

Giovanni Organtini

FISICA SPERIMENTALE



**RELATIVITÀ, MECCANICA QUANTISTICA, FISICA DELLE
PARTICELLE**

FISICA SPERIMENTALE – VERS. 9 SETTEMBRE 2014

© 2013–2014 Giovanni Organtini, Sapienza–Università di Roma & INFN–Sez. di Roma



Questo è un libro di testo elettronico gratuito e aperto. Questo testo è stato realizzato usando per quanto possibile strumenti *Open Source* ed è disponibile gratuitamente secondo i termini della Licenza Creative Commons Attribution–NoDerivs 3.0. Puoi copiarlo, stamparlo e ri–distribuirlo come vuoi. Non puoi realizzare opere derivate senza il consenso dell’autore.

Per maggiori informazioni sulle Licenze Creative Commons, consulta il sito <http://www.creativecommons.org>.

Il lavoro per la redazione di questo prodotto è in corso ed è solo all’inizio. Se la porzione di libro disponibile **ti è piaciuta**, per continuare a usufruire di questi servizi e permettere ad altri di farlo, considera la possibilità di donare una cifra a piacere, a partire da 50 centesimi, visitando il sito di [PayPal](#) specificando l’indirizzo e–mail Giovanni.Organtini@roma1.infn.it. Le donazioni consentiranno un costante aggiornamento dei contenuti.

Tutti i contributori, indipendentemente dall’importo donato e salvo esplicita indicazione contraria, saranno inseriti in una *mailing list* attraverso la quale verranno informati dell’uscita di nuove edizioni del volume. Donando per questo libro si accetta implicitamente l’inserimento nella lista e si dichiara il consenso al trattamento dei propri dati personali (nome, cognome e indirizzo di posta elettronica) ai sensi del DL 196/2003 e successive modificazioni. I dati personali verranno utilizzati al solo fine di informare i donatori dell’uscita di nuove edizioni del volume e verranno trattati nel rispetto della normativa. I contributori hanno la facoltà di chiedere di non essere inseriti in tale lista o di esserne rimossi, ai sensi dl DL sopra citato. È sufficiente in-

dicare la volontà di esercitare questo diritto in sede di versamento della donazione o inviando una mail all’autore del volume.

Per contributori s’intendono sia coloro che abbiano versato un contributo in denaro, sia coloro che avranno segnalato eventuali errori o avanzato proposte di riformulazione di parti del libro accolte dall’autore.

Puoi contattare l’autore di questo libro elettronico ai seguenti recapiti:

Prof. Giovanni Organtini
 “Sapienza”, Università di Roma
 Dip.to di Fisica
 P.le Aldo Moro, 2
 00185 ROMA (Italy)

Tel: +39 06 4991 4329 Fax: +39 06 4453 829
 e–mail: giovanni.organtini@uniroma1.it

Risorse utili

Sono numerose le risorse a cui puoi attingere per rimanere aggiornato sulla fisica e sugli sviluppi di quest'opera. In particolare ti consigliamo di visitare periodicamente il sito di **FISICAST** all'indirizzo <http://www.fisicast.it>: si tratta di un *podcast* sul quale pubblichiamo, con cadenza mensile, brevi brani audio che parlano di fisica con un linguaggio semplice e accessibile a tutti, o quasi. Trovi i podcast di FISICAST anche su **iTunes** e su molti altri servizi di *podcasting*.

Puoi anche sottoscrivere il canale **twitter** dell'autore all'indirizzo <https://twitter.com/organtini> sul quale sono pubblicate notizie relative a quest'opera e su altri aspetti della fisica e non solo.

Se hai un account **Google+** puoi seguire i **post** dell'autore all'indirizzo <http://plus.google.com/+GiovanniOrgantini>.

Infine, puoi visitare il sito dell'autore all'indirizzo <http://www.roma1.infn.it/people/organtini> per attingere a ulteriori informazioni.

Ricorda che l'autore è disponibile ad accogliere suggerimenti o a esaudire richieste di integrazioni, nonché a tenere corsi o seminari per studenti, insegnanti o per un pubblico piú generico. Se trovi errori (il che è sempre possibile) ti preghiamo di segnalarli. Ci aiuteranno a offrire un servizio migliore.

Indice

Prefazione	1	4 Una storia esemplare	53
1 La teoria della Relatività Ristretta	7	4.1 La scarica degli elettroscopi	53
1.1 Le trasformazioni di Lorentz	7	4.2 La scoperta dei raggi cosmici	55
1.2 La dilatazione del tempo	9	4.3 Caratteristiche dei raggi cosmici	55
1.3 Contrazione della lunghezza	11	5 Chi l'ha ordinato?	59
1.4 Composizione delle velocità	12	5.1 Particelle penetranti	59
1.5 I quadrivettori	13	5.2 L'ipotesi del neutrino	60
1.6 Il quadrivettore energia-impulso	14	5.3 L'antimateria	62
1.7 Acceleratori e collider	18	5.4 La scoperta del muone	63
2 La Relatività Generale	21	5.5 La scoperta del pione	63
2.1 La misura nei vari sistemi di riferi- mento	21	5.6 La lambda e i mesoni K	64
2.2 Il principio di equivalenza	22	6 I nuovi numeri quantici	67
2.3 la geometria dell'Universo	24	6.1 I leptoni	67
2.4 Effetti gravitazionali sul tempo	26	6.2 I barioni	67
3 La Meccanica Quantistica	29	6.3 I mesoni	68
3.1 Il corpo nero	29	6.4 Gli adroni	68
3.2 L'effetto fotoelettrico	31	6.5 Classificazione in base allo spin	69
3.3 L'effetto Compton	33	7 Imitare la Natura	71
3.4 La misura e il Principio d'indetermi- nazione	34	7.1 Gli acceleratori di particelle	71
3.5 Onde di materia	36	8 Studiare le particelle	73
3.6 Gli atomi	36	8.1 Sezione d'urto	73
3.6.1 Gli spettri atomici	37	8.2 Vita media	74
3.7 Quantizzazione del momento angolare	38	9 Le risonanze	79
3.8 Lo spin degli elettroni	39	9.1 Urti tra particelle	79
3.9 Il Principio di Pauli	41	9.2 La massa invariante	81
3.9.1 La chimica	42	10 Le particelle strane	85
3.9.2 Semiconduttori	45	10.1 I decadimenti della Λ	85
3.9.3 Il diodo	46	10.2 Produzione associata	86
3.9.4 Il transistor	47		
3.10 L'equazione di Schrödinger	48		

11 Il Modello a Quark	89	13.7 L'interazione debole	107
11.1 Tre nuove Tavole Periodiche	89	14 Il bosone di Higgs	109
11.2 L'ipotesi dei quark	91	14.1 Richiami sul concetto di energia	109
11.3 L'ottetto di mesoni	92	14.2 Campi autointeragenti	111
11.4 L'ottetto di barioni	92	14.3 Sul significato dell'energia	111
11.5 Quark colorati	93	14.4 L'introduzione della relatività	112
12 Il Modello Standard	97	14.5 Il Meccanismo di Higgs	112
12.1 I costituenti della materia	97	14.6 Sulla forma del potenziale di Higgs	113
13 Campi e Particelle	99	14.7 Campi massivi	115
13.1 Le forze fondamentali	99	14.8 La massa dei bosoni vettori	116
13.2 Una rivisitazione del concetto di energia	100	Appendice	119
13.3 L'energia delle interazioni tra parti- celle	102	Approssimazione di funzioni	119
13.4 Altri processi	105	Equazioni differenziali a variabili separabili	120
13.5 L'antimateria	106	Unità naturali	121
13.6 La produzione delle particelle strane	107	Soluzione degli esercizi	123

Prefazione

Tra le parti di un libro la prefazione è sempre la meno letta. In questo caso è molto utile leggerla, sia per capire lo spirito con il quale è stato organizzato il materiale all'interno del volume, sia per comprendere le motivazioni alla base della scelta di redigere un testo così.

Il testo nasce dall'esperienza delle lezioni per gli studenti dei licei sulla fisica delle particelle, da me tenute nell'ambito dei programmi per l'orientamento e del Piano Lauree Scientifiche. Molti insegnanti, al termine delle mie lezioni, mi hanno chiesto materiale da utilizzare per riproporre in classe alcuni degli argomenti trattati, lamentando l'indisponibilità di testi adeguati. Per questo ho pensato di cominciare a scrivere queste note, con l'intento di ampliarle il più possibile nel corso del tempo, includendovi anche materiale più tradizionale.

Un'altra economia è possibile

Questo lavoro è una sfida al sistema economico corrente. La sfida si basa sul paradigma *Open Source*, da cui derivano le licenze *Creative Commons*.

Nell'attuale sistema economico il lavoro per la redazione di un libro, di gran lunga quello più faticoso e ricco di contenuto, è remunerato molto meno del lavoro necessario per la sua composizione, stampa, distribuzione e vendita. L'autore di un libro percepisce, mediamente, non più del 10–15 % del prezzo di copertina (a meno che non si tratti di un *best-seller*, naturalmente). Altrettanto percepisce il libraio, che fornisce il servizio di vendita. La maggior parte del prezzo di copertina va in compensi per l'editore e il distributore.

Grazie soltanto alla posizione di vantaggio, determinata dal posizionamento sul mercato e dalla rete di vendita, gli editori (che sono quelli che fanno

il prezzo) godono di un diritto economico non proporzionato al lavoro svolto. Questo è tanto più vero per i libri scolastici, per i quali il rischio d'impresa è assai basso, giacché l'editore conosce in anticipo l'ordine di grandezza del volume di vendite. In sostanza, pagando un libro di testo non si remunera il lavoro dell'autore, ma la posizione di vantaggio economico dell'editore e del distributore.

Questo stesso modello è adottato in moltissime attività economiche, dove ciò che determina il costo di una prestazione spesso non sono la quantità e la qualità del lavoro svolto, ma il possesso o meno di un presunto diritto a limitare la libertà dei clienti.

Noi crediamo, al contrario, che un altro modello economico sia possibile nel quale quel che deve essere remunerato è il lavoro i cui frutti, una volta remunerati, possano andare a beneficio dell'intera comunità. Che un tale modello sia concretamente attuabile è ampiamente dimostrato dal successo del software *Open Source*, che si può copiare, modificare, distribuire gratuitamente senza dover pagare *royalties* a nessuno. Le aziende che producono questo tipo di software, che dunque pagano gli stipendi dei programmatori e dei progettisti, funzionano e sono spesso più floride di quelle che vendono software tradizionale. Il business si basa sull'offerta del servizio, non sul possesso di un diritto a limitare la libertà altrui.

Siamo ormai così assuefatti al sistema che non ci rendiamo conto delle sue assurdità e siamo pronti a giustificarle con argomenti solo apparentemente ragionevoli. È il caso dei brevetti, ad esempio. Non è vero, come vuol farsi credere, che i brevetti aiutino lo sviluppo economico. È vero il contrario. Quando ci viene detto che l'industria farmaceutica, ad esempio, ha bisogno dei brevetti per coprire gli ingenti costi della ricerca, si tratta palesemente di una bufala.

I costi della ricerca, infatti, sono coperti dagli Stati e dai cittadini attraverso l'acquisto dei medicinali. Il costo della ricerca è alto perché ciascuna industria deve svolgere, segretamente, le stesse attività delle altre, con una moltiplicazione degli sforzi enorme e un costo esorbitante. Mettendo in comune i risultati, ogni azienda potrebbe risparmiare miliardi di euro e i farmaci potrebbero costare molto meno. Se fossero gli Stati a coprire questi costi, e i risultati fossero pubblici, il prezzo dei farmaci scenderebbe in maniera consistente e alla fine ci sarebbe un risparmio per tutti. Lo stesso vale per altri settori. È del tutto evidente, ad esempio, che i brevetti non servono alle industrie per acquisire una posizione di vantaggio rispetto ai potenziali concorrenti. Se così fosse i prodotti innovativi dovrebbero essere appannaggio di una sola azienda, ma non è così (pensate solo all'industria dei tablet: un'azienda ne ha lanciato uno, coperto da brevetto, e tutte le altre l'hanno seguita a ruota, aggirando il brevetto o acquistandolo). I brevetti hanno il solo scopo di creare un mercato delle idee innovative che, se ci si pensa bene, è un mercato del tutto irragionevole e contrario a ogni principio etico.

Noi pensiamo che l'autore di un libro di testo vada remunerato per il suo lavoro e non per l'aver acquisito una certa posizione di mercato. Una volta redatto il libro e una volta che il compenso per l'autore sia stato equo, il libro deve poter essere distribuito quasi gratuitamente: si dovrebbero pagare solo i costi effettivi della sua distribuzione e il giusto compenso per coloro che la rendono possibile. Non c'è ragione per cui un libro stampato da anni, che abbia già venduto migliaia di copie, non possa essere fotocopiato o reso pubblico. Sia ben chiaro che il modello che proponiamo non chiede di rinunciare alla proprietà intellettuale: il **diritto d'autore** resta di esclusiva proprietà dello stesso ed è inalienabile. È il **diritto esclusivo di sfruttamento economico** delle opere che, nella legislazione corrente, è cedibile ad altri e che noi riteniamo sia quanto meno da modificare. Per questo la licenza d'uso di questo libro impone che si citi sempre l'autore ogni volta che se ne fa un uso pubblico.

Questo modello non impedisce l'esistenza di case

editrici, che possono (devono) basare il loro business sull'efficacia della distribuzione, sul valore aggiunto, sulla capacità di offrire servizi diversi. La nascita di **WIKIPEDIA** non impedisce agli editori di vendere enciclopedie e dizionari. Ne modifica, evidentemente, il profilo. Chi usa le informazioni reperite online per acquisire un'informazione non produce un danno all'editore più di quanto non faccia una signora che acquisti da una bancarella una borsa firmata da un grande stilista nei confronti di quest'ultimo. La signora non avrebbe comunque mai acquistato quella borsa al prezzo proposto dallo stilista.

Si potrebbero inventare decine di modelli economici alternativi basati su un paradigma aperto, ma questo dovrebbe essere lavoro per economisti. Noi qui lanciamo la sfida. Rendiamo pubblico questo testo iniziale, chiedendo un supporto economico volontario a coloro che decideranno di adottarlo. Se riusciremo ad accumulare una cifra ritenuta ragionevole, quale compenso per questo lavoro, ne realizzeremo un altro (per altri gradi dell'istruzione scolastica o introducendo nuovi argomenti e nuove tecnologie). Se avremo successo e i proventi saranno sufficienti, potremo remunerare il lavoro di altri professionisti per la realizzazione di filmati, animazioni e altri supporti multimediali, che in questo caso sono stati tutti realizzati dall'autore, in prima persona, con evidente dispendio di energie.

Se condividi questa visione del mondo e ti sembra che il contenuto del libro sia adatto alle tue esigenze (e quest'ultimo è il requisito più importante), diffondilo e invita a supportarlo. Ti invitiamo anche a inviarci commenti, segnalazioni su possibili errori, suggerimenti, sia sul contenuto, sia sul modo di presentarli, sia sul modello distributivo. Naturalmente non garantiamo l'accoglimento di tutti i suggerimenti che potranno pervenire, perché di nuovo questo fa parte della libertà di ciascuno di realizzare le proprie opere come crede. Il che, però, non impedisce agli altri, una volta venuti in possesso di tali opere, di fare altrettanto.

Il titolo

Il titolo di questo volume non è stato scelto a caso. L'Italiano è una lingua che si presta a diverse, interessanti, e talvolta divertenti, interpretazioni del significato delle parole. In particolare l'aggettivo **sperimentale** utilizzato nel titolo ha in questo testo significati diversi, tutti contemporaneamente validi.

È sperimentale, come abbiamo detto sopra, il modo in cui il testo è realizzato e distribuito. Si tratta, cioè, della sperimentazione, della ricerca di un nuovo modello economico.

L'aggettivo sperimentale si riferisce anche al taglio dato all'introduzione dei concetti della fisica. Molti testi di fisica appaiono più come libri di matematica, nei quali si danno certe definizioni allo studente e se ne traggono le conseguenze. Le definizioni, in molti casi, piovono dall'alto, senza una spiegazione plausibile sul perché sia il caso di introdurle o su quale sia la loro ragion d'essere. In questo testo la fisica viene introdotta attraverso l'esperimento. Ogni argomento viene analizzato a partire dalle osservazioni sperimentali, che determinano le grandezze fisiche d'interesse, portando naturalmente alla formulazione delle leggi fisiche.

Infine, è sperimentale il mezzo scelto per la realizzazione del testo. Il supporto elettronico consente di fruire di contenuti multimediali e delle potenzialità dell'ipertesto. Si potrebbe fare molto di più, in effetti. La tecnologia è matura. Ma, spesso a causa di scelte determinate dal modello economico di cui parliamo sopra, molti produttori di software non consentono di usare in maniera semplice le innovazioni disponibili. Naturalmente il problema si potrebbe superare realizzando *ad hoc* anche i lettori per il supporto, ma questo avrebbe un costo eccessivo per noi (almeno in questa fase) e in ogni caso limiterebbe la platea di potenziali fruitori dell'opera. Possiamo solo sperare che il sistema avrà successo e ci consentirà, in futuro, di aumentare sempre di più l'offerta.

Tecnologia

Per realizzare questo prodotto sono stati usati per lo più strumenti *Open Source* o con licenza **Creative Commons**.

Il testo è stato redatto con **L^AT_EX**¹: un programma per la composizione di testi estremamente potente e liberamente scaricabile dalla rete, basato sul suo predecessore T_EX sviluppato da **Donald Knuth**, Professore di *Computer Science* a Stanford e autore di una monumentale opera sulla programmazione dei computer [1].

I filmati sono stati editati con **MPEG Streamclip** e **iMovie**. Per creare o manipolare alcune figure è stato usato **Gimp**.

Le musiche sono state scaricate da **jamendo**: un sito che raccoglie musica con licenza Creative Commons.

Le animazioni sono state realizzate con **Animation Desk** per iPad.

L'immagine di copertina è di **Alegri** (**alegriphotos.com**).

Alcuni *link* come **questo** potrebbero non portare a nulla (né a una pagina web, né a un altro punto del testo). Questo perché il link è previsto portare il lettore a una sezione del testo in cui si parla dell'argomento relativo che non è ancora stato prodotto. Molti link porteranno a pagine di **WIKIPEDIA** (in inglese). Abbiamo scelto di usare questo strumento quale riferimento a informazioni non strettamente pertinenti l'argomento del testo, nonostante le critiche che vengono da più parti sull'attendibilità delle informazioni che vi si trovano. L'opinione dell'autore è che questo strumento, come tutti, evolverà col tempo diventando sempre più attendibile. Riguardo le critiche relative al fatto che le informazioni presenti sul sito sono copiate da altre fonti senza verifica, va detto che lo stesso è accaduto e accade tuttora con i libri e che solo in rari casi gli autori dei libri verificano le informazioni sulle fonti originali (noi, naturalmente, l'abbiamo fatto ove possibile).

La non apertura dei sistemi operativi e delle applicazioni continua purtroppo a provocare inconve-

¹L^AT_EX si pronuncia *latek*

nienti piuttosto deprecabili. Uno di questi consiste nel fatto che la versione elettronica di questo testo si può usare senza alcun problema su un computer, mentre sui tablet esistono limitazioni (incomprensibili). Ad esempio, lo stesso **Acrobat Reader** su iPad non supporta la visione dei filmati *embedded*. Lo stesso accade con **iBooks**. Secondo la nostra esperienza i filmati sono invece perfettamente visibili se si carica il PDF su **Dropbox** e si visualizza usando il browser interno dell'applicazione per tablet (tuttavia in questo caso non si può avere il testo in modalità *full screen*), oppure usando **ezPDF Reader**² (il quale però riproduce i link, interni ed esterni, in modo meno piacevole). Confidiamo che il mercato spinga nella direzione giusta e che sia possibile usare un'applicazione in modo uniforme su ogni piattaforma.

Formare, non informare

Il semplice trasferimento di conoscenza non ha molto senso. Conoscere le leggi della fisica è utile, ma non indispensabile nella vita di una persona, tanto meno se questa conoscenza si limita alla mera capacità di scrivere le formule corrispondenti senza capirle.

Capire le leggi della fisica e il processo che ha condotto alla loro formulazione, al contrario, è di fondamentale importanza per la formazione complessiva degli studenti. Ecco perché questo testo pone l'accento più sul **come** si arrivi a formulare le leggi fisiche piuttosto che su queste ultime. In particolare, le leggi fisiche davvero fondamentali sono poche ed è su queste che si concentra tutta la struttura del volume. Le leggi derivate da quelle fondamentali sono trattate come esercizi e non come parte integrante del testo. Questo non vuol dire che si possano ignorare, ma che non si devono necessariamente *ricordare*. Laddove esistano relazioni particolari che vale la pena siano ricordate a memoria per la frequenza con la quale si usano o per l'importanza che rivestono nel loro ambito, queste sono evidenziate in **rosso**, anche negli esercizi.

La matematica presente in ogni parte del volume (a parte gli esercizi) è ridotta al minimo indispensabile e non si assume la conoscenza di concetti avanzati, in modo tale che il testo possa essere usato da scuole diverse (Licei scientifici, classici, scuole professionali).

Come usare questo testo

Il formato migliore per questo testo è quello elettronico (è per questo che è nato). La versione **portrait** può essere più comoda per i laptop e per alcuni tablet. Puoi comunque stampare il testo (anche se in questo caso perderai la funzionalità dei filmati, che tuttavia trovi sempre sul **canale YouTube** dell'autore). La versione **portrait** è più adatta per la stampa. Puoi fare la stampa da te o rivolgerti a un servizio specializzato (una copisteria, una tipografia o su Internet).

Se pensi di usare questo testo a scuola in formato cartaceo, puoi scaricarlo una copia che puoi fornire a un tipografo di zona perché ne stampi in numero sufficiente di copie. Gli alunni possono quindi acquistare le copie versando solamente il corrispettivo relativo al costo vivo della stampa, che in questo caso probabilmente è inferiore alla spesa necessaria per stampare il testo in proprio. La licenza con cui è distribuito questo testo consente a chiunque (anche a un istituto scolastico) di stampare le copie necessarie e di fornirle agli studenti a un prezzo superiore a quello corrispondente al costo dell'operazione. In questo modo la Scuola può percepire un contributo extra utile in questo periodo di tagli. Va da sé che se il ricavo è eccessivo, gli studenti preferiranno procurarsi il materiale da solo: il modello di distribuzione che abbiamo scelto consente a più persone di creare valore, ma senza eccessi. Qualunque abuso sarebbe automaticamente eliminato dal *mercato* dalla disponibilità gratuita del bene.

Ovviamente sei sempre invitato a versare un contributo per l'autore. In questo modo avrai la garanzia che il prodotto sarà sempre mantenuto al meglio e continuamente migliorato. Potrai anche sostenere il modello di sviluppo scelto, dimostrando che un

²A pagamento, ma dal prezzo accessibile.

mercato equo e sostenibile è possibile, nel quale è il lavoro o un servizio a essere retribuito e non una rendita di posizione o da capitale. Nel caso in cui il testo sia adottato a scuola, il metodo migliore per versare il contributo consiste nel raccogliere il denaro che avete deciso di versare e fare un unico versamento. Non è necessario che il contributo sia lo stesso per tutti gli studenti. Poiché il versamento è libero (si tratta di una donazione) puoi prevedere la possibilità che alcuni studenti (quelli le cui famiglie hanno problemi di carattere economico) non paghino per l'uso di questa risorsa.

Per l'insegnante

Il testo contiene molto più materiale rispetto a quello che si può normalmente pensare d'insegnare alla maggior parte degli studenti. La lunghezza del testo non deve spaventare: abbiamo scelto di spendere molte parole perché crediamo che della fisica si debba insegnare sopra tutto il metodo e non tanto i contenuti, pure indispensabili. È importante capire il significato delle equazioni e il modo in cui si ricavano. Non è quindi il numero di pagine che suggerisce di limitare gli argomenti, ma il fatto che oggettivamente alcuni sono molto (troppo) difficili per molti studenti. Lasciarli però consente agli insegnanti di preparare gli argomenti da trattare in maniera più consapevole e completa, e agli studenti più bravi di approfondire da soli argomenti che altrimenti sarebbero rimasti troppo vaghi.

I capitoli possono contenere indicazioni sui prerequisiti. In generale tenderemo a ridurre al minimo i prerequisiti in modo che l'insegnante possa seguire un suo proprio percorso, senza essere costretto a seguire un ordine preciso. In questo testo per prerequisiti si intende la conoscenza di argomenti necessaria per comprendere il formalismo impiegato. La descrizione qualitativa di certi fenomeni non richiede conoscenze pregresse, perché si può sempre dare per nota. Ad esempio, nel caso del paragrafo sul , il fatto che le particelle cariche accelerate irradiano onde elettromagnetiche non è considerato un prerequisito, anche se il fenomeno viene citato. Se il fenomeno non è stato trattato, si può fornire que-

sta informazione agli studenti che possono acquisirla come vera anche se non la comprendono a fondo. In questo caso basta *fidarsi* dell'insegnante, rimandando la comprensione del fenomeno a un secondo momento.

Piano dell'opera

L'autore s'impegna, a fronte di un numero sufficiente di donazioni, ad ampliare i contenuti al maggior numero possibile di campi della fisica (inclusa la fisica classica che sarà trattata sempre con un approccio di tipo sperimentale). La sequenza con la quale nuovi moduli saranno resi disponibili non sarà necessariamente coerente con quella nella quale gli argomenti vengono usualmente presentati, né con quella che l'autore ritiene la migliore sequenza possibile. La sequenza sarà dettata per lo più dalle richieste di studenti e insegnanti che avranno apprezzato i moduli precedenti.

La teoria della Relatività Ristretta

PREREQUISITI: cinematica, dinamica elementare

Dopo gli esperimenti di **Michelson** e **Morley** non c'erano più scuse: per quanto possa sembrare strano la velocità della luce risulta essere indipendente dal moto relativo tra la sorgente e l'osservatore. Quest'osservazione sperimentale pone un serio problema filosofico. Secondo la *logica* comune, andando incontro a un raggio di luce ad altissima velocità, dovremmo vederlo arrivare verso di noi a una velocità pari alla somma tra la velocità del raggio di luce e la nostra; viceversa, se inseguissimo un raggio di luce alla sua stessa velocità dovremmo vederlo *fermo*! E se potessimo viaggiare a velocità più alte dovremmo riuscire addirittura a superarlo e a vederlo allontanarsi da noi in direzione opposta rispetto a quella nella quale si sta effettivamente muovendo rispetto alla sorgente considerata ferma! Eppure, secondo i risultati degli esperimenti non è così: se accendiamo una lampada vediamo la luce allontanarsi dalla lampada a una velocità di circa 300 000 km/s; se inseguissimo questa luce a bordo di un mezzo che si muove a velocità altissima, diciamo 299 000 km/s, non la vedremo allontanarsi da noi a 1000 km/s, ma sempre a 300 000 km/s. Sembra una cosa completamente assurda! Impossibile! Un controsenso!

In un testo teatrale di **Luigi Malerba** intitolato "Stazione zero"¹ qualcuno dice che "Con i controsensi qualche volta si risolvono problemi che non si possono risolvere con la logica".

Nel 1905 **Albert Einstein** risolse il problema apparentemente irrisolvibile logicamente con quello che

¹Tratto da "Ai poeti non si spara", di Luigi Malerba, ed. Manni.

appariva essere un vero e proprio controsenso, che tuttavia è tale solo a causa della nostra esperienza. L'Universo ha le sue Leggi, che naturalmente potrebbero essere di qualunque natura e non c'è nessun motivo di principio secondo il quale l'Universo debba funzionare come a noi sembrerebbe logico! Se a noi le Leggi dell'Universo appaiono illogiche non è un problema dell'Universo: è un problema nostro! La fisica è una scienza sperimentale: ha a che fare con ciò che si misura, che ci piaccia o no. Una volta stabilito **sperimentalmente** che la velocità della luce è indipendente dal sistema di riferimento nel quale si esegue la misura, non possiamo far altro che accettarne le conseguenze, anche se possono sembrare dei *controsensi*.

La teoria della relatività ristretta (o **relatività speciale**) riguarda i sistemi di riferimento in moto l'uno rispetto all'altro di moto rettilineo uniforme.

1.1 Le trasformazioni di Lorentz

Consideriamo una sorgente di luce puntiforme nell'origine di un sistema di riferimento in quiete. Se la luce si muove a velocità c , preso un punto di coordinate (x, y, z) , il tempo necessario alla luce per arrivarci sarà

$$t = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2}}. \quad (1.1)$$

Prendendo il quadrato di quest'equazione e moltiplicando tutto per c^2 si ottiene

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2. \quad (1.2)$$

Se osservassimo lo stesso fenomeno da un sistema di riferimento che si muove lungo l'asse x a velocità v rispetto al primo, secondo la relatività galileiana l'equazione si scriverebbe

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2, \quad (1.3)$$

dove

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (1.4)$$

e avremmo che

$$(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (1.5)$$

cioè che

$$x^2 + v^2 t^2 - 2xvt + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (1.6)$$

in aperto contrasto con quanto scritto nell'equazione (1.2). È ovvio perché: nella relatività galileiana è impossibile che la velocità di qualcosa sia la stessa se misurata in due sistemi di riferimento in moto l'uno rispetto all'altro. Se vogliamo che gli osservatori in un sistema di riferimento e nell'altro siano in accordo circa le misure che conducono è necessario che x , y , z e t si trasformino in maniera diversa passando dall'uno all'altro sistema. Osservando le due equazioni è chiaro che, nel caso in esame, né y né z subiscono alcuna trasformazione e quindi l'unica maniera di far tornare le equazioni consiste nel trasformare t e x in modo tale da cancellare i termini indesiderati nell'equazione. La trasformazione deve essere tale per cui, per velocità non confrontabili con quella della luce ($v \ll c$), la trasformazione di x deve tornare a essere quella galileiana perciò possiamo provare² a mantenerla ponendo

$$x' = x - vt \quad (1.7)$$

²Se fossimo abili matematici scriveremmo subito che la trasformazione giusta deve essere lineare perciò avremmo che $x' = \alpha(x - \beta t)$ e $t' = \gamma(t - \delta x)$, determinando α , β , γ e δ imponendo l'invarianza della velocità della luce.

e di conseguenza t si deve trasformare in modo simile e cioè come

$$t' = t - \alpha x. \quad (1.8)$$

La trasformazione che abbiamo appena ipotizzato non potrà essere giusta, ma è un primo tentativo per trovare il modo di scriverla correttamente. Sostituiamo nell'equazione (1.3), ricordando che $y' = y$ e $z' = z$, per ottenere

$$(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2 (t - \alpha x)^2. \quad (1.9)$$

Espandiamo i quadrati:

$$(x^2 + v^2 t^2 - 2vxt) + y^2 + z^2 = c^2 (t^2 + \alpha^2 x^2 - 2\alpha xt) \quad (1.10)$$

e raccogliamo i termini simili:

$$x^2 (1 - c^2 \alpha^2) + y^2 + z^2 = t^2 (c^2 - v^2) - 2xt (c^2 \alpha - v). \quad (1.11)$$

Se vogliamo che quest'equazione sia uguale a (1.2), sicuramente non deve esserci il termine proporzionale a xt e dobbiamo evidentemente imporre che

$$c^2 \alpha = v \quad (1.12)$$

e quindi che $\alpha = v/c^2$. Così facendo l'equazione diventa

$$x^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right). \quad (1.13)$$

A questo punto, perché il gioco sia fatto, è sufficiente che sia x che t si trasformino, passando da un sistema all'altro, in modo tale che i termini all'interno delle parentesi spariscano dall'ultima equazione scritta. Per questo dobbiamo fare in modo che le trasformazioni siano tali da contenere un fattore che cancella la parentesi $(1 - v^2/c^2)$, cioè dev'essere

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x - vt). \quad (1.14)$$

In questo modo, elevando al quadrato la coordinata x' compare un fattore a denominatore uguale a quello che compare nell'equazione (1.11), quindi questi due termini si semplificano e l'equazione assume la forma voluta. Una cosa analoga accade per t' . In definitiva le trasformazioni giuste sono

$$\begin{cases} x \rightarrow x' = \gamma(x - \beta ct) \\ t \rightarrow t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \end{cases} \quad (1.15)$$

dove γ e β sono, rispettivamente

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (1.16)$$

Osserviamo che per $v \ll c$, $\beta \simeq 0$ e $\gamma \simeq 1$ e le trasformazioni (1.15) si riducono a quelle di Galileo, perché v^2/c^2 risulta trascurabile rispetto a 1 e quindi $\gamma \simeq 1$. Inoltre $v/c^2 \simeq 0$ e quindi $t' \simeq t$.

Le trasformazioni (1.15) si chiamano **trasformazioni di Lorentz**, dal nome del fisico **Hendrik Lorentz** che aveva scoperto che queste stesse trasformazioni lasciavano invariate le **equazioni di Maxwell** passando da un sistema di riferimento inerziale assoluto (al tempo chiamato **etere**) a un qualunque sistema di riferimento in moto rettilineo uniforme rispetto a questo.

Le trasformazioni di Lorentz assumono una forma particolarmente simmetrica se si usano le **unità naturali**, cioè un sistema di unità di misura nel quale $c = 1$ ed è adimensionale. In questo sistema le velocità sono grandezze fisiche adimensionali e si misurano in frazioni della velocità della luce, mentre le lunghezze si misurano in velocità per tempo (ed essendo c adimensionale si misurano perciò in secondi)³. In questo sistema, infatti $\beta = v$ e

$$\begin{cases} x \rightarrow x' = \gamma(x - \beta t) \\ t \rightarrow t' = \gamma(t - \beta x) \end{cases}. \quad (1.17)$$

Usare le unità naturali semplifica enormemente i conti, perché si eliminano tutti i fattori c a numeratore e a denominatore, che rendono complicate le

³L'anno luce, comunemente usato in astrofisica, è una misura di lunghezza in queste unità: rappresenta la lunghezza del percorso fatto dalla luce in un anno.

formule. Una volta trovato il risultato, per ottenere i valori delle misure in unità SI basterà moltiplicarlo per un'opportuna potenza di c , tale da renderlo dimensionalmente corretto. Ad esempio, nel caso delle trasformazioni (1.17), per tornare a quelle espresse nel SI, basta osservare che l'equazione che dà x' deve avere le dimensioni di una lunghezza. Essendo γ adimensionale, l'espressione tra parentesi deve essere una lunghezza. x lo è, mentre βt ha le dimensioni di un tempo. L'unico modo di far avere a questo addendo le dimensioni giuste consiste nel moltiplicarlo per una velocità che è chiaramente c , per ottenere $x' = \gamma(x - \beta ct)$. Allo stesso modo, l'espressione che ci dà t' deve avere le dimensioni di un tempo. Tra parentesi c'è la differenza tra t , che ha le giuste dimensioni, e βx , che ha le dimensioni di una lunghezza. Per far avere a questo addendo le dimensioni di un tempo occorre dividerlo per una velocità e quindi l'espressione diventa $t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right)$. Nel resto di questo capitolo, ove non diversamente indicato, si usano le unità naturali per la derivazione delle relazioni tra le grandezze fisiche.

A differenza di Lorentz, Einstein aveva capito che non era necessario supporre l'esistenza di un etere con strane proprietà di trasformazione per spiegare il fatto sperimentale secondo il quale la luce si muove sempre alla stessa velocità, in qualunque sistema di riferimento. Secondo la visione di Einstein lo spazio e il tempo non sono concetti assoluti, come fino ad allora si era ritenuto, ma essendo essi stessi grandezze fisiche misurabili, erano concetti relativi: per eseguire una misura bisogna sempre confrontare una grandezza fisica con una ad essa omogenea. Spazio e tempo non fanno eccezione: se gli strumenti attraverso i quali li misuro cambiano passando da un sistema all'altro, la misura dello spazio e del tempo non è assoluta.

1.2 La dilatazione del tempo

Ma che vuol dire che il tempo non è assoluto? Il tempo, come abbiamo detto, è una grandezza fisica e pertanto occorre misurarla con un qualche strumento. Lo strumento con il quale si misura il tempo

FILMATO NON RIPRODUCIBILE SU QUESTO
SUPPORTO: DIGITA L'URL NELLA CAPTION O
SCARICA L'E-BOOK

Figura 1.1 Usando un orologio a luce si capisce bene che il tempo non può essere assoluto [<https://www.youtube.com/watch?v=g2eI0Wi2bVA>]

è l'orologio. Secondo la teoria di Einstein, detta della **relatività**, la durata di un secondo non è la stessa per tutti gli osservatori: quando per un osservatore fermo sono passati τ secondi, per un osservatore che si muove a velocità v rispetto a questo ne sono passati, usando lo stesso orologio

$$t = \gamma\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\tau. \quad (1.18)$$

Nello scrivere questo tempo abbiamo semplicemente usato la trasformazione di Lorentz ponendo $x = 0$ (dal momento che possiamo scegliere sempre di mettere l'orologio nell'origine del sistema di riferimento dell'osservatore fermo).

Si vede subito che, per $v \ll c$ il fattore di Lorentz $\gamma \simeq 1$ e, come ci aspettiamo, il tempo appare quasi assoluto. Se però la velocità dell'osservatore diventa ragguardevole si possono verificare strani fenomeni (strani, naturalmente, per quel che è la nostra esperienza quotidiana).

Il tempo τ misurato con un orologio fermo nello stesso sistema di riferimento in cui si esegue la misura di un qualche fenomeno fisico si chiama **tempo proprio**.

Qui bisogna fare attenzione a non commettere errori grossolani: se due osservatori sono in moto relativo rettilineo e uniforme l'uno rispetto all'altro, per ciascuno di essi il tempo scorre esattamente come ci si aspetta che scorra. Se però un osservatore misura il tempo con un orologio che si trova a bordo dell'altro sistema vede una discrepanza rispetto a quel che misura con il proprio orologio! È evidente che, dal momento che il moto è relativo, l'osservatore in moto rispetto al primo vedrà l'orologio del primo muoversi rispetto a lui a velocità v e ne concluderà

che quell'orologio va indietro rispetto a quello che porta con sé. In maniera del tutto analoga, l'osservatore fermo, osservando l'orologio che porta con sé l'osservatore in moto, lo vedrà rallentare rispetto al suo. Entrambi gli osservatori trarranno le stesse conclusioni, senza ambiguità. Osserviamo anche che la distinzione tra osservatore fermo e in moto è del tutto arbitraria: non c'è modo di stabilire chi si stia muovendo e chi sta fermo!

Ci si potrebbe chiedere se l'effetto è reale o apparente, ma a dir la verità anche questa domanda appare mal formulata: la fisica è una scienza sperimentale ed è reale quel che si misura. Se attraverso le misure trovo che il tempo scorre in maniera diversa secondo il sistema di riferimento nel quale faccio la misura, ne devo concludere che è così. Punto!

Esercizio 1.1 *Il tempo in orbita*

I satelliti della costellazione GPS orbitano attorno alla Terra, a una quota di 20 000 km, muovendosi a una velocità media di circa 4 km/s. Calcola la durata di un secondo, di un giorno, di un mese e di un anno a bordo del satellite, se il tempo è misurato con un orologio fermo a Terra [3].

SOLUZIONE →

In ogni caso l'effetto è molto più *reale*⁴ di quanto si pensi. Il nostro pianeta è oggetto di una continua pioggia di particelle che provengono dallo spazio, i così detti **raggi cosmici**. Queste particelle, urtando gli atomi degli strati più alti dell'atmosfera, a una quota di circa 10 km, ne producono altre chiamate **muoni**. I muoni sono particelle instabili, che *decadono*, cioè si trasformano spontaneamente, in un elettrone e due **neutrini** mediamente in circa 2 μs . Se i muoni si muovessero alla velocità della luce, in 2 μs percorrerebbero circa $2 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^8 = 600$ m.

⁴Riflettete sul significato di questa parola: per la fisica è reale ciò che si misura. Non ha senso chiedersi se effettivamente il tempo scorra più lentamente oppure se si tratti di una limitazione della nostra capacità di misurarlo. Quel che si misura è. E del resto il caso del decadimento del muone dimostra che la domanda è praticamente priva di senso.

