistica potremmo convincerci che accada un certo fatto, quindi enunciamo una certa ipotesi. Fatto ciò dobbiamo stabilire se la detta ipotesi possa essere o no accettata.

Esempio 19

Supponiamo di avere lanciato una moneta per 100 volte, ottenendo 63 volte testa, invece dei 50 teorici. Essendo la differenza molto grande pensiamo che la moneta abbia delle deformazioni che ne facilitino l'uscita della testa, quindi poniamo l'ipotesi che la probabilità che esca testa sia $p \neq 0{,}5$.

Stabilita una certa ipotesi possono accadere due tipi di errori.

Definizione 13

- Data un'ipotesi statistica, se la rifiutiamo quando invece dovrebbe essere accettata commettiamo un **errore del I tipo**; se invece la accettiamo quando dovremmo rifiutarla commettiamo un **errore del II tipo**.
- La probabilità massima che si accetta di commettere un errore del I tipo si dice **livello di significatività del test statistico**.

Esempio 20

Se nell'esempio precedente la moneta è effettivamente regolare e noi invece non la consideriamo tale, stiamo commettendo un errore del I tipo. Se accettiamo di sbagliare con una probabilità del 5%, il livello di significatività del test è appunto del 5%.

Prima di vedere come possiamo effettuare un test relativamente all'esempio della moneta, ricordiamo che vale la seguente approssimazione di una binomiale con una normale.

Teorema 12

Per n che tende all'infinito una binomiale tende a una $N(np; np(1 – p))$.
Dimostrazione omessa

In pratica l'approssimazione va bene per $np > 5$.

Esempio 21

Riprendiamo l'esempio precedente, in cui $n = 100$ e $p = 0,5$, quindi $np = 50 > 5$. Perciò possiamo approssimare la distribuzione con una $N(50; 25)$. Ciò vuol dire che la probabilità è pari al 95% per tutti i valori dell'intervallo $[50 – 1,96 \cdot 5; 50 + 1,96 \cdot 5] = [40,2; 59,8]$. Cioè con una probabilità del 95% il numero di teste dovrebbe essere compreso tra 40 e 60, poiché il valore ottenuto è stato di 63, dobbiamo rifiutare l'ipotesi che la moneta sia regolare.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Per stimare il peso medio di un gruppo di bambini ne abbiamo scelti 64 a caso; dai calcoli abbiamo trovato che la media del campione è 40,23 *Kg* con scarto quadratico medio di 2,15 kg. Poiché abbiamo più di 30 elementi possiamo approssimare con una $N(40{,}23;\ 2{,}15^2)$ e quindi, usando il Teorema 11, possiamo dire che con una probabilità del 68,3%, il peso medio appartiene a $\left[40{,}23-\frac{2{,}15}{8};20{,}23+\frac{2{,}15}{8}\right]$ ≈ [39,96; 40,50], con una probabilità del 95,0%; invece appartiene a $\left[40{,}23-\frac{1{,}96\cdot 2{,}15}{8};20{,}23+\frac{1{,}96\cdot 2{,}15}{8}\right]$ = [39,70; 40,76]. Se volessimo avere invece una probabilità dell'80%, con un intervallo simmetrico centrato sulla media campionaria, dovremmo risolvere la seguente equazione: $v(x)=\int_{40.23-a}^{40.23+a}\frac{e^{-\frac{(x-40{,}23)^2}{2\cdot(2{,}15/8)^2}}}{2{,}15/8\cdot\sqrt{2\pi}}\,dx=0{,}8$. Con Derive troviamo $a \approx 0{,}34$. Quindi vi è l'80% di probabilità che il peso medio di tutti i bambini sia compreso tra 40,23 – 0, 34 = 39,89 *Kg* e 40,23 + 0, 34 = 40,57 *Kg*.

Livello 1

1. La media di un campione di 49 elementi è 13,51, se un intervallo di confidenza al 95,5% della media della popolazione è [13,17; 13,85], determinare lo scarto quadratico medio campionario. [1,19]
2. Nel problema precedente, la conoscenza della numerosità del campione è necessaria? [Sì]
3. La media di un campione di 100 individui è 132,84, se un intervallo di confidenza al 99% della media della popolazione è [130,80; 133,88], determinare lo scarto quadratico medio campionario. [∅]
4. Lo scarto quadratico medio di un campione di 115 elementi è 2,19, se un intervallo di confidenza al 95% della media della popolazione è [51,73; 52,53], determinare la media campionaria. [≈ 52,13]
5. Nel problema precedente, la conoscenza della numerosità del campione è necessaria? [No, la media è sempre il centro dell'intervallo]
6. Le età medie di una popolazione di 2378 individui sono stimate mediante un campione di 100 elementi, ottenendo μ = 37,12 anni e σ = 4,12, anni determinare un intervallo di confidenza al 95% dell'età media della popolazione. [[36,31; 37,93]]
7. Cosa cambia se il campione fosse stato di 50 individui? E di 200? [[35,98; 38,26]; [36,55; 37,69]]
8. La durata media di una lampada alogena di una certa marca è 2000 ore. Testiamo un campione di 100 elementi, ottenendo μ = 2017,37 ore e σ = 85,24 ore, determinare un intervallo di confidenza al 99% della durata media. [[1995,38; 2039,36]]
9. Cosa cambia se il campione fosse stato di 75 lampade? E di 150? [[1991,98; 2042,76]; [1999,41; 2035,33]]
10. Il reddito medio mensile delle famiglie degli studenti di una scuola di 1589 studenti è stimata mediante un campione di 70 elementi, ottenendo μ = 1845,73 euro e σ = 174,36 euro. Determinare un intervallo di confidenza al 95,5% del reddito medio delle famiglie. [[1804.05; 1887.41]]
11. Il peso medio di un pacco di pasta dichiarata da 1 *Kg* è stimata mediante un campione di 200 pacchi, ottenendo μ = 987 *g* e σ = 11,15 *g*. Determinare un intervallo di confidenza al 97,7% del peso medio. [[984,63; 989,36]]

Livello 2

12. Se vogliamo che un campione con scarto quadratico medio di 1,23 ammetta un intervallo di confidenza al 95,5%, con errore non superiore a 0,2, quanto deve essere grande il campione? [Circa 151]
13. Con riferimento al problema 6, stimare un intervallo di confidenza al 75%. [[36,65; 37,59]]
14. Con riferimento al problema 8, stimare un intervallo di confidenza al 90%. [[2003,35; 2031,39]]
15. Con riferimento al problema 10, stimare un intervallo di confidenza al 97%. [[1800,50; 1890,95]]
16. Con riferimento al problema 11, stimare un intervallo di confidenza al 84%. [[985,89; 988,11]]

Lavoriamo insieme

- In un test vero o falso con 20 domande, l'esaminatore decide che chi risponde ad almeno 15 risposte corrette non ha tirato a indovinare, viceversa ha tirato a indovinare. Vogliamo stabilire la proprietà di fare un errore del I tipo, cioè di rifiutare l'ipotesi quando questa è vera; nel caso specifico con che probabilità consideriamo che uno studente non ha tirato a indovinare quando invece lo ha fatto. La probabilità di indovinare almeno 15 domande su 20 scegliendo una sequenza casuale di vero o falso, quindi con probabilità 0,5 di fornire una delle due risposte, è $\sum_{k=15}^{20}\binom{20}{k}\cdot 0,5^{20} \approx 2,07\%$. Questa è la probabilità di commettere un errore del I tipo.
- Se invece lo studente non tira a indovinare, la probabilità di scegliere una risposta diventa $\frac{15}{20}$ = 0,75. In questo caso la probabilità di indovinare almeno 15 risposte è $\sum_{k=15}^{20}\binom{20}{k}\cdot 0,7^{k}\cdot 0,3^{20-k} \approx 41,64\%$. Questa è la probabilità di commettere un errore del II tipo, ossia di pensare che uno studente abbia tirato a indovinare quando invece non lo ha fatto.

Livello 2

17. In un test con 10 domande vero o falso si decide che chi risponde ad almeno 8 risposte corrette non ha tirato a indovinare, viceversa ha tirato a indovinare. Calcolare la probabilità di commettere un errore del I tipo. E uno del II tipo? [≈ 5,47%; ≈ 67,78%]
18. Con riferimento al precedente problema perché un errore del I tipo sia almeno del 10%, quante risposte corrette su 10 possiamo accettare? E perché quello del II tipo sia minore del 50%? [7; ∅]
19. In un test con 10 domande e 3 risposte possibili, una sola delle quali corretta si decide che chi risponde ad almeno 6 risposte corrette non ha tirato a indovinare, viceversa ha tirato a indovinare. Calcolare la probabilità di commettere un errore del I tipo. E uno del II tipo? [≈ 7,66%; ≈ 63,31%]
20. Per stabilire se una moneta è regolare la lanciamo per 80 volte, se otteniamo fra 35 e 45 teste, stabiliamo che è regolare. Calcolare la probabilità di commettere un errore del I tipo. [≈ 78,15%]
21. In un sacchetto inseriamo 3 palline verdi, 4 rosse e 5 verdi, tutte indistinguibili al tatto. Estraiamo una pallina per 50 volte, se otteniamo verde da 22 a 28 volte diciamo che non sono stati fatti trucchi, calcolare la probabilità di commettere un errore del I tipo. [≈ 0,26%]

Livello 3

22. Lanciamo una moneta 15 volte ottenendo sempre testa. Possiamo dire al livello di significatività dell'1% che è truccata? Motivare la risposta. [Sì]
23. Con riferimento al problema precedente, quante volte massimo dovremmo ottenere testa perché non possiamo dire che è truccata neanche al livello di significatività del 5%? [11]
24. Lanciamo un dado per 10 volte otteniamo 5 volte il 6. Possiamo dire al livello di significatività dell'1% che il dado è truccato? E al livello dello 0,1%? Motivare la risposta. [Sì; No]

Lavoriamo insieme

Un cosiddetto mago fa mescolare 50 carte, 25 rosse e 25 nere, a uno spettatore scelto a caso, quindi dopo qualche minuto di riflessione scrive su un foglio di carta la sequenza dei colori delle carte che saranno scoperte in successione dal mazzo mescolato. Egli afferma di essere in grado di indovinarne almeno 40. Poiché la probabilità di indovinare il colore di una carta non truccata è 0,5 testiamo l'ipotesi p = 0,5, cioè che il mago in realtà abbia scritto una sequenza a caso e non abbia alcun potere magico. Poiché abbiamo a che fare con prove ripetute indipendenti, possiamo dire che la media è np = 50 · 0,5 = 25 e lo scarto quadratico medio è $np \cdot (1 - p) = \sqrt{12,5} \approx 3,54$. Quindi possiamo trattare il tutto come una N(25; 12,5). Dobbiamo calcolare la probabilità che vengano indovinate almeno 40 carte, ossia $\int_{40}^{50}\frac{e^{-\frac{(x-25)^2}{(2\cdot 3,54)^2}}}{3,54\cdot\sqrt{2\pi}}dx \approx 1,1\cdot 10^{-5}$, che è una probabilità così bassa da indurci a rifiutare l'ipotesi $p = 0,5$, ossia che il mago tiri a indovinare, ma possiamo ritenere, con altissima probabilità, che il mago sia tale o che sia particolarmente fortunato.

Livello 2

25. Con riferimento al problema del box lavoriamo insieme, quante carte dovrebbe indovinare il mago, al massimo, per stabilire al livello di significatività del 5% che tira a indovinare? [31]
26. Lanciando una moneta 100 volte si sono ottenute 70 teste. Testare a che livello di significatività si può accettare l'ipotesi che sia $p = 0,7$. [Circa 57,6%]
27. Un'industria afferma che le memorie da esse prodotte hanno un tempo di vita di 15600 ore di uso. Un campione di 250 memorie ha fornito $\mu = 15500$ e $\sigma = 100$. Testare l'ipotesi $\mu = 15500$ a un livello di significatività del 5% e del 1%. [Le rifiutiamo entrambe]
28. Con riferimento al problema precedente qual è il più valore intero di μ perché si possa accettare il test a un livello di significatività del 5% e il più grande intero per cui si accetti quello al 1%? [155876; 156163]
29. Un fabbricante di detersivi afferma che i suoi pacchi contengono mediamente 10 *kg* di detersivo. Un campione di 70 pacchi ha fornito $\mu = 10,15$ *Kg* e $\sigma = 0,37$ *Kg*. Testare l'ipotesi $\mu = 10,15$ *Kg* a un livello di significatività del 5% e del 1%. [Accettabile in entrambi i casi]
30. Lanciamo un dado che ha le facce opposte dello stesso colore, per un totale di 3 diversi colori. Lanciandolo 120 volte abbiamo ottenuto bianco 60 volte. Testare a che livello di significatività si può accettare l'ipotesi che la probabilità di ottenere bianco sia $p = 0,5$. [Circa 52,3%]

Livello 3

31. Un certo medicinale è testato su 500 malati e si rivela efficace su 428 di essi. Testare l'ipotesi che il medicinale sia efficace per l'80% dei malati con livello di significatività dell'1%. Sugg. Valutare come una binomiale con $p = 0,8$ e quindi come una normale. [No]
32. Con riferimento al problema precedente, quale ipotesi può accettarsi, $p > 0,8$ o $p > 0,8$? [$p > 0,8$]

Correlazione lineare e metodo dei minimi quadrati

Il problema

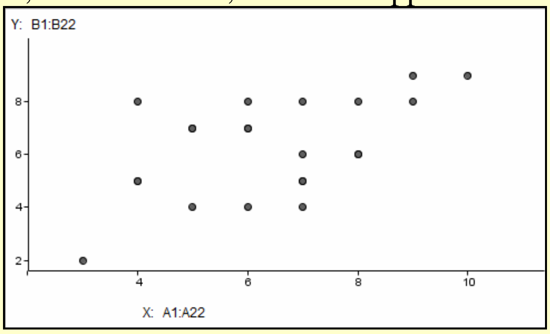
La matematica e la fisica sono materie affini, quindi spesso capita che chi è bravo in una delle due lo sia anche nell'altra. Vogliamo stabilire se e come è possibile stabilire questa eventuale relazione.

Il problema sollevato cerca di stabilire se fra due variabili statistiche può esservi una funzione $y = f(x)$, in cui x e y sono le variabili statistiche considerate.

Esempio 22

Matematica	5	6	7	7	8	4	5	9	8	7	6	6	6	8	7	4	5	4	3	7	9	10
Fisica	4	7	5	8	6	5	7	8	6	5	8	4	7	8	4	5	7	8	2	6	9	9

Nella tabella abbiamo indicato i voti finali nelle materie di matematica e fisica degli studenti di una classe. La prima cosa che osserviamo è che non vi è una immediata relazione per tutti gli studenti. Per esempio notiamo uno studente che ha 4 in matematica e 8 in fisica, mentre vi sono altri che hanno lo stesso voto in entrambe le materie (8 e 8 o 9 e 9) o voti simili (9 e 8 o 3 e 2). Noi comunque vogliamo considerare, come al solito, la eventuale relazione che coinvolga il termine generico. Rappresentando il tutto in un grafico a dispersione otteniamo quanto mostrato a lato. Notiamo che i punti, tutto sommato, sembrano appartenere ad una curva non molto diversa da una retta.



Le relazioni ovviamente possono essere di vario tipo, quello più semplice è quello lineare, cioè una legge di tipo $y = ax + b$. Prima di stabilire come possiamo determinare i parametri a e b vediamo di capire come individuare una tale relazione lineare. La prima cosa da fare è quella di definire un indice statistico che possa applicarsi a entrambe le variabili. Abbiamo definito la varianza, una sua ovvia generalizzazione che coinvolga due variabili è la seguente.

Definizione 14

Date due distribuzioni statistiche finite ed ugualmente numerose: $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, di medie aritmetiche rispettive μ_x e μ_y, diciamo loro **covarianza** la quantità $\sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)\cdot(y_i - \mu_y)}{n}$.

La covarianza è una ovvia generalizzazione della varianza, a cui si riduce nell'ipotesi in cui le distribuzioni siano uguali.

Esempio 23

Calcoliamo la covarianza delle distribuzioni dell'esempio precedente. Indichiamo con x_i i voti di matematica e con y_i quelli di fisica. Lasciamo i calcoli per esercizio per determinare che si ha: $\mu_x \approx 6{,}4$ e $\mu_y \approx 6{,}3$. Con l'aiuto di Excel costruiamo la tabella delle differenze e quindi dei prodotti.