FILMATO NON RIPRODUCIBILE SU QUESTO SUPPORTO: DIGITA L'URL NELLA CAPTION O SCARICA L'E-BOOK

Figura 1.2 I navigatori GPS funzionano grazie alla teoria della relatività. In questo filmato se ne spiegano i principi di funzionamento. Risolvete l'esercizio 1.1 per valutare l'effetto della dilatazione dei tempi su questo sistema di navigazione [<https://www.youtube.com/watch?v=8hFhKDxfyHQ>].

In realtà si osservano numerosissimi muoni a livello del mare (un centinaio per metro quadro al secondo), quindi questi devono poter aver viaggiato per oltre 10 km. La teoria della relatività spiega questa apparente stranezza: nel sistema di riferimento del muone, nel quale è fermo, il tempo scorre in maniera tale che mediamente, trascorsi $2 \mu\text{s}$, buona parte dei muoni decadono. Ma quando noi osserviamo i muoni provenire dallo spazio, li vediamo muoversi a velocità molto vicine a quella della luce, per cui, per noi che siamo a terra, il tempo a bordo del muone scorre molto più lentamente. Occorrono $\gamma\tau$ secondi misurati a terra per far decadere i muoni e se γ è abbastanza grande questo tempo si può dilatare a dismisura. Questo fenomeno si osserva quotidianamente nei laboratori di fisica, agli acceleratori di particelle. E anche se non si vede direttamente, il fenomeno è ormai ben presente nella nostra vita quotidiana. I sistemi di navigazione GPS funzionano grazie a una costellazione di satelliti a bordo dei quali ci sono orologi atomici molto precisi. Se non si tenesse conto degli effetti della relatività nella marcia di questi orologi i sistemi di navigazione sarebbero del tutto inutili perché fornirebbero la posizione dell'utente con un errore crescente nel tempo, che può arrivare anche a diversi km!

1.3 Contrazione della lunghezza

Contestualmente al tempo, secondo la teoria della relatività, si modificano anche le proprietà dello spazio. In particolare, consideriamo una riga lunga ℓ in un sistema di riferimento fermo (ricordiamo però che si tratta di una convenzione, non potendo affatto stabilire se il sistema sia davvero fermo o si stia muovendo di moto rettilineo uniforme rispetto a un altro) orientata lungo l'asse x in modo tale che l'estremo sinistro sia nell'origine del sistema di riferimento e l'altro nel punto di coordinate $(\ell, 0, 0)$. Osservando questa stessa riga da un altro sistema di riferimento, in moto con velocità v rispetto al primo lungo l'asse x , la coordinata dell'estremo sinistro diventa

$$x'_L = -\gamma\beta t \quad (1.19)$$

mentre la coordinata dell'estremo destro diventa

$$x'_R = \gamma(\ell - \beta t) . \quad (1.20)$$

La lunghezza della riga per l'osservatore in moto è dunque $x'_R - x'_L$ che vale

$$x'_R - x'_L = \ell' = \gamma(\ell - \beta t + \beta t) = \gamma\ell \quad (1.21)$$

L'osservatore in moto dunque leggerà il numero ℓ sulla riga a una distanza pari a

$$\ell = \frac{\ell'}{\gamma} \quad (1.22)$$

ed essendo sempre $\gamma \geq 1$ vedrà la riga contrarsi di un fattore γ rispetto al suo sistema di unità di misura.

Il lungo percorso fatto dai muoni visti nel Paragrafo 1.2 prima di decadere si può spiegare anche alla luce di questo fenomeno. Il muone in volo, infatti, nel suo sistema di riferimento, vede la Terra corrergli incontro a grandissima velocità. La distanza tra il muone e la Terra dunque appare al muone contratta di un fattore γ per cui nel suo sistema di

riferimento questa particella non percorre molto più dei 600 m previsti.

Dalle trasformazioni di Lorentz è anche evidente che le dimensioni trasversali degli oggetti (le lunghezze, cioè, misurate lungo direzioni ortogonali a quella nella quale si stanno muovendo l'uno rispetto all'altro i sistemi di riferimento) non cambiano quando si passa da un sistema all'altro.

Esercizio 1.2 *Il viaggio d'un muone*

In seguito alle interazioni dei **raggi cosmici** primari con i nuclei dei gas dell'atmosfera, a circa 10km di quota, si produce un muone che viaggia verso terra a una velocità pari al 99.5 % di quella della luce. Quanto dovrà percorrere il muone prima di urtare la Terra, secondo il suo metro?

SOLUZIONE →

1.4 Composizione delle velocità

Dal momento che secondo la teoria della relatività ristretta le trasformazioni di Galileo non sono più valide, occorre trovare nuove trasformazioni per calcolare la velocità di un oggetto come vista da un sistema di riferimento in moto rispetto a un altro.

Farlo non è difficile: basta osservare che la velocità è data dal rapporto $u = \Delta x / \Delta t$ tra lo spazio percorso Δx e il tempo impiegato a percorrerlo Δt . Trasformando con Lorentz queste due quantità otteniamo, assumendo sempre che l'asse x sia orientato nella direzione del moto relativo tra i due sistemi, che

$$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - \beta \Delta t}{\Delta t - \beta \Delta x}. \quad (1.23)$$

Dividendo l'ultimo membro per Δt si ottiene

$$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - \beta}{1 - \beta \frac{\Delta x}{\Delta t}}. \quad (1.24)$$

Il paradosso dei gemelli

Uno dei più noti apparenti paradossi della fisica relativistica è quello detto *dei gemelli*. Ammettiamo che in un lontano futuro sia possibile costruire un'astronave superveloce a disposizione di due gemelli: Ulisse e Telemaco. Ulisse sale a bordo dell'astronave e intraprende un viaggio che, per lui, dura circa dieci anni. Al ritorno sulla Terra i due gemelli non sarebbero più tali perché, secondo la teoria della relatività, Telemaco da Terra vede scorrere il tempo del fratello molto più lentamente del suo. Quindi Ulisse invecchia più lentamente di Telemaco e torna a casa più giovane.

Il paradosso sta nel fatto che lo stesso discorso si potrebbe applicare a Ulisse, il quale nel suo sistema di riferimento vede il tempo scorrere come se fosse a Terra e quindi invecchia normalmente, ma dovrebbe vedere Telemaco sfrecciare a velocità elevatissime e quindi dovrebbe vedere il suo tempo rallentare. È quindi Telemaco a risultare più giovane, per Ulisse.

In realtà il paradosso così com'è non si può formulare perché la teoria della relatività ristretta si applica solo ai sistemi di riferimento inerziali, che si devono muovere di moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro. Se Ulisse a un certo punto torna indietro, il suo moto non può essere rettilineo uniforme (per non parlare delle fasi di arrivo e partenza), quindi in questo caso la relatività ristretta non vale. Vale però la **relatività generale** secondo la quale comunque avviene che Ulisse invecchia meno rapidamente di Telemaco.

e quindi

$$u' = \frac{u - \beta}{1 - \beta u}. \quad (1.25)$$

Osserviamo anzitutto che l'espressione risulta essere adimensionale, come deve, dal momento che in unità naturali le velocità non hanno dimensioni e si misurano in frazioni di velocità della luce. Dove si legge u , dunque, si deve sempre intendere *misurato*

in unità di c e quindi numericamente pari a u/c . In questo caso è utile riscrivere l'espressione in unità SI. Il passaggio a unità SI è quanto mai semplice: basta moltiplicare il tutto per una velocità, che non può che essere c . L'espressione in unità SI è dunque, ricordando che per u dobbiamo intendere u/c ,

$$u' = \frac{\frac{u}{c} - \beta}{1 - \beta \frac{u}{c}} c = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}, \quad (1.26)$$

che è l'espressione che si trova comunemente scritta sui libri (ricordiamo che $\beta = v/c$). Quest'espressione, sebbene un po' più complessa, è sempre facile da ricordare, perché a numeratore c'è la differenza tra le velocità del punto materiale e del sistema di riferimento dal quale lo si guarda, come nella relatività galileiana, che deve essere corretta relativisticamente applicando un fattore che nel limite $v \ll c$ diventa pari a 1, che è quello a denominatore. Questo fattore deve essere adimensionale e deve dipendere da u e da v che, per natura, sono vettori. Un modo per costruire una grandezza scalare usando due vettori è farne il prodotto scalare $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = uv$ nel caso in esame perché \mathbf{u} e \mathbf{v} sono tra loro paralleli. Questo prodotto ha le dimensioni di una velocità al quadrato e per renderlo adimensionale si può dividerlo per c^2 .

Per $v \ll c$ il rapporto uv/c^2 è piccolo e trascurabile rispetto a 1 e riotteniamo la trasformazione di Galileo. Per $v \simeq c$, $u' \simeq -c$. La velocità di qualunque cosa vista da un sistema di riferimento che si muove alla velocità della luce è sempre pari alla velocità della luce. Inoltre, se $u = c$, la velocità $u' = c$ per ogni valore di v (come ci aspettiamo dal momento che tutto deriva dalla solita osservazione sperimentale secondo la quale la velocità della luce è indipendente dal sistema di riferimento nel quale la si misura). Esiste dunque un limite alla velocità con la quale si possono muovere gli oggetti: nessuno potrà mai misurare una velocità superiore a quella della luce. Il risultato può apparire quanto meno sorprendente, ma per quanto strano possa sembrarci è un fatto sperimentale che, fin quando non verrà smentito con altre osservazioni, resta valido e dobbiamo metterci l'anima in pace. Del resto, che qualcosa si possa muovere a qualunque velocità,

in fondo, non è che un pregiudizio: nessuno ci è mai riuscito.

Un'altra osservazione utile è la seguente: supponiamo di non conoscere affatto le trasformazioni di Lorentz, ma di sapere che le velocità si trasformano in modo tale che, per v piccole, valgono le leggi di trasformazione di Galileo, mentre per v grandi le velocità devono tendere a quella della luce. Possiamo sempre scrivere che

$$u' = A(u - v) \quad (1.27)$$

dove A è un numero che dipende da u e da v e che deve tendere a 1 quando v è piccolo. Possiamo dunque scrivere $A = 1 + B$ con $B = f(u, v)$, tale che per v che tende a zero, $f(u, v) \simeq 0$. A questo punto possiamo ripetere il ragionamento fatto sopra: u e v sono per natura dei vettori, mentre B è uno scalare. Un modo di costruire uno scalare con due vettori è farne il prodotto scalare: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = uv$ nel caso specifico. Il prodotto uv non è adimensionale come deve essere B , quindi dobbiamo dividerlo per una velocità assoluta al quadrato: c^2 . Otteniamo

$$u' = \left(1 + \frac{uv}{c^2}\right) (u - v) \quad (1.28)$$

che è solo apparentemente diversa dalla relazione esatta ricavata sopra. Infatti, come si vede nell'Appendice al paragrafo sull'[approssimazione di funzioni](#), l'espressione $1/(1 - x)$ si può approssimare, per x piccolo, a $1 + x$ (vedi eq. (14.55)). Si vede subito che

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \simeq \left(1 + \frac{uv}{c^2}\right) (u - v). \quad (1.29)$$

Come si vede si può ricavare un risultato abbastanza vicino a quello corretto semplicemente usando argomenti dimensionali e un po' di matematica.

1.5 I quadrivettori

La maniera in cui si descrivono lo spazio e il tempo suggerisce che la descrizione classica secondo la quale lo stato di un punto materiale è determinato

da posizione e velocità non è corretta, ma è un'approssimazione della descrizione corretta nel limite di basse velocità.

Lo stato di un oggetto non si può rappresentare con posizione e velocità, che sono due vettori nello spazio a tre dimensioni, perché le posizioni e le velocità non sono assolute, ma dipendono dall'osservatore. La grandezza fisica $s^2 = t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$ ⁵, al contrario, è assoluta: assume lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento. Questa grandezza quindi si chiama **invariante di Lorentz**.

Un punto materiale che si trova al tempo t alle coordinate (x, y, z) in un sistema di riferimento, in un altro sistema di riferimento che si muove rispetto al primo di moto rettilineo uniforme parallelamente all'asse x , avrebbe coordinate $(x', y', z') = (\gamma(x - \beta t), y, z)$ all'istante $t' = \gamma(t - \beta x)$. La quantità s^2 , espressa nel sistema di riferimento in moto, è

$$s'^2 = t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = \gamma^2 (t - \beta x)^2 - (\gamma^2 (x - \beta t)^2 + y^2 + z^2). \quad (1.30)$$

Svolgendo i quadrati l'espressione sopra scritta diventa

$$s'^2 = \gamma^2 (t^2 + \beta^2 x^2 - 2\beta xt) - \gamma^2 (x^2 + \beta^2 t^2 - 2\beta xt) - y^2 - z^2. \quad (1.31)$$

e, al solito, raccogliendo i termini comuni abbiamo

$$s'^2 = t^2 \gamma^2 (1 - \beta^2) - x^2 \gamma^2 (1 - \beta^2) - y^2 - z^2. \quad (1.32)$$

I termini misti proporzionali a xt si elidono a vicenda. Ora osserviamo che $\gamma^2 = (1 - \beta^2)^{-1}$ e i coefficienti di x^2 e di $2t^2$ valgono quindi entrambi 1. Perciò $s'^2 = s^2$. Si dice che s^2 è un **invariante relativistico** perché il suo valore non cambia passando da un sistema di riferimento a un altro.

Possiamo pensare a s^2 come al prodotto scalare di un vettore per sé stesso, se costruiamo dei vettori

⁵L'espressione di s^2 in unità SI è $s^2 = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$

a quattro dimensioni con le posizioni e gli istanti di tempo in questo modo:

$$\mathbf{s} = (t, ix, iy, iz) \quad (1.33)$$

dove $i = \sqrt{-1}$ è l'unità immaginaria. In questo modo, prendendo il prodotto scalare $\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}$, che si ottiene sommando i prodotti delle coordinate omologhe, otteniamo proprio il valore di s^2 .

Possiamo dunque pensare a \mathbf{s} come a dei vettori in uno spazio quadridimensionale in cui le trasformazioni di Lorentz eseguono delle rotazioni⁶ di questi **quadrivettori**. La prima componente di questo quadrivettore è il tempo (moltiplicato per c se si scrive in unità SI), mentre le restanti coordinate sono quelle spaziali moltiplicate per l'unità immaginaria. Possiamo anche eliminare quest'ulteriore complicazione ridefinendo l'operazione di prodotto scalare in questo spazio particolare (detto **spazio di Minkowski**)⁷: basta ricordare che le componenti spaziali e quelle temporali vanno sommate col segno opposto (quale segno di fatto è irrilevante, tanto cambierebbe solo il segno dell'invariante, che tuttavia continuerebbe a restare costante).

In fisica relativistica, dunque, i concetti di **posizione** e di **velocità** di un punto perdono parte del loro significato, giacché la posizione e la velocità di un punto materiale sono qualcosa di relativo: dipendono dall'osservatore e dal tempo. Queste due nozioni sono sostituite dalla nozione di **evento**, che si caratterizza fornendo sia la posizione sia il tempo al quale la posizione del punto è stata raggiunta per un determinato osservatore.

1.6 Il quadrivettore energia-impulso

Possiamo definire altri quadrivettori a partire dal quadrivettore posizione che definisce un evento. Come nel caso dei comuni vettori, un quadrivettore moltiplicato scalarmente per un altro quadri-

⁶Le rotazioni di un vettore ne cambiano le coordinate, ma non il modulo.

⁷Dal nome del matematico **Hermann Minkowski**.

vettore dà uno scalare (che è quindi un invariante per trasformazioni di Lorentz), mentre un quadrivettore moltiplicato per uno scalare è ancora un quadrivettore.

In fisica classica si definisce la quantità di moto come il prodotto $\mathbf{p} = m_0 \mathbf{u}$ della massa m_0 di un punto materiale per la sua velocità \mathbf{u} . Per misurare una velocità dobbiamo prendere uno spostamento e dividerlo per un tempo. Consideriamo un punto materiale che al tempo t_1 del nostro orologio si trova in $\mathbf{r}_1 = (x_1, x_2, x_3)$. Per questo punto materiale possiamo definire il quadrivettore $\underline{r}_1 = (ct_1, x_1, y_1, z_1)$ ⁸ (in questo caso stiamo usando le unità SI, perché questo ci aiuterà nel dare la corretta interpretazione ai risultati). Se il punto si trova in $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ al tempo t_2 possiamo definire un secondo quadrivettore $\underline{r}_2 = (ct_2, x_2, y_2, z_2)$. La differenza tra due quadrivettori è ancora un quadrivettore:

$$\underline{\Delta r} = (c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z) \quad (1.34)$$

dove $\Delta t = t_2 - t_1$ e $\Delta x = x_2 - x_1$ (e analogamente per le altre coordinate). Potremmo chiamare questo quadrivettore **spostamento**. Si sarebbe a questo punto tentati di dividere tutto per Δt per ottenere un quadrivettore che rappresenti la velocità, ma Δt non è uno scalare nello spazio di Minkowski, perché non è invariante per trasformazioni di Lorentz. Per trovare uno scalare che abbia le dimensioni di un tempo dobbiamo ricorrere al tempo proprio, che è ben definito ed è sempre lo stesso in ogni sistema di riferimento. Il tempo proprio in questo caso è il tempo misurato con un orologio che si muove insieme al punto materiale di cui si sta misurando la posizione. Dividendo il quadrivettore spostamento per lo scalare $\Delta\tau$ e ricordando che $t = \gamma\tau$, otteniamo un ulteriore quadrivettore che potremmo chiamare quadrivelocità:

$$\underline{v} = \frac{\underline{\Delta r}}{\Delta\tau} = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta\tau}, \frac{\Delta x}{\Delta\tau}, \frac{\Delta y}{\Delta\tau}, \frac{\Delta z}{\Delta\tau} \right) = \gamma (c, u_x, u_y, u_z) \quad (1.35)$$

⁸Indichiamo con una barra sotto i quadrivettori e con il grassetto i vettori tridimensionali.

con $u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\gamma\Delta\tau}$ la componente x della velocità tridimensionale (e analogamente per u_y e u_z). Osserviamo che $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ è il fattore di Lorentz ottenuto prendendo come $\beta = u/c$ la velocità della particella in unità di c , perché stiamo scrivendo le grandezze trasformando il tempo misurato nel sistema di riferimento del laboratorio al sistema di riferimento in cui la particella di cui si sta misurando la velocità è ferma. Moltiplicando tutto per la massa m_0 del punto materiale che si è spostato nel tempo Δt da \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 costruiamo il quadrivettore

$$\underline{p} = m_0 \underline{v} = \gamma (m_0 c, m_0 u_x, m_0 u_y, m_0 u_z) = \gamma m_0 (c, \mathbf{u}) . \quad (1.36)$$

Per come è stata costruita, la componente spaziale di questo quadrivettore dovrebbe rappresentare la quantità di moto⁹ della particella. Vediamo invece che risulta essere pari a $\gamma m_0 \mathbf{u}$. C'è un fattore γ di troppo. Questo non è strano: in effetti la quantità di moto dovrebbe essere una grandezza conservata in assenza di forze esterne, ma se si applicano le trasformazioni di Lorentz potrebbe accadere che la quantità di moto totale di un certo numero di particelle sia conservata in certi sistemi di riferimento e non in altri. La teoria della relatività suggerisce che non sia $m_0 \mathbf{u}$ a restare costante nel tempo in assenza di forze, ma \underline{p} . Per velocità basse $\gamma \simeq 1$ e si ottiene per la componente spaziale l'usuale definizione di quantità di moto. Ma quando γ diventa grande la quantità di moto si deve sostituire con $\gamma m_0 \mathbf{u}$ che può anche diventare infinita. È **come se** (e sottolineiamo **come se**) la massa della particella m_0 aumentasse di un fattore γ diventando $m = \gamma m_0$.

Va detto che la massa di una particella è costante anche in relatività. L'affermazione secondo la quale la massa aumenterebbe all'aumentare della velocità è di per sé falsa, anche se in certi casi pensare in questi termini **funziona!** In effetti funziona nei casi in

⁹La quantità di moto di una particella si può chiamare anche *impulso*, anche se questo termine non è del tutto esatto; si riferisce infatti non alla quantità di moto della particella, ma all'integrale nel tempo delle forze agenti sulla particella che numericamente è uguale alla quantità di moto, ma concettualmente è qualcosa di diverso.

cui ci si ostina a interpretare i fenomeni alla luce dei risultati della fisica classica. Per accelerare una particella e farne variare la quantità di moto, secondo la meccanica classica occorre una forza (per la Legge di Newton $\mathbf{F} = \Delta\mathbf{p}/\Delta t$, quindi $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{F}\Delta t$). Man mano che la particella accelera e cambia la sua velocità, se al crescere della velocità la massa crescesse, la forza necessaria per far aumentare anche solo di pochissimo la sua velocità diventerebbe sempre più alta (in questo schema possiamo riscrivere la Legge di Newton come $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$, con m variabile) e così alla fine non si riesce mai a raggiungere la velocità limite della luce. Infatti, secondo questa interpretazione, la grandezza m (che è il rapporto tra la forza e l'accelerazione di un punto materiale, quindi una grandezza fisica **diversa** da quella che si misura con una bilancia) può diventare infinita e, sempre secondo la fisica classica, nessuna forza potrà mai modificarne la velocità. Il fatto è che quando si applica una forza a una particella, accelerandola, non se ne modifica la velocità, come in meccanica classica, ma l'energia! Consigliamo dunque di non assumere mai questa interpretazione e ne parliamo perché si trova su molti libri e su molte pubblicazioni.

Esercizio 1.3 *Elettroni accelerati*

Un fascio di N elettroni è accelerato da una differenza di potenziale di 100 000 V per poi, dopo aver percorso 150 m, andare a collidere con un calorimetro con 2 ℓ d'acqua la cui temperatura s'innalza di 10^{-4} °C. Calcola quanti elettroni sono presenti nel fascio e trova il tempo impiegato a percorrere la distanza che li separa dal calorimetro, una volta usciti dall'acceleratore.

SOLUZIONE →

Uno dei casi in cui l'interpretazione sembra funzionare è quello del calcolo del **raggio di curvatura** di una particella carica in campo magnetico. Il raggio di curvatura aumenta di un fattore γ rispetto a quanto previsto dalla **Forza di Lorentz** e questo potrebbe far pensare al fatto che in effetti la massa aumenta. Va detto che il calcolo della forza di Lorentz

in questi casi non è così banale come può sembrare perché la particella carica non si muove affatto di moto rettilineo uniforme rispetto a noi fermi nel laboratorio. Tuttavia se si esegue il calcolo corretto si trova il risultato dell'equazione (5.1). In realtà la questione si può reinterpretare in altri termini: il raggio di curvatura R determina la lunghezza della traiettoria $L = 2\pi R$. Se R è abbastanza grande il moto si può considerare approssimativamente rettilineo e la lunghezza *vista* dalla particella carica è contratta di un fattore γ rispetto a quella misurata da chi si trova fermo nel laboratorio. Poiché la particella carica, nel suo sistema di riferimento, vede una lunghezza pari a quella prevista dalla formula classica di Lorentz, noi, nel laboratorio, la vediamo più lunga di un fattore γ . Di conseguenza il raggio di curvatura aumenta dello stesso fattore.

Come si vede più sotto, l'energia di una particella dipende dalla sua quantità di moto e dalla sua massa. La massa di una particella è un invariante relativistico dato, a meno di una costante c^2 , dalla radice del modulo quadro del quadrimpulso (eq. (1.42)). La massa effettiva misurata classicamente no: questa cresce con la velocità della particella di un fattore γ per dare una *massa classica* $m = \gamma m_0$ dove m_0 , detta **massa a riposo** della particella, è la massa della particella misurata in un sistema di riferimento in cui è ferma.

Come dobbiamo interpretare, invece, la parte temporale di questo quadrivettore, che vale $\gamma m_0 c$? Per capire di che si tratta è utile riscriverlo nell'approssimazione classica, cioè per $v \ll c$. In questo caso

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}\beta^2 \quad (1.37)$$

come si evince dal Paragrafo **approssimazione di funzioni** dell'Appendice, equazione (14.37). La quantità $\gamma m_0 c$ in approssimazione non relativistica diventa quindi

$$\gamma m_0 c \simeq \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right) m_0 c = m_0 c + m_0 \frac{u^2}{2c} \quad (1.38)$$

che moltiplicata per c dà

$$E = \gamma m_0 c^2 \simeq m_0 c^2 + m_0 \frac{u^2}{2}. \quad (1.39)$$

Il secondo addendo è l'energia cinetica della particella. Evidentemente anche il primo addendo ha le dimensioni di un'energia. Dobbiamo quindi interpretare la componente temporale di questo quadrivettore, come l'energia della particella divisa per la costante c . Ma una particella ferma in assenza di forze non possiede energia, mentre in questo caso avremmo che l'energia di una particella in quiete non è nulla, ma vale $m_0 c^2$. Questa grandezza, detta **energia a riposo** della particella, rappresenta dunque l'energia posseduta da una particella ferma per il solo fatto di avere una massa m_0 .

In altre parole potremmo concluderne che la massa di una particella non è altro che un'altra forma di energia, dal momento che contribuisce a quest'ultima per una quantità proporzionale a essa. Possiamo quindi definire

$$\underline{P} = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) \quad (1.40)$$

come il quadrivettore **energia-impulso** o **quadrivettore impulso** che ha la componente temporale pari all'energia della particella misurata in unità di c e quella spaziale pari alla sua quantità di moto (ricordando di usare, per questa, la massa relativistica $m = \gamma m_0$).

Ricaviamo alcune relazioni utili da questo quadrivettore: innanzi tutto conoscendo l'energia totale $E = \gamma m_0 c^2$ di una particella e la sua massa, se ne può ricavare il fattore di Lorentz $\gamma = E/m_0 c^2$ (che in unità naturali diventa $\gamma = E/m_0$). Calcoliamo quindi il modulo quadro del quadrivettore:

$$P^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{\gamma^2 m_0^2 c^4}{c^2} - \gamma^2 m_0^2 \beta^2 c^2 = \gamma^2 m_0^2 c^2 (1 - \beta^2). \quad (1.41)$$

Osservando che $\gamma^2 = (1 - \beta^2)^{-1}$ si ottiene che

$$P^2 = m_0^2 c^2 \quad (1.42)$$

cioè che il modulo quadro del quadrivettore è una costante pari alla massa a riposo della particella moltiplicata per c (in unità naturali è proprio uguale

alla massa della particella). Si tratta di una relazione molto utile che permette di calcolare lo stato di una particella dopo aver interagito con altre particelle, perché si può imporre che il quadrivettore totale si conservi e che il suo modulo quadro sia uguale alla massa quadra delle particelle corrispondenti (che è invariante e quindi non dipende dal sistema di riferimento in cui si eseguono le misure).

Esercizio 1.4 *Le dimensioni di LHC*

I protoni in LHC con un'energia di 7 TeV sono mantenuti nella loro traiettoria da un campo magnetico uniforme di 8.4 T, perpendicolare alla loro velocità. Calcola la lunghezza dell'acceleratore.

SOLUZIONE →

Osserviamo infine che il rapporto p/E tra il modulo della quantità di moto e l'energia totale della particella vale

$$\frac{p}{E} = \frac{\gamma m_0 \beta c}{\gamma m_0 c^2} = \frac{\beta}{c} \quad (1.43)$$

che in unità naturali si riscrive come $p/E = \beta$. È anche utile osservare che, in unità naturali, l'energia ha le stesse dimensioni fisiche della quantità di moto (le componenti di un quadrivettore devono sempre avere le stesse dimensioni fisiche) e che anche la massa ha le stesse dimensioni fisiche dell'energia. Le masse perciò si possono misurare in unità di energia e per trovare il loro valore in unità SI basta dividerne il valore espresso in unità di energia per c^2 . Ad esempio la massa di un protone in unità naturali vale circa 1 GeV. Ricordiamo che $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$, quindi nel SI la massa del protone vale

$$m_p \simeq 1 \times 10^9 \times 1.6 \times 10^{-19} \simeq 1.6 \times 10^{-10} \text{ J}. \quad (1.44)$$

Dividendo per $c^2 = 9 \times 10^{16} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ si ottiene il valore della massa in kg: $m_p \simeq 1.6 \times 10^{-10} / (9 \times 10^{16}) \simeq 1.8 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

La relazione relativistica secondo cui $E^2 - p^2 = m^2$ in unità naturali (in unità SI la stessa relazione

diventa $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$) ha un'interessante conseguenza: se $m = 0$, $E = pc$ e quindi $p/E = \beta = 1$: la particella si muove alla velocità della luce.

Quest'osservazione permette di affermare che, qualora la luce si possa considerare un flusso di particelle, queste devono avere massa nulla.

Energia dalle stelle

Da dove proviene l'energia che emanano le Stelle, che giunge fino a noi sotto forma di luce e calore? In effetti la risposta sta nella fisica relativistica. Nella parte più interna delle stelle, a causa delle alte pressioni provocate dalla forza gravitazionale, singoli protoni si avvicinano abbastanza da fondere in nuclei di elio combinandosi con neutroni, a loro volta derivanti dalla trasformazione di protoni in neutroni, elettroni e neutrini. La massa di un protone in unità di massa atomica (l'unità corrisponde a 1/12 della massa del nucleo di ^{12}C) è 1.008, mentre quella di un nucleo di elio è di 4.002602. Partendo da quattro protoni, la cui massa totale è $4 \times 1.008 = 4.032$, si finisce con un nucleo di elio di massa più bassa con una differenza di poco meno di 0.030. Questa differenza di massa è dissipata sotto forma di energia (cinetica dei prodotti delle reazioni e dei fotoni emessi nel corso del processo). Ogni quattro protoni che fondono dunque il Sole produce circa 30 MeV di energia (un'unità di massa atomica corrisponde circa alla massa di un protone che pesa approssimativamente 1 GeV in unità naturali).

1.7 Acceleratori e collider

Dal momento che l'energia e la massa sono di fatto la stessa cosa possiamo pensare di produrre energia consumando massa o viceversa. La produzione di energia a spese della massa è il meccanismo che tiene accese le stelle (vedi box) e le centrali nucleari nelle quali i nuclei di uranio sono spezzati in parti più piccole la cui somma delle masse è inferiore a quella del nucleo originario.

Per creare massa dall'energia si può far urtare una particella di energia abbastanza elevata su un bersaglio: l'energia della collisione è disponibile per la produzione di particelle. Per capire quanta energia serve usiamo le proprietà dei quadrivettori, considerando dapprima il caso di una particella con massa m , di energia E e quantità di moto \mathbf{p} che urta contro un bersaglio costituito di particelle dello stesso tipo (ad esempio, un fascio di protoni contro un bersaglio di carbonio, a sua volta costituito di protoni). Il quadrimpulso totale di questo sistema è

$$(E, \mathbf{p}) + (m, \mathbf{0}) = (E + m, \mathbf{p}) . \quad (1.45)$$

Il modulo quadro di questo quadrivettore è

$$s^2 = E^2 + m^2 + 2Em - p^2 \quad (1.46)$$

ma $E^2 - p^2 = m^2$ e quindi

$$s^2 = 2m(E + m) . \quad (1.47)$$

Se nell'urto si potesse produrre una particella di massa M questa avrebbe una massa pari a $\sqrt{s^2}$, perché il suo quadrimpulso sarebbe, per la conservazione di quest'ultimo, pari alla somma dei quadrimpulsi delle particelle iniziali. Dunque per produrre particelle di massa M occorrono fasci di protoni di energia pari a

$$E = \frac{M^2}{2m} - m . \quad (1.48)$$

Possiamo anche dire che l'energia disponibile per la produzione di massa cresce come la radice dell'energia del fascio. Se volessimo produrre un **bosone di Higgs** usando fasci di protoni, sapendo che $m \simeq 1$ GeV e $M \simeq 125$ GeV abbiamo

$$E \simeq \frac{125^2}{2} - 1 \simeq 7800 \text{ GeV} . \quad (1.49)$$

È una quantità d'energia enorme (trasformatela in Joule per rendervene conto). Se invece volessimo produrre questa stessa particella usando fasci di uguale energia che collidono l'uno contro l'altro il quadrimpulso totale sarebbe

$$(E, \mathbf{p}) + (E, -\mathbf{p}) = (2E, \mathbf{0}) . \quad (1.50)$$

In questo caso l'energia disponibile per produrre una particella è

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4E^2} = 2E, \quad (1.51)$$

cioè la semplice somma delle energie delle particelle collidenti. Per produrre un bosone di Higgs dunque basterebbero due protoni di energia pari a $125/2 = 62.5$ GeV. Molto meno di prima!¹⁰

È per questo che si costruiscono gli acceleratori circolari **collisori** o **collider**: l'energia disponibile per produrre nuove particelle infatti cresce linearmente con la massa delle particelle da produrre, mentre nel caso di macchine a bersaglio fisso cresce come il quadrato della massa.

¹⁰In realtà occorre molto di più perché i protoni non sono particelle puntiformi, ma composte di *quark*. A scontrarsi dunque sono questi ultimi, più leggeri e con energia minore.

La Relatività Generale

PREREQUISITI: trasformazioni di coordinate, sistemi inerziali e non inerziali, dinamica elementare, relatività ristretta

La teoria della relatività ristretta permette di predire il comportamento osservato di oggetti che si muovono di moto rettilineo uniforme rispetto a un osservatore. Appare subito chiaro che limitare le predizioni a questo tipo di moto non è per nulla soddisfacente: nulla si muove realmente di moto rettilineo uniforme. È dunque opportuno studiare i moti relativi di sistemi accelerati (non inerziali), alla luce dei risultati ottenuti avendo discusso la relatività ristretta. È questo l'oggetto della teoria della **relatività generale**.

Sfortunatamente l'apparato matematico necessario a trattare questo tipo di moti è particolarmente complesso e dunque risulta sempre molto complicato introdurre questa teoria ai non esperti. In questo capitolo proviamo quanto meno a introdurre le linee generali e i concetti alla base di questa teoria.

2.1 La misura nei vari sistemi di riferimento

La **relatività ristretta** insegna che per definire lo stato di un evento in un sistema di riferimento occorre fornire oltre alla posizione degli oggetti che si stanno misurando, anche il tempo della misura misurato da un orologio solidale con il sistema di riferimento usato per misurare le posizioni. Secondo questa teoria, passando da un sistema di riferimento a un altro in moto rettilineo uniforme rispetto al primo, le coordinate dei quadrivettori si trasformano con le

trasformazioni di Lorentz, che possiamo scrivere in forma compatta come

$$x'^{\mu} = L_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad (2.1)$$

dove nell'espressione sopra riportata s'intende la somma su tutti gli indici ripetuti e $\mu = 0, \dots, 3$ rappresentano gli indici relativi alle componenti del quadrivettore. In sostanza $\underline{x} = (t, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. L_{ν}^{μ} è qualcosa che ha due indici, le cui componenti rappresentano i coefficienti della trasformazione. Applicando l'equazione (2.1) si ha quindi che

$$x'^0 = L_0^0 x^0 + L_1^0 x^1 + L_2^0 x^2 + L_3^0 x^3 \quad (2.2)$$

e nello specifico, sapendo che $t' = \gamma(t - \beta x)$, abbiamo che $L_0^0 = \gamma$, $L_1^0 = -\gamma\beta$, $L_2^0 = 0$ e $L_3^0 = 0$. Allo stesso modo, dalla trasformazione $x' = \gamma(x - \beta t)$ e dall'equazione

$$x'^1 = L_0^1 x^0 + L_1^1 x^1 + L_2^1 x^2 + L_3^1 x^3 \quad (2.3)$$

si ricava che $L_0^1 = -\gamma\beta$, $L_1^1 = \gamma$, $L_2^1 = 0$ e $L_3^1 = 0$. Non è difficile trovare tutte le 16 componenti di L , che si può esprimere come una matrice. È abbastanza chiaro che fare una teoria che permetta di scrivere le equazioni del moto in sistemi di riferimento qualunque significa fare una teoria che consenta di individuare le componenti della matrice L (che più propriamente si chiama **tensore** , che in matematica definisce le relazioni geometriche esistenti tra le coordinate dei vettori in uno spazio qualunque).

Possiamo usare un tensore per esprimere la lunghezza del quadrivettore, definendo il modulo quadro di un quadrivettore \underline{x} , che sappiamo essere un'invariante, come

$$s^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu. \quad (2.4)$$

Ricordando che questa scrittura significa che occorre sommare sugli indici ripetuti abbiamo che

$$s^2 = g_{\mu 0} x^\mu x^0 + g_{\mu 1} x^\mu x^1 + g_{\mu 2} x^\mu x^2 + g_{\mu 3} x^\mu x^3 \quad (2.5)$$

in cui ancora l'indice μ è ripetuto e perciò

$$\begin{aligned} s^2 = & g_{00} x^0 x^0 + g_{10} x^1 x^0 + g_{20} x^2 x^0 + g_{30} x^3 x^0 + \\ & g_{01} x^0 x^1 + g_{11} x^1 x^1 + g_{21} x^2 x^1 + g_{31} x^3 x^1 + \\ & g_{02} x^0 x^2 + g_{12} x^1 x^2 + g_{22} x^2 x^2 + g_{32} x^3 x^2 + \\ & g_{03} x^0 x^3 + g_{13} x^1 x^3 + g_{23} x^2 x^3 + g_{33} x^3 x^3 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Confrontando con l'espressione della lunghezza dell'invariante di Lorentz $s^2 = t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = (x^0)^2 - \left((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \right)$ si vede subito che $g_{\mu\nu} = 0$ ogni volta che $\mu \neq \nu$ e in caso contrario vale -1 se $\mu = \nu \neq 0$ e $+1$ se $\mu = \nu = 0$.

Il tensore $g_{\mu\nu}$ si chiama **tensore metrico** perché serve per calcolare la lunghezza dei segmenti che hanno un estremo nell'origine del sistema di riferimento e l'altro nel punto scelto. I valori di $g_{\mu\nu}$ dipendono, naturalmente, dalle caratteristiche del sistema di riferimento scelto per esprimere le coordinate e dalle proprietà dello spazio. Ce ne possiamo rendere conto facilmente considerando un sistema di riferimento cartesiano bidimensionale, in cui il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ è una matrice 2×2 . In questo sistema il punto $(x, y) = (x^0, x^1)$ individua un punto che dista dall'origine una quantità r pari a $r^2 = (x^0)^2 + (x^1)^2$ cosicché in questo sistema di riferimento $g_{00} = g_{11} = +1$ e $g_{01} = g_{10} = 0$. Se invece scegliamo di rappresentare il punto in coordinate cartesiane abbiamo che le coordinate sono $(r, \theta) = (x^0, x^1)$ dove

$$\begin{cases} x = x^0 = r \cos \theta = x^1 \cos x^1 \\ y = x^1 = r \sin \theta = x^0 \sin x^1. \end{cases} \quad (2.7)$$

In questo caso la lunghezza quadra del vettore è semplicemente $r^2 = (x^0)^2 + (x^1)^2$, quindi $g_{\mu\nu} = 0$ sempre tranne che per $\mu = \nu = 0$ per il quale vale $g_{00} = 1$.

In entrambi i casi il valore numerico della distanza sarebbe lo stesso, ma in uno spazio **curvo** i valori di $g_{\mu\nu}$ sono tali da cambiare la distanza tra due punti rispetto a quella che si avrebbe in uno spazio piatto. Se calcoliamo la distanza tra due punti su un piano otteniamo un valore che è diverso da quello che si otterrebbe se questo piano fosse *adagiato* sulla superficie curva della Terra. La distanza euclidea tra i punti è la corda che unisce i due punti adagiati su una sfera, mentre la distanza effettiva sarebbe la lunghezza dell'arco di circonferenza che li unisce. In generale per **spazio curvo** s'intende uno spazio in cui le relazioni geometriche sono tali da non riprodurre i risultati della geometria euclidea.

Quello che ci possiamo aspettare è che i valori assunti dal tensore metrico dipendano dalla trasformazione. Nel caso delle trasformazioni di Lorentz il tensore metrico è simmetrico e sulla diagonale ci sono i valori $(+1, -1, -1, -1)$. Ma se si passa a descrivere la fisica in un sistema di riferimento non inerziale le trasformazioni non saranno più quelle di Lorentz e i valori del tensore metrico cambiano.

Naturalmente nel caso inerziale la trasformazione assume sempre la stessa forma, perché il moto relativo tra i sistemi di riferimento è unico: cambiano solo i valori, non la forma della trasformazione. Nel caso invece dei sistemi di riferimento non inerziali il moto relativo potrebbe essere qualunque e quindi non è possibile scrivere una trasformazione generica come quella di Lorentz che valga per tutti i sistemi. Ogni moto avrà la sua propria trasformazione. Se ne potrebbe trarre la conseguenza che quindi non si potrebbe imparare niente di realmente nuovo da questo studio, ma in realtà non è così.