Matematica	5	6	7	7	8	4	5	9	8	7	6	6	6	8	7	4	5	4	3	7	9	10	mx
X-mx	-1,4	-0,4	0,6	0,6	1,6	-2,4	-1,4	2,6	1,6	0,6	-0,4	-0,4	-0,4	1,6	0,6	-2,4	-1,4	-2,4	-3,4	0,59	2,59	3,59	6,409091
Fisica	4	7	5	8	6	5	7	8	6	5	8	4	7	8	4	5	7	8	2	6	9	9	my
y-my	-2,3	0,73	-1	1,7	-0	-1,3	0,73	1,7	-0	-1	1,7	-2,3	0,73	1,7	-2	-1,3	0,7	1,7	-4,3	-0,3	2,73	2,73	6,272727
																							Σ
(x-mx)(y-my)	3,2	-0,3	-1	1	-0	3,07	-1	4,5	-0	-1	-0,7	0,9	-0,3	2,7	-1	3,07	-1	-4,2	14,6	-0,2	7,07	9,79	38,54545

Facilmente si ha: $\sigma_{xy} \approx \dfrac{38,54}{22} \approx 1,75$.

Definiamo adesso una grandezza che sia in grado di stabilire una eventuale relazione lineare.

Definizione 15

Date due distribuzioni statistiche finite ed ugualmente numerose: $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, di scarti quadratici medi rispettivi σ_x e σ_y, *e* di covarianza σ_{xy}, diciamo **coefficiente di correlazione lineare di Pearson** la quantità $\rho = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$.

Si ha la validità del seguente risultato

Teorema 13

Per il coefficiente di correlazione lineare di Pearson si ha $-1 \le \rho \le 1$
Dimostrazione omessa

In pratica se ρ è prossimo a 1 ciò vuol dire che vi è buona dipendenza lineare diretta, cioè vi è una relazione di proporzionalità diretta, o quasi. Se ρ è prossimo a –1, vuole invece significare che vi è buona dipendenza lineare inversa, cioè vi è una relazione di proporzionalità inversa. Infine se ρ è prossimo a 0 le due variabili hanno scarsa relazione lineare.

I protagonisti


Karl Pearson nacque a Londra il 27 marzo 1857, si laureò in Matematica all’Università di Cambridge nel 1879. In seguito studiò fisica, fisiologia, diritto romano, storia medieval e letteratura tedesca. Solo nel 1890 indirizzò i suoi interessi alla statistica, della quale scienza è considerate uno dei fondatori. Dal 1893 al 1912 scrisse 18 articoli dal titolo comune *Mathematical Contributions to the Theory of Evolution*, che riguardano l’analisi della regressione, in cui è presentato il coefficiente di correlazione che porta il suo nome e molti altri importanti risultati. Morì a Londra il 27 aprile 1936.

Esempio 24

Calcoliamo il coefficiente di Pearson delle distribuzioni precedenti. Lasciamo per esercizio il calcolo degli scarti quadratici medi: $\sigma_x \approx 1,80$ e $\sigma_y \approx 1,81$. Quindi si ha: $\rho \approx \dfrac{1,75}{1,80 \cdot 1,81} \approx 0,54$. Perciò vi è una discreta relazione di linearità positiva fra le due variabili.

L’ultima questione che affronteremo riguarderà la possibilità di associare una funzione teorica a dei dati reali. Spesso rappresentando i dati con un grafico a dispersione osserviamo che essi appartengono a una certa curva nota, come la retta, la parabola, l’esponenziale, … Ovviamente è rarissimo che i dati appartengano tutti a una curva *semplice* come una retta o una parabola. Vale comunque il seguente risultato.

Teorema 14

Dati n punti $(x_i; y_i)$, $1 \le i \le n$, esiste ed è unico un polinomio $P(x)$ di grado $n-1$, che contiene tutti gli n punti. E si ha: $P(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \prod_{j \neq i}^{n} \dfrac{x - x_j}{x_i - x_j}$, che si chiama **polinomio interpolatore di Lagrange**.
Dimostrazione omessa

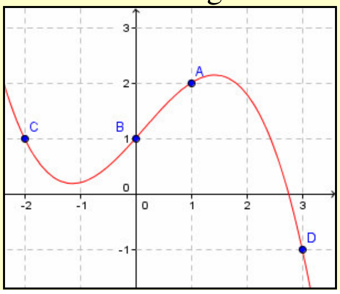
Esempio 25

Vogliamo trovare il polinomio di Lagrange relativo ai punti (1; 2), (0; 1), (–2; 1), (3; –1). Il polinomio è:

$$P(x)=\sum_{i=1}^{3} y_i\cdot\prod_{j\neq i}^{3}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}=2\cdot\frac{(x-0)\cdot(x+2)\cdot(x-3)}{(1-0)\cdot(1+2)\cdot(1-3)}+1\cdot\frac{(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)}{(0-1)\cdot(0+2)\cdot(0-3)}+1\cdot\frac{(x-1)\cdot(x-0)\cdot(x-3)}{(-2-1)\cdot(-2-0)\cdot(-2-3)}+$$

$$-1\cdot\frac{(x-1)\cdot(x-0)\cdot(x+2)}{(3-1)\cdot(3-0)\cdot(3+2)}$$. Ossia, semplificando: $P(x)=\frac{-7x^3+3x^2+34x+30}{30}$.

E in effetti rappresentando i punti e il polinomio con Geogebra vediamo che essi giacciono sulla curva.



Il precedente risultato sembra risolvere definitivamente la questione, ma ciò non è vero, per diversi motivi. Il primo dei quali è che in genere le curve interpolanti dati statistici non sono polinomiali e poi che, all'aumentare dei dati, che in genere sono abbastanza numerosi, il problema diventerebbe irrisolvibile dal punto di vista del calcolo, anche automatico. Determinare un polinomio di 30° o 60° grado non è semplice. Noi ci limitiamo a considerare solo alcuni casi più semplici di curve interpolanti. La prima è ovviamente la retta. Determinare una retta per 2 punti è immediato, ma se i punti sono più di due, decine in generale, la questione diventa più complicata, quindi dobbiamo intanto definire cosa intendiamo per retta interpolante un insieme di dati statistici.

Definizione 16

Data una distribuzione statistica finita: $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, diciamo sua **retta di regressione secondo i minimi quadrati** la retta di equazione $y = ax + b$, per cui risulta minima $\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2$, in cui $y_i = ax_i + b$.

La precedente definizione permette di determinare, fra tutte le infinite rette, quale è la *migliore* per i dati che abbiamo. Infatti determinare il minimo delle distanze al quadrato (in modo che così tutti i valori risultino positivi e non vi siano eventuali *compensazioni*), equivale a dire che la retta trovata è quella che meglio si adatta ai dati rilevati. Per risolvere il problema dobbiamo utilizzare nozioni di funzioni a due variabili, dato che vogliamo trovare due parametri, a e b, quindi ci limitiamo a enunciare il risultato senza dimostrarlo.

Teorema 15

Dati n punti $(x_i; y_i)$, $1 \le i \le n$, la loro retta dei minimi quadrati, $y = ax + b$, è tale che si abbia

$$a=\frac{n\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2},\quad b=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i}{n\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$$

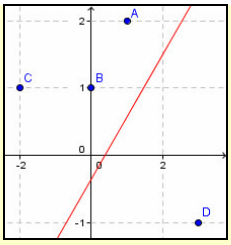
Dimostrazione omessa

Esempio 26

Vogliamo trovare la retta dei minimi quadrati relativa ai dati dell'esempio precedente. Usiamo Excel per i calcoli, ottenendo quanto mostrato in tabella.

					Σ	a	b
x	1	0	-2	3	2	0,923077	-0,34615
y	2	1	1	-1	3		
x^2	1	0	4	9	14		
xy	2	0	-2	-3	-3		

Quindi la retta cercata ha

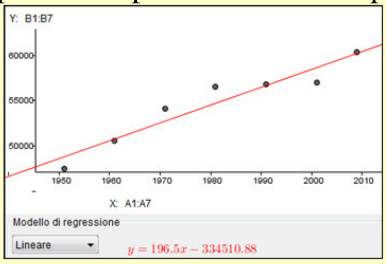
equazione $y = 0{,}923x - 0{,}346$. Rappresentiamo il tutto con Geogebra. 

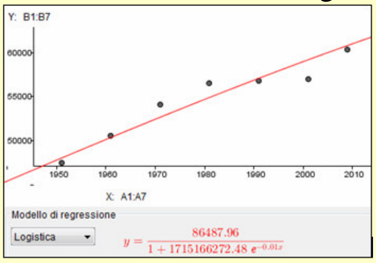
Ovviamente il problema dell'interpolazione non si risolve sempre con rette.

Esempio 27

Anno	1951	1961	1971	1981	1991	2001	2009
Popolazione	47516	50624	54137	56557	56778	56996	60340

Consideriamo i dati ufficiali della Popolazione Italiana negli ultimi censimenti. Rappresentiamo i dati usando Geogebra a cui facciamo calcolare automaticamente la retta dei minimi quadrati, successivmaente usiamo un interpolante più adatto per lo studio delle popolazioni, la cosiddetta logistica.





Non è difficile vedere che questa seconda sembra un interpolante migliore. Per verificare meglio calcoliamo la stima di alcuni dati futuri, per esempio la popolazione prevista, secondo il modello, per gli anni 2015, 2020 e 2030.

Anno	2015	2020	2030
Modello lineare	≈ 61444	≈ 62427	≈ 64932
Modello Logistico	≈ 61987	≈ 62942	≈ 64781

Verifiche

Lavoriamo insieme

Nella tabella seguente abbiamo riportato i dati ISTAT delle temperature medie e dei giorni di pioggia nella città di Firenze dal 1998 a 2009.

ANNI	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Temperatura media	15,3	17	16,4	16	15,7	16,6	15,9	15,4	16,1	16,2	15,9	16,2
Giorni di pioggia	70	70	87	92	81	65	83	72	65	59	96	46

Vogliamo calcolare la covarianza dei dati. Usiamo un foglio elettronico per semplificare i calcoli, o comunque una calcolatrice. Troviamo che le due medie sono $\mu_x \approx 16{,}06$ e $\mu_y \approx 73{,}83$.

ANNI	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Temperatura media	15,3	17	16,4	16	15,7	16,6	15,9	15,4	16,1	16,2	15,9	16,2
Giorni di pioggia	70	70	87	92	81	65	83	72	65	59	96	46
x-Mx	-0,8	0,94	0,34	-0,1	-0,4	0,54	-0,2	-0,7	0,04	0,14	-0,2	0,14
y-My	-3,8	-3,8	13,2	18,2	7,17	-8,8	9,17	-1,8	-8,8	-15	22,2	-28
(x-Mx)(y-My)	2,91	-3,6	4,5	-1,1	-2,6	-4,8	-1,5	1,21	-0,4	-2,1	-3,5	-3,9

Abbiamo $\sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{12}(x_i - \mu_x)\cdot(y_i - \mu_y)}{12} \approx \frac{-14,78}{12} \approx -1,232$.

Tutti gli esercizi seguenti si riferiscono alle seguenti tabelle ISTAT

Immatricolati e tassi di abbandono in % nelle università italiane

Anno Accademico	1998/1999	1999/2000	2000/2001	2001/2002	2002/2003	2003/2004
Immatricolati	278939	278384	284142	319264	330802	338036
Tasso di abbandono	21,3	21,4	19,3	20,3	19,2	20,8

Produzione lorda e consumo di energia elettrica in Italia in milioni di KWh

Anno	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Produzione	284401,3	293865	303321	303672	314090	313888,3	319129,6	292641,7	302062	302569,9
Consumo	290960	299789	304490	309817	317533	318953	319037	299915	309884,5	313792

Espatriati e rimpatriati in Piemonte

Anno	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959
Espatriati	6077	7260	5475	3606	3532	4299	5514	5129	3609	3251
Rimpatriati	11602	14688	13985	9827	7778	6541	6220	4639	2395	2163

Matrimoni e divorzi in Italia

Anno	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Matrimoni	264026	270013	264097	248969	247740	245992	250360	246613	230613
Divorzi	40051	41835	43856	45097	47036	49534	50669	54351	54456

Numero di Istituti di cura pubblici e numero giornate di degenza in Italia

Anno	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Istituti	785	778	755	746	672	669	654	655	645
Giornate	59503	58123	55973	52033	51123	51795	52151	51554	51177

Spesa pensionistica procapite per numero di pensioni per 1000 abitanti in Italia

Anno	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Pensioni	387,9	387,1	388,7	388,7	390,5	390,9	389,7	384,3	385,1
Spesa	3294,2	3396,5	3550,2	3651,5	3776,3	3903,4	4013,2	4156,3	4257,4

Procedimenti penali sopravvenuti ed esauriti per ufficio giudiziario in Italia

Anno	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Sopravvenuti	123605	131716	132880	130540	135895	138133	127560	138568
Esauriti	123883	122151	119441	124434	127846	118976	128328	130196

Numero di omicidi denunciati e numero di condannati per omicidio in Italia

Anno	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Denunciati	11839	11807	14087	15407	14466	15872	15188	14971	14560	13746
Condannati	593	736	754	756	890	1133	1174	1200	1298	1353

Numero di Diplomati e numero di laureati in Italia

A.S. o A.A.	1999/00	2000/01	2001/02	2002/03	2003/04	2004/05	2005/06	2006/07	2007/08	2008/09
Laureati	152241	159798	173710	186082	218122	253354	281300	261523	237531	229340
Diplomati	444367	454798	443842	454061	452726	446584	449063	449693	446746	445968

Numero di Insegnanti e numero di studenti iscritti (in migliaia) nelle scuole statali in Italia

A.S.	1993/94	1994/95	1995/96	1996/97	1997/98	1998/99	1999/00	2000/01	2001/02	2002/03
Insegnanti	313361	312560	315920	318985	297294	294737	296664	307279	312026	315792
Studenti	2779,353	2723,715	2693,328	2648,515	2597,983	2537,959	2535,755	2565,167	2583,375	2616,678

Livello **1**

33. Determinare la covarianza delle precedenti coppie di dati

[≈ –7718,12 ; ≈ 87466440 ; ≈ 3725948,7 ; ≈ –47723276,7 ;
≈ 14705,4 ; ≈ –209,63 ; ≈ 166255 ; ≈ 179157,1 ; ≈ -10^7 ; ≈ 432846,1]

Lavoriamo insieme

Con riferimento ai dati ISTAT delle temperature medie e dei giorni di pioggia vogliamo calcolare il coefficiente di Pearson, per valutare una loro eventuale dipendenza lineare. Abbiamo già calcolato la covarianza: $\sigma_{xy} \approx -1,232$. Adesso calcoliamo gli scarti quadratici medi, sempre facendoci aiutare da un foglio elettronico. Quindi avremo: $\sigma_x \approx \sqrt{\frac{2,53}{12}} \approx 0,46; \sigma_y \approx \sqrt{\frac{2313,67}{12}} \approx 13,89$. Pertanto il coefficiente di Pearson è $\rho \approx \frac{-1,232}{0,46 \cdot 13,89} \approx -0,19$, che rappresenta una modesta dipendenza inversa. Cioè ci possiamo aspettare che un aumento della temperatura provochi solo una modesta diminuzione dei giorni di pioggia.

ANNI	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	Σ
Temperatura media	15,3	17	16,4	16	15,7	16,6	15,9	15,4	16,1	16,2	15,9	16,2	
Giorni di pioggia	70	70	87	92	81	65	83	72	65	59	96	46	
x-Mx	-0,8	0,94	0,34	-0,1	-0,4	0,54	-0,2	-0,7	0,04	0,14	-0,2	0,14	
(x-Mx)^2	0,58	0,89	0,12	0	0,13	0,29	0,03	0,43	0	0,02	0,03	0,02	2,53
y-My	-3,8	-3,8	13,2	18,2	7,17	-8,8	9,17	-1,8	-8,8	-15	22,2	-28	
(y-My)^2	14,7	14,7	173	330	51,4	78	84	3,36	78	220	491	775	2313,67

Livello 2

Determinare il coefficiente di correlazione lineare di Pearson delle precedenti coppie di dati, quindi rispondere ai quesiti

34. L'aumento degli immatricolati cosa dovrebbe produrre nei tassi di abbandono? [≈ –0,35; modesta diminuzione]
35. L'aumento dei consumi cosa dovrebbe produrre in quello della produzione? [≈ 0,95; aumento quasi uguale]
36. L'aumento dei rimpatriati cosa dovrebbe produrre in quello degli espatriati? [≈ 0,70; discreto aumento]
37. L'aumento dei divorzi cosa dovrebbe produrre in quello dei matrimoni? [≈ – 0,85; consistente diminuzione]
38. L'aumento delle giornate di degenza cosa dovrebbe produrre nel numero di Istituti? [≈ 0,87; consistente aumento]
39. L'aumento della spesa pensionistica cosa dovrebbe produrre sul numero di pensioni erogate? [≈ – 0,31; modesta diminuzione]
40. L'aumento dei procedimenti esauriti cosa dovrebbe produrre in quelli sopravvenuti? [≈ 0,009; nessuna relazione]
41. L'aumento dei condannati cosa dovrebbe produrre nel numero di omicidi denunciati? [≈ 0,52; un medio aumento]
42. L'aumento dei diplomati cosa dovrebbe produrre nel numero di laureati? [≈ – 0,06; nessuna relazione]
43. L'aumento degli iscritti cosa dovrebbe produrre nel numero di insegnanti? [≈ 0,65; discreto aumento]