2.2 Il principio di equivalenza

Già sappiamo che quando si descrive il moto di qualcosa osservandolo da un sistema di riferimento non inerziale, nelle equazioni del moto compaiono dei termini che hanno la stessa forma matematica di una forza e per questo diciamo che nei sistemi di riferimento non inerziali si producono le **forze apparenti**. Queste forze sono dette apparenti proprio

perché non esistono in quanto tali: non sono forze nel senso che non sono il prodotto di un'interazione. Sono solo matematicamente equivalenti a forze.

Un esempio ben noto è la **forza centrifuga**. Se mettiamo in rotazione con le mani un sasso legato a uno spago, sulle dita percepiamo una forza che tira verso il sasso. Molti ritengono erroneamente che questa forza sia la forza centrifuga. In realtà non è altro che la tensione dello spago che si manifesta per effetto della terza Legge di Newton dal momento che all'altro capo è presente una forza **centripeta**, diretta cioè verso la mano. In assenza dello spago il sasso si muoverebbe di moto rettilineo allontanandosi dalla mano. Trascinando con sé lo spago, anche i punti di questo si dovrebbero muovere di moto rettilineo. Ma quando lo spago si tende, le dita della mano lo trattengono applicando una forza diretta verso la mano stessa. Il punto di contatto tra la mano e lo spago non si muove perché si desta una forza di reazione diretta verso l'esterno che annulla l'effetto della forza applicata dalla mano. La forza di reazione è il risultato della somma delle forze (di tipo elettromagnetico) che si esercitano tra le particelle di cui è composto lo spago e che impediscono a questo di dissolversi. Di conseguenza ogni punto dello spago è soggetto a questa forza e a una forza uguale e contraria per effetto della terza Legge di Newton. All'altro capo dello spago (quello cui è legato il sasso) dunque c'è una forza diretta verso la mano prodotta dalle forze interne dello spago, non annullata da altre forze. È questa forza, centripeta appunto, che produce l'accelerazione che fa cambiare la direzione della velocità e fa muovere il sasso di moto circolare.

Se però osserviamo lo stesso fenomeno stando seduti sul sasso, vedremo il sasso fermo accanto a noi! Se il sasso è fermo e resta tale vuol dire che non ci sono forze in questo sistema e per far valere la seconda Legge di Newton siamo costretti a scrivere che, in questo particolare sistema di riferimento,

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{app} \quad (2.8)$$

dove \mathbf{F} è la risultante delle *vere* forze agenti sul sasso (la tensione dello spago), e \mathbf{F}_{app} è qualcosa che

ha le dimensioni di una forza e che deve essere tale da annullare l'accelerazione. Se $\mathbf{F}_{app} = m\mathbf{a}$ vediamo subito che il risultato è che la risultante delle forze applicate è nulla. Nel caso del moto circolare uniforme l'accelerazione è diretta verso il centro della traiettoria e vale v^2/r dove v è il modulo della velocità del sasso e r la sua distanza dall'asse di rotazione. La forza centrifuga quindi vale

$$\mathbf{F}_{app} = m \frac{v^2}{r} \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.9)$$

La forza centripeta (che invece è una forza *vera*, effettivamente dovuta a una qualche interazione), vale

$$\mathbf{F} = -m \frac{v^2}{r} \hat{\mathbf{r}}, \quad (2.10)$$

e l'accelerazione del sasso (misurata nel sistema di riferimento in cui è fermo) è nulla. Da quanto sopra se ne deduce che scrivere le trasformazioni che permettono di passare da un sistema di riferimento a un altro in moto accelerato rispetto al primo equivale a trattare un problema in cui sia localmente presente una forza. E non una forza qualsiasi, ma una forza di tipo gravitazionale. Perché sappiamo che la seconda Legge di Newton dice che l'accelerazione \mathbf{a} subita da un corpo di massa m_i è proporzionale alla forza applicata

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m_i}, \quad (2.11)$$

ma al contempo sappiamo che la forza di gravità si scrive $\mathbf{F} = m_G \mathbf{g}$ dove $m_G = m_i$. Quest'ultimo fatto è un fatto sperimentale. Non c'è alcuna ragione per la quale il coefficiente che sta a denominatore nella Legge di Newton debba essere uguale alla costante di accoppiamento delle interazioni gravitazionali. La fisica relativistica dunque dovrà essere equivalente (almeno localmente) alla fisica della gravitazione.

Se non possiamo eseguire misure di oggetti molto distanti da noi (se ad esempio siamo chiusi in una stanza senza finestre) e vediamo degli oggetti cadere non possiamo sapere se questi cadono perché c'è un campo di forze gravitazionali oppure perché l'intera stanza è accelerata verso l'alto. Potremmo saperlo

studiando il moto di oggetti lontani come i pianeti, per questo diciamo che il principio di equivalenza è valido **localmente**.

Da quanto abbiamo detto sopra si capisce che la trasformazione da applicare passando da un sistema a un altro determina le proprietà geometriche dello spazio-tempo e dal momento che trovarsi in un sistema di riferimento accelerato equivale a trovarsi in un campo gravitazionale, ne concludiamo che la presenza di un campo gravitazionale è equivalente alla presenza di una geometria **distorta** dello spazio-tempo nei pressi delle sorgenti del campo (il campo è più intenso vicino ai corpi massicci e lì la geometria somiglierà meno a quella euclidea rispetto a quella che si ha più lontano).

La relatività generale, in definitiva, permette di scrivere in generale la trasformazione di coordinate da un sistema di riferimento a un altro sistema accelerato rispetto al primo, ma oltre a ciò rappresenta una teoria del campo gravitazionale inteso come una distorsione delle proprietà geometriche dello spazio-tempo dovuta alla presenza delle masse, che sono le sorgenti del campo gravitazionale.

2.3 la geometria dell'Universo

Di fatto la relatività generale è una teoria sulla geometria dello spazio (o, per essere più precisi, dello **spazio-tempo**, cioè dello spazio quadridimensionale introdotto con la teoria della relatività ristretta). È interessante osservare che l'idea che lo spazio e il tempo non siano qualcosa di assoluto, ma che la loro *percezione* dipenda dall'osservatore, non è stata introdotta per la prima volta da Einstein con le sue teorie: già il filosofo e matematico **Leibniz** nel 1715 aveva intuito che lo spazio, così come il tempo, andavano considerati come "qualcosa di puramente relativo". Lo spazio, per Leibniz, "è un ordine delle coesistenze", mentre il tempo "è un ordine delle successioni" [4].

La disputa sulla natura dello spazio e del tempo, quindi, è molto antica. Anche **Newton**, nei *Princi-*

La lettera di Leibniz a Clarke

In una delle lettere che Leibniz invia a **Samuel Clarke**, pubblicate dopo la sua morte, si legge: "As for my own opinion, I have said more than once that I hold space to be something purely relative, as time is, that I hold it to be an order of coexistences, as time is an order of successions.". E ancora "I have many demonstrations to confute the fancy of those who take space to be a substance or at least an absolute being." e ne illustra una, di tali confutazioni (che per la scienza moderna suona poco appropriata, ma l'idea di base è in fondo corretta): "without the things placed in it [the space, ndr], one point of space absolutely does not differ in any respect whatsoever from another point of space. Now from this it follows [...] that it is impossible there should be a reason why God, preserving the same situations of bodies among themselves, should have placed them in space after one certain particular manner and not otherwise". In sostanza Leibniz afferma che lo spazio non può essere assoluto perché non ci sarebbe nessuna ragione per la quale gli oggetti che noi osserviamo sono qui e non altrove. Se fossero disposti nello stesso modo in un altro punto di uno spazio assoluto non potremmo distinguere questa situazione da quella attuale, dunque quello che conta non è lo spazio in sé, ma le relazioni tra gli oggetti.

pia [5], nello *scolio*¹ alla fine del capitolo sulle definizioni, cita un esperimento ideale per dimostrare l'assolutezza dello spazio: si prenda un secchio pieno d'acqua sospeso a una corda attorcigliata. Lasciando andare la corda il secchio comincia a ruotare rapidamente, mentre l'acqua, all'inizio, è ferma. Man mano che la corda si svolge, l'acqua si dispone in modo tale da formare una superficie concava. Il moto dell'acqua relativo al secchio non ha alcuna importanza, per Newton, dal momento che rispetto al secchio l'acqua sarebbe ferma. Il fatto che l'acqua

¹Con questo termine s'intendeva una specie di commento conclusivo al termine di una serie di dimostrazioni formali.

risalga i bordi del secchio implica l'esistenza di uno spazio assoluto rispetto al quale l'acqua *sa* di ruotare. **Ernst Mach** confutò questo esperimento (molti anni dopo, alla fine del XIX secolo) osservando che il moto dell'acqua nel secchio deve essere in qualche modo il risultato delle interazioni con il resto dell'Universo: se infatti togliessimo tutto dall'Universo tranne il secchio con l'acqua non potremmo neanche dire che il secchio sta ruotando, perché non si potrebbe stabilire rispetto a cosa stia ruotando.

L'idea alla base della relatività generale di Einstein è che l'acqua nel secchio s'incurva, quando ruota, perché interagisce (gravitazionalmente) con il resto dell'Universo e questa interazione non è altro che il risultato della geometria assunta dall'Universo per il fatto che in esso i corpi assumono certe relazioni spazio-temporali. Un Universo in cui sia presente una sola particella puntiforme è un Universo nel quale lo spazio è semplicemente un concetto privo di senso: lo spazio **non esiste** in questo Universo. Con due particelle si può solo definire la distanza tra le due particelle, quindi al più si può definire uno spazio unidimensionale, ma anche in questo caso avremmo qualche problema, perché non avremmo la possibilità di definire un'unità di misura. Lo spazio più semplice, che abbia un minimo interesse, che possiamo immaginare è formato da almeno tre particelle. Se una delle tre si sposta rispetto alle altre possiamo misurare l'esistenza di un fenomeno, che consiste nella variazione della posizione della particella rispetto alle altre. Lo spazio, dunque, come ente assoluto, non esiste. Lo spazio è semplicemente determinato dalle cose che vi sono immerse: è una relazione tra oggetti.

Se la materia nell'Universo fosse infinita, lo sarebbe anche lo spazio, ma se così non è lo spazio stesso deve essere finito. Quest'affermazione può generare un po' di confusione perché uno s'immagina che recandosi in prossimità della galassia più lontana dal centro dell'Universo dovrebbe vedere una specie di confine oltre il quale non c'è nulla pur tuttavia si potrebbe immaginare l'esistenza di uno spazio.

Un modo per superare l'*impasse* consiste nell'assumere che lo spazio non sia **piatto** come quello euclideo, nel quale due rette parallele non s'incontrano

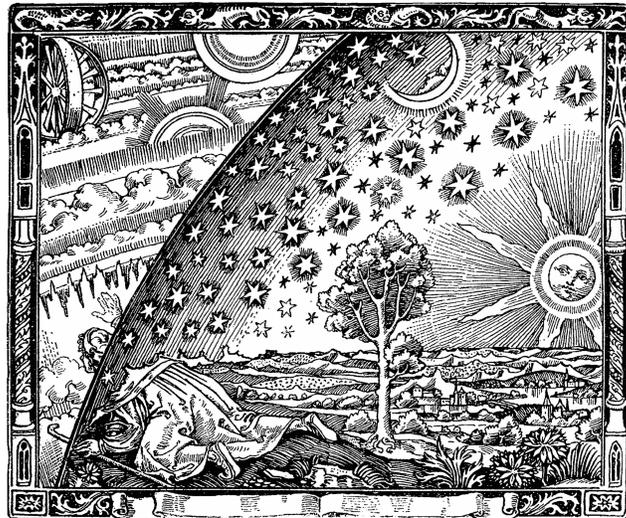


Figura 2.1 Lo spazio è una relazione tra oggetti e non è qualcosa di assoluto. Per questo non esiste un **confine** dello spazio, come quello immaginato da **Camille Flammarion** in quest'incisione.

mai, ma **curvo**. Anche se può sembrare strano, uno spazio curvo non è una cosa così astrusa: supponiamo di essere fermi al Polo Nord in compagnia di un amico e di decidere di separarci procedendo in due direzioni opposte sempre dritti davanti al nostro naso. In uno spazio piatto non c'incontreremmo più con il nostro amico e sarebbe meglio salutarsi per sempre. Ma sulla Terra, sulla quale lo spazio non è piatto, dopo un po' di tempo (e qualche difficoltà di ordine pratico che assumiamo di poter superare) ci vedremo venire incontro l'un l'altro in prossimità del Polo Sud. Se poi continuassimo a camminare dritti (non prima di esserci salutati di nuovo) prima o poi c'incontreremmo nuovamente al Polo Nord e così via all'infinito. Pur camminando sempre in avanti non raggiungeremmo mai un confine, un limite. Nonostante questo sappiamo bene che la superficie della Terra non è infinita. Ci troviamo, in questo caso, in uno spazio finito, ma illimitato.

La superficie della Terra è uno spazio curvo bidimensionale (ci si può muovere solo su due dimensioni, almeno in prima approssimazione). Se descri-

viamo il nostro moto in uno spazio tri-dimensionale la geometria è euclidea, naturalmente. Non lo è solo quando scriviamo le relazioni tra gli oggetti usando solo due numeri invece che tre.

Se lo spazio tri-dimensionale cui siamo abituati fosse curvo potremmo fare il seguente esperimento: con il nostro amico ci piazziamo in un punto dell'Universo e guardiamo entrambi nella stessa direzione. Uno dei due resta fermo e l'altro comincia a camminare sempre dritto davanti a sé. Cammina, cammina, prima o poi succederà che il nostro amico ce lo vedremo arrivare alle nostre spalle!

In uno spazio come questo le relazioni geometriche tra gli oggetti cambiano, anche se in maniera per noi impercettibile. Resta però valido il principio generale secondo il quale le distanze quadre tra i punti dello spazio e l'origine delle coordinate si possono scrivere come

$$s^2 = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu. \quad (2.12)$$

L'unica differenza consiste nel fatto che ora le componenti di $g_{\mu\nu}$ non sono più quelle di prima, e in generale non sono costanti. Capire come si scrivono le $g_{\mu\nu}$ in funzione della distribuzione delle masse è un compito troppo arduo per un non esperto, che richiede una matematica troppo avanzata. Ma alcune considerazioni di carattere generale possiamo farle.

Dal momento che per la relatività ristretta massa ed energia sono la stessa cosa (nel senso che l'una si può trasformare nell'altra), la geometria dell'Universo non dipenderà solo dalla distribuzione di materia, ma anche dalla distribuzione di energia.

Inoltre, per ogni componente di $g_{\mu\nu}$ si potrebbe scrivere, in linea di principio, un'equazione che dice come varia la componente in esame in funzione della distribuzione di materia ed energia. Si possono cioè scrivere 16 equazioni che ci dicono come variano le diverse componenti di $g_{\mu\nu}$ nei diversi punti dello spazio-tempo in relazione alla presenza, in certi punti, di materia o energia. A partire da queste 16 equazioni si può costruire un oggetto che è anch'esso un tensore, detto **Tensore di Riemann** $R_{\mu\nu}$. In effetti $R_{\mu\nu}$ contiene le **derivate** di $g_{\mu\nu}$ (le sue variazioni) rispetto alle coordinate dello spazio-

tempo. Con questo tensore e con il tensore metrico si può costruire un oggetto che è anch'esso un tensore, perché è la somma di due tensori:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (2.13)$$

dove R è una combinazione delle componenti di $R_{\mu\nu}$. Questo tensore non può che essere uguale a un altro tensore, le cui componenti devono dipendere dalla distribuzione di materia ed energia: il **tensore energia-impulso**² $T_{\mu\nu}$. L'unica relazione possibile è una relazione di proporzionalità la cui costante si determina essere $8\pi G/c^4$ dove G è la costante di gravitazione universale e quindi

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.14)$$

In assenza di materia ed energia $T_{\mu\nu} = 0$ per ogni coppia μ, ν . In questo caso $G_{\mu\nu} = 0$ il che implica che le variazioni delle $g_{\mu\nu}$ siano nulle per cui $g_{\mu\nu}$ risulta essere costante ed evidentemente deve essere proprio il tensore determinato dalla relatività ristretta.

In presenza di materia, invece, lo spazio-tempo si deforma e la forza di gravità che si esercita tra i corpi non è altro che il risultato di questa deformazione. Come una persona che cammini in linea retta su una superficie curva come la Terra percorre di fatto una traiettoria curva, un corpo che si muove in linea retta in uno spazio curvo come quello prodotto dalla presenza di un'altra massa nell'Universo percorrerebbe una traiettoria che, vista da un ipotetico sistema inerziale, apparirebbe curva.

2.4 Effetti gravitazionali sul tempo

La teoria della relatività ristretta afferma che il tempo non è assoluto, ma scorre in modo diverso nei diversi sistemi di riferimento. La teoria della relatività generale ci dice invece che trovarsi nelle vicinanze di un corpo massivo equivale a trovarsi in un sistema

²L'impulso o quantità di moto dipende dalla massa, dunque dà il contributo della materia a questo tensore

di riferimento non inerziale (quindi sicuramente in moto).

Esercizio 2.1 *Spazi curvi*

Gli orologi atomici che si trovano a bordo dei satelliti GPS sono soggetti a una forza gravitazionale inferiore rispetto a quella cui sono soggetti gli orologi a Terra. Calcola l'anticipo degli orologi di bordo dovuto alla curvatura dello spazio-tempo prodotta dalla massa della Terra.

SOLUZIONE →

Il campo gravitazionale diminuisce come $1/r^2$ con la distanza r dal centro del corpo che lo genera, quindi il campo è più intenso vicino alla superficie della Terra e meno intenso ad alta quota. Un orologio a Terra, dunque, segna il tempo come se si trovasse in un laboratorio più accelerato rispetto a un orologio a bordo di un satellite. Di conseguenza il tempo a Terra scorre più lentamente di quanto non faccia a bordo di un satellite. La teoria della relatività generale permette di calcolare a quanto ammonta il ritardo, ma i calcoli sono molto complicati. Nonostante questo si può ottenere un'ottima stima del ritardo relativo tra gli orologi usando semplici argomenti dimensionali. Se t è il tempo a Terra e τ quello a bordo del satellite, sicuramente deve essere

$$t = \alpha \tau \quad (2.15)$$

dove α è una costante adimensionale. α deve potersi scrivere nella forma

$$\alpha \simeq 1 + \delta \quad (2.16)$$

perché in assenza di campo gravitazionale dev'essere $t = \tau$ e quindi $\delta = 0$. Evidentemente δ deve dipendere dal potenziale del campo gravitazionale³ che sappiamo scrivere come

$$\mathcal{G} = -G \frac{M}{r} \quad (2.17)$$

³Deve dipendere dal potenziale e non dal campo perché deve essere uno scalare, come il potenziale, mentre il campo è un vettore.

dove M è la massa della Terra e r la distanza dal centro. Evidentemente il potenziale ha le dimensioni di un'energia divisa per una massa, quindi ha le dimensioni di una velocità al quadrato. L'unico modo di costruire una grandezza adimensionale quindi consiste nel dividere questa quantità per una velocità al quadrato, che non può che essere l'unica velocità indipendente dai sistemi di riferimento: c . Deve quindi essere

$$t \simeq \left(1 + G \frac{M}{c^2 r}\right) \tau, \quad (2.18)$$

che è praticamente identica al risultato che si trova usando la teoria completa. Il segno + presente in questa relazione indica che il tempo in prossimità di un corpo massivo scorre più lentamente rispetto a quello che scorre in punti dell'Universo lontani da sorgenti di campo gravitazionale. Che il segno sia giusto lo si capisce osservando che in assenza di campi non ci sono accelerazioni ed è come se l'orologio fosse in un sistema di riferimento fermo. In presenza di accelerazioni si misura una forza ed è come se l'orologio si muovesse. Per accelerazioni piccole il sistema si deve comportare come nella relatività ristretta e rispetto al caso dell'orologio fermo deve risultare una durata maggiore dell'intervallo di tempo.

Il paradosso dei gemelli - 2

Il fatto che il tempo scorra in maniera diversa in sistemi di riferimento in moto l'uno rispetto all'altro sembra causare un paradosso perché il risultato di una *misura*, che consiste nel confrontare l'età di uno dei gemelli con quella dell'altro, è diverso secondo il punto di vista adottato. In realtà il paradosso non esiste perché la misura è impossibile dal momento che la relatività ristretta si applica solo nel caso di sistemi di riferimento inerziali e un'astronave che parte e torna successivamente da dov'è partita di sicuro accelera in almeno tre fasi del viaggio (partenza, inversione del moto, arrivo).

La relatività generale risolve il paradosso affermando che in effetti il viaggiatore torna con un'età diversa rispetto a quella del gemello. Mentre nei sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro non è possibile stabilire in maniera oggettiva quale dei due sia in moto e quale sia fermo (ma si può davvero stabilire che un sistema di riferimento è fermo?), nel caso di sistemi di riferimento accelerato si può sempre dire quale dei due sia in moto e quale no: quello nel quale si manifestano le forze apparenti è il sistema in moto. Nel sistema di riferimento del gemello viaggiatore sono presenti accelerazioni e decelerazioni che provocano un'alterazione della marcia degli orologi che dipende dall'intensità dell'accelerazione.

Piú è grande quest'accelerazione piú lentamente scorre il tempo a bordo dell'astronave. Secondo che la somma delle accelerazioni a bordo sia maggiore o minore di quelle subite dal gemello a terra (che è soggetto alla gravità di quest'ultima), il gemello viaggiatore può tornare piú o meno giovane.

Che cos'è lo spazio <http://www.radioscienza.it/2012/09/16/lo-spazio/>

$E = mc^2$ <http://www.radioscienza.it/2013/11/01/emc2/>

Il GPS <http://www.radioscienza.it/2012/06/18/il-gps/>

La teoria della Relatività <http://www.radioscienza.it/2013/01/16/la-teoria-della-relativita/>

La Relatività Generale <http://www.radioscienza.it/2013/06/28/la-relativita-generale/>

Fisicast

I seguenti podcast di [Fisicast](#) hanno a che fare con l'argomento trattato negli ultimi due capitoli:

La Meccanica Quantistica

PREREQUISITI: cinematica classica e relativistica, momenti magnetici, forze elettriche

Lo studio della meccanica quantistica rappresenta una tappa particolarmente importante per la formazione scientifica. Come nel caso della scoperta dei **raggi cosmici**, che darà origine alla fisica delle particelle, anche la meccanica quantistica nasce grazie a un evento tutto sommato del tutto secondario che si potrebbe definire irrilevante, se non se ne conoscessero le conseguenze: lo studio dello **spettro di corpo nero**. In fisica, come in altre discipline, non c'è niente di secondario: tutte le domande devono trovare una risposta, qualunque sia il giudizio a priori sull'importanza di queste.

In questa pubblicazione non intendiamo ripercorrere le tappe di questa scoperta da un punto di vista storico. Preferiamo portare il lettore a *scoprire* la meccanica quantistica attraverso una storia leggermente alterata, che comunque include alcune delle scoperte fondamentali che hanno portato alla formulazione di questa teoria.

3.1 Il corpo nero

Il così detto problema del **corpo nero** consiste nel trovare la forma dello **spettro** della radiazione elettromagnetica emessa da un corpo con emissività pari a 1. Detto in questi termini il problema appare difficile e astruso, ma lo si può riformulare in termini meno generali e più familiari in questo modo: perché mai guardando il forno di un pizzaiolo quando è freddo appare nero e quando invece è caldo è di colore giallo?

Predire, in base alle leggi della fisica, il colore del forno conoscendone la temperatura può apparire un problema del tutto irrilevante (si dorme certamente bene anche senza saperlo fare), ma per alcuni si trattava di un problema cui dare una risposta. Si può cercare di trovare una risposta a questa domanda usando le leggi della termodinamica e dell'elettromagnetismo insieme. Riprodurre i calcoli che si facevano al tempo per cercare di trovare la risposta a questa domanda è piuttosto noioso e in fondo non aggiunge nulla alla nostra conoscenza, ma il risultato di tutti i conti è che lo spettro predetto (cioè la distribuzione d'intensità della radiazione in funzione della sua lunghezza d'onda) non è in accordo con i dati sperimentali.

Cerchiamo di capire perché. Intanto osserviamo che non tutti i corpi che emettono luce sono caldi (un LED, ad esempio), ma tutti i corpi caldi emettono luce (o comunque una qualche forma di radiazione elettromagnetica). Un pezzo di carbone scaldato emette una viva luce rossa e i corpi umani, che si trovano a una temperatura di 36 °C emettono radiazione infrarossa, invisibile per i nostri occhi, ma visibile attraverso opportuni dispositivi sensibili a quel tipo di radiazione.

Consideriamo una singola particella elettricamente carica nel vuoto, che venga investita da una radiazione elettromagnetica. Il campo elettrico che costituisce questa radiazione fa muovere la particella, che oscilla in sincrono con il campo. Una particella carica accelerata, però, emette radiazione elettromagnetica: funziona infatti come un'antenna. La frequenza della radiazione emessa è quella di oscillazione che a sua volta è quella della radiazione incidente.

Le particelle che formano un gas, un liquido o un solido, però non sono libere di muoversi. In ge-

FILMATO NON RIPRODUCIBILE SU QUESTO
SUPPORTO: DIGITA L'URL NELLA CAPTION O
SCARICA L'E-BOOK

Figura 3.1 I visori notturni funzionano amplificando e trasformando in luce visibile la radiazione infrarossa emessa con maggiore intensità dai corpi più caldi, che si comportano, in buona approssimazione, come corpi neri. Il filmato è una gentile concessione di FLIR® [<https://www.youtube.com/watch?v=rAvnMYqj2c0>].

nerale le particelle sono legate le une alle altre da forze che possiamo comunque pensare, in prima approssimazione, funzionare come molle che collegano le varie particelle. Nel caso del gas più semplice, l'idrogeno, le particelle coinvolte sono due: un protone positivo e un elettrone negativo, legate tra loro da forze elettrostatiche. Se una radiazione elettromagnetica investe un atomo d'idrogeno fa muovere gli elettroni e i protoni, che tuttavia non possono allontanarsi più di tanto l'uno dall'altro. L'ampiezza dell'oscillazione può essere più o meno grande, secondo le caratteristiche della forza che lega le particelle. Per questo i corpi talvolta non riescono ad assorbire l'energia della radiazione incidente e altre volte, pur assorbendola, non la riemettono con le stesse modalità. Un **corpo nero** è un corpo che assorbe integralmente tutta l'energia che riceve, senza rimetterla.

Le particelle che formano un corpo si possono mettere in moto anche senza l'ausilio di un'onda elettromagnetica. Se riscaldiamo qualcosa come un pezzo di carbone, le sue particelle si mettono a oscillare sempre più rapidamente, perché la loro energia cinetica media aumenta. Anche le particelle del carbone in fin dei conti sono cariche elettricamente e quindi oscillando attorno a una posizione d'equilibrio irraggiano radiazione elettromagnetica. All'inizio la frequenza di oscillazione è bassa, e quindi il corpo, anche se illuminato, appare nero, perché la radiazione incidente non è sufficiente a farlo irrag-

giare. Ma all'aumentare della temperatura aumenta la frequenza di oscillazione e le particelle cominciano a irradiare una radiazione a frequenze sempre più alte a al limite visibili dall'occhio umano: il carbone diventa rosso.

Quello che può succedere è che la radiazione prodotta dal carbone fa muovere altre particelle dello stesso carbone che potrebbero già essere in oscillazione. Se le oscillazioni non sono in fase il risultato è un movimento caotico delle particelle con varie frequenze. La somma delle diverse frequenze dà origine al colore che osserviamo. Il colore è determinato da una condizione di equilibrio tra la radiazione emessa e quella assorbita dalle particelle in moto. Tutte le frequenze sono permesse e l'ampiezza dell'oscillazione può variare da zero a un valore massimo.

In linea di principio si possono eseguire dei calcoli per predire la forma di questo spettro: per un corpo non nero il calcolo è complicato dal fatto che non tutta la radiazione emessa è dovuta a questo meccanismo. Un corpo che a temperatura ambiente appare verde possiede la proprietà di diffondere la luce verde che v'incide a causa delle proprietà ottiche della sua superficie. Per un corpo nero invece questi effetti si possono trascurare. I calcoli esatti portano a un risultato incomprensibile: si ottiene sempre che l'energia irraggiata da un corpo nero caldo è di fatto infinita (come si vede nella Figura 3.2 al diminuire della lunghezza d'onda la quantità di radiazione emessa tende rapidamente a infinito). Questo è impossibile!

Nel 1901 **Max Planck** pubblica un articolo [6] nel quale esegue i conti facendo l'ipotesi semplificativa secondo la quale la radiazione può essere emessa solo in quantità discrete chiamate **quanti**. L'idea è la seguente: per semplificare i conti assumo che le particelle cariche nel carbone possano oscillare a una sola frequenza. Oscillando producono radiazione elettromagnetica a quell'unica frequenza. Questa radiazione potrebbe essere assorbita da una delle particelle del pezzo di carbone oppure no, quindi, se sono stati prodotti N quanti dal carbone, da questo possono uscirne $0, 1, 2, \dots, n$ con $n \leq N$, mentre i restanti $N - n$ sono assorbiti e contribuiscono al moto delle

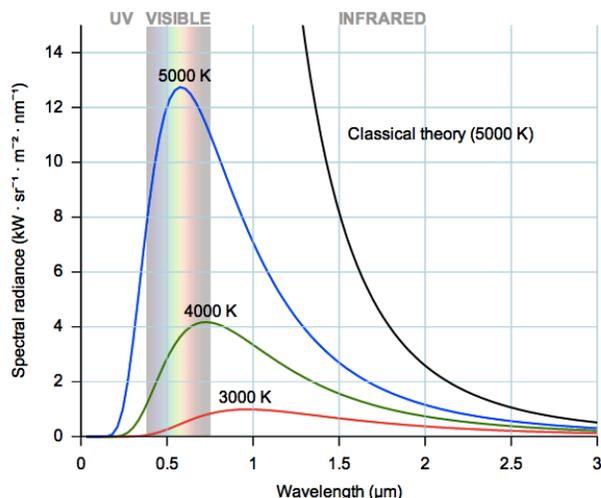


Figura 3.2 Lo spettro di corpo nero per diverse temperature del corpo. Nella figura si vede anche la previsione della teoria classica della luce. In ascissa c'è la lunghezza d'onda della luce emessa, mentre in ordinata la potenza emessa per unità di angolo solido per metro quadro.

particelle di cui è composto il carbone. In questo modo la somma delle energie trasportate dai singoli quanti è certamente finita (non può essere maggiore di NE dove E è l'energia di un singolo quanto). E dal momento che l'energia irraggiata dipende dalla frequenza della radiazione emessa E deve essere proporzionale alla frequenza ν : $E = h\nu$ dove h è una costante (che poi prenderà il nome di **costante di Planck**) che vale 6.63×10^{-34} J s o 4.14×10^{-15} eV s.

Questo modello spiega bene anche un'altra questione: se illumino un corpo (nero, ma non solo) con la luce, il corpo si scalda. Se si scalda vuol dire che assorbe energia e che le sue particelle si mettono in moto. Dovrebbe quindi irraggiare e in effetti è così, ma dovrebbe farlo a una frequenza del tutto identica a quella della luce che lo illumina. Di solito irraggia a una frequenza più bassa (tipicamente nell'infrarosso). Se assumiamo che la luce sia fatta di corpuscoli detti quanti, questi possono colpire l'elettrone di un atomo in un determinato istante *allon-*

tanandolo dal nucleo. Una volta allontanato, prima di essere nuovamente colpito da un quanto, l'elettrone è richiamato dalla forza elastica che lo trattiene al nucleo e dunque si muove eseguendo oscillazioni a frequenza più bassa rispetto a quelle tipiche della radiazione incidente.

La teoria di Planck non ebbe molto successo: risolveva sí alcuni problemi, ma usando un *trucco*. Non si poteva considerare una soluzione.

3.2 L'effetto fotoelettrico

Nel 1887, prima dell'ipotesi di Planck, un fisico di nome **Heinrich Hertz** stava conducendo alcuni esperimenti per studiare la propagazione delle onde elettromagnetiche. Per farlo usava uno strumento che produceva scintille quando arrivavano onde elettromagnetiche. Per vederle meglio, Hertz cercò di fare il maggior buio possibile nel suo laboratorio e si accorse che la qualità delle scintille peggiorava: si vedevano meglio, ma erano più deboli. Le scintille sono provocate dal rapido movimento delle cariche elettriche (come sopra, le cariche elettriche accelerate emettono radiazione elettromagnetica, quindi luce se l'emissione avviene a frequenze opportune), quindi Hertz ne concluse giustamente che nei suoi strumenti le cariche si muovevano più facilmente se illuminati. In particolare notò che le scintille erano molto intense in presenza di radiazione ultravioletta, un po' meno intense se s'illuminava tutto con luce blu e praticamente assenti se gli strumenti venivano illuminati da luce di colore giallo o rosso. Solo i corpi carichi negativamente subivano quest'effetto, poi chiamato **effetto fotoelettrico**. Inoltre, quando l'illuminazione provocava la scarica, questa era tanto più intensa quanto maggiore era l'intensità della luce.

L'effetto fotoelettrico, in sostanza, ha le seguenti caratteristiche:

- consiste nella perdita di carica elettrica da parte di un corpo carico, quando questo è illuminato;
- avviene solo se il corpo è carico negativamente;

FILMATO NON RIPRODUCIBILE SU QUESTO
SUPPORTO: DIGITA L'URL NELLA CAPTION O
SCARICA L'E-BOOK

Figura 3.3 L'effetto fotoelettrico si spiega facilmente se si ammette che la luce sia composta di corpuscoli invece che di onde. <https://www.youtube.com/watch?v=ZvyFus0nC6s>

- avviene solo se la frequenza della radiazione che lo provoca è superiore a una determinata soglia ν_0 che dipende dal materiale di cui è fatto il corpo;
- se avviene, l'intensità della scarica è proporzionale all'intensità della radiazione.

Un modo per spiegarlo è il seguente: un corpo elettricamente carico di carica negativa possiede un eccesso di elettroni, debolmente legati al corpo. Quando una radiazione elettromagnetica raggiunge gli elettroni, trasferisce a essi una certa quantità d'energia. Quest'energia potrebbe essere sufficiente a liberare gli elettroni dai deboli legami che li trattengono sul corpo e, naturalmente, quanto maggiore è l'intensità della radiazione incidente, tanto più alto sarà il numero di elettroni che riescono a guadagnare l'energia necessaria e ad abbandonare il corpo, scaricandolo. Il ragionamento sembra non fare una piega: in fondo le onde trasportano energia! Ma l'energia trasportata da un'onda dipende dalla sua ampiezza, non dalla sua frequenza! Non si spiega, dunque, come mai l'effetto fotoelettrico si manifesti solo per onde di frequenza maggiore di una frequenza caratteristica del materiale e non per onde di frequenza più bassa, ma di ampiezza grande a piacere. In altre parole una luce gialla molto intensa dovrebbe trasportare molta più energia di una luce blu poco intensa e invece l'effetto fotoelettrico si manifesta con la seconda, ma non con la prima.

Esercizio 3.1 *Effetto fotoelettrico*

La maggior parte della luce che proviene dal Sole ha una lunghezza d'onda compresa tra i 400 nm e i 750 nm. Calcola quanta energia possono al massimo guadagnare gli elettroni del materiale illuminato per effetto fotoelettrico.

SOLUZIONE →

L'unica soluzione possibile è quella di ammettere che la luce non sia un'onda, ma un flusso di corpuscoli di energia E proporzionale alla frequenza associata all'onda elettromagnetica corrispondente: $E = h\nu$. Fu **Albert Einstein** a proporre questa soluzione [7], in uno dei suoi tre articoli più importanti (tutti e tre pubblicati nell'*annus mirabilis* 1905). Per questa scoperta, tra l'altro, ad Einstein fu conferito il Premio Nobel (con sua grande disapprovazione, dal momento che riteneva di meritarlo per la teoria della relatività e non per quel che considerava tutto sommato un errore: la sua *Nobel Lecture*, tradizionalmente riservata all'argomento oggetto del premio, fu infatti sulla relatività e non sull'effetto fotoelettrico). A questi corpuscoli o quanti di luce si dà il nome di **fotoni**.

Si viene così a determinare un apparente paradosso: gli esperimenti mostrano in maniera inequivocabile che la luce è un'onda (attraversando una fenditura produce il fenomeno della **diffrazione**, tipico delle onde). Ma lo spettro di corpo nero e l'effetto fotoelettrico si spiegano solo ammettendo che sia composta di corpuscoli di energia $E = h\nu$. Come si risolve il *controsenso*? È semplice: ammettendo che la luce sia al contempo un'onda e una particella. La soluzione può apparire artificiosa e quasi un *trucco*, essendo completamente priva di logica. Ma chi dice che l'Universo segua la *nostra* logica? Come nel caso della relatività, l'Universo funziona secondo sue proprie Leggi per le quali non esiste nessun motivo di principio secondo il quale queste Leggi debbano uniformarsi al nostro modo (alla nostra capacità) di pensare le cose. Il fatto che a noi sembri assurdo che qualcosa possa essere al contempo un'onda

e una particella non è un buon motivo per rifiutare questa spiegazione.

Si potrebbe anche pensare che l'apparente paradosso derivi da una nostra scarsa conoscenza dei fenomeni per cui, in effetti, la luce dev'essere una delle due cose, ma per motivi a noi ignoti si comporta *come se* fosse l'altra in certe occasioni. Per la Fisica, però, *comportarsi come* o *essere* sono sinonimi. Inoltre, numerosi altri fenomeni, riportati più sotto, evidenziano che in effetti la spiegazione che ci siamo dati dev'essere quella giusta: la luce non è un'onda o una particella: è tutt'e due le cose allo stesso tempo! Per quanto strano possa sembrare non possiamo che ammettere che dev'essere così: sono i risultati degli esperimenti che stabiliscono la natura delle cose e per la luce questo è il risultato. Citando ancora **Luigi Malerba** "Succede purtroppo che spesso i fatti smentiscono le ingegnose e confortevoli teorie mentre non si sono mai viste teorie che smentiscono i fatti"¹.

Accettato questo punto di vista, la luce di frequenza ν si deve considerare come un flusso di fotoni di energia $E = h\nu$. Sapendo che $\omega = 2\pi\nu$ possiamo anche scrivere $E = h\frac{\omega}{2\pi} = \hbar\omega$ avendo definito $\hbar = h/2\pi$. La lunghezza d'onda λ è legata alla frequenza dalla relazione $\lambda = c/\nu$, perciò possiamo anche scrivere che $E = hc/\lambda$. La quantità di moto trasportata da un fotone, inoltre, è in unità naturali uguale alla sua energia $E = h\nu$, ma in unità SI, essendo $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ e $m = 0$, è $p = E/c = h/\lambda$. Ricordando, infine, che $k = 2\pi/\lambda$, $p = \hbar k$.

3.3 L'effetto Compton

L'effetto Compton consiste nella diffusione anelastica della luce da parte dei materiali. Se si invia un fascio luminoso su un materiale, la luce diffusa da questo ha la stessa lunghezza d'onda di quella incidente, per gli stessi motivi addotti sopra per spiegare il meccanismo di emissione di un corpo nero.

In alcuni casi però la luce diffusa si presenta con una lunghezza d'onda maggiore e la differenza rispetto a quella incidente dipende dall'angolo di dif-

fusione. Questo fenomeno si spiega molto bene con l'ipotesi quantistica. La luce infatti si può considerare come un flusso di fotoni che *piove* addosso agli elettroni degli atomi di cui è costituito il materiale. I fotoni che urtano questi elettroni possono essere diffusi ad angoli diversi senza perdere la loro energia, ma potrebbe anche accadere che parte dell'energia dei fotoni è ceduta agli elettroni del materiale. Se l'energia dei fotoni è abbastanza alta, gli elettroni si possono considerare come liberi (non legati ai nuclei): questa approssimazione si traduce nella condizione

$$h\nu \gg V \quad (3.1)$$

dove V rappresenta l'energia di legame degli elettroni negli atomi. In questo caso possiamo trattare gli elettroni come particelle libere e i fotoni come particelle che possono urtarli e cedere loro parte dell'energia iniziale. Usando la **cinematica relativistica** il conto è semplicissimo: in **unità naturali** il quadrimpulso dei fotoni incidenti è $\underline{P}_\gamma = (E, \mathbf{p})$, con $E = p$ (indicando con p il modulo del vettore \mathbf{p}), e quello degli elettroni nello stato iniziale è $\underline{P}_e = (m, \mathbf{0})$ dal momento che si possono considerare fermi (se non lo sono basta mettersi nel sistema di riferimento in cui lo sono). Dopo l'urto il quadrimpulso dei fotoni cambia e diventa $\underline{P}'_\gamma = (E', \mathbf{p}')$, così come quello degli elettroni che possiamo indicare con $\underline{P}'_e = (E_e, \mathbf{p}_e)$. Il quadrimpulso totale si conserva perciò

$$\underline{P}_\gamma + \underline{P}_e = \underline{P}'_\gamma + \underline{P}'_e \quad (3.2)$$

Dal momento che siamo interessati a conoscere la cinematica del fotone nello stato finale, mentre di quella dell'elettrone non c'interessa nulla possiamo isolare il quadrimpulso dell'elettrone

$$\underline{P}_\gamma + \underline{P}_e - \underline{P}'_\gamma = \underline{P}'_e \quad (3.3)$$

e fare il modulo quadro di entrambi i membri per ottenere

$$P_\gamma^2 + P_e^2 + P_\gamma'^2 + 2\underline{P}_\gamma \cdot \underline{P}_e - 2\underline{P}_\gamma \cdot \underline{P}'_\gamma - 2\underline{P}_e \cdot \underline{P}'_\gamma = P_e'^2 \quad (3.4)$$

¹Luigi Malerba, La superficie di Eliane, ed. Mondadori

Ricordando che il modulo quadro del quadrimpulso è un invariante relativistico pari alla massa a riposo della particella al quadrato abbiamo che $P_\gamma^2 = P_\gamma'^2 = 0$ e $P_e^2 = P_e'^2 = m^2$, perciò sostituendo

$$2\underline{P}_\gamma \cdot \underline{P}_e - 2\underline{P}_\gamma \cdot \underline{P}_\gamma' - 2\underline{P}_e \cdot \underline{P}_\gamma' = 0. \quad (3.5)$$

Il prodotto scalare dei quadrivettori si esegue moltiplicando le coordinate omologhe con il segno $-$ se sono spaziali e $+$ se sono temporali; dividendo tutto per 2 e svolgendo i prodotti si trova che

$$Em - (EE' - pp' \cos \theta + mE') = 0 \quad (3.6)$$

dove θ è l'angolo compreso tra \mathbf{p} e \mathbf{p}' , cioè l'angolo di diffusione. Ricordando che $E = p$ nonché $E' = p'$ si trova che

$$m(E - E') - EE'(1 - \cos \theta) = 0 \quad (3.7)$$

cioè che, raccogliendo E' e portando E all'altro membro,

$$E' = \frac{mE}{E(1 - \cos \theta) + m} = \frac{m}{(1 - \cos \theta) + \frac{m}{E}}. \quad (3.8)$$

È interessante studiare i limiti di quest'espressione. Per $\theta = 0$, $E' = E$ come ci si aspetta non essendoci alcuna diffusione. Quando invece $\cos \theta = -1$, cioè per fotoni diffusi all'indietro, si trova che

$$E' = \frac{m}{2 + \frac{m}{E}} = \frac{mE}{2E + m} \quad (3.9)$$

dalla quale si evince che E' non può mai essere nulla (a meno che $E = 0$, che è l'energia di un fotone di lunghezza d'onda infinita che non interagisce), cioè che il fotone non può mai perdere tutta la sua energia per effetto Compton.

Se dividiamo l'equazione (3.7) per EE' possiamo riscrivere la relazione che lega E' a E e all'angolo come

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1 - \cos \theta}{m} \quad (3.10)$$

che è comoda perché permette di riscriverla in termini di frequenza e lunghezza d'onda. Infatti, ricordando che $E = h\nu$ e che $E = h\nu'$ abbiamo

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = h \frac{1 - \cos \theta}{m} \quad (3.11)$$

e scrivendo $\nu = c/\lambda$, $\nu' = c/\lambda'$

$$\lambda' - \lambda = h \frac{1 - \cos \theta}{mc} = \lambda_C (1 - \cos \theta) \quad (3.12)$$

dove $\lambda_C = h/mc$ è chiamata **lunghezza d'onda Compton dell'elettrone** e ha, come deve, le dimensioni fisiche di una lunghezza.

3.4 La misura e il Principio d'indeterminazione

Con la meccanica relativistica si era già capito che la fisica non poteva aver a che fare con quantità assolute, ma con i risultati di una misura, che sono relativi all'osservatore. L'avvento della meccanica quantistica rafforza questa convinzione: non possiamo considerare qualcosa come avente una natura di un tipo o dell'altro in maniera assoluta. Dipende da come si esegue la misura.

L'esecuzione di una misura consiste sempre nel far interagire l'oggetto da osservare con uno strumento. Il fatto che ci sia un'interazione implica l'esistenza di forze che si producono tra strumento e oggetto osservato, per cui lo stato dell'oggetto osservato può risultare alterato dall'applicazione di queste forze. La conseguenza è che quello che si osserva non è mai lo stato in quanto tale, ma lo stato che l'oggetto possiede avendo interagito con lo strumento.

In meccanica classica lo stato di un punto materiale è perfettamente definito quando se ne conoscano contemporaneamente e con precisione arbitraria la posizione e la velocità. La **fisica relativistica** insegna che la velocità v di una particella di massa m non è una buona misura dello stato in quanto in seguito all'applicazione di una forza quel che cambia non è la velocità della particella, ma la sua quantità di moto $p = mv$ (per velocità $v \ll c$, p è la stessa

cosa di v a parte un fattore costante, ma in meccanica relativistica $m = m(v)$). La natura del principio classico però non cambia: per conoscere lo stato di una particella basta conoscerne con precisione infinita la posizione x e la quantità di moto p . Che tecnicamente non sia fattibile (non esistono strumenti che possano misurare una grandezza fisica con precisione arbitraria) non importa: quel che importa è che in linea di principio si possa fare: se conoscessi **esattamente** la posizione e la quantità di moto di un punto materiale al tempo t potrei conoscerne lo stato a un tempo t' successivo (o precedente) a t .

Proviamo ad applicare questo principio all'osservazione di una particella molto piccola come un elettrone legato in un atomo. Per poterne misurare la posizione si potrebbe **illuminare** l'elettrone con una luce opportuna: osservando la luce diffusa da questo se ne ricaverebbe la posizione (che poi è il metodo con il quale osserviamo qualunque cosa con i nostri occhi: al buio non si vede nulla; è la luce diffusa dagli oggetti che ci dice dove sono). Se però la lunghezza d'onda della luce non è abbastanza piccola, il moto dell'onda elettromagnetica non viene perturbato affatto dalla presenza dell'elettrone che è come se non ci fosse. Per osservarlo è necessario usare una lunghezza d'onda sufficientemente piccola: usare quindi una radiazione elettromagnetica come i raggi X o i raggi γ . Ma in questi casi la luce diventa un flusso di particelle di energia $E = h\nu$ che interagiscono con l'elettrone urtandolo e cambiandone quindi la velocità (o meglio la quantità di moto) in seguito all'urto. La misura della posizione dell'elettrone implica l'alterazione del suo stato di moto, dunque è impossibile conoscerne posizione e quantità di moto contemporaneamente. Una delle due grandezze fisiche non è determinabile al di là di una data precisione e non in virtù di un limite tecnologico, ma per ragioni intrinseche al processo di misura.

Il Principio d'indeterminazione afferma proprio questo: il prodotto tra l'indeterminazione sulla posizione e quella sulla quantità di moto di qualunque oggetto non può mai essere nullo! Deve essere sempre maggiore di un numero che, per quanto piccolo, non è mai zero. Se, ad esempio, illuminiamo un

elettrone con una luce di frequenza ν e con numero d'onda k , trasferiamo all'elettrone una quantità di moto (vedi a pag. 33) $\Delta p = \hbar k = \frac{2\pi}{\lambda}$. La lunghezza d'onda λ dev'essere $\lambda \lesssim \Delta x$ per localizzare l'elettrone dunque

$$\lambda = \frac{h}{\Delta p} \lesssim \Delta x \quad (3.13)$$

cioè che

$$\Delta x \Delta p \gtrsim h. \quad (3.14)$$

Il principio² si può riscrivere in un altro modo, dividendo tutto per Δt :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \Delta p = v \Delta p = 2\Delta E \geq \frac{h}{\Delta t} \quad (3.15)$$

e quindi

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{2}. \quad (3.16)$$

Questa relazione indica che misurando l'energia di un particolare stato, questa può avere un'indeterminazione ΔE che dipende dal tempo trascorso per eseguirla. Consideriamo un caso particolare, che consiste nella determinazione della massa di una particella che, come sappiamo, è una misura dell'energia a riposo dello stato. Se la misura si può protrarre per molto tempo Δt tende a infinito, quindi ΔE tende a zero e la misura si può eseguire con precisione arbitraria. È il caso, ad esempio, della misura della massa di un elettrone o di un protone, che assume un valore perfettamente determinato anche se, a causa delle limitazioni tecnologiche, avrà comunque un'indeterminazione di natura statistica.

Se invece misuriamo la massa di una particella instabile come un **muone**, la misura non si può eseguire a un tempo arbitrario: deve essere eseguita entro il tempo di vita della particella. Trascorso tale tempo la particella non esiste più e non se ne può di

²In letteratura si trovano espressioni che possono differire di piccoli fattori da questa, che è stata ricavata attraverso un'approssimazione un po' grossolana; di solito si trova $\Delta x \Delta p \geq \hbar$ o $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$. Quel che conta è però l'ordine di grandezza, insieme alle conseguenze dell'indeterminazione.

certo misurare la massa. In questo caso la sua energia a riposo possiede un'indeterminazione **intrinseca** che ne fa fluttuare la misura di massa entro un limite dell'ordine di $h/2\tau$, dove τ è il tempo di decadimento. Non si tratta di un effetto statistico, ma di un fenomeno quantistico intrinseco nella definizione di massa della particella. Se disponessimo di uno strumento preciso al di là del limite quantistico troveremmo che non tutti i muoni hanno la stessa massa, ma che ognuno ne avrebbe una diversa con una certa distribuzione (simile, anche se non proprio identica, a una gaussiana), la cui larghezza non è determinata da effetti di natura stocastica, ma dalle fluttuazioni quantistiche che determinano l'istante nel quale la particella decade. L'indeterminazione intrinseca della massa di una particella si chiama talvolta **larghezza** della particella: una particella **stretta** è una particella con una vita media lunga (ΔE piccolo, Δt grande), mentre una particella **larga** ha una vita media molto breve.

3.5 Onde di materia

La luce è chiaramente un'onda in certi contesti, ma diventa una particella in altre condizioni. Perché dunque non potrebbe avvenire il contrario? Che quelle che consideriamo naturalmente particelle possano comportarsi come onde in certi contesti? In effetti questo è quel che accade. La frequenza ν di un fotone è legata alla sua quantità di moto p secondo la legge $p = h\nu$. Una particella di quantità di moto p dunque potrebbe comportarsi come un'onda di frequenza

$$\nu = \frac{p}{h}. \quad (3.17)$$

Essendo $\nu = c/\lambda$ dove c è la velocità dell'onda (che in questo caso coincide con la velocità della luce) e λ la sua lunghezza d'onda, possiamo anche scrivere che

$$\frac{\lambda}{c} = \frac{h}{p} \quad (3.18)$$

che in **unità naturali** diventa $\lambda = h/p$ (e ponendo anche $h = 1$, $\lambda = 1/p$).

Se fosse vero si potrebbero realizzare esperimenti nei quali un fascio di particelle (per esempio di elettroni), attraversando un reticolo dovrebbe produrre al di là di esso una figura d'interferenza! Questo effettivamente è ciò che accade. Se si invia un fascio di elettroni prodotti da un tubo catodico su un reticolo molto fine, sullo schermo del tubo catodico non si vede l'immagine delle fenditure come ci si aspetterebbe se gli elettroni fossero particelle, ma una figura di diffrazione con massimi e minimi: segno che gli elettroni si comportano come onde di una certa lunghezza d'onda che interferiscono tra loro attraversando le fenditure del reticolo. Si tratta di una tecnica ormai consolidata che permette, per esempio, di studiare la forma dei reticoli cristallini dei materiali facendo attraversare un campione di quel materiale da un fascio di particelle di energia opportuna, tale da produrre **onde di materia** di lunghezza comparabile con quella del passo reticolare.

Esercizio 3.2 *Microscopi elettronici*

In un microscopio elettronico gli elettroni sono accelerati da una differenza di potenziale di 80 kV. Quanto è migliore il potere risolutivo del microscopio elettronico rispetto a quello ottico?

SOLUZIONE →

Grazie a questo *dualismo onda-particella* si possono realizzare strumenti come i **microscopi elettronici** in cui fasci di elettroni attraversano i campioni da analizzare. La lunghezza d'onda di questi fasci è molto minore di quella della luce e questo permette di ottenere risoluzioni molto più spinte rispetto ai microscopi ottici.

3.6 Gli atomi

Secondo la fisica classica un atomo potrebbe funzionare come un sistema solare in miniatura. Tuttavia, per la meccanica quantistica non è così: gli atomi infatti non si possono osservare con luce visibile per-

ché hanno dimensioni troppo piccole. Per **osservarli** occorre farli interagire con una radiazione di frequenza piú alta che però avrà energia piú alta e produrrà una perturbazione rilevante sul sistema. Non si può osservare un atomo, ma se ne può misurare lo stato quanto interagisce con la radiazione. Misurando la radiazione prodotta dall'interazione se ne può determinare l'energia, ad esempio. Conoscendo l'energia della radiazione incidente possiamo quindi determinare l'energia assorbita dall'atomo (o meglio da uno o piú dei suoi elettroni).

Non ha alcun senso chiedersi *dove* sia un elettrone rispetto al nucleo in un dato sistema di riferimento perché non si può misurare questa quantità. Si può misurare l'energia e quindi ci si può chiedere quale sia l'energia dell'elettrone. Lo stato di un elettrone dunque non è caratterizzato dalla sua posizione e dalla sua velocità, ma dall'energia (e forse da qualcos'altro).

Se un atomo fosse fatto come un sistema solare nulla vieterebbe a due o piú elettroni di stare sulla stessa orbita, e niente impedirebbe a quest'orbita di avere un raggio qualunque. Al contrario sarebbe vietato a due elettroni risiedere esattamente nello stesso punto nello stesso istante (se c'è uno non c'è posto per l'altro): **due elettroni non possono stare contemporaneamente nello stesso stato.**

3.6.1 Gli spettri atomici

Seguendo le prescrizioni di De Broglie possiamo ammettere che un elettrone non sia assimilabile a un punto materiale, ma a un'onda. L'elettrone, in sostanza, non può trovarsi in un determinato punto dello spazio, ma deve in qualche modo *circondare* il nucleo completamente. Non dovremmo immaginare un elettrone come un punto che si muove attorno al nucleo, ma piuttosto come una specie di *oceano* che ricopra completamente la superficie del nucleo, con le sue onde in superficie. In un atomo ci possono essere piú d'uno di questi **oceani elettronici** che si possono anche compenetrare l'uno con l'altro. È come se ci fosse un oceano sopra un altro oceano, la cui superficie attraversa quella dell'altro.

L'onda costituita dalla superficie di questo oceano deve essere stazionaria, perché la superficie deve essere continua. Non può essere che in un punto la superficie di quest'oceano si trova a una certa quota e nel punto adiacente sia molto piú alta o molto piú bassa. L'onda dunque deve avere una lunghezza d'onda λ discreta:

$$n\lambda = n\frac{h}{p} = 2\pi r \quad (3.19)$$

da cui si ricava che

$$n\frac{h}{2\pi} = pr = mvr. \quad (3.20)$$

Chiamando $\hbar = h/2\pi$ si ha che $mvr = n\hbar$. Il prodotto mvr non è altro che il momento angolare classico dell'elettrone, che dunque risulta **quantizzato**: può solo essere un multiplo di \hbar . Se il momento angolare è quantizzato lo è anche l'energia. Prendendo un atomo d'idrogeno (il piú semplice di tutti) l'energia potenziale di un elettrone nel campo del nucleo è

$$U = -k\frac{e^2}{r} \quad (3.21)$$

e quella cinetica vale $K = \frac{1}{2}mv^2$. Se il moto è circolare uniforme abbiamo che

$$m\frac{v^2}{r} = k\frac{e^2}{r^2} \quad (3.22)$$

per cui

$$mv^2 = k\frac{e^2}{r} \quad (3.23)$$

e di conseguenza $K = \frac{1}{2}mv^2 = -U/2$. In definitiva $E = K + U = -U/2 + U = U/2$ e quindi

$$E = -k\frac{e^2}{2r}. \quad (3.24)$$

Ora abbiamo che $r = n\hbar/mv$ e che $v = \sqrt{-2E/m}$ e sostituendo:

$$E = -k\frac{e^2}{2n\hbar}m\sqrt{\frac{-2E}{m}}. \quad (3.25)$$

Eleviamo al quadrato e otteniamo



Figura 3.4 Spettro della luce bianca che ha attraversato una sostanza, la quale ne ha assorbito certe frequenze che appaiono come bande scure nello spettro.

$$E^2 = -k^2 \frac{e^4}{2n^2 \hbar^2} m E \quad (3.26)$$

che divisa per E dà

$$E = -k^2 \frac{e^4}{2n^2 \hbar^2} m. \quad (3.27)$$

Le energie di un elettrone in un atomo non possono essere qualunque. Sono permesse solo le energie pari a una costante divisa per n^2 . Si dice che l'energia di un elettrone in un atomo è **quantizzata**.

Questa circostanza spiega in modo naturale l'osservazione sperimentale secondo la quale gli spettri di assorbimento e di emissione della luce si presentano con delle **righe**. Se si invia luce bianca su un recipiente trasparente che contiene un gas di una particolare specie e, dopo che la luce abbia attraversato il materiale si scompone nei suoi colori attraverso un prisma di vetro o un reticolo, si osserva la *manca* di certi colori (Figura 3.4). Lo **spettro** di assorbimento presenta righe scure in corrispondenza di certi valori della lunghezza d'onda della luce caratteristici della specie atomica contenuta nel recipiente. È così, tra l'altro, che possiamo sapere di cosa siano composti oggetti lontani come le stelle: osservandone lo spettro della luce si vedono righe scure in corrispondenza di certe frequenze che sono di fatto la *firma* degli atomi di cui le stelle sono composte.

Le **righe spettrali** si presentano sempre in modo tale da essere distanziate l'una dall'altra di una quantità che diminuisce come $1/n^2$. Alla luce di quanto sopra è facile spiegare perché: la luce giunge sugli atomi in quanti di energia $E = h\nu$. Il singolo

quanto può essere assorbito o meno: è impossibile sottrargli energia parzialmente perché il quanto è indivisibile. Se questa energia coincide con la differenza di energia tra due possibili stati dell'elettrone dell'atomo il quanto può essere assorbito: in conseguenza di ciò l'energia del fotone è ceduta interamente all'elettrone che passa così da uno stato energetico a uno stato energetico diverso, più elevato. I fotoni di energia pari alla differenza di energia tra due livelli atomici dunque non emergono dal recipiente e in corrispondenza di quelle frequenze osserviamo delle righe scure (assenza di luce di quel colore). Se l'energia è più bassa o più alta rispetto alle differenze di cui sopra, il fotone non può essere assorbito perché l'elettrone non può assumere un'energia pari a quella che aveva inizialmente più quella del fotone. È perciò costretto a restare nel suo stato. Di conseguenza il fotone attraversa indenne il recipiente e noi lo osserviamo provocare sullo spettro una riga di colore pari a quello che compete alla frequenza corrispondente.

3.7 Quantizzazione del momento angolare

Il momento angolare L di un elettrone in un atomo è qualcosa che, almeno in linea di principio, si può misurare facendo interagire l'elettrone con la luce. I risultati che possiamo avere da questa misura sono sempre del tipo $L = n\hbar$. In altre parole i possibili valori di L sono sempre multipli interi di \hbar . Il momento angolare è un vettore e come tale può avere un'orientazione qualsiasi nello spazio. Scelta una direzione potremmo misurare la proiezione del momento angolare su quella direzione. Ma qualunque misura facciamo non possiamo che ottenere un multiplo di \hbar ! Altri valori non sono ammessi per il momento angolare. In ogni caso il valore massimo che potremo misurare è L , quindi nel caso $L = 1$ la proiezione di questo vettore su una qualunque direzione può assumere soltanto i valori $m = +1$, $m = 0$ oppure $m = -1$. Questo accade qualunque sia la scelta della direzione rispetto alla quale decidiamo di misurare il momento angolare.

Quando $L = 2$ i possibili valori che si possono misurare per quella che si chiama la **terza componente del momento angolare**³ sono $m = +2$, $m = +1$, $m = 0$, $m = -1$, $m = -2$. In generale se il momento angolare di un elettrone in un atomo è L si possono misurare valori di proiezione del momento angolare lungo una qualunque direzione compresi tra $-L$ e L e separati di ± 1 .

Complessivamente, per un elettrone nello stato di momento angolare L esistono $2L + 1$ possibili stati diversi della terza componente.

3.8 Lo spin degli elettroni

Per quanto un elettrone non sia affatto assimilabile a una carica puntiforme che ruota attorno a un nucleo positivo, possiede pur sempre una carica elettrica e di certo non è qualcosa di statico, di fermo (se fosse assolutamente fermo avrebbe $p = \Delta p = 0$ e la sua posizione sarebbe completamente indeterminata per il Principio d'indeterminazione). Ci si aspetta dunque che possa risentire dell'effetto dei campi magnetici. Un elettrone *classico* è assimilabile a una corrente che circola lungo una spira che ha un **momento magnetico** proporzionale al suo momento angolare, quindi anche per gli elettroni quantistici dovremmo aspettarci qualcosa del genere. La differenza dovrebbe consistere in una quantizzazione del momento magnetico.

Cerchiamo di capire come si muove un atomo con momento magnetico $\boldsymbol{\mu} = (0, 0, \mu_z)$ in un campo magnetico non uniforme. La sua variazione di energia ΔU è $\Delta U = \boldsymbol{\mu} \cdot \Delta \mathbf{B} = \mu_z \Delta B_z$. Quest'energia è acquistata a spese del lavoro fatto dalle forze cui l'atomo è soggetto nel campo magnetico $L = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s}$. Abbiamo dunque che

$$\mu_z \Delta B_z = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s} = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z. \quad (3.28)$$

Il contributo di $F_x \Delta x + F_y \Delta y$ deve essere mediamente nullo, perché non c'è variazione di energia se $z = \text{cost}$, quindi possiamo scrivere che

³In effetti le stesse considerazioni si applicano a una qualsiasi delle tre componenti del momento angolare.

$$\mathbf{F} = (0, 0, F_z) = \left(0, 0, \mu_z \frac{\Delta B_z}{\Delta z} \right). \quad (3.29)$$

Se quindi \mathbf{B} non è costante lungo la direzione z , ma varia, sull'atomo si produce una forza lungo la stessa direzione. Dal momento che la direzione z è arbitraria lo stesso vale per le altre componenti, quindi, in generale

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) = \left(\mu_x \frac{\Delta B_x}{\Delta x}, \mu_y \frac{\Delta B_y}{\Delta y}, \mu_z \frac{\Delta B_z}{\Delta z} \right). \quad (3.30)$$

Si potrebbe provare quindi a realizzare un campo magnetico per cui B_x e B_y risultano costanti, mentre B_z risulta variabile con z , pertanto un atomo (classico) con momento magnetico qualunque subirà forze dirette lungo z che potranno avere intensità variabile da 0 a $\mu \Delta B_z / \Delta z$, visto che la componente μ_z può assumere valori compresi tra 0 e μ e un verso positivo o negativo. Questo, purtroppo non è possibile a causa delle equazioni di Maxwell. Secondo una di queste equazioni la divergenza di \mathbf{B} è nulla (il che equivale a dire che il flusso attraverso una qualunque superficie chiusa di questo campo è nullo). Questo implica che

$$\frac{\Delta B_x}{\Delta x} + \frac{\Delta B_y}{\Delta y} + \frac{\Delta B_z}{\Delta z} = 0 \quad (3.31)$$

quindi almeno un'altra componente di B deve variare in modo che questa somma sia nulla. Se ammettiamo che B non vari lungo x dev'essere

$$\frac{\Delta B_y}{\Delta y} = -\frac{\Delta B_z}{\Delta z}. \quad (3.32)$$

La traiettoria di questi atomi con velocità iniziale lungo l'asse x in questa regione è curva e dopo aver percorso una data lunghezza nella direzione x raggiungono una coordinata z che è un numero qualunque compreso tra $-z_0$ e $+z_0$. Se si esegue l'esperimento con atomi di varia specie, dal momento che questi non si comportano come atomi *classici*, ma quantistici, si vede che la coordinata raggiunta

dopo aver percorso una distanza x non è un valore qualunque compreso tra due estremi, ma un insieme di valori discreti: il momento magnetico dunque è quantizzato come ci si aspetta per il momento angolare cui dovrebbe essere proporzionale.

Moto di momenti magnetici classici in campi non uniformi

Se un momento magnetico $\boldsymbol{\mu} = (0, 0, \mu_z)$ orientato lungo l'asse z si muove in campo magnetico non uniforme subisce una forza $\mathbf{F} \simeq (0, 0, F_z) = \mu_z (0, 0, \frac{\Delta B_z}{\Delta z})$. Per la Legge di Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ e il moto è dunque accelerato con accelerazione lungo l'asse z . Se $\Delta B_z/\Delta z = cost$, il moto è uniformemente accelerato. Supponiamo che la particella con momento magnetico $\boldsymbol{\mu}$ si muova inizialmente con velocità $\mathbf{v}_0 = (v_0, 0, 0)$ partendo dal punto di coordinate $x_0 = (0, 0, 0)$. L'equazione del moto della particella è dunque

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{2} \mu_z \frac{\Delta B_z}{\Delta z} t^2 \end{cases} \quad (3.33)$$

e dopo aver percorso una distanza L lungo l'asse x si ha $t = L/v_0$ e dunque

$$z = \frac{1}{2} \mu_z \frac{\Delta B_z}{\Delta z} \frac{L^2}{v_0^2} \quad (3.34)$$

Naturalmente, se il momento magnetico dell'atomo fosse nullo la traiettoria sarebbe comunque rettilinea perché l'accelerazione sarebbe nulla e tutti gli atomi andrebbero a urtare nello stesso punto un eventuale bersaglio posto lungo l'asse x .

Questo esperimento fu eseguito da **Otto Stern** e **Walther Gerlach** nel 1922 [8]. Non senza sorpresa, eseguendo l'esperimento con atomi di argento, per i quali $L = 0$, si vide che questi atomi vengono in effetti deviati: alcuni verso l'alto, altri verso il basso, e colpiscono il bersaglio in due punti distinti. Non esistono atomi che attraversano la regione di campo magnetico e sono deviati di una quantità interme-

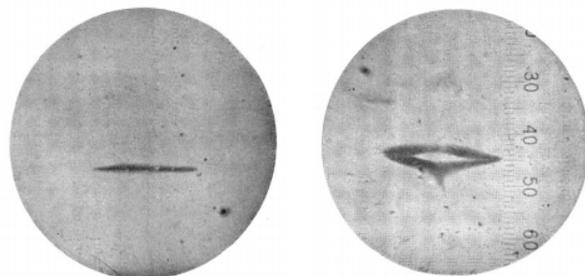


Figura 3.5 Immagini realizzate da Stern e Gerlach inviando fasci di atomi d'argento su una lastra fotografica. A sinistra si vede l'immagine prodotta in assenza di campo magnetico. L'asse z è verticale e quello y orizzontale; l'asse x entra nel piano dell'immagine. In questo caso gli atomi si muovono di moto rettilineo uniforme lungo x e hanno coordinata z pari a zero e coordinata y variabile (il fascio era allargato in questa direzione). Accendendo il campo magnetico (a destra) la riga si separa in due archi ben distinti (l'intensità del campo e della sua variazione lungo z diminuisce progressivamente allontanandosi dal centro).

dia tra queste due. In particolare nessun atomo percorreva la traiettoria attesa: quella rettilinea. Se ne deve concludere che gli elettroni di questi atomi (e quindi tutti gli elettroni) devono possedere un momento magnetico **intrinseco** e dunque un momento angolare **intrinseco**, che non dipende dal fatto di avere una velocità relativa rispetto a qualcos'altro. Questo momento angolare intrinseco è chiamato **spin**.

In alcuni testi la presenza dello spin è associata a una sorta di rotazione dell'elettrone su sé stesso, in analogia a quel che succede per un pianeta che ruota attorno al Sole e attorno al proprio asse: quel pianeta ha un momento angolare $L = mvr$ rispetto al Sole, da cui dista r , e un momento angolare intrinseco che dipende dal fatto di ruotare su sé stesso. Ma

FILMATO NON RIPRODUCIBILE SU QUESTO
SUPPORTO: DIGITA L'URL NELLA CAPTION O
SCARICA L'E-BOOK

Figura 3.6 Animazione dell'esperimento di Stern–Gerlach. Estratto da www.vulgarisation.fr

questa immagine è completamente sbagliata! Non si può parlare di rotazione dell'elettrone su sé stesso, per molte ragioni. Quanto meno, un'eventuale rotazione sarebbe inosservabile per i principi della meccanica quantistica e nella fisica non possiamo utilizzare un concetto privo di senso. Cercare di farsi un'immagine classica di un fenomeno puramente quantistico di solito è il modo peggiore di procedere. Il modo giusto di afferrare il concetto è quello di pensare allo spin come a una grandezza fisica che si può misurare, indipendentemente da come possiamo immaginarci l'elettrone, che ha le dimensioni e il comportamento di una grandezza classica come il momento angolare dovuto alla rotazione, ma che non ha niente a che vedere con questa!

Lo spin è un momento angolare quantistico e quindi i suoi valori differiscono di ± 1 l'uno dall'altro. Avendo osservato solo due valori e l'assenza del valore nullo ne concludiamo che lo spin di un elettrone può assumere solo due valori diversi da zero che non possono che essere, in unità di \hbar , $+\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$.

Un elettrone in un atomo dunque possiede un momento angolare totale J che è la somma del momento angolare orbitale L e del suo spin S : $J = L + S$. Anche J è un momento angolare e deve essere anche lui quantizzato, dunque la somma non si può eseguire banalmente come una comune somma. Il massimo valore del momento angolare totale lo si ha quando L e S sono tra loro paralleli e hanno lo stesso verso. In questo caso le loro terze componenti si sommano e il momento angolare totale effettivamente vale $J = L + S$. Ma L e S potrebbero essere discordi e in questo caso le loro terze componenti si sottrarrebbero dando luogo a un momento angolare totale di modulo pari a $J = |L - S|$. Essendo quantizzato, il momento angolare totale di un elettrone in un atomo può quindi assumere tutti i valori compresi tra

$|L - S|$ e $L + S$, a passi di 1.

Se quindi abbiamo $L = 0$ esiste un solo valore possibile per $J = 1/2$, con due possibili orientazioni: $-1/2$ e $+1/2$. Per $L = 1$ i possibili valori di J vanno da $J = |L - S| = 1/2$ a $J = L + S = 3/2$. I possibili valori della terza componente sono, in un caso $-1/2$ e $+1/2$, nell'altro $-3/2$, $-1/2$, $+1/2$, $+3/2$. Per $L = 2$ i possibili valori di J sono compresi tra $J = |L - S| = 3/2$ e $J = L + S = 5/2$, e sono quindi tre: $3/2$, $4/2 = 2$ e $5/2$. I rispettivi valori delle terze componenti sono, nel caso di $J = 3/2$, $-3/2$, $-1/2$, $+1/2$, $+3/2$; nel caso $J = 2$, -2 , -1 , 0 , 1 e 2 ; nel caso $J = 5/2$, $-5/2$, $-3/2$, $-1/2$, $1/2$, $3/2$, $5/2$.

3.9 Il Principio di Pauli

Sebbene nessuno lo faccia mai notare, in meccanica classica esiste un **Principio di esclusione** molto evidente: due punti materiali non possono avere contemporaneamente lo stesso stato. Lo stato di un punto materiale infatti è completamente determinato quando se ne conoscano contemporaneamente posizione e velocità. È del tutto evidente che due oggetti non possono stare esattamente nello stesso punto dello spazio mantenendo la stessa velocità: se vengono a trovarsi nello stesso punto dello spazio si urtano e devono quindi avere velocità diverse e se hanno velocità diverse, all'istante immediatamente successivo avranno di certo coordinate diverse.

La teoria della relatività impone di cambiare la definizione di stato perché la velocità non è una buona misura dello stato di una particella. Lo stato dev'essere determinato dalla posizione e dalla quantità di moto della particella. La natura del principio però resta.

Con l'avvento della meccanica quantistica anche la definizione relativistica di stato vacilla: posizione e quantità di moto non si possono mai conoscere contemporaneamente e dunque non sono una buona definizione di stato. Lo stato di un oggetto è costituito dall'insieme delle variabili che permettono di determinarne l'evoluzione futura. Nel caso quantistico, due grandezze che si possono misurare contemporaneamente e che permettono di predire

lo stato a un tempo successivo sono, per esempio, l'energia e il momento angolare totale (insieme alla sua terza componente). Se si accetta questo punto di vista (e non si può non accettare dal momento che tutte le evidenze sperimentali vanno in questa direzione), quello che è spesso considerato un Principio astruso e incomprensibile come il **Principio di esclusione di Pauli**⁴ diventa del tutto naturale, trattandosi né più né meno che dello stesso principio di esclusione vigente nella meccanica classica e del tutto comprensibile.

3.9.1 La chimica

Se l'energia di un elettrone in un atomo è limitata a un certo valore (che dipende dal livello occupato n), lo è anche la sua distanza media da questo (la distanza non si può definire, ma il suo valor medio sí). Di conseguenza è limitato anche il momento angolare $L = mvr$. Questo significa che il massimo momento angolare che un elettrone può avere in un atomo, in unità di \hbar è limitato a $\ell \leq \ell_0$, dove ℓ_0 deve dipendere da n perché il limite esiste in quanto conseguenza del fatto che l'energia è limitata. Si può dimostrare che $\ell \leq n - 1$. Gli elettroni con energia minima (quelli con $n = 1$) possono quindi avere soltanto $L = 0$, mentre quelli di energia superiore (con $n = 2$) possono avere sia $L = 0$ che $L = 1$, e così via.

La **tavola periodica** di **Mendeleev** (Fig. 3.7) si spiega molto bene alla luce di questa teoria. La posizione nella tavola di ogni elemento ne fornisce la **valenza**, che è sempre un numero intero. Alcuni elementi si combinano in modo tale che la somma delle rispettive valenze faccia 2, altri in modo che faccia 8, altri ancora 10 e così via. Da dove vengono questi numeri magici?

È molto semplice: un atomo d'idrogeno ha un solo elettrone che, trovandosi nello stato di energia più bassa possibile potrà avere solo $L = 0$. Per il Principio di esclusione di Pauli solo un altro elettrone può trovare posto in questo stesso stato di energia e momento angolare: quello con lo spin rivolto nella

direzione opposta. Per questa ragione l'idrogeno è **monovalente**. Non c'è più posto per altri elettroni in questo stesso stato. In effetti se un elettrone avesse un momento angolare maggiore, avrebbe anche un'energia più alta.

L'elio ha due elettroni che possono stare nello stato con $L = 0$, che a questo punto è saturo. L'elio è infatti un gas nobile che non reagisce chimicamente con altri elementi. Aggiungendo un elettrone si ha il litio. Poiché nello stato di minima energia non c'è posto per tre elettroni, ma per due, il terzo deve trovarsi in uno stato di energia più elevata con L però che può ancora essere pari a 0. In questo stato c'è di nuovo posto per un altro elettrone e il litio è monovalente come l'idrogeno. Il berillio ha quattro elettroni che saturano lo stato di energia più alto con $L = 0$, ma questo stato può avere anche elettroni con $L = 1$. Quindi il berillio non è un gas nobile, ma ha valenza 2 e si lega a elementi con valenza 6 (o due con valenza 3). Sono infatti 8 i possibili stati di momento angolare per elettroni di energia pari a quella dell'elettrone più energetico del berillio: due per $L = 0$ e sei per $L = 1$. In questo stato c'è posto fino a 8 elettroni e fino a quando lo stato non è saturo è sempre possibile che un altro elettrone possa piazzarsi. Dopo il berillio vengono infatti il boro, il carbonio, l'azoto l'ossigeno, il fluoro e il neon, per un totale di otto possibili elementi in questa riga. Tutti questi elementi hanno in comune l'energia massima dei propri elettroni e un numero di elettroni in questo stato energetico variabile tra 1 e 8. Il neon, che ne ha otto, è un gas nobile. Il fluoro ne ha sette, dunque può accettare un elettrone da parte di un altro atomo e per questo è monovalente. La riga successiva comincia col sodio, che è monovalente perché ha un solo elettrone nello stato più esterno. Il penultimo elemento di questa riga è il cloro, che ne ha sette. Avvicinando un atomo di cloro a uno di sodio, l'elettrone del sodio non può più dire di appartenere al sodio: in effetti si troverà a essere **distribuito** attorno al nucleo di cloro e di sodio al tempo stesso. Lo stesso vale per gli elettroni del cloro e così si forma il legame chimico. La riga successiva contiene molti più elementi: per la precisione ce ne sono dieci in più. In effetti gli elet-

⁴Dal nome del fisico **Wolfgang Pauli**.

troni piú energetici degli atomi della riga del sodio, avendo $n = 3$, dovrebbero avere $L = 0, 1$ o 2 . Ci aspetteremmo quindi non otto, ma $8 + 15 = 23$ elementi diversi. Il fatto è che la configurazione nella quale l'energia è piú alta, ma il momento angolare è piú basso risulta favorita rispetto a quella con energia piú bassa e momento angolare alto, perciò gli elementi della terza riga hanno gli elettroni negli stati $L = 0, 1$, ma non $L = 2$. Questa configurazione è sfavorita rispetto a quella in cui un elemento ha ancora $L = 0$, ma energia piú alta, corrispondente al caso del potassio. Gli elementi con $Z = 21$ fino a $Z = 30$, che sono 10, sono proprio quelli che hanno energia piú bassa, ma momento angolare piú alto, pari a $L = 2$. Combinandosi con lo spin, questo fa $J = 3/2$, $J = 2$ o $J = 5/2$. Ancora una volta gli stati con $J = 3/2$ e $J = 5/2$ sono favoriti rispetto a quelli con $J = 2$. Questi stati sono proprio 10 e per questo dopo lo zinco ($Z = 30$) viene il gallio, a $Z = 31$ con $L = 1$ ed energia maggiore.

Al crescere dell'energia e di L le configurazioni possibili si complicano, ma resta una certa regolarità per la quale comunque sono favorite sempre le configurazioni con $L = 0$ e $L = 1$, che danno sempre otto possibili combinazioni. Talvolta le combinazioni possono essere di piú, ma non sono così frequenti: per questo la maggior parte degli elementi reagisce con altri in modo tale che la somma delle valenze faccia per lo piú otto: la somma delle valenze non è altro che il numero massimo di elettroni che trovano posto nello stato di massima energia possibile per quegli elementi.