Lavoriamo insieme

ANNI	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	Σ
Temperatura media (x)	15,3	17	16,4	16	15,7	16,6	15,9	15,4	16,1	16,2	15,9	16,2	192,7
Giorni di pioggia (y)	70	70	87	92	81	65	83	72	65	59	96	46	886
x^2	234	289	269	256	246	276	253	237	259	262	253	262	3097
xy	1071	1190	1427	1472	1272	1079	1320	1109	1047	956	1526	745	14213

Anche se abbiamo visto che la dipendenza lineare fra le temperature e i giorni di pioggia è modesta, vogliamo lo stesso calcolare la retta dei minimi quadrati: $y = ax + b$, considerando i giorni di pioggia in funzione delle temperature. Costruiamo la tabella e poi usiamo il risultato del teorema 15.

Quindi: $a = \frac{12 \cdot 14213 - 192,7 \cdot 886}{12 \cdot 3097 - 192,7^2} \approx -5,84; b = \frac{886 \cdot 3097 - 192,7 \cdot 14213}{12 \cdot 3097 - 192,7^2} \approx 167,69$ e la retta ha equazione $y = -5,84x + 167,69$. Nella successiva tabella confrontiamo i valori teorici con quelli effettivi. Osserviamo che effettivamente la nostra retta non è un buon modello matematico perché le differenze sono notevoli, in percentuale arriviamo anche al 59%.

ANNI	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Temperatura media (x)	15,3	17	16,4	16	15,7	16,6	15,9	15,4	16,1	16,2	15,9	16,2
Giorni di pioggia (y)	70	70	87	92	81	65	83	72	65	59	96	46
Giorni di pioggia teorici	78,3	68,3	71,8	74,2	75,9	70,7	74,8	77,7	73,6	73	74,8	73
Differenza	8,27	-1,7	-15	-18	-5,1	5,67	-8,2	5,68	8,59	14	-21	27
Differenza %	12%	-2%	-17%	-19%	-6%	9%	-10%	8%	13%	24%	-22%	59%

Livello 2

44. Determinare la retta di regressione delle tabelle presentate all'inizio, considerando la prima colonna di dati come y e la seconda come x [$y = -10005,5x + 508873$; $y = 1,08x - 31398,7$; $y = 0,21x + 3113,2$; $y = -1,98x + 346229,1$; $y = 0,015x - 131,6$; $y = -0,002x + 396,1$; $y = 0,01x + 130985,9$; $y = 2,68x + 11541$; $y = -0,71x + 535768$; $y = 71,7x + 119938$]

Livello 3

Con riferimento agli esercizi precedenti, stimare i seguenti dati teorici. Commentarli, tenuto anche conto dei coefficienti di correlazione lineare trovati

45. Tasso di abbandono 18% o 25%; immatricolati? [≈ 328774; ≈ 258735]

46. Consumo 20000 o35000; Produzione? [≈ 185426; ≈ 348045]
47. Rimpatriati 3000 o 10000; espatriati ? [≈ 3738; ≈ 5195]
48. Divorzi 40000 o 60000: matrimoni? [≈ 266803; Valore inaccettabile perché negativo]
49. Giornate di degenza 40000 o 50000; istituti? [≈ 493; ≈ 649]
50. Spesa pensionistica 3000 o 5000; numero di pensioni? [≈ 389,7; ≈ 385,5]
51. Procedimenti esauriti 11000 o 15000; procedimenti sopravvenuti? [≈ 131107; ≈ 131151]
52. Condannati 500 o 1500; omicidi denunciati? [≈ 12883; ≈ 15566]
53. Diplomati 400000 o 500000; laureati? [≈ 250136; ≈ 178728]
54. Iscritti (in migliaia) 2000 o 3000; insegnanti? [≈ 263401; ≈ 335133]

L'angolo di Geogebra

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quinto%20volume/Capitolo%2012/12-2-1.exe scarichi un'applicazione che mostra come con Geogebra possiamo rappresentare dati, analizzando la loro eventuale relazione.
Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quinto%20volume/Capitolo%2012/12-2-1.rar scarichi il relativo file.

L'angolo di Excel

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quinto%20volume/Capitolo%2012/12-2-2.exe scarichi un'applicazione che mostra come con Excel possiamo analizzare l'a eventuale relazione di dati. Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quinto%20volume/Capitolo%2012/12-2-2.xlsx scarichi il relativo file.

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi.
I temi completi dei Licei Scientifici per gli ultimi anni sono scaricabili, con soluzione, dal sito
http://matdidattica.altervista.org/esamidistato.htm

1. (Liceo scientifico PNI 1994/95) Nella tabella seguente sono riportati i dati di un'indagine campionaria, relativamente ad alcune regioni e all'anno 1990, sulla distribuzione delle abitazioni secondo la superficie abitata (area espressa in metri quadrati):

Superficie Regione	50 – 95 m^2	96 –110 m^2	111 – 130 m^2	131 – 200 m^2
Liguria	130	11	6	5
Campania	362	1805	105	122
Sicilia	1068	430	203	149

Il candidato a) verifichi l'ipotesi: H_0: non c'è differenza significativa (5%) tra le medie delle superfici nelle diverse regioni; b) verifichi l'ipotesi: H_0: non c'è differenza significativa (5%) tra le distribuzioni alle diverse regioni. [a) rifiutata; b) rifiutata]

2. (Liceo scientifico PNI suppletiva 1994/95) Nella tabella seguente sono riportate le distribuzioni delle durate in anni (n = numero degli anni) delle pene per i condannati nel 1990 ad almeno un anno di carcerazione (escluso l'ergastolo), suddivise per sesso, secondo una indagine campionaria:

Pene	$1 \le n < 2$	$2 \le n < 5$	$5 \le n < 10$	$10 \le n < 15$	$15 \le n \le 30$
Maschi	200	329	168	91	154
Femmine	13	17	11	5	6

Il candidato: a) verifichi l'ipotesi: H_0: non c'è differenza significativa (5%) tra le distribuzioni relative alla durata delle pene per maschi e femmine; b) verifichi l'ipotesi: H_0: non c'è differenza significativa (5%) tra le medie della durata delle pene per maschi e femmine. [a) Accettata; b) Accettata]

3. (Istituto tecnico commerciale indirizzo programmatori 1997/98) Nove studenti universitari, scelti a campione, sono stati classificati secondo i voti conseguiti in due esami differenti, tra i quali sussiste una certa relazione logica. I dati sono riportati nella seguente tabella.

Studenti	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Voto di economia (x)	18	23	26	23	22	19	18	20	21
Voto di matematica (y)	22	21	30	18	24	18	23	19	24

Dopo aver esposto i possibili criteri per adattare una retta a rappresentare una nuvola di punti, si eseguano le seguenti elaborazioni statistiche. a) Rappresentare il diagramma di dispersione dei voti delle due materie; b) Determinare l'indice di correlazione lineare di Bravais–Pearson, specificandone il suo significato statistico; c) Determinare le due rette di regressione e calcolare l'indice di determinazione; d) Rappresentare le due rette di regressione sul grafico di cui al punto a) e) Sulla base del modello di regressione ottenuto, stimare il voto di matematica corrispondente al voto di economia $x = 25$ e il voto di economia corrispondente al voto di matematica $y = 27$.