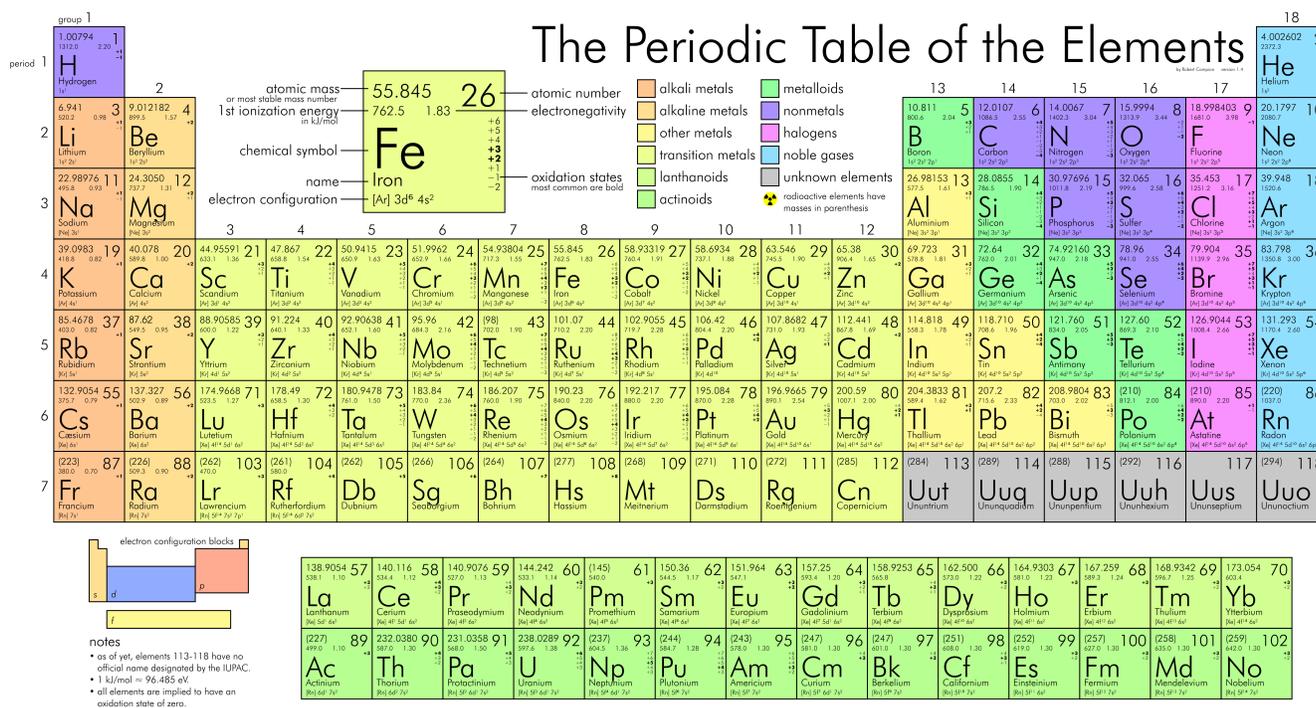


Figura 3.7 La tavola periodica degli elementi chimici.

3.9.2 Semiconduttori

Se pensate che la meccanica quantistica non abbia alcun interesse pratico vi sbagliate di grosso! Infatti questo tipo di fisica è alla base del funzionamento dei semiconduttori con i quali sono realizzati tutti gli apparati elettronici: dal telecomando dell'auto al tablet.

Un atomo di silicio è un atomo che nello stato energetico più elevato ospita quattro elettroni. C'è posto dunque per altri quattro. I quattro elettroni presenti hanno tutti la stessa energia, ma momento angolare diverso. La forza con la quale il nucleo *trattiene* gli elettroni attorno a sé è abbastanza forte e un cristallo di silicio si comporta in genere come un **isolante**: applicando una differenza di potenziale gli elettroni non si muovono, perché trattenuti dalle forze Coulombiane che esercitano i nuclei del materiale, e la **corrente** non passa. Se si scaldasse il silicio a una temperatura sufficientemente alta oppure fosse illuminato da una radiazione ultravioletta, gli elettroni acquisterebbero energia sufficiente a portarsi nello stato di energia più elevato. Sarebbero così meno legati al nucleo e più liberi di muoversi. Applicando una differenza di potenziale quindi si osserverebbe il passaggio di corrente. Da isolante, il silicio diventa conduttore.

In un cristallo di silicio gli elettroni però non sono distribuiti nello stesso modo che in un atomo. Per capire come mai, supponiamo che il silicio abbia un solo elettrone e che se ne possa trovare uno solo in un determinato stato di energia: è un'ipotesi semplificativa che tuttavia non cambia la sostanza del meccanismo. Un atomo sarebbe dunque formato da un nucleo circondato dal suo elettrone. Due atomi diversi di silicio avrebbero i due elettroni nello stesso stato, di energia

$$U = -kZ \frac{e^2}{r} \quad (3.35)$$

dove r è la distanza media tra nucleo ed elettrone. Quando i due atomi si avvicinano, però, l'elettrone dell'uno sente, oltre al campo Coulombiano del proprio nucleo, anche quello dell'altro e quello pro-

dotto dall'altro elettrone (che ha segno opposto). L'energia dell'elettrone diventa quindi

$$U = -kZ \frac{e^2}{r_1} - kZ \frac{e^2}{r_2} + k \frac{e^2}{r_3} \quad (3.36)$$

dove r_i sono le distanze, rispettivamente, dal nucleo, dall'altro nucleo e dall'altro elettrone. È evidente che l'energia di ogni elettrone cambia rispetto alla configurazione precedente e dal momento che anche in questo caso l'energia dell'elettrone sarà quantizzata avremo degli stati di energia discreti

$$E_n = -\frac{A}{n^2}, \quad (3.37)$$

con A costante. Non essendo possibile per due elettroni stare nello stesso stato, ognuno dovrà piazzarsi in uno stato diverso: un elettrone assume l'energia più bassa possibile (per $n = 1$), mentre l'altro quella immediatamente superiore (per $n = 2$). Nessuno dei due elettroni potrà più dire a quale nucleo appartiene: di fatto ogni elettrone *circonda* tutti e due i nuclei.

Se avviciniamo un terzo atomo accadrà qualcosa di simile: i tre elettroni si troveranno ciascuno in un livello energetico diverso, separato dagli altri da un intervallo di energie proibite. È facile capire che all'aumentare degli elettroni la perturbazione che si provoca sull'energia di ciascuno diventa via via più piccola e quindi la *distanza* tra i livelli energetici diminuisce sempre di più. In altre parole, con due nuclei i primi due livelli sono separati di

$$\Delta E_2 = -A_2 \left(\frac{1}{4} - 1 \right), \quad (3.38)$$

mentre con N nuclei la separazione tra i livelli diventa

$$\Delta E_N = -A_N \left(\frac{1}{4} - 1 \right), \quad (3.39)$$

dove $A_N \ll A_2$ e A_N tende a zero man mano che aumenta N . In un cristallo ci sono dell'ordine di $N_A \simeq 6 \times 10^{23}$ (un **numero di Avogadro**) atomi, perciò i livelli energetici occupati dagli elettroni, pur discreti, sono talmente fitti da costituire una vera e propria **banda** continua. In certe condizioni

FILMATO NON RIPRODUCIBILE SU QUESTO
SUPPORTO: DIGITA L'URL NELLA CAPTION O
SCARICA L'E-BOOK

Figura 3.8 Cristalli di tipo p e n conducono l'elettricità in modi diversi: nei primi sono le lacune (positive) a condurre l'elettricità; nei secondi sono gli elettroni (negativi) [<https://www.youtube.com/watch?v=reaizv3jjCY>].

è possibile che esista una banda di energie permesse separata da un'altra banda di energia permesse da un intervallo di energie proibite. Se gli elettroni si trovano tutti nella prima banda (detta **banda di valenza**) il materiale si comporta come un isolante, mentre se alcuni elettroni si trovano nella banda superiore (detta **banda di conduzione**) il materiale diventa conduttore. Il silicio naturale avrebbe tutti gli elettroni nella banda di valenza e dunque sarebbe un isolante.

Se però inserisco nel reticolo cristallino, di tanto in tanto, alcuni atomi di Arsenico (che di elettroni ne ha cinque), quattro di questi trovano posto nella banda di valenza e uno in quella di conduzione (o nelle immediate vicinanze). Il cristallo così formato (che si dice **drogato di tipo n**) è quindi un conduttore a temperatura ambiente.

Se, al contrario, s'inseriscono nel reticolo atomi di Boro (trivalente), i tre elettroni che possiede nello stato di energia più alta finiscono tutti nella banda di valenza (in realtà appena un po' più su, ma la sostanza non cambia) dove ci sarebbe posto per un elettrone che non c'è. Esiste dunque un livello energetico tra i tanti libero da elettroni. Il cristallo si dice **drogato di tipo p**. Il motivo è presto spiegato: se si applica una differenza di potenziale ai capi di questo cristallo gli elettroni nella banda di valenza acquistano un po' di energia, che non è sufficiente a farli passare nella banda di conduzione, ma è abbastanza per far passare un elettrone dal livello, diciamo E_n al livello E_{n+1} , infinitamente vicino. Questo può avvenire solo se il livello di energia E_{n+1} è vuoto, e se avviene quello di energia E_n

si svuota. Il processo si può reiterare a piacere e la conseguenza netta è che la **mancanza** di un elettrone (quella che si chiama una **lacuna**) passa da un livello a un altro in modo esattamente opposto a quel che farebbe un elettrone. È come se nel cristallo fosse presente una carica positiva che, sotto l'azione della differenza di potenziale applicata, si sposta nel cristallo in modo opposto a come fa un elettrone. Per questo il cristallo si dice di tipo p : le cariche che conducono la corrente sono **positive**⁵.

3.9.3 Il diodo

Se si fa crescere un cristallo drogato di tipo p sopra un cristallo drogato di tipo n , all'interfaccia tra i due alcune cariche negative sono libere di muoversi da un lato, mentre dall'altro esistono alcuni stati di bassa energia liberi da elettroni. Per un elettrone libero di muoversi nel cristallo n è quindi molto facile occupare il livello vuoto presente nel cristallo di tipo p , ma una volta *caduto* in quel livello diventa sostanzialmente immobile non essendo più possibile, per lui, cambiare energia dal momento che tutti gli stati di energia vicini sono occupati. Viceversa, nel cristallo di tipo n si produce una lacuna nella banda di conduzione, perché quello stato è stato abbandonato da un elettrone.

Di fatto si produce una condizione per cui all'interfaccia tra un cristallo e l'altro, si trova uno strato di cariche negative in eccesso nel cristallo p e un eccesso di cariche positive (lacune) nel cristallo n (il cristallo di tipo n è elettricamente neutro perché dove si trovano gli atomi di arsenico ci sono 5 protoni e altrettanti elettroni: se un elettrone abbandona il cristallo per passare nell'altro si crea uno squilibrio di cariche).

Il dispositivo così formato è un **diodo**. I diodi funzionano come valvole idrauliche: fanno passare la corrente in un verso, ma non nell'altro. Se infatti si collega il polo positivo di una pila al cristallo di tipo n e quello negativo al cristallo di tipo p gli elettroni nel cristallo tenderanno a muoversi nel verso

⁵Notate che in questo caso la corrente è sempre dovuta al moto degli elettroni, che però sono nella banda di valenza.

FILMATO NON RIPRODUCIBILE SU QUESTO
SUPPORTO: DIGITA L'URL NELLA CAPTION O
SCARICA L'E-BOOK

Figura 3.9 Un diodo funziona come una valvola idraulica: lascia passare la corrente che scorre in un verso, ma non quella che scorre nell'altro [<https://www.youtube.com/watch?v=y2htodNi8xI>].

che va dal cristallo p al cristallo n . Nel far questo troveranno all'interfaccia uno strato di elettroni che li respingerà impedendo loro di passare, da un lato; dall'altro lo strato di cariche positive tenderà a trattenere gli elettroni. Se invece il diodo si **polarizza** al contrario gli elettroni possono muoversi dal cristallo n al cristallo p : questo moto è addirittura favorito dallo strato di cariche positive presenti all'interfaccia e quindi il cristallo conduce.

Con uno strumento così si possono fare molte cose: ad esempio i sensori delle fotocamere digitali. Se si espone un diodo alla luce, per **effetto fotoelettrico** alcuni elettroni si liberano e passano nella banda di conduzione. Ma questi ricadono presto nella banda di valenza e comunque si muovono in tutte le direzioni possibili rendendo nulla la corrente fotoelettrica media. Se però il diodo è polarizzato in modo da non condurre corrente, gli elettroni del cristallo non si spostano, ma quelli che sono stati portati nella banda di conduzione dall'energia della radiazione luminosa, si muovono tutti coerentemente dal polo negativo a quello positivo della pila. In questo modo si produce una sia pur debole corrente proporzionale all'intensità della luce che ha colpito il **pixel** di silicio. Le fotocamere digitali dunque possono funzionare solo grazie alla meccanica quantistica che permette l'effetto fotoelettrico e la formazione delle bande: se l'energia degli elettroni in un atomo potesse assumere ogni valore possibile i diodi non si potrebbero costruire.

FILMATO NON RIPRODUCIBILE SU QUESTO
SUPPORTO: DIGITA L'URL NELLA CAPTION O
SCARICA L'E-BOOK

Figura 3.10 Il funzionamento di un transistor è analogo a quello di uno *sciacquone* [<https://www.youtube.com/watch?v=IQJnGhsWfWc>].

3.9.4 Il transistor

Con tre cristalli di tipo alternato (*nnp* o *pnp*) si fanno, invece, i **transistor**, che funzionano come **amplificatori** di corrente. I tre semiconduttori sono collegati ad altrettanti conduttori detti, rispettivamente **emettitore**, **base** e **collettore**. I transistor amplificano la corrente che s'inietta nella loro base. Dal momento che la carica elettrica si conserva non è evidentemente possibile moltiplicare davvero il numero di cariche che circolano nel transistor, ma si può creare l'*illusione* che questo sia possibile.

Possiamo immaginare il funzionamento di un transistor come quello di una coppia di valvole idrauliche montate al contrario⁶ (vedi il Filmato 3.10) e il suo funzionamento come quello di uno **sciacquone**. L'emettitore di un transistor si collega a una pila che non è altro se non una riserva di cariche, analogamente alla cassetta di scarico di un bagno che serve per immagazzinare acqua. Collegando il dispositivo di scarico a un secchiello (che funge da base del transistor) possiamo provocarne l'attivazione introducendo acqua nel secchiello (dovete pensare a uno di quei sciacquoni con la catena che ormai non s'usano più). Il peso dell'acqua provoca l'apertura della valvola che fa cadere l'acqua dalla cassetta/emettitore al water/collettore.

A fronte di un modesto quantitativo d'acqua nel secchiello/base, vediamo scorrere tanta acqua nel water/collettore. È come se avessimo moltiplicato la quantità d'acqua versata per un fattore, ma naturalmente l'acqua che scorre nel water è quella pre-

⁶In un certo senso si potrebbe immaginare come una coppia di diodi montati al contrario l'uno rispetto all'altro, ma in questo caso la presenza del conduttore tra l'uno e l'altro impedirebbe al sistema il funzionamento come transistor.

levata dalla cassetta che non ha niente a che vedere con quella introdotta nel dispositivo. Come la cassetta, anche la pila di un transistor infatti si scarica con l'uso.

I transistor sono l'elemento principale con il quale si costruiscono i circuiti integrati che si trovano, a milioni, in ogni dispositivo elettronico. Anche il transistor è un dispositivo quantistico perché anche il suo funzionamento dipende dalla struttura a bande caratteristica di questo tipo di fisica. La meccanica quantistica, insomma, è molto meno esotica di quanto si creda!

3.10 L'equazione di Schrödinger

Tutte le evidenze sperimentali suggeriscono che gli oggetti di cui è costituito l'Universo sono descrivibili matematicamente in termini di onde e di particelle al tempo stesso. Inoltre la fisica può solo aver a che fare con grandezze **misurabili**. Il processo di misura dunque è parte essenziale dell'evoluzione di un sistema fisico che deve essere descritto in termini dei risultati di una misura.

Una delle grandezze fisiche che si possono misurare su uno stato ψ che descrive un sistema fisico è l'energia. La misura consiste nell'interazione con uno strumento che dà come risultato il valore dell'energia dello stato E . Possiamo rappresentare l'interazione con un **operatore** matematico H **moltiplicato** per lo stato stesso: $H\psi$. Il risultato dell'applicazione di quest'operatore non può che essere il risultato della misura E che, per ragioni dimensionali, deve includere lo stato ψ . Possiamo dunque scrivere che

$$H\psi = E\psi \quad (3.40)$$

dove E è un numero reale, mentre H è qualcosa che si applica a ψ e dà come risultato E moltiplicata per ψ . Se rappresentiamo lo stato di una particella come un'onda possiamo scrivere che

$$\psi = \psi(x) = A \sin(kx + \phi) \quad (3.41)$$

dove k è il numero d'onda e ϕ una fase arbitraria. Il numero d'onda è legato alla lunghezza d'onda dalla relazione

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3.42)$$

che in meccanica quantistica e in unità naturali altro non è che la quantità di moto della particella p (vedi equazione (3.18)). Possiamo quindi scrivere che, in assenza d'interazioni e per velocità non relativistiche,

$$H A \sin(kx + \phi) = E A \sin(kx + \phi) = \frac{p^2}{2m} A \sin(kx + \phi). \quad (3.43)$$

Applicare l'operatore H a ψ dunque deve risultare nella moltiplicazione di questo per $p^2/2m = k^2/2m$, cioè $H = p^2/2m$. Le dimensioni fisiche sono quelle che ci si aspettano (quelle di un'energia) ed è abbastanza naturale estendere la definizione di H nel caso in cui sia presente un campo di forze il cui potenziale sia V come

$$H = \frac{p^2}{2m} + V, \quad (3.44)$$

per la quale avremo che

$$\left(\frac{p^2}{2m} + V\right)\psi = E\psi \quad (3.45)$$

nota come **equazione di Schrödinger**⁷ Osserviamo che la derivata di ψ rispetto a x vale

$$\frac{d\psi}{dx} = kA \cos(kx + \phi) \quad (3.46)$$

e quindi la derivata seconda

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2 A \sin(kx + \phi), \quad (3.47)$$

pertanto possiamo dire che la quantità di moto in fisica quantistica altro non è se non i volte la derivata rispetto a x dello stato dal momento che dividendo tutto per $-2m$ abbiamo

⁷Dal nome del fisico **Erwin Schrödinger** che la propose.

$$-\frac{1}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{k^2}{2m} \psi \quad (3.48)$$

che riproduce l'equazione (3.43) se ammettiamo che

$$p = i \frac{d}{dx}. \quad (3.49)$$

Il suo quadrato infatti è

$$p^2 = \left(i \frac{d}{dx} \right)^2 = -\frac{d^2}{dx^2} \quad (3.50)$$

e si può pensare ad H non come a un semplice numero che moltiplica lo stato, ma come un'operazione che consiste nel calcolare la derivata seconda dello stato rispetto alle coordinate, moltiplicata per $1/2m$.

Nell'equazione di Schrödinger lo stato ψ , che è una funzione di x è rappresentato come una **funzione d'onda**. Se si integra su tutto l'asse x il secondo membro dell'equazione di Schrödinger si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} E\psi(x)dx. \quad (3.51)$$

Integrare su tutto l'asse x significa misurare tutte le possibili energie che la particella rappresentata da $\psi(x)$ può avere nei diversi punti dello spazio e sommarle tra loro, pesandole con ψ . Se si impone che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx = 1 \quad (3.52)$$

l'integrale sopra non è altro che il valor medio dell'energia quando la funzione di distribuzione di probabilità dei suoi valori è $\psi(x)$. Di conseguenza il modulo quadro di $\psi(x)$, $|\psi(x)|^2$ si può interpretare come la probabilità di trovare la particella nel punto x . Quando dunque scriviamo lo stato di una particella come una funzione d'onda diciamo che la particella, fino a che non si esegue una misura, si trova ovunque nello spazio con probabilità diverse (che possono anche essere nulle). Questa interpretazione della funzione d'onda è coerente con quanto visto sopra. Consideriamo, per esempio, l'esperimento della doppia fenditura nel quale s'invia un

fascio di elettroni su uno schermo con due sottili fenditure. Prima di arrivare allo schermo gli elettroni non sono localizzati (se la sorgente è molto lontana) e quindi la loro funzione d'onda si estende in tutto lo spazio: ogni singolo elettrone è **ovunque** dietro lo schermo. Giungendo sullo schermo, quest'ultimo di fatto *esegue una misura* della posizione degli elettroni. Al di là dello schermo la funzione d'onda di un elettrone è di fatto nulla dappertutto tranne che in corrispondenza delle fenditure dove la probabilità di trovare l'elettrone è diversa da zero. Ma attenzione! Non si tratta semplicemente del fatto che **noi** non conosciamo la sua posizione: il fatto è che la sua posizione non è determinata e si trova con probabilità $1/2$ e contemporaneamente in corrispondenza dell'una e dell'altra fenditura. Solo così è possibile che, propagandosi al di là di queste, le due funzioni d'onda, che a questo punto hanno fronti semicircolari, interferiscono tra loro e, giungendo su un altro schermo, producono una figura d'interferenza. Rivelare gli elettroni sullo schermo equivale a misurare la loro posizione: ogni elettrone risulterà essere a una certa posizione con una probabilità che dipende da come hanno interferito le onde prodotte dalle due fenditure, quindi di fatto la figura d'interferenza è una rappresentazione del modulo quadro di ψ .

È utile rappresentare la funzione d'onda sfruttando la proprietà dell'equazione di Schrödinger di essere lineare. Se infatti $A \sin(kx + \phi)$ è una soluzione lo è anche $B \cos(kx + \phi)$ e dunque lo è anche una combinazione lineare delle due:

$$\psi = A \sin(kx + \phi) + B \cos(kx + \phi). \quad (3.53)$$

Il modulo quadro di ψ deve valere 1 quindi A e B si devono scegliere in modo tale da soddisfare questa condizione. Un modo semplice d'imporre questa condizione consiste nello scrivere la soluzione generale come

$$\psi = \sin(kx + \phi) + i \cos(kx + \phi). \quad (3.54)$$

Il modulo quadro di ψ è $\psi\psi^*$, dove ψ^* rappresenta il complesso coniugato di ψ :

$$\psi^* = \sin(kx + \phi) - i \cos(kx + \phi). \quad (3.55)$$

In questo modo la condizione di normalizzazione (3.52) è automaticamente soddisfatta. Usando infine le [formule di Eulero](#) possiamo scrivere la funzione d'onda come

$$\psi = e^{i(kx + \phi)} \quad (3.56)$$

Allo stesso modo si spiega un altro fenomeno curioso: un elettrone libero ha spin che può esistere in due stati: $+\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$. Se misuriamo lo spin di un elettrone usando un apparato tipo quello di Stern e Gerlach orientato per esempio in modo l'asse z sia verticale, possiamo dire se ha spin $+\frac{1}{2}$ o spin $-\frac{1}{2}$, mentre prima della misura dobbiamo ammettere che si trovi in uno stato che si può rappresentare come

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| +\frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \left| -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (3.57)$$

dove i fattori $1/\sqrt{2}$ servono a garantire che la probabilità di trovare l'elettrone in uno stato o nell'altro sia 1. Supponendo d'aver misurato lo stato $+\frac{1}{2}$ lo stato diventa

$$\psi = \left| +\frac{1}{2} \right\rangle. \quad (3.58)$$

Se ora l'elettrone continua a propagarsi ed eseguiamo nuovamente una misura non possiamo che ritrovare lo stesso stato. Ma se l'apparato di Stern e Gerlach è ruotato di 90° rispetto al primo (lo disponiamo quindi in modo da avere l'asse z orizzontale) misuriamo una grandezza fisica diversa: la componente dello spin in una direzione diversa. Dal momento che questa prima non era mai stata misurata l'elettrone si trova in uno stato composto dalla sovrapposizione dei due stati e quindi nuovamente la sua funzione d'onda diventa

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| +\frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \left| -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (3.59)$$

dove ora gli spin sono misurati in una direzione diversa. Classicamente dovremmo aspettarci un valore

nullo per lo spin in direzione perpendicolare a quella misurata in precedenza, ma questo non è possibile perché il valore zero non è ammesso tra i possibili risultati di una misura. Misureremo quindi, con uguale probabilità, uno spin orientato a destra o a sinistra, benché immediatamente prima abbiamo accertato che quest'ultimo era orientato in su o in giù.

Un'onda che si propaga, oltre a essere funzione dello spazio, è anche funzione del tempo perciò possiamo scrivere $\psi = \psi(t)$ e rappresentare ψ come

$$\psi = \psi(t) = e^{-i(\omega t + \phi)} \quad (3.60)$$

Facendo la derivata della funzione d'onda rispetto al tempo si trova

$$\frac{d\psi}{dt} = -i\omega e^{-i(\omega t + \phi)} = -2i\pi\nu e^{-i(\omega t + \phi)}. \quad (3.61)$$

Dividendo per 2π e moltiplicando per $i\hbar$, ricordando che $\hbar = h/2\pi$ e che $E = h\nu$, si ottiene

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = E e^{-i(\omega t + \phi)} = H\psi. \quad (3.62)$$

avendo sfruttato l'equazione di Schrödinger che ci dice che $E\psi = H\psi$. Quest'ultima equazione prende il nome di **equazione di Schrödinger dipendente dal tempo** e rappresenta l'analogo di $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ della meccanica classica. Con quest'equazione, infatti, si può calcolare l'evoluzione temporale di uno stato, conoscendo lo stato iniziale.

Fisicast

La meccanica quantistica è argomento dei seguenti podcast di Fisicast:

Il transistor <http://www.radioscienza.it/2013/05/09/il-transistor/>

L'effetto fotoelettrico <http://www.radioscienza.it/2012/11/22/leffetto-fotoelettrico/>

La Meccanica Quantistica nel mio cellulare
<http://www.radioscienza.it/2013/03/22/la-meccanica-quantistica/>

Una storia esemplare

La storia della fisica delle particelle è esemplare da molti punti di vista: le tappe che hanno portato i fisici a formulare l'attuale modello della fisica delle particelle illustrano in maniera emblematica il progresso scientifico e le modalità con le quali si attua.

La nascita della fisica delle particelle si può far risalire ad anni diversi, che vanno dai primi del 1900 agli anni '30 del XX secolo, secondo le preferenze dei diversi autori. Noi stabiliremo la data di nascita della fisica delle particelle all'anno 1912, nel corso del quale il fisico austriaco **Viktor Hess** dimostrò l'esistenza dei **raggi cosmici**.

I raggi cosmici furono scoperti cercando di rispondere a una domanda all'apparenza del tutto irrilevante: perché gli oggetti elettricamente carichi, prima o poi si scaricano? Siamo certi che la maggior parte dei lettori penseranno che sia del tutto normale che ciò avvenga e che pochissimi avrebbero considerato l'opportunità di dare risposta a una domanda così apparentemente insignificante. E invece, come già accaduto in altre occasioni, il tentativo di rispondere a questa domanda diede vita a una serie di scoperte sorprendenti e alla nascita di una disciplina completamente nuova!

4.1 La scarica degli elettroscopi

All'inizio del XX secolo gli **elettroscopi** erano strumenti piuttosto diffusi nei laboratori di fisica. Già da tempo si era notato che, una volta caricati, dopo alcune ore perdevano la loro carica. Come sempre, quando si osserva un fenomeno, questo deve essere

spiegabile in termini fisici e la scarica di un elettroscopio è uno di questi. Se un elettroscopio si scarica vuol dire che perde progressivamente le cariche elettriche che si trovano distribuite sulla superficie delle sue parti conduttrici.

Per rimuovere tali cariche è necessaria la presenza di una qualche forza, di natura elettrica, che modifichi lo stato di carica del sistema in esame. Occorre dunque individuare la sorgente di tale forza. È abbastanza naturale aspettarsi che la sorgente debba essere una carica elettrica che attrae le cariche presenti sull'elettroscopio, strappandole da questo. Una tale carica si potrebbe naturalmente trovare all'interno dei laboratori dove si fanno gli esperimenti, per molti motivi. Vennero così avviate campagne di misura per determinare quali potessero essere le possibili sorgenti.

Gli elettroscopi venivano schermati con materiali diversi, portati in luoghi diversi, il più possibile lontano da cariche elettriche libere. In tutti i casi l'osservazione sperimentale era la stessa: tutti gli elettroscopi, indipendentemente dalle condizioni nelle quali si trovavano, andavano progressivamente scaricandosi.

La recente scoperta della **radioattività naturale** portò alcuni scienziati a ipotizzare che la scarica degli elettroscopi fosse da imputare alla presenza di materiali radioattivi, sempre presenti sulla crosta terrestre, che emettevano **raggi β** o **raggi α** che, essendo elettricamente carichi, avrebbero potuto interagire con gli elettroscopi provocandone la scarica. Si cercò allora di verificare quest'ipotesi, misurando il tasso di ionizzazione in luoghi nei quali l'abbondanza di elementi radioattivi era nota. Ci si aspettava, naturalmente, che la ionizzazione (e quindi la



Figura 4.1 Domenico Pacini al lavoro (1910).

FILMATO NON RIPRODUCIBILE SU QUESTO SUPPORTO: DIGITA L'URL NELLA CAPTION O SCARICA L'E-BOOK

Figura 4.2 Caricando elettrostaticamente un elettroscopio si osserva che, dopo un tempo piú o meno lungo, perde tutta la sua carica [<http://www.youtube.com/watch?v=eI189swyr7Q>]. Anche se completamente isolato.

rapidità di scarica degli elettroscopi) fosse piú intensa laddove gli elementi radioattivi erano abbondanti, come certe miniere. E invece il risultato fu inconcludente, perché non si riuscì a correlare la ionizzazione con l'abbondanza degli elementi ritenuti responsabili.

Da queste misure si poteva dedurre che la causa della ionizzazione non fosse da ricercarsi in elementi presenti nella crosta terrestre. Fu così che l'italiano **Domenico Pacini** decise di eseguire misure di ionizzazione sott'acqua, a diverse profondità. Pacini eseguì svariate misure sia in acqua salata, al largo di **Livorno**, che in acqua dolce, nel **Lago di Bracciano**, per escludere eventuali effetti dovuti alla presenza di sali disciolti nell'acqua. In entrambi i casi, Pacini ottenne il risultato secondo il quale la ionizzazione diminuiva con la profondità. In un articolo [9] ap-

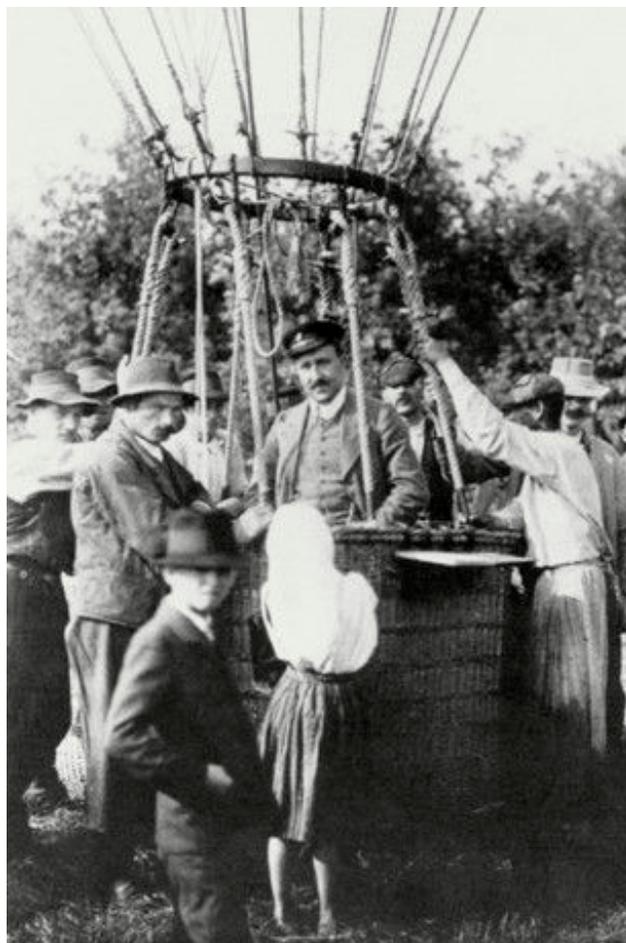


Figura 4.3 Viktor Hess a bordo del pallone aerostatico poco prima di partire per una delle sue campagne di misura.

parso sul **Nuovo Cimento** nel 1912, Pacini concludeva che “*esista nell'atmosfera una sensibile causa ionizzante, con radiazioni penetranti, indipendente dall'azione diretta delle sostanze radioattive del terreno.*”. I raggi ionizzanti, infatti, dovevano essere assorbiti dall'acqua e quindi, se fossero stati presenti al di sopra della superficie di questa, man mano che si scendeva in profondità si doveva misurarne sempre meno.

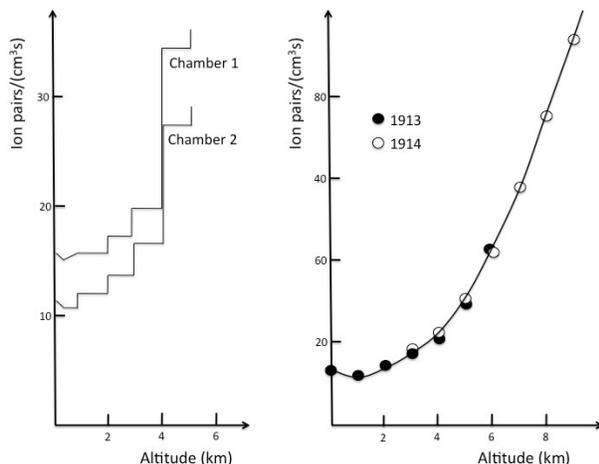


Figura 4.4 Misure di ionizzazione eseguite da Hess nel 1912, in funzione della quota raggiunta dal pallone con a bordo gli strumenti. A destra sono mostrate le misure, piú precise, eseguite negli anni successivi da **W. Kolhörster**.

4.2 La scoperta dei raggi cosmici

Purtroppo per Pacini, la conclusione, pur corretta, non era completa. Egli, infatti, attribuì all'atmosfera il ruolo di *contenitore* degli agenti ionizzanti. L'austriaco **Viktor Hess**, invece, si spinse leggermente piú in là, anche perché disponeva di una tecnologia piú avanzata: i **palloni aerostatici**. Hess eseguì misure di ionizzazione a bordo di un pallone, a quote diverse, anche molto alte (fino ad alcuni km). La ionizzazione aumentava con la quota in modo evidente, come si vede bene dalla Figura 4.4, ottenuta riportando i dati dall'articolo originale [10] con il quale, sempre nel 1912, lo stesso Hess annunciò la scoperta.

Da queste misure Hess ricavò l'idea che la sorgente della radiazione ionizzante fosse esterna alla Terra. Secondo l'ipotesi di Hess la radiazione ionizzante aveva natura extra-terrestre: penetrava nell'atmosfera terrestre ed era parzialmente assorbita da questa. Per questa ragione, allontanandosi dal

limite esterno dell'atmosfera (dunque avvicinandosi al livello del mare) l'intensità di questa radiazione diminuiva. Doveva trattarsi di un tipo di radiazione molto piú penetrante di quelle allora conosciute, che avrebbero dovuto essere completamente assenti al livello del mare. Non si trattava, dunque né di **radiazione α** , né di **radiazione β** .

Per questa radiazione di origine extra-terrestre fu coniato piú tardi, da **Robert Millikan** il termine di **raggi cosmici**. Secondo il **Merriam-Webster Dictionary** la prima volta che tale termine comparve risale al 1925, quindi diversi anni piú tardi rispetto alla loro scoperta. L'articolo in questione [11] è disponibile online sul **sito** dell'Accademia delle Scienze Statunitense.

4.3 Caratteristiche dei raggi cosmici

Dal momento che questi *raggi* provocavano effetti ionizzanti, dovevano essere costituiti di particelle elettricamente cariche. Ben presto si scoprì che le particelle in questione dovevano per lo piú essere di carica positiva. Le misure, infatti, rivelarono che esisteva un'asimmetria nella direzione dalla quale i raggi cosmici apparivano provenire: in particolare sembrava che i raggi cosmici provenissero preferibilmente da ovest (**effetto est-ovest**). Fu il fisico **Bruno Rossi** a predire, nel 1930, questo fenomeno.

Com'è noto la Terra è circondata da un campo magnetico le cui linee di forza sono grosso modo parallele ai meridiani e sono dirette da sud a nord. I raggi cosmici arrivano da tutte le direzioni, per cui possiamo immaginare un flusso di particelle dirette in media verso la Terra. Usando la **regola della mano destra**, possiamo facilmente determinare la direzione e il verso della **Forza di Lorentz** agente su una particella di carica positiva. Disponendo le dita del palmo della mano in direzione del campo magnetico terrestre (quindi lungo un meridiano nella direzione sud-nord) e il pollice in direzione della velocità delle particelle, cioè verso la superficie terrestre, la forza di Lorentz è diretta perpendicolarmente al palmo della mano, perciò verso ovest. Se dunque i raggi

FILMATO NON RIPRODUCIBILE SU QUESTO
SUPPORTO: DIGITA L'URL NELLA CAPTION O
SCARICA L'E-BOOK

Figura 4.5 Raggi cosmici attraversano una **camera a scintilla**, che ne rende visibili le tracce [<http://www.youtube.com/watch?v=HvEZbZc4XnA>]. In una camera a scintilla una miscela di gas nobili (He e Ne) è ionizzata dal passaggio delle particelle cariche. Nel gas ci sono piani metallici tra i quali si applica una forte differenza di potenziale provocando una scintilla nel punto in cui il gas è stato ionizzato. Le scintille quindi si allineano lungo la traiettoria percorsa dalla particella che ha attraversato lo strumento.

FILMATO NON RIPRODUCIBILE SU QUESTO
SUPPORTO: DIGITA L'URL NELLA CAPTION O
SCARICA L'E-BOOK

Figura 4.6 Spiegazione dell'effetto est-ovest nei raggi cosmici [<http://www.youtube.com/watch?v=0ZG6Bk45ZKs>]. Questi appaiono provenire per lo più da ovest, diretti verso est. Il motivo è che i raggi cosmici primari sono protoni, quindi particelle positive, il cui moto è influenzato dalla presenza del campo magnetico terrestre.

cosmici sono prevalentemente carichi positivamente sembreranno provenire maggiormente da ovest. In effetti si osserva un flusso maggiore in direzione ovest-est.

Oggi sappiamo che la stragrande maggioranza dei cosiddetti **raggi cosmici primari**, quelli cioè che arrivano in prossimità della Terra dallo spazio, sono **protoni**. Questi costituiscono circa il 90–95 % del flusso totale di raggi cosmici. Il resto è quasi

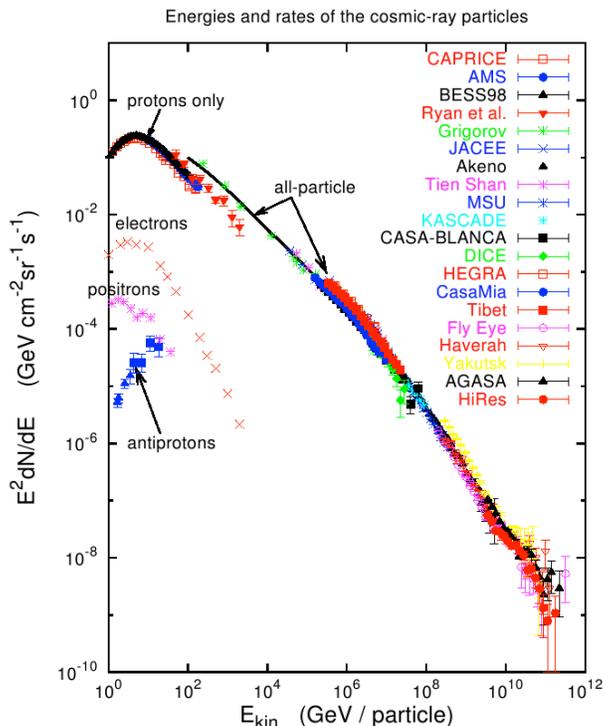


Figura 4.7 Spettro energetico dei raggi cosmici [14] come misurato da diversi esperimenti. Intorno ai 10^6 – 10^7 GeV si osserva un leggero cambiamento nella pendenza della curva (che è in scala logaritmica). Questa regione è convenzionalmente chiamata la regione del *gincocchio*: la forma dello spettro in questa scala, infatti, ricorda quella di una gamba leggermente flessa all'altezza del gincocchio.

completamente costituito di **particelle α** (nuclei di elio). Meno dell'1 % di essi è costituito di nuclei più pesanti e altrettanti sono gli **elettroni**.

Lo **spettro** energetico dei raggi cosmici (cioè il flusso per unità d'energia) è mostrato in Fig. 4.7. Si nota l'ampissimo intervallo di energie che arriva fino a 10^{12} GeV (corrispondenti a quasi 200 J!) per singola particella.

Si osserva anche un abbondante flusso di raggi γ e X. I raggi cosmici primari collidono con i nuclei degli elementi che costituiscono l'atmosfera terre-

stre. Nell'urto si producono numerose nuove particelle chiamate **raggi cosmici secondari** che si dirigono verso la superficie (essenzialmente per la conservazione della quantità di moto). Parte di essi giunge al livello del mare dove il flusso di raggi cosmici secondari è pari a circa $100 \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}$.

I raggi cosmici provengono parzialmente dal Sole (si osserva un flusso maggiore in direzione di questo), ma la maggior parte di essi deve essere di origine extra-galattica, perché il flusso appare privo di direzionalità (in pratica non si osservano raggi cosmici provenire direttamente da una sorgente specifica, se non in misura relativamente modesta: i raggi cosmici appaiono provenire da tutte le direzioni) e le uniche potenziali sorgenti distribuite uniformemente attorno alla Terra sono le galassie. Le possibili sorgenti di raggi cosmici sono tutte quelle nelle quali si possono accelerare protoni e produrre fotoni. Le stelle sono una possibile sorgente, ma le energie in gioco nei processi termonucleari che avvengono al loro interno sono troppo basse per spiegare lo spettro osservato. Una volta prodotti nelle stelle, dunque, i raggi cosmici devono poter essere accelerati da qualche processo in grado di fornire loro le energie osservate. Le esplosioni delle *supernovae* potrebbero essere uno di questi processi.

La forma dello spettro suggerisce che i raggi cosmici siano accelerati, in media, in modo uniforme. Il primo modello di accelerazione fu pubblicato da **Enrico Fermi** nel 1949 [15].

considerare persa (non giungerà mai nei dintorni della Terra).

Dimostra che lo spettro di energia atteso per le particelle sopravvissute è una legge di potenza. Per farlo scrivi l'energia guadagnata da una particella di energia E dopo aver attraversato una regione di spazio nella quale guadagna energia per un tempo lungo t . Quindi valuta la sua probabilità di sopravvivenza assumendo che, se la particella non guadagna energia avendo percorso un breve tratto, venga espulsa dalla regione accelerante. Il numero di particelle che giungono sulla Terra è proporzionale a questa probabilità (sarà il numero di particelle iniziali moltiplicato per la probabilità di sopravvivere nel viaggio dal punto in cui sono state prodotte, fino a noi).

Le particelle cariche possono essere accelerate se attraversano regioni in cui sono presenti campi magnetici variabili.

SOLUZIONE →

Esercizio 4.1 *Il Modello di Fermi*

Una particella E viaggia per un tempo Δt in una regione di spazio dove può essere accelerata. Nel corso di questo viaggio ha una certa probabilità P di guadagnare energia ΔE . Il guadagno di energia è tanto più alto quanto più è lungo il tempo Δt di permanenza nella regione e tanto più alto quanto maggiore è la sua energia iniziale E , perciò $\Delta E = \alpha E \Delta t$ dove α è una costante di proporzionalità. Naturalmente, nello stesso tempo, la probabilità di perdere energia è $1 - P$. In questo caso, supponiamo che la particella esca dalla regione di spazio in cui può essere accelerata e la possiamo

Chi l'ha ordinato?

La storia della fisica delle particelle, come spesso avviene, ha seguito un cammino talvolta tortuoso e costellato da una serie di errori di valutazione dei risultati sperimentali o da interpretazioni risultate poi non del tutto corrette. Non è negli scopi di questa pubblicazione ricostruire tale storia, perciò in questo capitolo si ripercorre una storia leggermente alterata rispetto a quanto realmente accaduto: una storia adattata al fine di meglio illustrare il processo che porta alla scoperta di un nuovo fenomeno e di far comprendere meglio la fisica che c'è dietro ogni scoperta.

5.1 Particelle penetranti

Negli anni successivi alla scoperta dei raggi cosmici si erano perfezionati alcuni strumenti per l'indagine scientifica, in grado di visualizzare la traccia prodotta da particelle cariche in moto.

Uno di questi strumenti era la **camera a nebbia** o **camera di Wilson**, inventata da **Charles Wilson**. La camera a nebbia è di fatto un recipiente contenente un gas **soprassaturo**, molto vicino al punto di condensazione. Quando una particella carica attraversa il vapore, questo tende a condensare proprio laddove la particella ha lasciato una traccia ionizzata, perché le particelle di gas ionizzate tendono ad attrarre elettrostaticamente altre particelle. Si forma quindi una serie di goccioline di liquido lungo la traiettoria seguita dalle particelle cariche che hanno attraversato lo strumento. Le goccioline, illuminate, hanno l'aspetto di una sottile nuvoletta bianca.

Nel 1929 il fisico russo **Dmitri Skobeltsyn** aveva ottenuto circa 600 fotografie di eventi in una camera a nebbia tenuta immersa in un campo magne-

FILMATO NON RIPRODUCIBILE SU QUESTO
SUPPORTO: DIGITA L'URL NELLA CAPTION O
SCARICA L'E-BOOK

Figura 5.1 Costruzione di una semplice camera a nebbia [<http://www.youtube.com/watch?v=qYhbmjYNwq4>]. Eseguite l'esperimento in una giornata secca e al buio, illuminando la camera di lato con una lampada da tavolo e ponendo un fondo nero dal lato opposto rispetto a quello da cui guardate. Dovrebbero bastare 100–150 ml di alcool. Se è troppo poco non vedrete nulla. Se è troppo, vedrete una sottile *pioggia* cadere in continuazione dalla spugna.

tico uniforme [13]. In queste fotografie si vedono le tracce di particelle cariche che percorrono traiettorie circolari per effetto della **Forza di Lorentz**. In 32 di queste, tuttavia, sono presenti tracce approssimativamente rettilinee, provenienti dall'esterno della camera. Le particelle che si osservano in queste foto sono cariche, avendo lasciato la traccia nello strumento (le particelle neutre non ionizzano il vapore e non provocano la condensazione). Dalla dimensione e densità delle goccioline se ne deduce che tali particelle devono avere una carica elettrica pari, in modulo, a quella dell'elettrone. Il fatto che vadano praticamente dritte vuol dire che possiedono un'enorme quantità di moto, dal momento che il **raggio di curvatura** r di una particella di carica q e massa m in un campo magnetico B è dato dalla formula

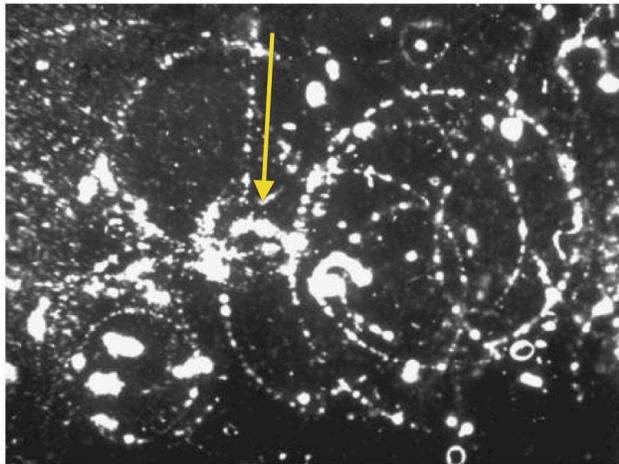


Figura 5.2 Una delle foto fatte da Skobeltsyn, in cui si vedono le tracce di particelle cariche che descrivono traiettorie circolari. Tra tutte le tracce se ne distingue una, accanto alla freccia gialla, del tutto simile alle altre, ma praticamente dritta, proveniente dall'esterno. È la prima fotografia della traccia di un raggio cosmico, probabilmente un *muone*.

$$r = \frac{\gamma m v}{q B} \quad (5.1)$$

dove γ è il [fattore relativistico di Lorentz](#)

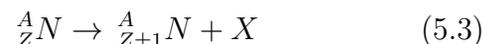
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (5.2)$$

La traccia appare dritta perché il raggio di curvatura è talmente ampio da non essere misurabile, per cui Skobeltsyn poté solamente stimare l'energia minima di queste particelle che doveva essere molto maggiore di quella delle particelle che stava studiando. Le particelle in questione provenivano principalmente da una direzione prossima allo zenit e fu immediato identificare queste tracce con quelle lasciate da particelle dei raggi cosmici.

5.2 L'ipotesi del neutrino

Nel 1930 [Wolfgang Pauli](#) propose di spiegare lo spettro energetico della **radiazione β** ipotizzando l'esistenza di una nuova particella [16]: il **neutrino**¹.

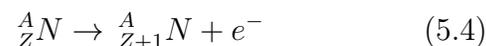
Il decadimento β consiste in un processo nel quale alcuni elementi, come il Cobalto 60 (^{60}Co), si trasformano spontaneamente in un elemento con la stessa massa, ma di specie atomica diversa: il Cobalto, ad esempio, si trasforma in Nichel 60 (^{60}Ni). Il Bismuto 210 (^{210}Bi) decade β tramutandosi in Polonio 210 (^{210}Po). In generale, partendo da un atomo ${}^A_Z N$, si produce un atomo con lo stesso peso atomico A , ma con diverso numero atomico Z , che differisce da quello originale ${}^A_Z N$ di un'unità:



dove X rappresenta l'insieme degli altri prodotti della reazione. Il Nichel 60 ha lo stesso peso atomico del Cobalto 60, ma ha numero atomico 28, mentre il numero atomico del Cobalto è 27.

Nella trasformazione è emesso un elettrone (in passato gli elettroni erano noti con il nome di raggi β), in modo tale che la carica elettrica sia conservata. Infatti, il nucleo del Cobalto possiede 27 protoni, mentre quello del Nichel 28. Il Bismuto 210 ha lo stesso numero di neutroni e protoni del Polonio 210, ma il Polonio ha un protone al posto di un neutrone. La carica elettrica del nucleo, quindi, aumenta di un'unità. La carica elettrica è una grandezza conservata, pertanto non può cambiare nel corso del tempo. In effetti, quando il Cobalto si trasforma in Nichel, emette un elettrone, di carica elettrica opposta a quella del protone, in modo tale che, complessivamente, la carica elettrica dello stato iniziale e di quello finale sia la stessa.

Prima dell'ipotesi di Pauli si riteneva che il processo fosse del tipo



¹In realtà Pauli chiamava questa particella *neutrone*. Fu Fermi a ribattezzarla *neutrino* successivamente alla scoperta del neutrone.

Interazioni Deboli

Il decadimento β deve essere provocato da un'interazione di qualche tipo. La Fisica Classica insegna che le forze producono il cambiamento dello stato di un corpo che, sempre in Fisica Classica, è determinato quando se ne conoscano posizione e velocità. Per questa ragione applicando una forza a un corpo se ne cambia la velocità. Ma non sempre lo stato di un corpo è determinato da queste due grandezze. Non è così, ad esempio, in [Meccanica Quantistica](#), dove lo stato dipende da energia e momento angolare (che sono dunque le grandezze che cambiano applicando una forza). Nel caso dei decadimenti cambia anche la natura della particella: il cambiamento di stato consiste nel fatto che inizialmente abbiamo una particella di un tipo ferma, che si trasforma in altre particelle in moto. Il cambio di stato è mediato da una forza che non può essere la forza di gravità né quella elettromagnetica, che non possono modificare la natura delle particelle cui sono applicate.

All'interazione responsabile del decadimento si dà il nome di **interazione debole**, perché la sua intensità è molto minore di quella dell'interazione elettromagnetica: confrontando la probabilità che una particella interagisca per interazione elettromagnetica con quella che la stessa particella sia soggetta all'interazione debole si trova un rapporto pari a circa 10^{11} in favore delle forze elettromagnetiche.

e veniva interpretato come la trasformazione di un neutrone in un protone, con conseguente emissione di un elettrone. Se così fosse, però, l'energia con la quale l'elettrone viene emesso dovrebbe essere sempre la stessa. Infatti, supponendo che il neutrone sia fermo nel nucleo, nel momento in cui si trasforma in un protone e in un elettrone, questi si devono allontanare l'uno dall'altro in modo da conservare la quantità di moto (che inizialmente è nulla).

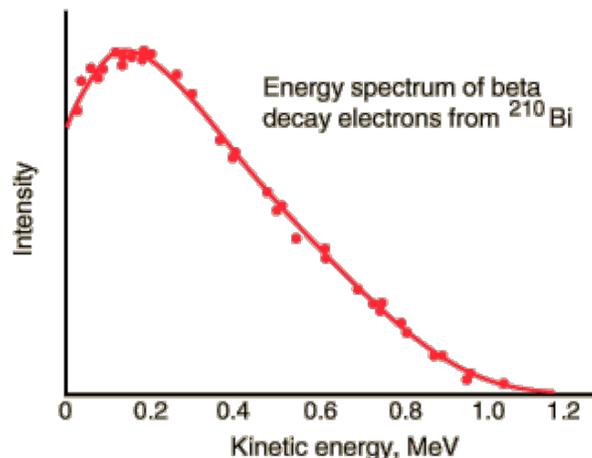


Figura 5.3 Spettro degli elettroni nel decadimento β del ^{210}Bi .

Esercizio 5.1 *Energia degli elettroni nel decadimento β .*

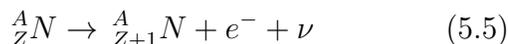
Sapendo che l'energia E di una particella di massa m e quantità di moto p , secondo la [relatività speciale](#), è pari a $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$, dimostra che la quantità di moto dell'elettrone proveniente da un decadimento β deve essere costante se il decadimento consiste nella trasmutazione di un neutrone in un protone e un elettrone ($n \rightarrow p + e^-$). Assumi che il neutrone sia inizialmente fermo, e imponi che l'energia e la quantità di moto siano conservate. Stima anche l'ordine di grandezza dell'energia massima che l'elettrone può assumere.

SOLUZIONE \rightarrow

Sperimentalmente si osserva tutt'altro: l'energia di un elettrone emesso in un decadimento β può assumere tutti i valori compresi tra 0 e un valore massimo che dipende dalle specie atomiche coinvolte, con uno spettro caratteristico (nella [Figura 5.3](#) è mostrato lo spettro di un elettrone del decadimento del Bismuto 210), tanto che si pensò alla possibilità che l'energia non fosse conservata nelle interazioni deboli o alla scala subatomica.

Questa forma dello spettro suggerisce che il decadimento avvenga almeno a tre corpi. In altre parole,

la reazione deve essere del tipo



dove ν è una particella neutra e molto penetrante, di massa trascurabile. Se infatti l'energia disponibile E_0 è divisa tra tre particelle, ciascuna di esse può assumere un valore compreso tra 0 ed E_0 . La particella in questione deve essere di massa praticamente nulla, perché solo così si può giustificare il fatto che il valore massimo assunto dall'energia dell'elettrone coincide di fatto con l'energia calcolata assumendo che

$$E_0 \simeq (m_n - m_p - m_e)c^2. \quad (5.6)$$

Deve essere neutra perché non si riusciva a rivelare questa particella con nessuno dei rivelatori a ionizzazione disponibili, ma non poteva essere un fotone perché questi si potevano rivelare usando tecniche alternative. Doveva quindi trattarsi di una nuova particella: il **neutrino**.

5.3 L'antimateria

Nel 1933 **Carl Anderson** fece una scoperta [17] sorprendente! In una celebre fotografia in camera a nebbia (Fig. 5.4) si vede una particella (nell'immagine provenire dal basso) che percorre una traiettoria curva, perché la camera era tenuta in una regione nella quale era presente un campo magnetico (perpendicolare al piano della figura). La particella colpisce un assorbitore in piombo (la fascia scura orizzontale) di 6 mm di spessore e ne emerge avendo perso energia (si nota, infatti, che il raggio di curvatura è più stretto rispetto a quello della particella incidente). L'energia persa si può stimare dalla variazione del raggio di curvatura e risulta compatibile con quella persa da un elettrone. La curvatura assunta nel campo magnetico, però, era opposta a quella che ci si aspettava per una particella di carica negativa.

Fu subito chiaro che doveva trattarsi di una particella del tutto identica a un elettrone, con la stessa massa, ma con carica elettrica opposta. A que-

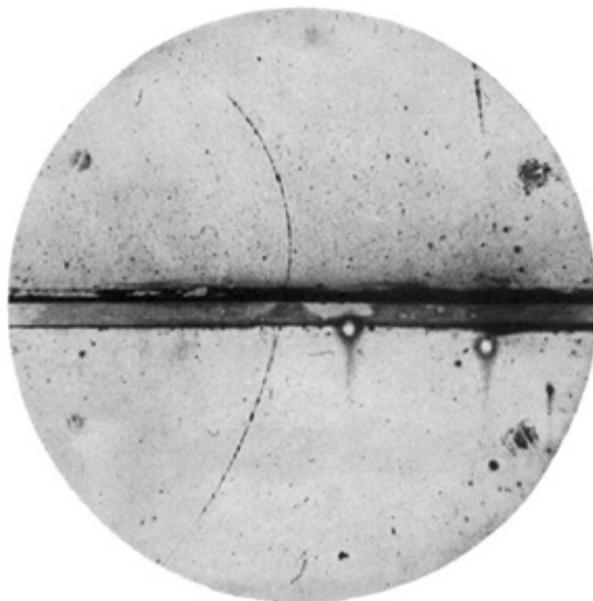


Figura 5.4 La prima fotografia di un positrone: una particella di antimateria.

sta particella lo stesso Anderson diede il nome di **positrone**. Il positrone si indica col simbolo e^+ .

Si trattava della prima particella di **antimateria** scoperta. L'antimateria è costituita di particelle in tutto e per tutto uguali a quelle che compongono la materia ordinaria, ma con la carica elettrica opposta a quella di queste ultime. Per essere precisi, tutte le cariche, di qualunque natura, hanno segno opposto per materia e antimateria. Così, ad esempio, l'antiparticella del neutrino ν è l'antineutrino $\bar{\nu}$. Il neutrino non ha carica elettrica, ma possiede cariche di natura diversa (come il **numero leptonico**), il cui segno è opposto a quello della stessa carica del neutrino.

Le antiparticelle, in generale, si indicano con una barra sul simbolo della particella oppure indicando esplicitamente il segno della carica elettrica: e^+ nel caso del positrone oppure \bar{p} nel caso dell'antiprotone.

L'esistenza di queste particelle di antimateria era stata **predetta** da **Paul Dirac** qualche anno prima, utilizzando semplici argomenti teorici. la scoperta del positrone risultò dunque essere una brillante

conferma della teoria.

Esercizio 5.2 *Scoperta del positrone*

Calcola il modulo e il verso del campo magnetico presente nell'esperimento di Anderson, sapendo che il positrone aveva un'energia di 63 MeV prima di attraversare il piombo e di 23 MeV dopo.

Usa la Figura 5.4 per ricavare la curvatura che le particelle assumono in campo magnetico, sapendo che lo spessore dell'assorbitore (la banda scura al centro) era di 6 mm.

SOLUZIONE →

5.4 La scoperta del muone

Negli anni successivi numerosi esperimenti avevano osservato tracce di particelle cariche che non erano ascrivibili né a elettroni, né a protoni. Le tracce sembravano essere prodotte da una particella che aveva una massa compresa tra quella dell'elettrone e quella del protone (si poteva desumere dall'intensità della ionizzazione) e carica uguale a $\pm e$ (indicando con e la carica del protone).

Una di queste osservazioni si deve a Paul Kunze [18] che nel 1932 aveva osservato alcune tracce *sospette* in camera a nebbia che aveva attribuito alle particelle che si osservavano nei raggi cosmici, già osservate da Blackett e Occhialini [19] poco tempo prima.

Anche Carl Anderson e Seth Neddermeyer avevano osservato eventi di questo tipo [21] e J. Street e E. Stevenson [20] ipotizzarono esplicitamente l'esistenza di una nuova particella: il muone (μ).

Pare che quando venne ufficialmente riconosciuta l'esistenza di questa nuova particella, nel corso di un congresso, il fisico Rabi esclamò "chi l'ha ordinato, questo?", come si fa al tavolo di un ristorante quando il cameriere, per errore, porta un piatto che nessuno ha chiesto. Nessuno, infatti, sentiva il *bisogno* di questa nuova particella per spiegare alcunché.

Il muone μ è una particella che si trova in due possibili stati di carica (μ^+ e μ^-) e ha una massa

pari a circa 200 volte quella dell'elettrone. Analizzando alcuni eventi registrati su **emulsioni nucleari** si era scoperto che i muoni erano particelle instabili, con una **vita media** di circa $2 \mu\text{s}$, che decadevano lasciando una traccia carica attribuibile a un elettrone. Questa traccia aveva lunghezza variabile, il che indicava che l'elettrone emesso nel decadimento aveva quantità di moto variabile da evento a evento. Per le stesse ragioni per cui si fece **l'ipotesi del neutrino**, si poté stabilire che il muone decadeva secondo la reazione



cioè in un elettrone e due neutrini, che in seguito si scoprirono appartenere a due *specie* diverse: ν_e e $\bar{\nu}_\mu$. Naturalmente, per la conservazione della carica elettrica, il μ^+ decade in positroni e^+ e il μ^- in elettroni e^- .

5.5 La scoperta del pione

Pochi anni dopo la scoperta del muone, sempre nei raggi cosmici, venne scoperta (per primi da Lattes, Occhialini e Powell) una nuova particella, anch'essa in due stati diversi di carica. La nuova particella non poteva essere né un muone né un elettrone né un protone (né una delle rispettive antiparticelle) perché presentava caratteristiche diverse.

La ionizzazione prodotta dalle tracce di questa particella, ribattezzata **pione** o π , era molto simile a quella prodotta da un muone, quindi doveva avere grosso modo la stessa massa. In realtà era un pochino più pesante, perché negli esperimenti si osservavano i decadimenti dei pioni in muoni.

Le fotografie (Fig. 5.5) in **emulsioni nucleari** o in **camera a nebbia** mostravano tracce di pioni che si arrestavano in certi punti e da lì emettevano un muone (riconoscibile dal successivo decadimento e dalla ionizzazione). La lunghezza della traccia del muone era sempre la stessa, il che indicava che i muoni provenienti dal decadimento di un pione dovevano avere sempre la stessa energia. Per le ragioni esposte nel Paragrafo 5.2 questo significa che il decadimento del pione è un decadimento a due corpi

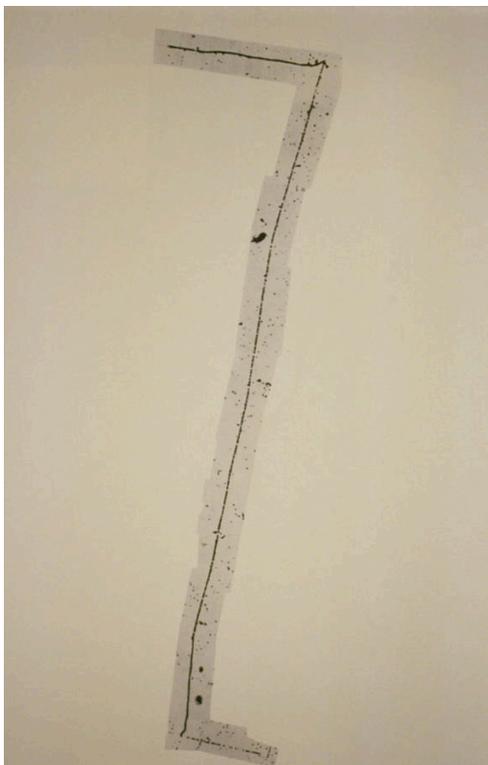


Figura 5.5 Il decadimento di un pione. Il π è quello in basso, che entra da destra, si ferma in un punto e da lì emette un muone (la traccia piú lunga) che, a sua volta, decade nel punto in alto. Dai punti in cui avviene il decadimento del pione e del muone appare provenire una sola traccia, perché le altre particelle prodotte nella reazione sono neutrini che non lasciano tracce nello strumento.

(vedi anche l'Esercizio 5.1). Dalla parte opposta a quella in cui andava il muone non si rivelava mai nulla. Questo portò a concludere che la particella emessa insieme al muone doveva essere un neutrino, per cui il decadimento del pione è

$$\pi^{\pm} \rightarrow \mu^{\pm} + \nu_{\mu} \quad (5.8)$$

e ν_{μ} può essere sia un neutrino che un antineutrino (secondo lo stato di carica del π).

Piú tardi si scoprì che il pione esisteva anche in uno stato di carica neutro (π^0). Il π^0 decade in una

coppia di fotoni:

$$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma \quad (5.9)$$

Il quadro delle particelle elementari si era complicato non poco. Con la scoperta di protoni, elettroni e neutroni si era creduto d'aver compreso la struttura della materia. La scoperta dei muoni e dei pioni, per non parlare di quella dei positroni, aveva reso tutto molto piú difficile. Ma non era tutto...

5.6 La lambda e i mesoni K

Nel 1947 George Rochester e Clifford Butler intrapresero una lunga campagna di misurazioni eseguendo quasi 5000 fotografie di eventi in camera a nebbia per un totale di 1500 ore di osservazione. Analizzando quest'imponente quantità di dati trovarono un evento particolarmente interessante [22].

L'evento presentava due tracce, prodotte evidentemente da due particelle cariche, che formavano una V rovesciata, come quelle visibili nella Fig. 5.6.

Le tracce provenivano chiaramente dallo stesso punto e il vertice si trovava nel gas e non all'interno di un assorbitore di 3 cm di piombo piazzato nella camera. Questo fatto indicava che le due particelle non erano il prodotto di una collisione, ma di un decadimento, cioè della trasformazione di un'altra particella, presumibilmente prodotta dalla collisione di una particella nel piombo.

La presenza di un campo magnetico permetteva di misurare la quantità di moto e la carica elettrica delle tracce, che si dimostrarono avere carica opposta. La particella madre perciò doveva essere neutra. Dalla misura di quantità di moto si poté stabilire che la massa della particella madre doveva essere compresa tra 770 e 1600 volte la massa dell'elettrone. Nessuna delle particelle note fino ad allora aveva queste caratteristiche e si ritenne d'aver scoperto una nuova particella.

Anche Hopper e Biswas scoprirono una particella dalle caratteristiche simili, nel 1950 [23]. Anche in questo caso si osservava (Fig. 5.7) una coppia di tracce che si aprivano a formare una V, ma la massa

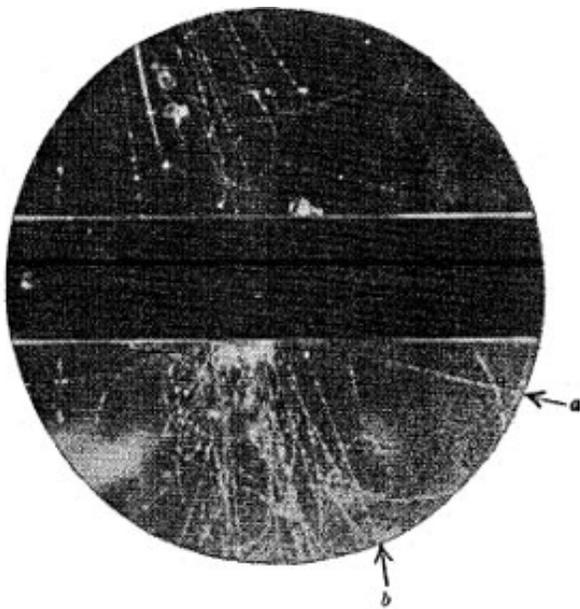


Figura 5.6 Uno degli eventi trovati da Rochester e Butler nei raggi cosmici. Sono evidenziate le tracce che si aprono a formare una V rovesciata.

della particella neutra che si supponeva essere quella che dava origine all'evento era molto maggiore di quella della particella scoperta qualche anno prima da Rochester e Butler.

La particella scoperta da Hopper e Biswas fu chiamata Λ , proprio per la forma che assumevano le tracce negli eventi. Quella di Rochester e Butler fu battezzata K .

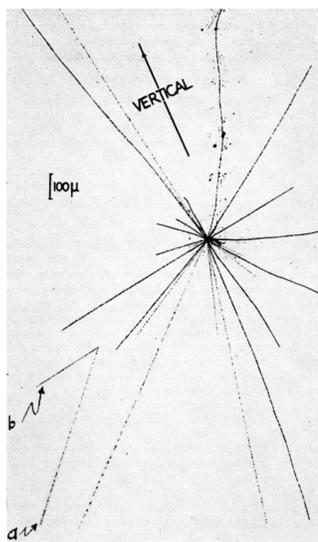


Figura 5.7 L'evento scoperto da Hopper e Biswas. Le tracce evidenziate dalle lettere a e b sono quelle prodotte dal decadimento di una particella Λ .

I nuovi numeri quantici

Con il proliferare delle particelle note, bisognava quanto meno capire perché i loro decadimenti erano quelli osservati. Quello che si poteva stabilire empiricamente era che in Natura esistevano regole di conservazione che impedivano il verificarsi di certi eventi che apparivano essere possibili sulla carta.

6.1 I leptoni

Non sembrerebbe esserci alcuna ragione per la quale il decadimento del muone dovrebbe procedere come un decadimento a tre corpi. Un decadimento del tipo $\mu \rightarrow e + \nu$ sembrerebbe del tutto plausibile. Evidentemente un tale decadimento deve essere vietato da qualche legge di conservazione. Si può supporre, in analogia a quanto accade con la conservazione della carica elettrica per cui il numero di cariche in unità della carica dell'elettrone resta costante, che esista una grandezza fisica conservata detta **numero leptonic**. Il muone e il suo neutrino devono avere lo stesso numero leptonic L_μ , mentre l'elettrone e il suo neutrino devono avere un numero leptonic diverso L_e .

Se il numero leptonic è conservato, in presenza di un μ^- nello stato iniziale il numero leptonic vale $L_\mu = +1$. Nello stato finale si deve avere lo stesso numero leptonic, per cui ci deve essere una particella che *porta* questo numero. Il neutrino muonico ν_μ evidentemente ha $L_\mu = +1$ e così un tale numero si conserva. Ma il neutrino non può essere l'unico prodotto della reazione: ce ne vuole almeno un altro. L'elettrone potrebbe essere uno di questi, ma e^- ha numero leptonic $L_e = +1$, dunque deve essere accompagnato da una particella che abbia $L_e = -1$

che è il suo antineutrino $\bar{\nu}_e$. Questo spiega perché si osservano le reazioni

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad (6.1)$$

e

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \quad (6.2)$$

mentre non si osserva il decadimento

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e. \quad (6.3)$$

I muoni, gli elettroni e i rispettivi neutrini si dicono perciò appartenere alla classe dei **leptoni** (dal greco, che vuol dire *leggero*¹).

6.2 I barioni

In maniera del tutto analoga si può ritenere che esista un altro numero conservato detto **numero barionico**. Il neutrone e il protone hanno numero barionico pari a $B = 1$, per cui il neutrone può decadere solo se nello stato finale è presente un protone, per conservare questo numero. Poiché non può decadere in una sola particella (non si conserverebbero l'energia e la quantità di moto) nello stato finale deve essere presente almeno un'altra particella. Dal momento che la massa del neutrone è solo di poco più grande rispetto a quella del protone, il protone dello stato finale può essere accompagnato solo da particelle leggere come l'elettrone. Ma un elettrone ha un numero leptonic $L_e = +1$ e se ci fosse solo lui il numero leptonic non sarebbe conservato. Deve dunque esserci anche un antineutrino

¹Oggi questa parola ha perso il suo significato etimologico, esistendo anche leptoni *pesanti* come il τ .

che ha $L_e = -1$ per far sí che il numero leptónico complessivo sia nullo.

Ecco perché il decadimento è $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$. Il protone non decade perché è la particella piú leggera a possedere un numero barionico. Anche i neutroni presenti nei nuclei atomici, solitamente, non decadono (altrimenti gli atomi, come li conosciamo, non si formerebbero). Il motivo è che i neutroni presenti nel nucleo *convertono* parte della loro massa in energia di legame con gli altri componenti del nucleo e non hanno piú la massa sufficiente per produrre un protone e un elettrone. Il decadimento è proibito, dunque, dalla conservazione dell'energia.

Interazioni forti

Per spiegare perché i nuclei atomici sono stabili e non tendono a *rompersi* in mille pezzi è necessario ipotizzare l'esistenza di una forza molto piú intensa di quella elettromagnetica. Due protoni nello stesso nucleo si respingerebbero infatti con una forza pari a circa

$$F_{em} = k \frac{q^2}{r^2} \simeq 9.0 \times 10^9 \left(\frac{1.6 \times 10^{-19}}{1 \times 10^{-15}} \right)^2 \simeq 230 \text{ N} \quad (6.4)$$

avendo usato per $r \simeq 10^{-15}$ m, il raggio tipico di un nucleo atomico. Perché i due protoni restino nel nucleo deve esistere una forza che li trattenga al suo interno piú intensa di quella elettromagnetica, cui siano soggetti anche i neutroni (che non sono elettricamente carichi): la **forza o interazione forte**, appunto.

Le particelle che hanno un numero barionico sono particelle che risentono dell'**interazione forte**, che è quella responsabile del fatto che protoni e neutroni stanno insieme nel nucleo atomico (che altrimenti si disgregherebbe per effetto della repulsione elettrostatica). Per questa ragione neutroni e protoni sono **barioni**. Il termine barione deriva dal greco e vuol dire **pesante** (protoni e neutroni sono abbastanza piú pesanti delle altre particelle di cui parliamo sopra), anche se oggi ha perso questo significato, es-

sendo state scoperte particelle non barioniche (cioè non simili ai protoni) piú pesanti.

6.3 I mesoni

I pioni possono decadere in due corpi perché non hanno numero leptónico. Evidentemente non hanno neanche un numero barionico, perché nello stato finale non ci sono barioni. I pioni appartengono alla classe dei **mesoni** (come è facile immaginare, anche il termine mesone deriva dal greco e vuol dire "di medio peso"). Chiaramente non esiste un *numero mesonico*, perché nel decadimento del π non ci sono regole particolari che impediscono qualche decadimento altrimenti possibile per la conservazione dell'energia. Anche se appare strano che i pioni decadano in muoni invece che in elettroni (il decadimento $\pi \rightarrow e + \nu_e$ si osserva, ma con bassissima probabilità). In linea di principio il decadimento in elettroni dovrebbe essere favorito perché l'elettrone è piú leggero ed è in un certo senso piú facile produrlo².

6.4 Gli adroni

Barioni e mesoni, che risentono entrambi dell'**interazione forte**, appartengono a una classe piú vasta detta degli **adroni** (*forte*, in greco). I barioni sono sempre particelle di **spin** semintero ($J = \frac{1}{2}$ o $J = \frac{3}{2}$), mentre i mesoni hanno sempre spin intero ($J = 0$ o $J = 1$).

In definitiva possiamo dividere le particelle in due classi, quella degli adroni e quella dei leptoni, sulla base del tipo d'interazione cui sono sensibili (i primi sia all'interazione forte che a quella **debole**, i secondi solo a quella debole). Gli adroni sono a loro volta divisi nella classe dei barioni (a spin semintero) e in quella dei mesoni (a spin intero).

²Questo comportamento anomalo si spiega con una caratteristica particolare dei neutrini: quella di esistere in un solo stato di spin. Non discutiamo questo fenomeno in questa sede.

Esercizio 6.1 *Caccia all'intruso*

Trova, tra le seguenti, le reazioni vietate dai principi di conservazione dei numeri quantici illustrati in questo capitolo, motivando la scelta.

$$\begin{array}{ll}
 p + p \rightarrow p + \bar{p} & p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p} \\
 p + \pi^0 \rightarrow n + e^+ & p + n \rightarrow n + p + \pi^0 \\
 \pi^+ \rightarrow \pi^0 + \nu_e & \pi^- + p \rightarrow n + \pi^0 \\
 \mu^+ + n \rightarrow n + p + \bar{\nu}_\mu & \mu^- + e^- \rightarrow \bar{p} + e^- \\
 \pi^+ + \pi^- \rightarrow p + \bar{p} & \pi^+ + \pi^- \rightarrow p + n + \pi^-
 \end{array}$$

Controlla tutti i numeri quantici: carica elettrica, numero leptonico e numero barionico.

[SOLUZIONE →](#)

6.5 Classificazione in base allo spin

Le particelle, indipendentemente dalla loro natura, si possono anche classificare in base al loro **spin**, che è una grandezza fisica **quantizzata** il cui valore è sempre un multiplo intero di $\hbar/2$, dove $\hbar = h/2\pi$ è la **costante di Plank** f divisa per 2π . In molti casi, in Fisica delle Particelle, si usano le **unità naturali**, nelle quali $\hbar = 1$ ed è adimensionale. Pertanto i valori ammessi per lo spin, in queste unità, sono 0 , $\frac{1}{2}$, 1 , $\frac{3}{2}$, 2 , e così via.

Le particelle a spin intero si chiamano **bosoni**. I pioni, ad esempio, sono bosoni. Tutti i mesoni sono bosoni. Ma non tutti i bosoni sono mesoni (ad esempio, il fotone, la particella che costituisce la luce) è un bosone, ma non è un mesone. I mesoni sono bosoni che subiscono l'**interazione forte**.

Le particelle a spin semintero, invece, si chiamano **fermioni**. L'elettrone, il muone, il protone e gli altri barioni sono fermioni. Da questo elenco si capisce che tutti i barioni sono fermioni, ma non tutti i fermioni sono barioni (ad esempio, il muone è un fermione, ma non è un barione).

Imitare la Natura

Lo studio dei raggi cosmici era diventato lo studio della materia che compone l'Universo. Per comprendere le proprietà delle nuove particelle occorreva eseguire numerose misure per ciascuna delle quali era richiesto un gran numero di **eventi**. Per raccogliere la statistica sufficiente a studiare un determinato tipo di particelle non si poteva far altro che attendere che la Natura le producesse e sperare nella fortuna. È l'*approccio del pescatore* che getta l'amo in mare e si mette in attesa che il pesce abbocchi. Se è fortunato prende almeno un pesce tra quelli desiderati, ma può darsi che non lo sia e all'amo potrebbe non abboccare nulla oppure qualche pesciottino di poco conto.

Una maniera più furba di procedere, perlomeno se si vuole essere certi di non saltare la cena, è quella di allevare il pesce, invece che di catturarlo. In altre parole, sarebbe molto più efficiente poter produrre le particelle desiderate in un laboratorio, scegliendo il tempo e la durata dell'esperimento e avendo la certezza di rivelare la maggior parte di quelle prodotte.

7.1 Gli acceleratori di particelle

Un modo per produrre le particelle consiste nell'imitare i processi che la Natura mette in atto per *rifornirci* di raggi cosmici: occorre una qualche particella (i protoni dei raggi cosmici primari) da accelerare opportunamente, in modo tale da fargli raggiungere l'energia sufficiente affinché, collidendo con gli atomi di un bersaglio (nel caso dei raggi cosmici questi sono quelli dei gas che compongono l'atmosfera), producano le particelle desiderate. A valle del

bersaglio basterà piazzare dei rivelatori per osservarle. I vantaggi di questo approccio sono evidenti: si sa quando e dove le particelle sono prodotte, a quale angolo (o almeno in quale intervallo di angoli saranno abbondanti) e si può scegliere, in una qualche misura, la particella da produrre.

In effetti la produzione di nuove particelle dall'urto di una di queste con un nucleo può avvenire grazie alla [teoria della relatività](#), per la quale massa ed energia sono semplicemente due aspetti diversi della stessa grandezza fisica essendo che

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \quad (7.1)$$

dove E è l'energia di una particella di massa m e quantità di moto p . Per particelle ferme $p = 0$ e si ritrova la celebre equazione

$$E = mc^2. \quad (7.2)$$

Disponendo di un'energia E si potrebbero **materializzare** particelle in numero tale che la somma delle loro masse non superi il valore $m \leq E/c^2$. In ogni caso, da un urto tra particelle di energia complessiva E possono venir fuori particelle la cui somma delle masse m e delle quantità di moto p sia tale da rispettare l'equazione (7.1).

Esercizio 7.1 Energia di soglia

Calcola l'energia minima necessaria affinché dall'urto di due protoni si possa produrre un pione neutro. La reazione da considerare è

$$p + p \rightarrow p + p + \pi^0. \quad (7.3)$$

Per farlo imponi la conservazione dell'energia e dell'impulso e osserva che la quantità $E^2 - p^2c^2$ è una

costante indipendente dal sistema di riferimento usato per scrivere E e p . Puoi quindi imporre che questa differenza sia la stessa nel sistema del laboratorio in cui inizialmente uno dei protoni si muove e l'altro è fermo, e nel sistema di riferimento del centro di massa, in cui la somma delle quantità di moto è nulla.