[b) ≈ 0,49; c) $y = 0,35x + 13,43$; $y = 0,70x + 7,31$]; d) 25; 23]

4. (Liceo scientifico PNI 1997/98) Una macchina produce barre di acciaio a sezione circolare la cui lunghezza ottimale dovrebbe essere di 5 *m* ed il diametro della sezione di 4 *cm*. Le barre effettivamente prodotte, che si suppongono tra loro indipendenti, hanno una lunghezza aleatoria con distribuzione normale di media $m_1 = 5$ *m* e scarto standard $s_1 = 4$ *cm*. Il diametro della sezione è una variabile aleatoria, indipendente dalla precedente, e con distribuzione normale di media $m_2 = 4$ *cm* e $s2 = 0,8$ cm. Una generica barra prodotta può essere direttamente venduta senza modifiche se la sua lunghezza è compresa tra 4,95 *m* e 5,05 *m* e la sua sezione tra 2,8 *cm* e 5,2 *cm*. La tavola della funzione di ripartizione della distribuzione normale standardizzata è, per alcuni valori, la seguente:

Ascissa: x	–1,50	–1,45	–1,35	–1,25	–1,15	–1,05	–0,95
F(x)	0,067	0,074	0,089	0,106	0,125	0,147	0,171
Ascissa: x	0,95	1,05	1,15	1,25	1,35	1,45	1,50
F(x)	0,829	0,853	0,875	0,894	0,912	0,927	0,933

Il candidato: a) verifichi che la probabilità p di poter mettere in vendita senza modifiche una generica barra prodotta è 0,68; b) indicata con f_n la frequenza relativa alle barre direttamente vendibili su n barre prodotte, esprima, in funzione di p, la numerosità n necessaria perché la probabilità che f_n disti da p più di 0,05 sia non superiore a 0,05; c) dato il valore di p rilevato in a), se su 2000 barre prodotte 1000 risultano non direttamente vendibili, dica se si può sospettare che la macchina non funzioni più secondo lo standard riportato sopra, se, cioè, il risultato ottenuto risulta a priori poco probabile (probabilità inferiore a 0,05) subordinatamente alle modalità di funzionamento della macchina, come indicato; d) descriva una procedura che consenta di calcolare la probabilità di ottenere la prima barra direttamente vendibile solo alla n–esima prova, al variare di p e di n, e la codifichi in un linguaggio di programmazione conosciuto.

5. (Liceo scientifico PNI 2004/2005) Sia γ la curva d'equazione: $y = k \cdot e^{-\lambda \cdot x^2}$ ove k e λ sono parametri positivi. a) Si studi e si disegni γ. b) Sapendo che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ e assumendo $\lambda = \frac{1}{2}$, si trovi il valore da attribuire a k affinché l'area compresa tra γ e l'asse x sia 1. c) Per i valori di k e λ sopra attribuiti, γ è detta *curva standard degli errori* o *delle probabilità* o *normale di Gauss* (da *Karl Friedrich Gauss,* 1777–1855). Una *media* μ ≠ 0 e uno *scarto quadratico medio* σ ≠ 1 come modificano l'equazione e il grafico?

$$\left[\text{a) } M \equiv O; F_1 \equiv \left(-\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}, \frac{k}{\sqrt{e}} \right); F_2 \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}, \frac{k}{\sqrt{e}} \right); \text{b) } k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right]$$

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
H = High School Math Contest University of Huston

1. (H 2011) I punteggi un test nazionale sono distribuiti normalmente con media di 700 e scarto quadratico medio di 75. Il 60° percentile è più vicino a quale intero? [720]
2. (H 2011) Un campionamento casual di 25 elementi è preso da una $N(20; 9)$. Sia X la media campionaria. Con che probabilità X è maggiore di 21? [fra 4,75% e 4,85%]
3. (H 2011) Si vuole stimare la percentuale di studenti di high school che hanno provato caramelle al peppermint. Si vuole un errore non superiore al 2,5% con almeno il 95% di confidenza e si vuole considerare il campione più piccolo possibile. Quanto deve essere grande? [1540]
4. (H 2012) I sacchi di grano sono distribuiti normalmente con media 100 lb. e σ = 2 lb. Un vagone trasporta 9 sacchi di grano. Con che probabilità il carico del vagone supera 910 lb? [fra 4,5% e 4,9%]
5. (H 2012) Viene eseguito un campionamento di 225 misure di una variabile numerica, ottenendo una media di 2,58 e uno scarto quadratico medio di 1,50. Determinare un intervallo di confidenza al 99% per la media della popolazione. [tra 2,32 e 2,84]
6. (H 2012) Quali delle seguenti variabili casuali può essere descritta da una distribuzione binomiale?[d)]
   a) Il numero di incendi scoppiati in una certa zona in una settimana. X è il numero di incendi.
   b) Il numero di auto contato in un'ora in un certo posto di una data strada. X è il numero di auto.
   c) Un campione ampio 20 di studenti in una classe di 60. X è il numero di campionamenti di studenti che hanno ottenuto almeno C nel test di ingresso.
   d) Un campione di 100 studenti scelti a caso dai laureati dell'area di Houston. X è il numero di laureati con lode.
   e) Un dado regolare è lanciato finché non si ottengono due sei consecutive. X è il numero di lanci eseguiti.

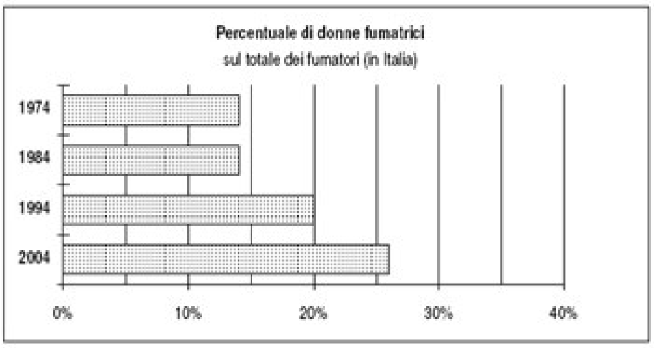
Questions in English

7. (H 2011) Which of the following random variables does not have a binomial distribution? [b)]
   a) The number of shirts that have defects in a sample of 20 coming from a production line.
   b) The number of boxes of Cracker Jacks that must be purchased to get all 6 of the prizes offered.
   c) The number of defective items in a sample of 10 randomly chosen without replacement from a large population of such items.
   d) The number of times a total of 7 spots appears in 100 rolls of a pair of dice.
   e) The number of base hits by Albert Pujols in the first three games next season in which he has 4 official at bats.
8. (H 2011) A random sample of 400 measurements of numeric variable were recorded. The sample average was 12.56 and the sample standard deviation was 2.44. A 95% confidence interval for the population mean is? [from 12.321 to 12.799]
9. (H 2011) Scores on a national achievement test are normally distributed with a mean of 700 and a standard deviation of 75. A student scores 830. What is her percentile score? [96%]
10. (H 2012) Previous studies of levels of a pollutant in Galveston Bay indicated a mean level of 0.035 with a standard deviation of 0.005. Scientists would like to revise their estimate of the mean level with an error no greater than 0.001 with 95% confidence and to be as economical about it as possible. How large a sample of measurements should they take? You may assume that pollutant levels are normally distributed. [97]
11. (H 2012) Scores on a national achievement test are normally distributed with a mean of 700 and a standard deviation of 75. The 85^{th} percentile of test scores is closest to? [775]
12. (H 2012) 100 cards are dealt one at a time from a standard deck, with replacement and with reshuffling after each card is dealt. The deck contains 13 cards in each of four suits: hearts, diamonds, clubs and spades. The probability of getting more than 30 hearts is closest to? [0.1020]
13. Scores on a national achievement test are normally distributed with a mean of 650 and a standard deviation of 35. A student scores 690. Which of the following is closest to her percentile score? [a)]
    a) 87% b) 83% c) 94% d) 70% e) 99%

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia militare) Il peso medio di un gruppo di tre ragazze è 50 Kg, il peso medio di un gruppo di quattro ragazzi è 70 kg. Qual è il peso medio del gruppo formato dalle sette persone?
A) 60 kg B) Meno di 60 kg C) Più di 60 kg D) 70 kg
2. (Accademia navale) Se la media di 3 numeri è 10, qual è la somma dei 3 numeri?
A) 27 B) 30 C) 24 D) 10 E) 15
3. (Accademia militare) La media aritmetica fra un numero x e il suo reciproco $\frac{1}{x}$ vale
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{x+1}{2x}$ C) $\frac{x^2+1}{2x}$ D) $\frac{x^2+1}{x}$

(Economia, Varie Università) I quesiti 4, 5 e 6 si riferiscono al grafico seguente

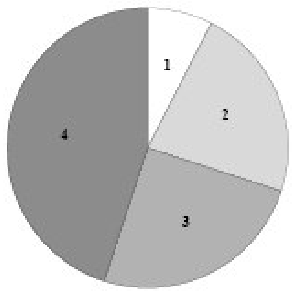


Percentuale di donne fumatrici sul totale dei fumatori (in Italia)	
1974	14%
1984	14%
1994	20%
2004	26%