SOLUZIONE →

I raggi cosmici primari sono costituiti per lo più di protoni. Possiamo procurarci protoni ionizzando idrogeno, il cui nucleo contiene un solo protone. Possiamo poi accelerarli usando un **acceleratore** facendogli acquisire energia sufficiente affinché, scontrandosi con i protoni fermi all'interno di un bersaglio¹, come fanno i raggi cosmici con i nuclei dei gas che compongono l'atmosfera, producano, per esempio, un π^0 attraverso la reazione

$$p + p \rightarrow p + p + \pi^0. \quad (7.4)$$

Il π^0 , una volta prodotto, decade in due fotoni. Ponendo dunque dei rivelatori di fotoni dopo il bersaglio dovremmo osservare l'arrivo in coincidenza di due fotoni ogni volta che si accende l'acceleratore. Misurando le proprietà di questi fotoni, quindi, possiamo risalire alle proprietà del π^0 che li ha generati e che ci interessano.

Esercizio 7.2 *La massa invariante*

Supponi di conoscere la quantità di moto \vec{p}_i e l'energia E_i di due fotoni ($i = 1, 2$). Il fotone è una particella a massa nulla $m_\gamma = 0$. Supponendo che i due fotoni siano il risultato del decadimento di una particella, calcola la massa che deve avere questa particella per produrre i due fotoni nello stato dato. Per farlo osserva che la differenza $E^2 - p^2c^2$ è pari a m^2c^4 , dove m è la massa di una particella, se E e p sono energia e quantità di moto di questa particella. Impone la conservazione dell'energia e della quantità di moto, poi calcola la differenza $E^2 - p^2c^2$

nello stato iniziale e in quello finale.

SOLUZIONE →

È così che si dà inizio a una nuova campagna d'esperimenti, eseguiti stavolta in laboratori attrezzati con acceleratori di protoni, usati per *sparare* particelle su bersagli e produrre così le particelle d'interesse. La fisica si sposta così all'interno dei laboratori dove si costruiscono acceleratori sempre più sofisticati e potenti.

In certi casi è possibile produrre particelle come i π^+ e i π^- per urto tra protoni, da accelerare successivamente per usarle come proiettili per studiare reazioni del tipo

$$\pi^\pm + p \rightarrow X \quad (7.5)$$

e

$$\pi^\pm + n \rightarrow X \quad (7.6)$$

dove X rappresenta uno dei possibili stati finali (che dipende dall'energia dei pioni, e deve avere **numero leptonic** complessivo nullo e **numero barionico** uguale a 1).

L'adozione di queste tecniche permetterà lo studio intensivo della fisica delle particelle e consentirà nuove scoperte, come illustrato nei capitoli seguenti.

¹un materiale molto usato è il **berillio** per le sue proprietà termiche e meccaniche

Studiare le particelle

Avendo a disposizione un fascio di particelle possiamo studiare sostanzialmente due aspetti: quanto intensamente le particelle interagiscono con la materia che le circonda (quindi con quale probabilità le particelle presenti nel fascio cambiano direzione, energia o natura attraversando un blocco di materiale), oppure quanto rapidamente le particelle prodotte si trasformano spontaneamente (**decadono**) in altre particelle.

Ogni volta che si definisce una grandezza, in fisica, se ne deve dare la **definizione operativa**: si deve cioè dire come in pratica si esegue la loro misura. In questo capitolo spieghiamo come si definiscono le grandezze fisiche caratteristiche per descrivere quanto sopra e come si procede operativamente per assegnare loro un valore.

8.1 Sezione d'urto

Nell'urto tra una particella e un bersaglio si possono misurare diverse grandezze fisiche. Una di queste, molto semplice da misurare, almeno in linea di principio, è il numero di particelle che hanno interagito col bersaglio.

Il processo d'urto ha carattere probabilistico, per cui alcune delle particelle del fascio attraverseranno il bersaglio senza subire alcun effetto, mentre altre saranno deviate oppure spariranno per lasciare il posto a nuove particelle.

Sia N il numero di particelle inviate sul bersaglio. La variazione nel numero di particelle $\Delta N = N' - N$, dove N' è il numero di particelle che hanno attraversato il bersaglio senza subire assorbimento, deviazioni o perdita di energia, è chiaramente proporzionale al numero di particelle incidenti:

$\Delta N \propto -N$ (il segno meno indica che si ha una diminuzione nel numero di particelle nel fascio).

Questo numero sarà, in modulo, tanto maggiore, quanto più spesso è il bersaglio, perché più il bersaglio è spesso, più le particelle incidenti possono interagire con esso. Quindi possiamo scrivere

$$\Delta N \propto -N\Delta x \quad (8.1)$$

dove Δx rappresenta lo spessore del bersaglio. È anche chiaro che maggiore è la densità del bersaglio ρ , maggiore sarà la probabilità d'interagire con i suoi nuclei, pertanto abbiamo che

$$\Delta N = -\sigma N\rho\Delta x \quad (8.2)$$

dove σ è una costante di proporzionalità che chiamiamo **sezione d'urto**. Osserviamo che le **dimensioni fisiche** di ρ sono quelle di un volume alla meno uno (ρ rappresenta il numero di particelle nel bersaglio per unità di volume), mentre Δx ha le dimensioni fisiche di una lunghezza. N e ΔN sono adimensionali e perciò σ deve avere le dimensioni di una superficie: $[\sigma] = [L^2]$. Si misura, quindi, in m^2 nel **SI**. Per comodità si definisce l'unità di misura della sezione d'urto come il **barn**, che corrisponde a 10^{-24} cm^2 e si indica col simbolo **b**.

La sezione d'urto dipende dal tipo di processo e dalla specie della particella interagente e può dipendere dall'energia E della particella. Per misurare σ si prende un fascio di N particelle e lo si invia su un bersaglio di spessore noto Δx , di cui sia nota la composizione e quindi la densità ρ . Misurando il numero N' di particelle *diffuse* dal bersaglio, si misura la differenza $\Delta N = N' - N$ e si calcola

$$\sigma = -\frac{\Delta N}{N\rho\Delta x} \quad (8.3)$$

(che è un numero positivo perché ΔN è negativo). Oltre che una sezione d'urto per l'assorbimento di particelle, come in questo caso, possiamo definire una sezione d'urto di produzione. Se nell'urto tra una particella del fascio e quella del bersaglio si produce una nuova particella, contando il numero N_p di queste particelle possiamo definire la sezione d'urto di produzione come

$$\sigma = \frac{N_p}{N\rho\Delta x}. \quad (8.4)$$

La produzione di nuove particelle, in effetti, sarà tanto più probabile quanto maggiore è lo spessore Δx del bersaglio e la sua densità ρ . Inoltre, più particelle invio sul bersaglio e più ne produco di nuove.

La sezione d'urto misurata si può quindi confrontare con i modelli teorici delle interazioni. Usando un modello estremamente semplice possiamo pensare al processo di diffusione delle particelle di un fascio, da parte degli atomi del bersaglio, come all'urto di palline rigide. In questo caso la sezione d'urto ha un'interpretazione molto semplice:

$$\sigma \simeq \pi R^2 \quad (8.5)$$

dove R^2 rappresenta il raggio della sfera che rappresenta la particella bersaglio. Si tratta, naturalmente, di un raggio efficace, cioè di qualcosa che ha le dimensioni fisiche di una lunghezza, ma che non possiamo interpretare direttamente come il *raggio della particella*, ma piuttosto come il raggio entro il quale le interazioni che danno luogo al processo si fanno sentire.

Quando una particella proiettile attraversa un bersaglio si possono manifestare diverse interazioni: quelle di natura elettromagnetica, che ben conosciamo, e quelle dovute alle forze **forti** e **deboli**.

Le forze deboli, come dice il nome, sono molto poco intense e possiamo trascurarle per i nostri scopi. Le forze forti, al contrario, sono parecchio intense e quindi sono quelle che fanno sentire di più i

loro effetti. Affinché una particella subisca gli effetti della forza forte deve possedere una **carica forte** e quindi non deve essere un **leptone**. I protoni o i pioni subiscono la forza forte, pertanto le loro interazioni saranno dominate da questa (possiamo perciò trascurare gli effetti dell'interazione elettromagnetica).

Per protoni e pioni si misurano sezioni d'urto dell'ordine di $10^{-26} \text{ cm}^2 = 0.01 \text{ b}$.

Nel caso in cui si facciano interagire elettroni con la materia, le forze forti sono assenti, quindi possiamo assumere che questi interagiscono solo per interazione elettromagnetica. Le sezioni d'urto tipiche sono dell'ordine di $10^{-31} \text{ cm}^2 = 10^{-7} \text{ b} = 0.1 \mu\text{b}$.

Come ci aspettavamo, la sezione d'urto per interazione forte è molto maggiore di quella per interazione elettromagnetica.

Dall'equazione 8.2 si ricava che l'intensità del fascio di particelle diminuisce esponenzialmente con lo spessore attraversato

$$N(x) = N(0)e^{-\sigma\rho x} \quad (8.6)$$

dove $N(x)$ rappresenta il numero di particelle del fascio che non hanno ancora interagito alla profondità x e $N(0)$ quelle iniziali. Osservando che le dimensioni fisiche $[\sigma\rho]$ del prodotto di σ per ρ sono quelle di $[L^2L^{-3}] = [L^{-1}]$ possiamo definire

$$\sigma\rho = \frac{1}{\lambda} \quad (8.7)$$

dove λ è qualcosa che ha le dimensioni fisiche di una lunghezza $[\lambda] = [L]$ che si chiama **lunghezza d'interazione** e scrivere che

$$N(x) = N(0)e^{-\frac{x}{\lambda}}. \quad (8.8)$$

8.2 Vita media

Quando si ha a che fare con particelle instabili, una grandezza interessante da misurare è la **vita media**, che caratterizza il **decadimento**. Il decadimento di una particella consiste nella sua trasformazione in due o più particelle. Dal momento che in ogni processo fisico si conservano energia e quantità di moto,

il decadimento in una particella non può avvenire in un *canale* in cui sia presente una sola particella. In altre parole non esiste il decadimento $a \rightarrow b$ in cui la particella a si trasforma spontaneamente nella particella b . Se infatti la particella a è ferma, l'energia dello stato iniziale è $E = m_a c^2$, dove m_a è la massa di a e la quantità di moto è nulla. Se $m_b \neq m_a$ l'energia non è più conservata, a meno che la differenza di energia $(m_a - m_b)c^2$ non vada in energia cinetica per b , ma in questo caso la quantità di moto $p \neq 0$. D'altra parte, se $m_b = m_a$, $a = b$ e non c'è stato alcun decadimento.

Una particella dunque può decadere solo se esistono almeno due particelle la cui somma delle masse sia inferiore alla massa della particella madre. Un caso interessante si ha nel decadimento $a \rightarrow b + b$, quando le due particelle figlie hanno la stessa massa m_b . In questo caso la somma delle energie cinetiche di queste ultime deve essere pari a $(m_a - 2m_b)c^2$. Poiché però anche la quantità di moto si conserva, $\vec{p}_a + \vec{p}_b = 0$ e quindi le due particelle dello stato finale hanno la stessa velocità in modulo, ma sono emesse in direzioni opposte.

Dato un fascio con N particelle iniziali, trascorso un tempo Δt , le particelle ΔN decadute (che hanno cioè cambiato natura) sono proporzionali a quelle inizialmente presenti e al tempo trascorso, per l'appunto, quindi

$$\Delta N = -\alpha N \Delta t. \quad (8.9)$$

Il coefficiente di proporzionalità α deve avere le dimensioni fisiche di un tempo alla meno uno $[\alpha] = [T^{-1}]$ perché sia N che ΔN sono adimensionali. Per rendere evidente questo fatto conviene definire

$$\alpha = \frac{1}{\tau} \quad (8.10)$$

dove τ è una grandezza fisica che ha le dimensioni di un tempo e che è proprio quella che si chiama vita media.

Il processo di decadimento è un processo **stocastico**, che avviene in modo casuale secondo le leggi della statistica. Non possiamo predire quando e in quali particelle decadrà una data particella, ma

soltanto i possibili **canali** di decadimento, le percentuali relative (**branching ratio** o **rapporto di diramazione**) e il tempo medio nel corso del quale è possibile osservare un decadimento.

Di sicuro devono essere rispettate tutte le leggi di conservazione. Così abbiamo visto che i protoni non possono decadere in neutroni perché non hanno la massa sufficiente, e i muoni non possono decadere in due corpi ($\mu \rightarrow e + \nu_e$) perché questo decadimento non conserva il **numero leptonico**.

L'equazione (8.9) che definisce la vita media ha la stessa forma dell'equazione (8.2) e quindi, anche l'equazione che ci dice come varia N in funzione del tempo t **deve avere** la stessa forma di quella che dice come N varia in funzione di x :

$$N(t) = N(0)e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (8.11)$$

Quest'equazione ci dice che particelle prodotte simultaneamente non decadono tutte nello stesso momento. Circa $1/3$ di esse ($1/e$) decade in un tempo pari a τ , mentre in un tempo pari a 2τ ne saranno decadute $1 - \exp(-2)$ e cioè l'86%. Più tempo si attende meno particelle sopravvissute si trovano. Per misurare τ quindi si prendono $N(0)$ particelle e si attende un tempo t abbastanza lungo. Si contano i decadimenti $N_d(t)$ avvenuti in questo tempo e si ricava $N(t) = N(0) - N_d(t)$. È facile vedere che

$$\log \frac{N(t)}{N(0)} = -\frac{t}{\tau} \quad (8.12)$$

e dunque

$$\tau = -t \frac{1}{\log \frac{N(t)}{N(0)}}. \quad (8.13)$$

Naturalmente, trattandosi di un processo statistico, si misura questa grandezza per diversi tempi t più volte e se ne calcola la media.

Esercizio 8.1 *Il decadimento del muone*

Per misurare il tempo di decadimento del muone **Marcello Conversi** e **Oreste Piccioni** [25] nel 1944 usarono tre rivelatori posti uno sull'altro. Tra quello piú in alto e quello di mezzo si poneva un assorbitore in piombo. Quando i segnali emessi da questi rivelatori scattavano in coincidenza, si poteva essere certi che un muone aveva attraversato lo strumento (gli elettroni o i pioni¹ non riuscirebbero ad attraversare il piombo). Lo strato di rivelatori piú basso era separato da quello di mezzo da un assorbitore in ferro. Si misuravano le coincidenze ritardate tra i rivelatori piú in alto e questo. Se un muone si fermava nel ferro e successivamente decadeva, il numero di coincidenze ritardate doveva seguire la legge del decadimento esponenziale. Le coincidenze misurate nel corso di questo esperimento erano le seguenti (abbiamo riportato solo parte dei dati sperimentali):

Ritardo (μs)	Frequenza (Hz)
0.00	3.47 ± 0.4
1.00	2.42 ± 0.3
1.97	1.26 ± 0.2
3.80	0.86 ± 0.17

Calcola la vita media del muone.

SOLUZIONE \rightarrow

Questa grandezza fisica si può misurare per tutte le particelle instabili, come i muoni, i pioni, e i neutroni. I π^0 decadono in due fotoni con una vita media dell'ordine dei 10^{-16} s. I pioni carichi, invece, decadono in tempi molto piú lunghi, in muoni e neutrini: 10^{-8} s. I muoni, a loro volta, decadono in elettroni e neutrini con una vita media dell'ordine di un paio di μs e il neutrone ha una vita media di quasi 900 s. Si vede subito che l'intervallo di valori è molto ampio, tuttavia possiamo fare alcune considerazioni che ci portano a concludere che cer-

¹All'epoca dell'esperimento, in ogni caso, il pione non era stato ancora scoperto.

ti decadimenti siano dovuti all'interazione debole, mentre altri a quella elettromagnetica.

Lo spazio delle fasi

Lo **spazio delle fasi** è uno spazio nel quale si possono rappresentare tutte le possibili configurazioni di un sistema fisico e la sua *ampiezza* è una misura del numero di possibili configurazioni dati certi vincoli. In fisica delle particelle lo spazio delle fasi misura il numero di configurazioni che due o piú particelle possono assumere a parità di condizioni. Nel decadimento di una particella in due corpi, ad esempio, lo spazio delle fasi è limitato dal fatto che le due particelle figlie devono avere quantità di moto uguale e opposta ed energia pari alla massa della particella madre (in unità naturali). Cosí in un decadimento di una particella di massa M in due particelle di massa m_1 e m_2 , l'energia della particella 1 è data da

$$E_1 = \frac{M^2 - (m_2^2 - m_1^2)^2}{2M}. \quad (8.14)$$

Nel caso particolare $m_2 = m_1$, E_1 è fissata e vale $M/2$: lo spazio delle fasi si riduce a un punto. Nel caso in cui esistano piú canali di decadimento ci possono essere piú valori per E_1 , che dipendono dalla differenza di massa tra le particelle figlie e lo spazio delle fasi si allarga. Maggiore è la differenza di massa, piú ampio è lo spazio delle fasi.

Nel caso di un decadimento a tre corpi ciascuna particella può trasportare una frazione della quantità di moto, purché la somma vettoriale delle tre quantità di moto sia nulla. Quindi esiste un intervallo di valori permessi per la particella 1 e per la particella 2, mentre la particella 3 è obbligata ad assumere il valore determinato dalla conservazione della quantità di moto. Lo spazio delle fasi dunque è maggiore perché esistono piú configurazioni rispetto al caso precedente.

Sicuramente il decadimento del neutrone è mediato dall'interazione debole ed è ragionevole aspettarsi che tutti i decadimenti che coinvolgano neutrini

siano mediati dalla stessa forza (i neutrini non sono carichi e sono **leptoni** quindi *sentono* solo l'effetto della forza debole). Quindi anche il decadimento dei muoni e dei pioni deve essere attribuibile a questa interazione. L'enorme differenza tra le vite medie è presumibilmente dovuta a fattori che dipendono dall'ampiezza dello **spazio delle fasi**. In effetti, il neutrone e il **protone** hanno masse molto simili, quindi esistono solo pochissime configurazioni energetiche permesse (l'energia a disposizione di elettrone e neutrino è pari alla differenza di massa tra le particelle in questione moltiplicata per la velocità della luce). Invece la differenza di massa tra i muoni e gli elettroni è molto maggiore, quindi è relativamente *facile* produrre configurazioni permesse dalla conservazione dell'energia (l'intervallo di energie che possono assumere i due neutrini è ampio). La differenza tra il tempo di vita medio del muone e di quello del pione non è così grande e si può facilmente attribuire al fatto che il decadimento del pione avviene in due corpi, per cui è più facile realizzare la configurazione giusta.

Il decadimento del π^0 , invece, non coinvolge neutrini e quindi è attribuibile all'interazione elettromagnetica, dal momento che nello stato finale ci sono solo fotoni, che rappresentano proprio la radiazione elettromagnetica (la luce, che è un'**onda elettromagnetica**, si può anche interpretare come un flusso di fotoni). In questo caso l'interazione è più intensa e il tempo di vita medio più corto.

Usando **acceleratori di particelle** si possono così produrre altre particelle, come i pioni, inviando protoni accelerati su un bersaglio. I pioni carichi così prodotti possono essere a loro volta accelerati (purché lo si faccia prima che decadano) e inviati su un altro bersaglio. Si può così studiare, ad esempio, la sezione d'urto del processo $\pi + p$ o del processo $\pi + n$ (il bersaglio è certamente costituito di protoni e neutroni).

9.1 Urti tra particelle

A valle del bersaglio si pongono dei rivelatori con i quali si può, ad esempio, misurare la sezione d'urto di produzione di nuove particelle in funzione dell'energia del fascio incidente o dell'angolo di diffusione.

Esercizio 9.1 *Il decadimento del pione*

Calcola quanto spazio hai a disposizione per costruire un acceleratore in grado di raccogliere e accelerare i pioni prodotti nell'urto di protoni su un bersaglio, prima che questi decadano.

SOLUZIONE →

Se, ad esempio, si mandano dei π su un bersaglio, qualora i π non interagissero col bersaglio, questi seguirebbero una traiettoria rettilinea. Se quindi si misura la sezione d'urto di produzione di pioni a diversi angoli θ rispetto alla direzione di volo delle particelle del fascio, si avrebbe

$$\sigma(\theta) = 0 \quad (9.1)$$

per ogni $\theta \neq 0$, dal momento che tutte le particelle del fascio si muoverebbero in avanti senza essere deviate. In realtà i pioni interagiscono con i nuclei del bersaglio, quindi la sezione d'urto che si misura è diversa da zero. In altre parole, mettendo un contatore a un angolo θ rispetto alla direzione del fascio si misura un certo numero N_p di nuove particelle. Poco importa se si tratta, in realtà, di particelle già presenti nel fascio, che hanno semplicemente cambiato direzione in seguito all'urto con un nucleo. Non possiamo seguire le particelle individualmente, perciò non ha molto senso chiedersi se si tratti di una particella del fascio deviata o se nell'urto la particella presente nel fascio sia andata distrutta e ne sia stata prodotta un'altra, della stessa natura, con caratteristiche cinematiche diverse. Per noi, *nuova* significa una particella che prima dell'urto non c'era nello stato cinematico nella quale la osserviamo.

È abbastanza intuitivo capire che il numero di queste nuove particelle diminuisce all'aumentare dell'angolo di diffusione. Le diffusioni a piccolo angolo, in effetti, sono più probabili rispetto a quelle a grande angolo (non fosse altro che perché la quantità di moto è conservata e le velocità dei prodotti finali si devono sommare in maniera tale da conservare la quantità di moto in avanti). In ogni caso uno si aspetta che l'andamento di $\sigma(\theta)$ in funzione di θ sia caratteristico della specie di particella proiettile e di bersaglio. In linea di principio la sezione d'urto σ potrebbe dipendere anche dall'energia E della particella incidente ($\sigma = \sigma(\theta, E)$) ma non ci si aspettano variazioni brusche della sezione d'urto al variare dell'energia.

Quello che invece si osserva è un andamento della sezione d'urto in funzione dell'energia della particella incidente che varia lentamente con l'energia,

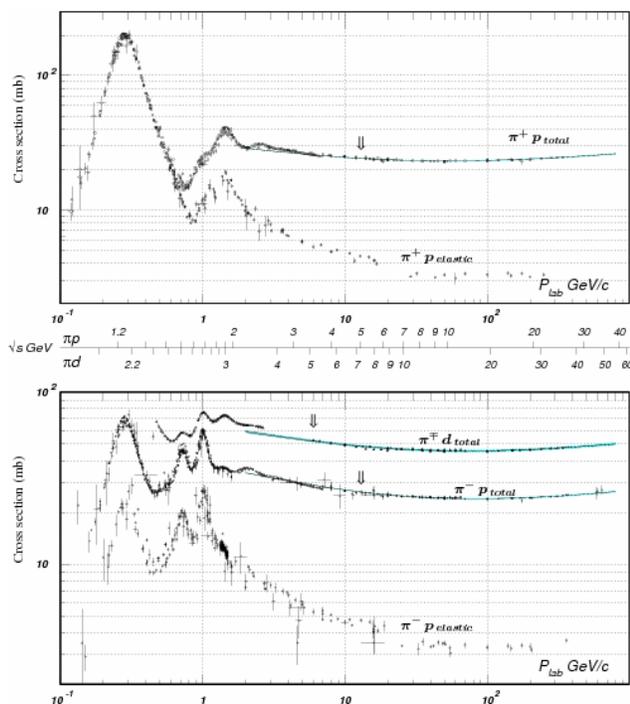


Figura 9.1 Sezione d'urto $\pi + p$ in funzione della quantità di moto del pione.

ma presenta, a certi valori caratteristici dell'energia, evidenti picchi nei quali la sezione d'urto può aumentare, rispetto al valore di base, anche di un ordine di grandezza o più. Nella Figura 9.1 si vede l'andamento della sezione d'urto del processo $\pi^+ p$ per diversi valori della quantità di moto p_{lab} del pione nel sistema di riferimento del laboratorio.

Sono riportate le sezioni d'urto elastica (quella del processo $\pi + p \rightarrow \pi + p$) e totale (quella del processo $\pi + p \rightarrow X$ dove X rappresenta un qualunque stato finale).

Appaiono evidenti una serie di valori di p_{lab} in corrispondenza dei quali la sezione d'urto aumenta parecchio. In certi casi, ad esempio per $p_{lab} \simeq 0.3$ GeV/c, la sezione d'urto elastica $\pi^+ + p$ passa da un valore dell'ordine di qualche mb a valori dell'ordine di 200 mb, mentre quella totale passa da 20 a 200 mb. Anche nel caso della reazione $\pi^- + p$ si osservano alcuni picchi, tutti in corrispondenza degli stessi valori di p_{lab} .

Questi picchi, detti **risonanze**, s'interpretano co-

FILMATO NON RIPRODUCIBILE SU QUESTO SUPPORTO: DIGITA L'URL NELLA CAPTION O SCARICA L'E-BOOK

Figura 9.2 L'osservazione di una nuova particella la cui vita media non è sufficiente a rivelarla direttamente si può fare attraverso la ricostruzione di quella che si chiama la sua *massa invariante*. Ricostruendo la massa dell'ipotetica particella che, decadendo, ha dato origine a due (o più) nuove particelle osservate nel rivelatore, si osserva un picco nella distribuzione di questa grandezza. [<https://www.youtube.com/watch?v=K2LfCWYzvBE>].

me la produzione di nuove particelle che successivamente decadono. Il motivo è semplice. Consideriamo l'urto elastico

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p \quad (9.2)$$

dove le due particelle nello stato finale si trovano in uno stato cinematico diverso da quello iniziale (nel senso che hanno una quantità di moto diversa). Se il processo che dà origine a questa reazione è un *banale* urto ci aspettiamo che la maggior parte delle particelle finisca in avanti, a un angolo piccolo rispetto alla direzione di volo del π^+ iniziale. Comunque a un angolo $\theta = \theta_0$ vedremo arrivare particelle con una certa frequenza, che diminuisce all'aumentare di θ . Se però nell'urto si produce una particella che successivamente decade in $\pi^+ + p$ i prodotti del decadimento non avranno più memoria della direzione iniziale del π^+ . I prodotti di decadimento potranno essere emessi ad angoli qualunque, in particolare ad angoli grandi. Quindi vedremo un forte aumento del numero di particelle osservate in corrispondenza dell'angolo θ_0 , quando l'energia E_π del π^+ incidente è tale da consentire la produzione di una particella con massa pari all'energia E_{cm} nel centro di massa divisa per la velocità della luce al quadrato.

Esercizio 9.2 *Produzione di risonanze*

Calcola l'energia che deve avere un fascio di π^+ per produrre una risonanza di massa M . In particolare calcola la massa che potrebbe avere una risonanza inviando pioni con quantità di moto $p = 300$ MeV su protoni fermi.

In corrispondenza di questo valore si vede un picco nella sezione d'urto. La massa della risonanza in questione è di 1232 MeV.

SOLUZIONE →

Le particelle così prodotte devono essere altamente instabili. Infatti i prodotti di decadimento appaiono provenire direttamente dal punto d'interazione. Le risonanze hanno quindi una vita media brevissima che si può stimare essere dell'ordine di 10^{-24} s.

La loro produzione è chiaramente mediata dalle **interazioni forti**. I pioni infatti devono interagire con i protoni, che sono particelle che subiscono l'interazione forte. D'altra parte anche i muoni interagiscono con i protoni, ma in questo caso le probabilità d'interazione sono molto più basse perché i muoni sono leptoni che non risentono dell'interazione forte. Anche il decadimento delle risonanze deve essere provocato dall'interazione forte, perché i tempi sono molto più brevi rispetto a quelli dell'interazione elettromagnetica e dell'**interazione debole**.

Esercizio 9.3 *Produzione di Δ*

Indica attraverso quali reazioni si possono produrre le quattro particelle Δ con fasci di pioni carichi.

SOLUZIONE →

Tra le risonanze si possono annoverare la Δ^- , la Δ^0 , la Δ^+ e la Δ^{++} , con carica elettrica, rispettivamente, pari a e , zero, $-e$ e $-2e$, dove e è la carica dell'elettrone.

9.2 La massa invariante

Secondo la **teoria della relatività** l'energia E di una particella di massa m e quantità di moto p è data da

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (9.3)$$

Nel caso in cui abbiamo a che fare con N particelle di massa m_i e quantità di moto p_i , $i = 1, \dots, N$, l'energia complessiva del sistema è la somma delle energie $E = E_1 + E_2 + \dots + E_N$ e la quantità di moto totale dalla somma di queste $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N$. In questo caso possiamo scrivere che

$$E^2 = p^2 c^2 + M^2 c^4 \quad (9.4)$$

dove p è il modulo della quantità di moto totale e M è qualcosa che ha le dimensioni fisiche di una massa. Se consideriamo un insieme di particelle ferme è evidente che la somma delle loro energie $E = (m_1 + m_2 + \dots + m_N)c^2 = Mc^2$. Quindi, almeno in questo caso, $M = m_1 + m_2 + \dots + m_N$.

L'energia E e la quantità di moto p di una particella sono grandezze fisiche che dipendono dal sistema di riferimento nel quale sono calcolate. Ad esempio: nel sistema di riferimento solidale con una particella, la sua energia vale $E = E_0 = mc^2$ e la sua quantità di moto $p = 0$. Se però la particella è in moto rispetto all'osservatore la sua energia $E > E_0$ e $p > 0$. La sua massa, però, non può dipendere dal sistema di riferimento scelto per misurarla. Si dice che la massa è un **invariante relativistico**. La differenza

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 \quad (9.5)$$

dunque, è un invariante: assume cioè sempre lo stesso valore in ogni sistema di riferimento. Se dunque abbiamo una particella ferma di massa M che decade in N particelle, ciascuna con energia E_i e

quantità di moto \vec{p}_i , poiché M è invariante deve essere

$$E^2 - p^2c^2 = M^2c^4 \quad (9.6)$$

La radice di questa differenza¹ si chiama **massa invariante** ed è utile per determinare la massa di una particella che è decaduta in altre particelle di cui si conoscano energia e quantità di moto. Infatti, la massa invariante del sistema di particelle figlie deve coincidere con la massa della particella madre.

Quando dall'urto di un pione con un protone si produce una risonanza Δ , questa decade subito dopo sempre in una coppia pione-protone. Misurando la quantità di moto delle due particelle figlie p_π e p_p se ne può ricavare l'energia $E_\pi = \sqrt{p_\pi^2c^2 + m_\pi^2c^4}$ e $E_p = \sqrt{p_p^2c^2 + m_p^2c^4}$. Se si calcola la quantità

$$(E_\pi + E_p)^2 - (\vec{p}_\pi + \vec{p}_p)^2c^2 \quad (9.7)$$

si ottiene proprio $m_\Delta^2c^4$: il quadrato della massa della particella madre (moltiplicata per c^2). Per convincersene basta calcolare esplicitamente le grandezze in gioco. Nel sistema di riferimento in cui la Δ è ferma $\vec{p}_\pi = -\vec{p}_p$ e quindi $(\vec{p}_\pi + \vec{p}_p) = 0$. La massa invariante al quadrato quindi è data semplicemente da

$$M^2c^4 = E_\pi^2 + E_p^2 + 2E_\pi E_p \quad (9.8)$$

Per la conservazione dell'energia deve anche essere che

$$E_\pi + E_p = m_\Delta c^2 \quad (9.9)$$

e facendo il quadrato di quest'ultima equazione si vede subito che $M = m_\Delta$.

Dato un sistema di N particelle prodotte dal decadimento di un'altra particella, conoscendone la cinematica, possiamo sempre calcolarne la massa invariante. Ora supponiamo di aver osservato in un esperimento diversi eventi in cui si trovano due particelle (che per semplicità supponiamo identiche).

¹A rigore si dovrebbe chiamare "massa invariante" questa radice divisa per c^2 , ma dal momento che le due quantità differiscono solo per una costante moltiplicativa possiamo usare lo stesso nome per M e per Mc^2 .

Queste due particelle possono essere il risultato del decadimento di una particella di massa M oppure possono essere state prodotte in un altro modo (per esempio nello stesso evento potrebbero essersi sovrapposte due reazioni, ciascuna delle quali produce la particella in questione). Nel caso in cui siano le figlie di una particella di massa M la loro massa invariante sarà pari a Mc^2 , altrimenti sarà un numero a caso compreso tra 0 e E dove E è l'energia complessiva nello stato iniziale.

Dal momento che c è una costante, le masse delle particelle si possono indicare, invece che in unità di massa, in unità di energia. Un protone, ad esempio, ha una massa di circa 1.67×10^{-27} kg, che, moltiplicata per $c^2 = (3 \times 10^8)^2 = 9 \times 10^{16}$ m²s⁻² dà

$$m_p c^2 \simeq 1.67 \times 10^{-27} \times 9 \times 10^{16} \simeq 15 \times 10^{-11} \text{ J} \quad (9.10)$$

che trasformato in elettronvolt (ricordiamo che $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$) vale

$$m_p c^2 \simeq 15 \times 10^{-11} \text{ J} \frac{1 \text{ eV}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ J}} \simeq 9.4 \times 10^8 \text{ eV}. \quad (9.11)$$

In definitiva la massa del protone si può esprimere come circa 10^9 eV ($\simeq 1$ GeV). In fisica delle particelle si usa esprimere le masse in unità di energia. Per ottenere le masse in kg basta dividere il valore in unità di energia per c^2 .

Se si hanno a disposizione numerosi eventi di questo tipo si può perciò calcolare la massa invariante per ogni coppia di particelle (nel caso di decadimenti a due corpi; la massa invariante si può calcolare anche per tre, quattro o più particelle nello stato finale) e costruire un **istogramma** delle frequenze con cui si presentano certi valori di massa invariante. Si ottiene un grafico in cui sull'asse delle ascisse sono riportati i possibili valori di massa invariante (in unità di energia) e in ordinata il numero di volte in cui si è trovato un determinato valore. Molti degli eventi saranno casuali: le due particelle trovate e considerate potenziali figlie di una particella più pesante non hanno in realtà alcuna relazione l'una

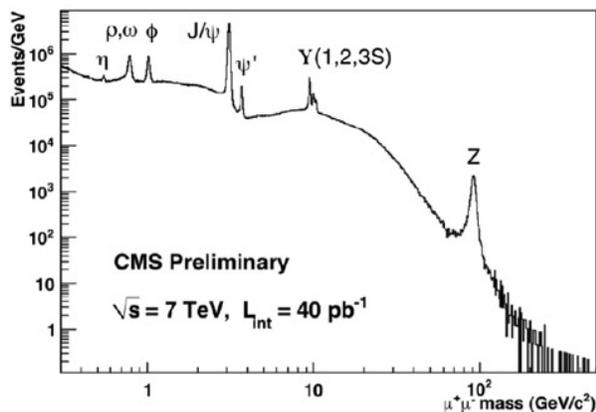


Figura 9.3 Distribuzione della massa invariante calcolata per una coppia di muoni $\mu^+\mu^-$ osservati all'esperimento CMS a LHC. Sul fondo piatto si osservano diversi picchi corrispondenti alla massa di altrettante particelle che decadono in una coppia di muoni. Notate la scala orizzontale, nella quale le masse sono espresse in GeV/c^2 . Il fondo in genere è decrescente con l'energia perché la probabilità di osservare coppie casuali di alta massa invariante è minore rispetto a quella di osservare coppie casuali di bassa massa invariante.

con l'altra, quindi daranno origine a masse invarianti casuali comprese tra 0 e l'energia massima disponibile, ma in altri casi la massa invariante assumerà proprio il valore corrispondente alla particella che, decadendo, ha dato origine a quelle dello stato finale. Il grafico (Fig. 9.3) perciò avrà l'aspetto di un *fondo* continuo sul quale si stagliano alcuni **picchi** nella posizione corrispondente alla massa delle particelle madri.

Per estensione i picchi corrispondenti si chiamano anch'essi **risonanze**. In generale la scoperta di un nuovo picco su un fondo piatto di masse invarianti corrisponde alla scoperta di una nuova particella la cui massa coincide con la posizione del picco.

Nel grafico della sezione d'urto della reazione $\pi+p$

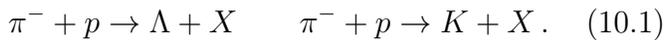
non si osservano picchi in corrispondenza della massa di particelle come la Λ o la K (il motivo è spiegato nel Cap. 10), tuttavia calcolando la massa invariante delle coppie $\pi+p$ che emergono dall'urto si trovano dei picchi in corrispondenza delle loro masse. Per questa ragione anche Λ e K si possono considerare risonanze.

Le particelle strane

Con gli acceleratori di particelle si possono studiare con un certo dettaglio le particelle scoperte nei raggi cosmici. In particolare le Λ e i K si possono produrre in numero praticamente arbitrario in laboratorio e questo permette di misurare la sezione d'urto di produzione e i tempi di decadimento.

10.1 I decadimenti della Λ

Facendo queste misure si scopre che la sezione d'urto per la produzione di Λ e di K è quella tipica delle risonanze, perciò queste particelle sono prodotte per [interazione forte](#) attraverso le reazioni



dove X rappresenta altre possibili particelle nello stato finale. I decadimenti di queste particelle, invece, hanno tempi tipici delle [interazioni deboli](#). La Λ decade principalmente nel canale



per interazione debole e questo risultò subito *sospetto*, **strano**. Naturalmente non c'è niente di strano nel fatto che una particella sia prodotta per interazione forte e decada per interazione debole: i pioni, ad esempio, sono abbondantemente prodotti nelle interazioni forti e decadono per interazione debole. Anche i neutroni sono palesemente particelle che si possono produrre per interazione forte, ma decadono per effetto dell'interazione debole. Ma nessuna di queste particelle decade attraverso un'interazione diversa da quella che ne determina la produzione nello stesso canale in cui avviene quest'ultima.

Questo è strano, perché le leggi della fisica sono invarianti per inversioni temporali.

Esercizio 10.1 *La produzione dei K*

Con un acceleratore di particelle possiamo scegliere l'energia da dare a un fascio di pioni da inviare su un bersaglio, in modo tale da garantire la produzione delle particelle che si desiderano studiare.

Calcola l'energia minima che dovrebbe avere un pione per produrre, attraverso l'urto con un protone fermo, una particella K . Nei dati sperimentali non si vedono risonanze a questa energia. Il motivo è illustrato nel Paragrafo 10.2.

[SOLUZIONE](#) →

Se si guarda un film alla TV, si capisce subito se il film è riprodotto normalmente o se le immagini vanno all'indietro nel tempo. Ma questo avviene solo perché le scene del film coinvolgono sistemi complessi composti di un numero sterminato di particelle elementari. Se riprendessimo con una telecamera [l'oscillazione di un pendolo](#) non potremmo stabilire se il filmato è riprodotto in avanti o all'indietro. In particolare, nel caso del pendolo, il tempo impiegato dalla massa appesa al filo per tornare indietro rispetto al punto d'inversione del moto è lo stesso ai due estremi della traiettoria, perché l'interazione che provoca il moto (la gravità) agisce nello stesso modo nei due punti. Questo tempo sarebbe diverso se a uno degli estremi intervenisse un'interazione diversa (in particolare se in uno degli estremi fosse impedito alla gravità di fare il suo dovere).

Allo stesso modo, se possiamo produrre una Λ per

FILMATO NON RIPRODUCIBILE SU QUESTO
SUPPORTO: DIGITA L'URL NELLA CAPTION O
SCARICA L'E-BOOK

Figura 10.1 Il moto di un pendolo è identico in avanti e all'indietro, perché la *caduta* del grave dipende dalla stessa interazione: la gravità. Se interviene un'interazione diversa a uno dei due estremi della traiettoria, il moto non è più simmetrico [<http://www.youtube.com/watch?v=IF2f4KYgfUc>].

interazione forte (quindi con alta probabilità) nell'urto tra un pione e un protone, il suo decadimento in un pione e un protone dovrebbe avvenire in tempi brevi con una probabilità analoga, dal momento che, invertendo la direzione del tempo, non dovremmo poter distinguere tra produzione e decadimento. Invece così non è. Per questo la Λ venne definita una particella **strana**.

L'unico modo di spiegare questo comportamento strano è di ammettere, come nel caso del pendolo, che nel decadimento l'interazione forte, responsabile della produzione, non possa fare il suo lavoro, lasciando il compito di far decadere la particella a un'altra interazione: quella **debole**.