	N° Totale di fumatori (migliaia in Italia)	Età dei fumatori (suddivise per fasce) Meno di 25 anni	Tra 25 e 50 anni	Oltre 50 anni
1974	10.500	10%	50%	40%
1984	10.900	15%	50%	35%
1994	12.500	25%	55%	20%
2004	11.200	35%	45%	20%

4. Sulla base dei dati riportati nelle tabelle, quale delle seguenti affermazioni NON è corretta?
A) Nel 1994 più della metà dei fumatori avevano tra i 25 e i 50 anni
B) Nel 2004 il numero dei fumatori con meno di 25 anni è diminuito rispetto al 1994
C) Nel 1984 il numero delle donne fumatrici è aumentato rispetto al 1974
D Il numero di fumatori con oltre 50 anni è in costante calo
5. Quante erano le donne fumatrici in Italia nel 1994? A)1250000 B)2500000 C) 3125.000 D) 12500.000
6. In quali degli anni considerati il numero di fumatori con meno di 25 anni NON ha superato i 2 milioni di unità? A) Nel 1974, 1984 e 1994 B) Solo nel 1974 C) Nel 1994 e nel 2004 D) Nel 1974 e nel 1984

7. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza) Ad un corso di laurea sono iscritti studenti di 4 nazioni. La composizione percentuale delle varie nazionalità è rappresentata nel "grafico a torta" in figura.

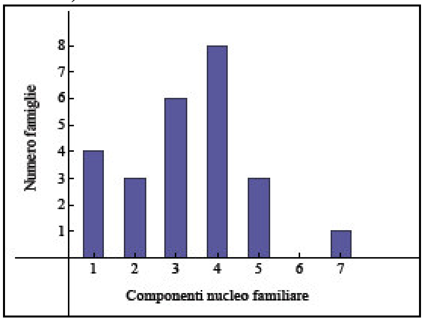


Si sa che i numeri degli iscritti provenienti da tre di queste nazioni sono 12, 36, 40 e che uno dei gruppi costituisce esattamente il 25% del totale. Quanti sono gli studenti del gruppo 4?
A) 40 B) 48 C) 72 D) 76
8. (Medicina 1998) La somma algebrica degli scarti rispetto alla media aritmetica dei numeri –4, –3, –2, 5, 6, 7, 8 è: A) 17 B) 35 C) 7 D) 0 E) 2,43
9. (Medicina 1998) Uno studente universitario ha superato 4 esami, ed ha la media di 23; quale e' il voto minimo che lo studente dovrà prendere all'esame successivo affinché la media diventi almeno 25?
A) 29 B) 30 C) 28 D) 26 E) qualunque sia il voto all'esame successivo, la media non potrà raggiungere il valore 25.
10. (Ingegneria 2000) La media aritmetica dei numeri a e b è 30. Se c = 15, qual è la media aritmetica a, b e c? A) 45 B) 22,5 C) 15 D) 25 E) 75

11. (Ingegneria 2002) L'età media dei partecipanti a una festa è 24 anni. se l'età media degli uomini è 28 anni e quella delle donne è 18 anni, qual è il rapporto tra il numero degli uomini e quello delle donne?
A) $\frac{14}{9}$ B) $\frac{9}{14}$ C) 2 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{4}{3}$

12. (Scienze della formazione primaria, Università di Cagliari 2006-07) Dopo aver sostenuto 3 esami, uno studente ha una media di 28 punti; nei primi due esami ha ottenuto rispettivamente 26 e 28 punti. Quanti punti ha ottenuto nel terzo esame?
A) 28 punti B) 30 punti C) 26 punti D) non è possibile calcolare la media in questo caso E) 18 punti

13. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza 2008) In un'intervista è stato chiesto a 25 adulti di indicare il numero di componenti del proprio nucleo familiare. I dati raccolti sono rappresentati nell'istogramma in figura. Qual è la percentuale di famiglie composte da almeno quattro persone?
A) 64% B) 52% C) 48% D) 32%



14. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza 2008) Tre amici hanno contribuito alle spese di un viaggio in questo modo: Chiara ha speso 350 euro, Sonia 300 euro e Luciano 550 euro. Affinché il costo del viaggio sia distribuito equamente tra i tre, quanti soldi Chiara e Sonia devono dare a Luciano?
A) Chiara 50 euro, Sonia 100 euro B) Chiara 200 euro, Sonia 250 euro
C) Chiara 100 euro, Sonia 125 euro D) Chiara 25 euro, Sonia 75 euro

15. (Architettura 2009) Uno studente di Architettura ha superato fino a oggi 6 esami, conseguendo la votazione di 21 in due di essi, di 26 in altri tre, e infine il punteggio di 24 in un unico esame. Calcolare la votazione media che lo studente ha conseguito nei 6 esami superati.
A) 22,5 B) 23,5 C) 24 D) 24,5 E) 25

16. (Architettura 2009) Il prezzo del petrolio è oggi di 50 dollari al barile e il rapporto fra il valore del dollaro e il valore dell'euro è di 0,8 (un dollaro vale 0,8 euro). Se fra un anno il prezzo del petrolio raggiungesse i 75 dollari al barile e il rapporto fra dollaro ed euro fosse pari a 0,6 ne risulterebbe che il prezzo in euro di un barile di petrolio: A) aumenterebbe di 2 euro B) aumenterebbe di 5 euro C) aumenterebbe di 10 euro D) diminuirebbe di 5 euro E) rimarrebbe invariato

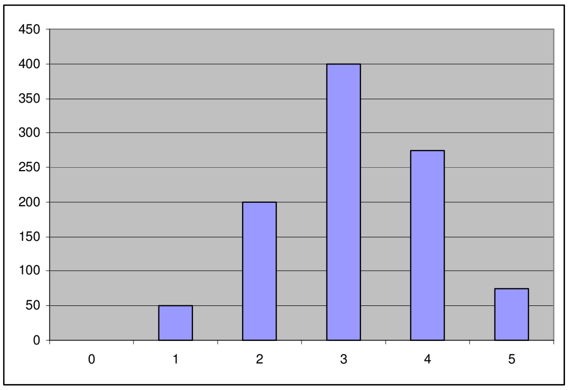
(Guida Bocconi) I quesiti 17, 18 e 19 hanno riferimento ai dati seguenti
Numero e tipologie di libri venduti nel mese di Gennaio 2011 dal negozio online GoBooks s.r.l.

Tipologia di libro	Libri cartacei		Libri elettronici	
	Pezzi venduti	%	Pezzi venduti	%
Romanzo	45	25,7	5	3,6
Giallo	28	16,0	33	23,6
Horror	10	5,7	21	15,0
Storico	13	7,4	44	31,4
Infanzia	32	18,3	17	12,1
Manualistica	24	13,7	10	7,1
Saggistica	23	13,1	10	7,1

17. Nel mese di Gennaio 2011, presso il negozio online GoBooks s.r.l., la differenza nella vendita tra libri cartacei e libri elettronici corrisponde a: A) 35 libri cartacei in più rispetto a quelli elettronici B) 44 libri cartacei in più rispetto a quelli elettronici C) circa 10 libri elettronici in più rispetto a quelli cartacei D) 0 in quanto è stato venduto esattamente lo stesso numero di libri cartacei ed elettronici E) non è possibile rispondere in base ai dati presentati

18. Si sa che nell'anno 2010 i clienti del negozio online GoBooks s.r.l. con un'età maggiore di 50 anni sono stati 300. Quanti clienti con età minore di 21 anni, ha dunque avuto il negozio online GoBooks s.r.l, nel 2010? A) 350 B) 70 C) 105 D) 90 E) 140
19. Quale delle seguenti affermazioni è corretta? A) Nel 2014 il ricavo per il negozio online GoBook s.r.l. sarà di certo maggiore che nel 2013 B) Il negozio ha toccato il minimo storico di guadagno nel 2008 C) Il massimo ricavato si è avuto nel 2006 D) Nel 2009 si sono venduti soprattutto libri di genere Horror E) Nel 2009 il ricavo è stato pari a 300 €

20. (Guida Bocconi) Il diagramma seguente mostra la frequenza del numero di componenti di un certo numero di famiglie. Se si sceglie una famiglia a caso tra queste, qual è la probabilità che sia composta da almeno 3 componenti?

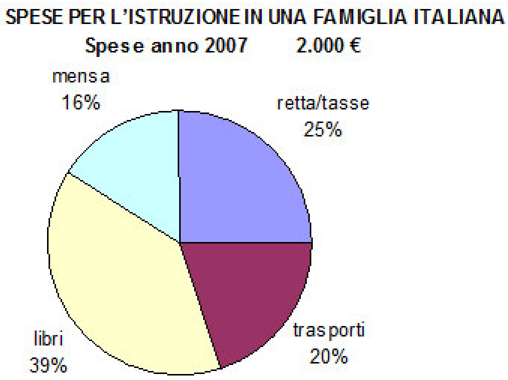


A) Circa 65% B) Circa 75% C) Circa 85% D) Circa 95% E) I dati sono insufficienti

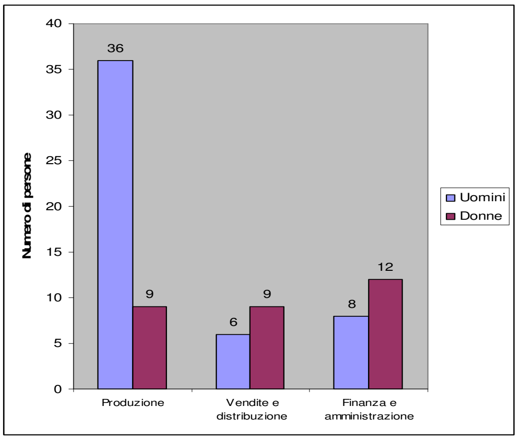
(Test Bocconi) I quesiti 21, 22 e 23 sono riferiti ai dati seguenti

ISCRIZIONI ANNO 2007–2008

Iscrizioni	Scuole private		Scuole pubbliche
	Laiche	Religiose	
Maschi	6700	5400	18500
Femmine	4300	7600	17500
Totale	11000	13000	36000



21. Nel 2007, quanto una famiglia italiana ha speso per la "mensa"?
A) 220 Euro B) 300 Euro C) 320 Euro D) 400 Euro
22. Rispetto al totale delle iscrizioni dell'anno 2007–2008, qual è la percentuale di femmine iscritte nelle scuole laiche private? A) 7,17% B) 6,25% C) 10% D) 15% E) 8,58%
23. Nel 2008, per quale delle seguenti voci una famiglia italiana ha speso di meno? A) Retta/tasse B) Mensa C) Libri D) Trasporti E) Non è possibile rispondere in base ai dati presentati
24. (Luiss 2011/12) In figura un istogramma mostra il numero di uomini e di donne che lavorano nei tre reparti della Tullio S.p.A. Qual è la percentuale di donne che lavorano alla Tullio S.p.A.?



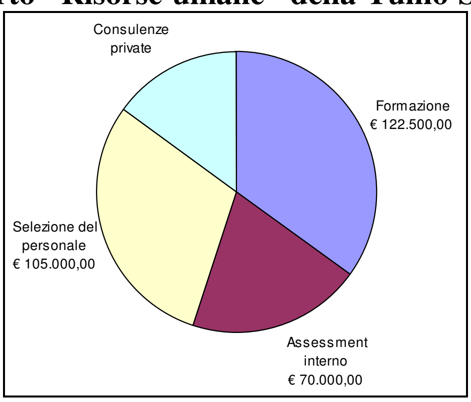
A) 50% B) 30% C) 26,5% D) 37,5% E) Non è possibile rispondere in base a questi dati

(Luiss 2011/12) I quesiti 25, 26 e 27 sono riferiti ai dati seguenti
La tabella che segue riporta i valori relativi al prestito che 5 aziende hanno chiesto e su cui devono pagare diversi interessi.

Azienda	A	B	C	D	E
Prestito (in euro)	500000,00	600000,00	300000,00	400000,00	350000,00
Interesse annuo	7%	5%	10%	8%	7%

25. Quale Azienda spende maggiormente di interesse annuo?
26. Quanto spende di interesse annuo l'Azienda D?
A) € 24.000,00 B) € 32.000,00 C) € 24.500,00 D) € 26.000,00 E) € 23.000,00
27. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
A) L'Azienda A e l'Azienda D spendono la stessa cifra di interessi annui
B) L'Azienda B e l'Azienda C spendono la stessa cifra di interessi annui
C) L'Azienda A e l'Azienda E spendono la stessa cifra di interessi annui
D) L'Azienda C e l'Azienda D spendono la stessa cifra di interessi annui
E) Non è possibile rispondere in base a questi dati
28. Se l'Azienda F spendesse d'interesse annuo €10.500,00 più dell'Azienda E, quanto spende in tutto?
A) € 35.500,00 B) € 35.000,00 C) € 34.500,00 D) € 26.000,00 E) € 33.000,00

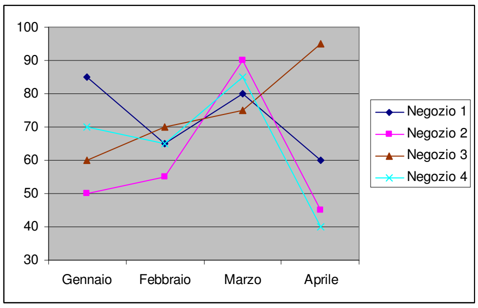
(Luiss 2011/12) I quesiti 29, 30 e 31 sono riferiti ai dati seguenti
Il seguente grafico rappresenta in che modo, nel 2006, il reparto "Risorse umane" della Tullio S.p.A.



ha investito un budget di € 350.000,00.
29. Quale percentuale di denaro è stata spesa per la Formazione?
A) 23% B) 30% C) 28% D) 40% E) 35%
30. Qual è la percentuale complessiva di denaro che è stata investita in Formazione e Assessment interno?
A) 55% B) 45% C) 60% D) 50% E) 40%
31. Quanti soldi sono stati spesi per le consulenze private nel 2006?
A) € 49.000,00 B) € 53.000,00 C) € 55.000,00 D) € 56.500,00 E) € 52.500,00

(Luiss 2011/12) I quesiti 32, 33 e 34 sono riferiti ai dati seguenti

Il grafico seguente rappresentata il numero di PC venduti da quattro diversi negozi nei primi quattro mesi del 2010.



32. In quale mese tutti i negozi hanno venduto il maggior numero di PC del quadrimestre?
    A) Gennaio B) Febbraio C) Marzo D) Aprile E) L'evento non si è verificato
33. Quanti PC ha venduto in più il Negozio 1 rispetto al Negozio 4 nel mese di Aprile?
    A) 30 B) 25 C) 15 D) 20 E) 10
34. Quanti PC ha venduto in media nei primi quattro mesi del 2010 il Negozio 3?
    A) 65 B) 70 C) 75 D) 80 E) 73

(Luiss 2011/12) I quesiti 35, 36, 37 e 38 sono riferiti ai dati seguenti

La tabella che segue mostra i costi di produzione per singola bottiglia, il prezzo all'ingrosso per singola bottiglia e la quantità di bottiglie vendute da una piccola Azienda agricola nel 2009.

Prodotti	Costo di produzione per singola bottiglia	Numero di bottiglie vendute	Prezzo all'ingrosso per singola bottiglia
VINO	€ 6,00	10.000	€ 15,00
OLIO	€ 3,50	9.800	€ 7,00
SPUMANTE	€ 8,00	3.000	€ 25,00
GRAPPA	€ 7,50	7.800	€ 18,00

35. Per quale prodotto c'è stato il maggior profitto nel 2009?
    A) Vino B) Olio C) Spumante D) Grappa E) Non è possibile rispondere in base a questi dati
36. Per quale prodotto c'è stato il minor profitto nel 2009?
    A) Vino B) Olio C) Spumante D) Grappa E) Non è possibile rispondere in base a questi dati
37. Quale prodotto dà, per bottiglia venduta, il maggior guadagno nel 2009?
    A) Vino B) Olio C) Spumante D) Grappa E) Non è possibile rispondere in base a questi dati
38. Quale prodotto dà, per il Centro d'Italia, il maggior guadagno nel 2009?
    A) Vino B) Olio C) Spumante D) Grappa E) Non è possibile rispondere in base a questi dati

Per svolgere un Test finale di **10** *quesiti, collegati al sito*
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_5_12.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
C	B	C	B	B	D	C	D	E	D
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
D	B	C	A	C	B	A	C	C	E
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
C	A	E	D	A	B	B	B	E	A
31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**		
E	E	D	C	A	B	C	E		