Ma come mai l'interazione forte non può far decadere la Λ ? Evidentemente deve esistere una qualche grandezza fisica che è conservata nelle interazioni forti e non lo è nelle interazioni deboli. Potremmo pensare a una qualche caratteristica della particella che le interazioni forti *vedono*, e che, al contrario, per le interazioni deboli è irrilevante. Un po' come la carica elettrica, che è una caratteristica che determina il comportamento delle interazioni elettromagnetiche, ma che è del tutto irrilevante per le interazioni gravitazionali. Per la gravità un elettrone e un positrone sono identici, mentre per le interazioni elettromagnetiche no. Il fatto è che la gravità non provoca il cambiamento della natura delle particelle. Se lo provocasse, un elettrone potrebbe tranquillamente trasformarsi in un positrone.

Deve dunque esistere una specie di **carica** conservata nelle interazioni forti, che le interazioni deboli in un certo senso non *vedono*. Questa carica venne chiamata **stranezza**. Si dice che la Λ possiede una carica di stranezza (convenzionalmente pari a -1), che deve essere conservata nelle interazioni forti, ma può non esserlo nelle interazioni deboli. Perciò la Λ non può decadere secondo la reazione



attraverso l'interazione forte perché né il pione né il protone possiedono una carica di stranezza, che dunque non sarebbe conservata. Poiché però questa carica è irrilevante per le interazioni deboli, la Λ può decadere in questo modo attraverso la mediazione di quest'ultima interazione. Affinché si possa produrre una Λ per interazione forte, tuttavia, è necessario che si conservi la stranezza. Perciò sarebbe altrettanto impossibile osservare la reazione



perché neanche in questo caso si conserverebbe la stranezza (che nello stato iniziale è nulla, mentre nello stato finale vale $S = -1$).

10.2 Produzione associata

La produzione potrebbe avvenire solo se nello stato finale fossero presenti almeno due particelle con stranezza opposta. In effetti, studiando meglio la produzione di particelle strane, si trova che le Λ sono sempre prodotte in associazione ai K . La reazione che si osserva è sempre del tipo



seguita dal successivo decadimento delle Λ e dei K per interazione debole. I K , quindi, devono possedere una stranezza pari a $S = +1$. In questo modo, lo stato finale ha stranezza complessiva $S = 0$ e la reazione è possibile conservando la stranezza. Il decadimento di entrambe le particelle non può avvenire per interazione forte, che conserva la stranezza, ma può avvenire per interazione debole. I K , in effetti,

decadono con tempi tipici delle interazioni deboli, in due o tre pioni:

$$K \rightarrow \pi^+ + \pi^- \quad K \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0. \quad (10.6)$$

Studiando le reazioni agli acceleratori si scoprirono molte altre particelle strane, alcune delle quali con stranezza pari a multipli interi di quella della Λ . Ad esempio, la particella Ω^- ha addirittura stranezza $S = -3$. Questa particella si può produrre per interazione forte, ad esempio, solo in associazione a tre particelle con stranezza +1 (o a una con stranezza +2 e una con stranezza +1). La Ω^- decade per interazione debole attraverso una complessa catena che conduce alla produzione, nello stato finale, di tre pioni e un protone. Inizialmente si ha il decadimento

$$\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^-. \quad (10.7)$$

La Ξ^0 , un'altra particella strana, neutra con stranezza $S = -2$, decade poi in una Λ accompagnata da un pione neutro

$$\Xi^0 \rightarrow \Lambda + \pi^0 \quad (10.8)$$

e infine la Λ decade secondo la solita reazione $\Lambda \rightarrow \pi^- + p$.

La produzione associata spiega perché non si osservano risonanze nelle reazioni $\pi + n$ e $\pi + p$ quando l'energia del pione è sufficiente a produrre una Λ o un K . Le reazioni citate, infatti, non possono produrre una Λ o un K singoli, ma devono per forza produrre queste due particelle in associazione, insieme.

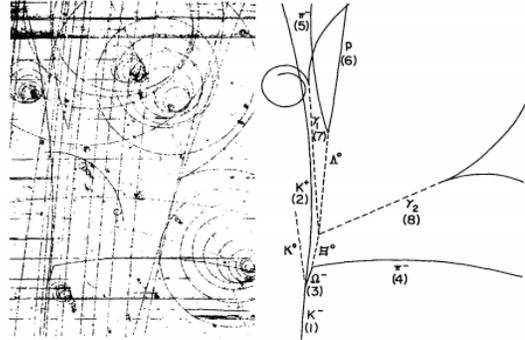


Figura 10.2 Produzione e decadimento di un Ω^- . Un K^- con stranezza $S = -1$ (in basso) urta un protone, producendo una Ω^- , un K^+ e un K^0 , conservando la stranezza. Il barione Ω decade quindi in $\Xi^0 + \pi^-$. Il barione Ξ^0 decade quindi in una Λ e un π^0 che subito si trasforma in due fotoni γ , che convertono in una coppia e^+e^- . L'ultimo decadimento nella catena è quello della Λ che decade in un protone e un pione. Nota la curvatura che le tracce delle particelle cariche assumono nel campo magnetico dell'esperimento.

II Modello a Quark

Attraverso lo studio intensivo delle possibili reazioni tra particelle e i loro decadimenti, furono scoperte moltissime nuove particelle. Il quadro si era ulteriormente complicato rispetto a quello, semplicissimo, in cui protoni, neutroni ed elettroni erano le uniche particelle elementari necessarie per spiegare la composizione della materia nell'Universo.

Oltre a queste tre particelle e ai pioni, si erano scoperte **le quattro Δ** prive di stranezza, tre particelle con stranezza $S = -1$ (Σ^- , Σ^0 e Σ^+), la Ξ nei due stati di carica Ξ^- e Ξ^0 , con stranezza $S = -2$, la Ω^- , con $S = -3$, la Λ e i K con stranezza rispettivamente $S = -1$ e $S = +1$.

Si scoprirono, inoltre, tre particelle simili alle Σ , ma piú pesanti, che vennero chiamate Σ^* : Σ^{*-} , Σ^{*0} e Σ^{*+} . E due particelle simili alle Ξ , chiamate Ξ^* , negli stati di carica Ξ^{*-} e Ξ^{*0} .

Oltre a queste particelle si erano trovati due K carichi (K^+ e K^-), e una particella neutra chiamata η simile al π^0 .

Si era anche scoperto che esistevano K neutri con stranezza $S = +1$ e con stranezza opposta $S = -1$ per cui uno dei due doveva essere l'antiparticella dell'altro: K^0 e \bar{K}^0 .

Per la conservazione del **numero barionico** le Λ dovevano essere barioni, mentre i K dovevano essere mesoni, come i pioni e la η . Le Σ e le Ξ sono barioni, cosí come le loro copie piú pesanti Σ^* e Ξ^* , la Ω^- e le Δ .

Un quadro cosí complesso sembrava inspiegabile, fino a quando **Murray Gell-Mann** e **Susumo Okubo** proposero di considerare queste particelle come a loro volta composte di particelle piú piccole, chiamate **quark**.

Tre quark per Muster Mark!

Il nome *quark* dato ai componenti elementari di alcune particelle è stato coniato da Murray Gell-Mann, il padre del Modello a quark.

Il termine è stato preso in prestito da Gell-Mann dal testo di **Finnegans Wake** di **James Joyce**, nel quale figura il brano

```
Three quarks for Muster Mark!
Sure he hasn't got much of a bark
And sure any he has it's all beside the mark.
```

Sembra che a Gell-Mann piacesse il suono di questa parola (quark) nel poema di Joyce, e il fatto che si facesse riferimento a tre quark, sembrò a Gell-Mann un buon motivo per scegliere questo nome, giacché servivano proprio tre quark per spiegare lo spettro delle particelle osservate.

La maggior parte dei fisici pronuncia la parola *quark* come *quork*, come faceva Gell-Mann (anche se probabilmente Joyce l'avrebbe pronunciata *quark*, per far rima con *Mark* e *bark*).

11.1 Tre nuove Tavole Periodiche

Che gli elementi chimici non fossero particelle elementari, ma composti di nuclei positivi ed elettroni, era stato suggerito dal fatto che le proprietà chimiche degli elementi consentivano di disporli nella **Tavola Periodica** di **Mendeleev**.

Allo stesso modo si potevano disporre tutte le nuove particelle scoperte su opportune Tavole,

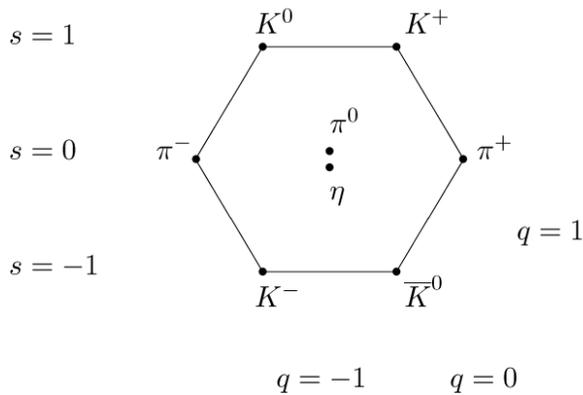


Figura 11.1 L'ottetto di mesoni.

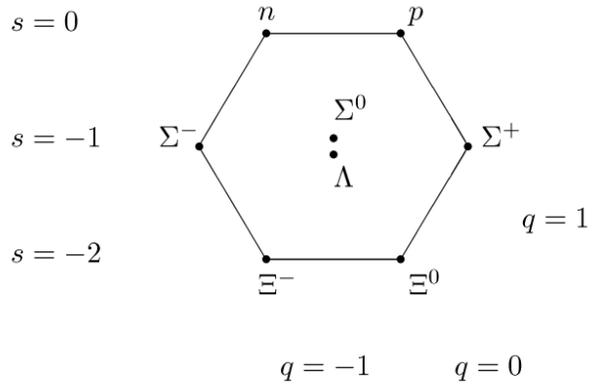


Figura 11.2 L'ottetto di barioni.

scegliendo due numeri quantici quali indici della Tavola: la carica elettrica e la stranezza.

I mesoni, ad esempio, si potevano disporre come nella Figura 11.1, a formare il cosiddetto **ottetto di mesoni**. L'ottetto è una Tavola nella quale trovavano posto gli otto mesoni fino ad allora scoperti: i quattro K , i tre pioni e l' η . Nella prima riga comparivano quelli con stranezza $S = +1$, nella seconda quelli con stranezza $S = 0$ e nella terza quelli con stranezza $S = -1$. Le particelle poi si dispongono nello schema ai vertici di un esagono in modo tale da avere la stessa carica elettrica lungo linee oblique parallele a una delle diagonali. Così il K^- e il π^- sono allineati lungo uno dei lati dell'esagono, K^0 , η , π^0 e \bar{K}^0 lungo la diagonale parallela a questo lato e K^+ e π^+ lungo il lato opposto.

In maniera del tutto analoga, otto tra i **barioni** conosciuti, si potevano disporre in un altro ottetto usando gli stessi numeri quantici, come mostrato in Fig. 11.2.

Come nel caso dei mesoni, in cui π^0 e η occupano la stessa posizione nella Tavola, nel caso dei barioni Λ e Σ^0 possiedono gli stessi numeri quantici secondo i quali la Tavola è organizzata. Le particelle in questione differiscono solo per la massa.

I barioni appartenenti all'ottetto erano tutti quelli il cui **spin** è pari a $J = \frac{1}{2}$. Tutti gli altri, infatti, avevano spin $J = \frac{3}{2}$. Anche questi ultimi si possono disporre su una Tavola, usando gli stessi nume-

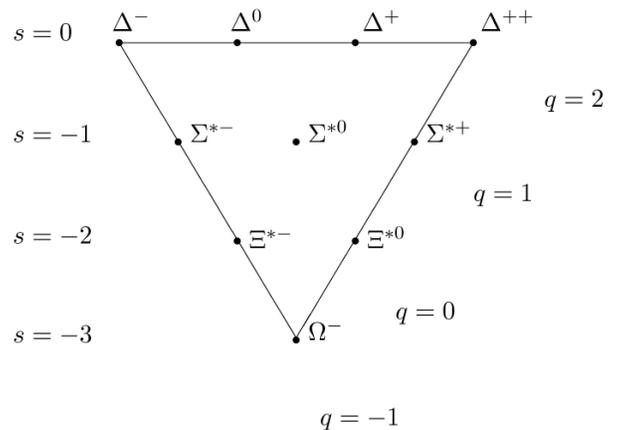


Figura 11.3 Il decupletto di barioni.

ri quantici. L'aspetto della Tavola che se ne ricava è leggermente diverso ed è quello di Fig. 11.3, chiamato il **decupletto di barioni**.

A ben vedere il decupletto di barioni non è molto diverso dall'ottetto. Di fatto, se si eliminano i vertici del triangolo formato dalle particelle che vi si dispongono, la Tavola assume lo stesso aspetto degli ottetti, anche se nella riga superiore compaiono particelle a stranezza nulla e nel mezzo c'è una sola particella, invece che due.

11.2 L'ipotesi dei quark

Ipotizzando che le particelle scoperte non siano elementari, ma a loro volta composte di altre particelle, possiamo pensare che siano il risultato della combinazione di due, tre o più particelle. Con due particelle u e d si possono costruire tre combinazioni diverse: uu , ud e dd (du è evidentemente equivalente a ud). Con tre particelle u , d e s , si possono invece fare 10 combinazioni: uuu , uud , uus , udd , uds , uss , ddd , dds , ssd , sss . Esattamente in numero tale da riprodurre il decupletto di barioni. Ipotizziamo dunque che le particelle del decupletto di barioni siano formate dalla combinazione di tre nuove particelle dette **quark** denominati **up**, **down** e **strange**. Questi **barioni** hanno spin $J = \frac{3}{2}$, quindi potremmo pensare che ciascuno dei tre quark abbia spin $J = \frac{1}{2}$ che, sommandosi, dia luogo a una particella di spin $\frac{3}{2}$. Poiché i barioni hanno stranezza variabile tra 0 e -3 , possiamo attribuire a uno dei tre quark (lo *strange*) stranezza $S = -1$. In questo modo, combinando tre quark s si può ottenere una particella con stranezza $S = -3$. Questa particella (la Ω) deve avere carica elettrica pari a -1 in unità di carica del protone. Perciò i tre quark s devono avere ciascuno carica elettrica pari a $-\frac{1}{3}$ nelle stesse unità. Se è così le due Ξ con stranezza $S = -2$ si devono ottenere dalle combinazioni (che effettivamente sono due) con due quark s : ssu e ssd . Le due Ξ^* hanno carica elettrica -1 e 0 , rispettivamente. Uno dei quark u o d , quindi, deve avere la stessa carica elettrica di s , in modo da produrre insieme a questi una particella con carica elettrica pari a -1 . Il quark d potrebbe dunque essere una particella di spin $\frac{1}{2}$ e carica elettrica $Q = -\frac{1}{3}$ (sempre in unità di carica del protone). La combinazione ssu deve quindi avere carica nulla e questo si può ottenere se si attribuisce al quark u la carica $Q = +\frac{2}{3}$.

Con un quark *strange* si possono fare tre combinazioni che danno luogo a tre particelle con stranezza $S = -1$. Le possibili combinazioni sono uus , uds e dds . Se il quark *up* ha carica elettrica $Q = +\frac{2}{3}$ e il *down* $Q = -\frac{1}{3}$ si vede subito che le combinazioni hanno carica elettrica, rispettivamente, $Q = +\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1$, $Q = +\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$ e

FILMATO NON RIPRODUCIBILE SU QUESTO SUPPORTO: DIGITA L'URL NELLA CAPTION O SCARICA L'E-BOOK

Figura 11.4 La costruzione del decupletto di barioni con il modello a quark [<http://www.youtube.com/watch?v=bGb01UXSXVU>].

$$Q = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -1, \text{ esattamente come le } \Sigma^*.$$

Calcolo Combinatorio

La statistica ci dice che se disponiamo di n elementi che possiamo combinare formando *sequenze* di k di questi elementi, nel caso in cui l'ordine non abbia importanza e tra i k elementi ce ne possono essere di ripetuti, il numero di quelle che si chiamano le **combinazioni con ripetizioni** di n oggetti di **classe** k è

$$C_{nk} = \binom{n+k-1}{k} \quad (11.1)$$

Sostituendo $n = 3$ (il numero di possibili diversi quark che possiamo usare) e $k = 3$ (il numero di quark da usare per ogni sequenza) si ottiene

$$C_{nk} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times (2)} = 10. \quad (11.2)$$

Usando solo i quark u ed s si ottengono combinazioni prive di stranezza. Ce ne sono quattro: uuu , uud , udd e ddd , che hanno, rispettivamente, carica elettrica $Q = 2$, $Q = 1$, $Q = 0$ e $Q = -1$, proprio come le Δ .

Naturalmente questo non è sufficiente per concludere che effettivamente le cose stiano così, ma è per lo meno un forte indizio. Gell-Mann [26] e Okubo [24] proposero indipendentemente una formula, ricavata da complessi argomenti teorici, che prevedeva la massa delle particelle composte di quark. La

Ω^- , in effetti, fu scoperta dopo (nel 1964) l'ipotesi dei quark e rappresentò un primo grande successo di questa teoria.

Successivamente si moltiplicarono le prove in favore dell'esistenza dei quark, attraverso svariate e complesse misure di sezione d'urto.

11.3 L'ottetto di mesoni

L'ottetto di mesoni, formato di particelle prive di spin, si può realizzare assumendo che i mesoni siano formati da un quark e un antiquark, di spin opposto. Con un quark e un antiquark si possono fare le seguenti combinazioni:

1. $u\bar{u}$, che è una particella di carica elettrica nulla (l'antiquark ha carica elettrica opposta a quella del quark corrispondente) e senza stranezza, identificabile col π^0 o con la η ;
2. anche la combinazione $d\bar{d}$ consente di costruire una particella del tutto simile;
3. $u\bar{d}$, che ha carica elettrica $Q = 1$ e non possiede stranezza, che potrebbe essere il π^+ ;
4. il π^- si potrebbe realizzare con la combinazione $d\bar{u}$, che ha carica $Q = -1$;
5. la prima combinazione con stranezza potrebbe essere $s\bar{u}$, che dà luogo a una particella con carica elettrica $Q = -1$ (il K^-);
6. $s\bar{d}$ produce una particella con carica elettrica nulla e stranezza -1 (il \bar{K}^0);
7. $\bar{s}u$ permette di costruire una particella di carica elettrica $Q = +1$ che è identificabile col K^+ ;
8. $\bar{s}d$, invece, realizza una combinazione con carica $Q = 0$ e stranezza $S = +1$: il K^0 ;
9. la combinazione $s\bar{s}$ dà origine a un'altra particella di carica elettrica nulla e priva di stranezza come nei primi due casi.

Come si vede esistono nove combinazioni di coppie quark-antiquark e non otto, come si osserva sperimentalmente. Nulla però impedisce che una particella possa essere composta da più di una combinazione: per esempio le due combinazioni $u\bar{u}$ e $d\bar{d}$ potrebbero dare entrambe luogo a un π^0 se sono indistinguibili. D'altra parte la η , oltre a decadere in due fotoni, come il π^0 , decade anche in tre pioni neutri, quasi il 40 % delle volte. La η , quindi, deve avere un contenuto di quark diverso da quello del π^0 . In generale la massa delle particelle aumenta con l'aumentare della stranezza, quindi il quark s deve essere significativamente più pesante degli altri due. Per questo si può assumere che la η sia il risultato della combinazione $s\bar{s}$, mentre il π^0 possa essere composto da $u\bar{u}$ oppure da $d\bar{d}$ ¹. In questo modo si producono otto diverse combinazioni, esattamente quante se ne osservano sperimentalmente.

11.4 L'ottetto di barioni

Resta da spiegare l'ottetto di **barioni**. Trattandosi di barioni a spin $J = \frac{1}{2}$, non potendo essere costituiti di un solo quark (che ha carica frazionaria), dobbiamo ritenere che si tratti di combinazioni di tre quark, come nel caso del decupletto. Con due quark, infatti, si possono realizzare combinazioni di spin $J = 0$ (quando gli spin dei due quark sono antiparalleli: $\uparrow\downarrow$) o spin $J = 1$ (quando sono paralleli: $\uparrow\uparrow$). Con tre quark, invece, se due di essi si dispongono in modo da produrre una combinazione con spin $J = 0$, il terzo determina lo spin della particella ($\uparrow\downarrow\uparrow$).

In sostanza l'ottetto di barioni dovrebbe essere formato dalle stesse combinazioni del decupletto, solo che in questo caso gli spin dei tre quark sono, rispettivamente $J = +\frac{1}{2}$, $J = -\frac{1}{2}$ e $J = +\frac{1}{2}$. Ma allora perché sono otto e non dieci? In effetti abbiamo già osservato che all'ottetto, di fatto, mancano le particelle disposte ai vertici del triangolo del decupletto, che sono costituite dalle combinazioni uuu ,

¹La **meccanica quantistica** prevede la possibilità che una particella sia una *sovrapposizione* di stati diversi, pertanto il fatto che i pioni siano composti di combinazioni diverse di quark è perfettamente giustificata da questo fatto.

Il Principio di Pauli

Ai piú il Principio di esclusione di Pauli appare come uno strano fenomeno, quasi paranormale, che vieta chissà in quale modo il verificarsi di certe configurazioni. Dopo tutto, cosa impedisce a due elettroni di disporsi nello stato? E come fa un elettrone a *sapere* che si trova nello stato di un altro elettrone?

Il Principio è una diretta conseguenza del fatto che le particelle, in Meccanica Quantistica, si possono descrivere attraverso *funzioni d'onda*: equazioni che hanno la stessa forma matematica di un'onda meccanica. Come è noto due onde possono *interferire* tra loro in modo da risultare in un'onda che può avere un'ampiezza variabile tra un minimo di zero a un massimo pari alla somma delle ampiezze, secondo la *fase* relativa. L'equazione che descrive due particelle identiche di spin semintero è tale da produrre un fenomeno d'interferenza per cui le due onde si annullano a vicenda. È questo fenomeno il responsabile del Principio di esclusione.

In effetti, non ci si dovrebbe stupire tanto del fatto che viga un tale Principio in fisica. In fondo, nessuno si stupisce del fatto che due oggetti non possono stare esattamente nello stesso punto \vec{x} dello spazio, avendo la stessa velocità \vec{v} . Il fatto è che in meccanica classica lo stato è definito da posizione e velocità di una particella, mentre in meccanica quantistica queste due variabili non hanno molto senso e lo stato è descritto da energia e momento angolare di una particella. Così il **Principio di esclusione di Pauli** altro non è se non la *traduzione* del principio di impenetrabilità dei corpi che vige in meccanica classica.

ddd e *sss*. Per qualche ragione queste combinazioni devono essere vietate nel caso dell'ottetto.

A pensarci bene la cosa strana non è che manchino queste combinazioni nell'ottetto, ma che siano presenti nel decupletto. Infatti, in **Meccanica Quantistica** vige il **Principio di esclusione di Pauli**, secondo il quale due o piú particelle di spin semintero non

possono mai trovarsi nello stesso stato.

Nelle combinazioni *uuu*, *ddd* e *sss* abbiamo tre particelle dello stesso tipo, nella stessa posizione, con la stessa energia e lo stesso stato di spin. Queste combinazioni sono vietate dal Principio di esclusione e dunque le particelle corrispondenti del decupletto non dovrebbero potersi formare. Per il resto è facile spiegare tutte le altre combinazioni: quelle dell'ottetto di barioni sono le stesse del decupletto, con l'unica differenza di avere i quark in stati di spin tali per cui due di essi hanno spin opposto.

11.5 Quark colorati

L'unica spiegazione che permetteva di giustificare l'esistenza delle combinazioni *uuu*, *ddd* e *sss* consisteva nell'assumere che ogni quark avesse un ulteriore numero quantico, una carica, che permetteva di distinguerlo dall'altro.

A questa *carica* venne attribuito il nome di **colore**. Si può pensare che ogni quark possa esistere in tre diversi stati di carica di colore: **rosso** *R*, **verde** *G* e **blu** *B*. Se la combinazione *uuu* è formata da tre quark di colore diverso, il Principio di esclusione di Pauli non è piú violato e lo stato può esistere. Nel caso dell'ottetto di **barioni** possiamo pensare alla combinazione *uuu* come formata da tre quark di colore diverso *RGB*, tali per cui il quark rosso ha spin $J = +\frac{1}{2}$, quello verde spin $J = -\frac{1}{2}$ e quello blu spin $J = +\frac{1}{2}$. Una tale combinazione si può rappresentare come

$$|uuu \uparrow\rangle = |R, \uparrow\rangle |G, \downarrow\rangle |B, \uparrow\rangle . \quad (11.3)$$

Combinazioni altrettanto valide sono

$$|uuu \uparrow\rangle = |R, \uparrow\rangle |B, \downarrow\rangle |G, \uparrow\rangle \quad (11.4)$$

e

$$|uuu \uparrow\rangle = |G, \uparrow\rangle |R, \downarrow\rangle |B, \uparrow\rangle . \quad (11.5)$$

Poiché tutte e tre queste combinazioni sono possibili dobbiamo considerare la *uuu* di spin $J = \frac{1}{2}$ come una particella formata da tutte e tre queste combinazioni, ciascuna presente nel 33 % circa dei casi. In

FILMATO NON RIPRODUCIBILE SU QUESTO
SUPPORTO: DIGITA L'URL NELLA CAPTION O
SCARICA L'E-BOOK

Figura 11.5 Una particella di spin $\frac{1}{2}$ formata da tre quark è una sovrapposizione dei tre possibili stati di spin in cui i quark si possono trovare [http://www.youtube.com/watch?v=PfNP_22tx6A].

altre parole dobbiamo pensare che questa particella abbia un contenuto di quark che si può scrivere, usando una notazione un po' più compatta, come

$$\left|uuu, +\frac{1}{2}\right\rangle = |R \uparrow G \downarrow B \uparrow\rangle + |R \uparrow B \downarrow G \uparrow\rangle + |G \uparrow R \downarrow B \uparrow\rangle \quad (11.6)$$

In altri termini lo stato $|uuu, +\frac{1}{2}\rangle$ si deve considerare come una *sovrapposizione* di stati e non come uno stato formato talvolta da una, talvolta dall'altra combinazione, come prescritto dalla Meccanica Quantistica.

Uno dei modi in cui si può esprimere il **Principio di Pauli** consiste nel dire che, qualora scambiando due particelle si ottenga uno stato equivalente a quello iniziale, la combinazione è vietata. Nel nostro caso, se scambiamo di posto la seconda e la terza combinazione otteniamo comunque uno stato identico al precedente e così nel caso di tutti i possibili scambi che possiamo pensare di fare. Queste combinazioni sono dunque vietate dal Principio di Pauli.

La combinazione con spin $J = \frac{3}{2}$

$$|\Delta^{++}\rangle = |R \uparrow G \uparrow B \uparrow\rangle \quad (11.7)$$

è una sola e non è vietata perché i tre quark hanno colore diverso e sono perciò distinguibili (la combinazione $|R \uparrow B \uparrow G \uparrow\rangle$ è la stessa perché i quark B e G si devono intendere nella stessa posizione, in un modo che non possiamo rappresentare sulla carta).

L'introduzione della carica di colore permette così di spiegare le diverse configurazioni osservate, ma

introduce un elemento che farebbe pensare alla possibilità di costruire molte altre combinazioni, come, ad esempio, uds con i quark u e d dello stesso colore e il quark s di colore diverso. Oltre alla combinazione di colori RGB , dunque, potrebbe esserci una combinazione con gli stessi numeri quantici della Σ^0 , ma fatta con i colori RRG o GGR o BBG , etc.. Di combinazioni così ce ne sono diverse e dovrebbero ciascuna dar luogo a particelle che dovrebbero comunque manifestare in qualche modo la carica di colore in eccesso.

In effetti possiamo pensare che la combinazione dei tre colori generi una carica di colore neutra (si dice che la particella è **bianca** o **incolora**), ma nel caso della combinazione RRG si dovrebbe poter osservare questa carica di colore come non neutra e questo dovrebbe produrre effetti sulle interazioni osservate. Se infatti la carica di colore esiste, deve essere associata a una qualche interazione per la quale l'intensità dipende da questa carica (come la carica elettrica, associata alle interazioni elettromagnetiche, ne determina l'intensità), perciò una particella formata da due quark rossi e uno verde dovrebbe presentare un *eccesso di carica rossa* che dovrebbe potersi manifestare attraverso interazioni più o meno intense rispetto a quelle subite da una particella *bianca*.

Non avendo mai osservato alcuna differenza nelle interazioni delle Σ^0 (né delle altre particelle) si pensò che dovessero essere possibili solo combinazioni di colori tali da formare una particella **priva di colore** o bianca. In questo modo le uniche combinazioni possibili sono quelle osservate. Anche nel caso dei mesoni, la combinazione di un quark con un antiquark è bianca, perché se un quark porta una carica *rossa*, l'antiquark ne porta una **antirossa**.

La regola secondo la quale tutte le particelle devono essere bianche permette anche di spiegare come mai, nonostante una lunga serie di tentativi, non furono mai osservati quark liberi. Si potrebbe infatti pensare che, colpendo un protone (formato da due quark *up* e da un quark *down*) con una particella con energia sufficiente, se ne dovrebbero poter estrarre i quark costituenti perché nell'urto i legami che tengono insieme i quark potrebbero spezzarsi. In effetti

si potrebbe pensare che i quark sono tenuti insieme nel protone (e nelle altre particelle) dalle **interazioni forti** e che quelle che si osservano nei nuclei, che tengono insieme neutroni e protoni, siano il residuo di queste forze visto attraverso la schermatura dei costituenti: una specie di **forza di Van der Waals forte**. Disponendo di sufficiente energia si dovrebbe poter vincere l'attrazione prodotta da queste forze e liberare così i quark che si dovrebbero poter osservare in esperimenti di questo genere come tracce elettricamente cariche, ma di carica frazionaria.

Il fatto che le particelle fisiche (quelle osservabili sperimentalmente) debbano essere bianche permette di spiegare l'assenza di questi eventi. È impossibile per i quark essere prodotti liberi. È quello che si chiama il fenomeno del **confinamento**.

Naturalmente esistono numerose prove dell'esistenza dei quark, sebbene non siano mai stati osservati liberi. L'esistenza di queste tre particelle e della carica di colore si prova attraverso misure che non è il caso di illustrare in questa sede, ma che dimostrano inequivocabilmente che le particelle fisiche sono formate da combinazioni di quark tenuti insieme dalla forza forte, che impedisce loro di *uscire* dalle particelle costituenti.

Non si vedono, ma si contano!

La Fisica è una scienza sperimentale che richiede di poter **osservare** i fenomeni di cui tratta. Sembrerebbe dunque di poter affermare che, giacché i quark sono intrinsecamente inosservabili dal momento che non si possono produrre liberi, non dovrebbero poter essere soggetti d'indagine per un fisico. In realtà, quando un fisico pronuncia la parola **osservare** intende **misurare** (non è infrequente che per i fisici il significato delle parole sia diverso da quello loro comunemente attribuito: è un fenomeno che si deve alla possibilità per la lingua comunemente parlata di essere interpretata in maniera ben più ambigua di quanto non sia necessario in fisica o in matematica).

All'inizio del secolo scorso non erano pochi i fisici che ancora non credevano all'esistenza degli **atomi**. L'argomento per confutarne l'esistenza era molto efficace, in effetti: gli atomi non si possono vedere, quindi non esistono! Fu **Jean Baptiste Perrin** a confutare questa tesi, eseguendo molte misure del **Numero di Avogadro** che davano tutte lo stesso risultato, basandosi sui lavori del solito **Einstein** sul **moto browniano**. Perrin, che per quei lavori vinse il Premio Nobel, osservò che è vero che gli atomi non si possono vedere perché sono più piccoli della lunghezza d'onda della luce, ma si possono **contare**, quindi se ne può misurare il loro numero, pertanto esistono.

Allo stesso modo, è vero che i quark non si possono osservare, ma se ne possono misurare gli effetti della loro esistenza in molti modi (non solo quelli illustrati qui). Dunque, benché sia intrinsecamente impossibile produrli singolarmente e **osservarli** in qualche maniera, possiamo sicuramente dire che esistono.

Il Modello Standard

Tipo	Carica elettrica Q	Famiglia		
		I	II	III
Quark	$+\frac{2}{3}$	u	c	t
	$-\frac{1}{3}$	d	s	b
Leptoni	-1	e	μ	τ
	0	ν_e	ν_μ	ν_τ

Tavola 12.1 Il Modello Standard delle particelle elementari prevede l'esistenza di sei quark e sei leptoni, oltre alle rispettive antiparticelle, come facenti parte dei costituenti della materia dell'Universo.

Il **Modello a Quark** aveva ricondotto la teoria della fisica delle particelle a una condizione di semplicità. Ora bastavano solo tre quark per spiegare la materia, insieme agli elettroni. Restava da capire il ruolo del muone e dei due neutrini, ma era stato fatto un grosso passo in avanti.

12.1 I costituenti della materia

Col passare del tempo si scoprirono nuove particelle e il quadro si complicò di nuovo anche se, diventando più *simmetrico* acquistò maggiore solidità. Interpretando tutti i dati sperimentali fino ad ora conosciuti, sappiamo che esistono sei quark: oltre a u , d e s esistono il **charm** c , di carica $+2/3$, il **top** t , anch'esso di carica $+2/3$ e il **bottom** o **beauty** b con carica uguale a quella del down e dello strange.

Esistono anche sei leptoni: oltre all'elettrone, al muone e ai rispettivi neutrini, esiste infatti il **tau** con il rispettivo neutrino ν_τ . Esiste dunque una per-

fetta simmetria tra leptoni e quark, che possiamo dividere in **famiglie**. La prima famiglia, che contiene le particelle più leggere, è formata dai quark up e $down$, dall'elettrone e dal suo neutrino (con lo stesso numero leptonico). La seconda famiglia, oltre al *charm* e allo *strange*, include il muone e il neutrino muonico, mentre della terza fanno parte il *top* e il *bottom*, il τ e il neutrino ν_τ .

La materia ordinaria è formata solo di particelle della prima famiglia. Le altre famiglie sono di fatto copie più pesanti della prima. A oggi non sappiamo ancora perché esistano tre famiglie di particelle. In effetti basterebbe la prima per spiegare la composizione dell'intero Universo.

Tutti i fenomeni osservati si spiegano alla luce di questo Modello. Il decadimento del neutrone, ad esempio, s'interpreta come il decadimento di un quark d che decade secondo la reazione

$$d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e \quad (12.1)$$

così che da una particella formata da due quark *down* e un quark *up* si formi una particella composta di due quark *up* e un quark *down* (il protone) con l'emissione di una coppia di leptoni con **numero leptonico** opposto.

La conservazione del numero barionico si spiega dunque con l'impossibilità di sopprimere un quark. Un quark può trasformarsi in un altro oppure generare una coppia quark-antiquark. Non esistono regole di conservazione per i mesoni perché sono composti di quark e antiquark: se uno di questi si trasforma il numero di quark non cambia. La conservazione del numero leptonico, invece, indica che le trasformazioni dei leptoni possono avvenire solo all'interno dello stesso **doppietto**, che non si posso-

no né sopprimere né creare leptoni, se non in coppie leptone–antileptone.

Quark e leptoni possono avere una carica elettrica e, se ce l'hanno, sono soggetti a interazione elettromagnetica. Sia quark che leptoni sono anche soggetti all'**interazione debole**. Al contrario dei quark, i leptoni non subiscono l'interazione forte. Per i leptoni è come se quest'interazione non esistesse.

In definitiva nell'Universo possono esistere sei tipi di quark e altrettanti leptoni. Oltre, naturalmente, alle rispettive antiparticelle. È con questi ingredienti che si costruiscono tutte le particelle osservate sperimentalmente. In passato le particelle più pesanti di quelle della prima famiglia dovevano essere più abbondanti di quelle presenti oggi, perché l'Universo, più compatto, era molto più caldo e le particelle in esso contenute avevano energie molto più elevate di quelle odierne. Le collisioni tra le particelle presenti potevano dunque generare Λ , Σ , Ξ , K , etc. Col tempo l'Universo si è raffreddato e l'energia delle particelle non è più stata sufficiente a produrne di nuove. Quelle esistenti hanno cominciato a decadere e oggi sono rimasti praticamente solo protoni e neutroni. Le altre particelle possiamo osservarle solo nelle rare collisioni ad alta energia dei raggi cosmici oppure in laboratorio. In un certo senso, dunque, lo studio della fisica delle particelle con gli acceleratori è anche lo studio dell'evoluzione dell'Universo e gli stessi acceleratori sono come **macchine del tempo** per tornare a epoche remotissime, quando l'Universo era molto giovane e aveva un'età compresa tra qualche frazione di secondo fino a qualche minuto.

Fisicast

In **Fisicast** abbiamo parlato di particelle elementari nei podcast:

Il microscopico zoo delle particelle elementari

[http://www.radioscienza.it/2013/09/22/
il-microscopico-zoo-delle-particelle-elementari/](http://www.radioscienza.it/2013/09/22/il-microscopico-zoo-delle-particelle-elementari/)

Vedere le particelle elementari [http://](http://www.radioscienza.it/2014/01/20/vedere-le-particelle-elementari/)

[www.radioscienza.it/2014/01/20/
vedere-le-particelle-elementari/](http://www.radioscienza.it/2014/01/20/vedere-le-particelle-elementari/)

Campi e Particelle

PREREQUISITI: dinamica elementare, energia meccanica, concetto di potenziale di un campo

La Fisica delle Particelle non consiste soltanto nell'individuare i costituenti elementari della materia: è soprattutto lo studio delle interazioni cui tali costituenti sono soggetti. Di fatto, dunque, la Fisica delle Particelle è la disciplina che studia le **forze fondamentali** che si manifestano nell'Universo e che determinano, in fin dei conti, il comportamento degli oggetti macroscopici (dagli atomi, ai batteri, agli esseri viventi evoluti come noi, ai pianeti e alle galassie).

Le forze fondamentali sono quelle che non si possono ricondurre all'azione combinata di altre forze. Le forze elastiche, ad esempio, sono il risultato delle interazioni tra i costituenti dei materiali di cui sono composte le molle, che sono di natura elettromagnetica. Al contrario, esistono alcune forze che sembrano appartenere a classi diverse, non riconducibili l'una all'altra e che per questo dobbiamo considerare come fondamentali (almeno fino a quando non scopriremo il contrario).

13.1 Le forze fondamentali

A oggi conosciamo quattro forze che possiamo considerare fondamentali: la **gravità** è forse la più conosciuta. È quella responsabile della caduta degli oggetti sulla Terra e del fatto che i pianeti orbitano attorno al Sole (e le stelle orbitano attorno al centro della Galassia). Anche le forze **elettromagnetiche** sono abbastanza note: sono quelle che danno origine ai fenomeni di tipo elettrico o magnetico. Le usiamo

pesantemente per **produrre l'elettricità** che ci serve ad alimentare tutti i nostri apparati elettronici.

Ci sono altre due forze meno note: la **forza debole** e quella **forte**. Quest'ultima è responsabile del fatto che i nuclei atomici stanno insieme nonostante le forze di natura elettromagnetica producano una forte repulsione tra i protoni. In assenza di questa forza due protoni in un nucleo (a distanze quindi dell'ordine di 1 – 2 fm, cioè di $1 - 2 \times 10^{-15}$ m) si respingerebbero con una forza immensa pari a

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} \simeq 9 \times 10^9 \frac{4 \times 10^{-38}}{10^{-30}} = 360 \text{ N} \quad (13.1)$$

che è la forza peso di un ragazzino. Affinché i protoni non si allontanino l'uno dall'altro deve esistere una forza molto più intensa che deve trattenerli all'interno del nucleo: la forza forte, appunto. Questa forza deve avere un raggio d'azione piuttosto piccolo. In effetti i protoni liberi non sembrano essere soggetti a forze attrattive così forti da parte di altre cariche positive, quindi la forza forte deve *spegnersi* abbastanza rapidamente.

La forza debole invece è quella che permette le interazioni tra i neutrini e le altre particelle e che provoca i decadimenti radioattivi dei nuclei atomici. È importante comprendere che le forze non causano solo il movimento (come si tende a credere per via della nota **equazione di Newton** secondo la quale $F = ma$), ma in generale provocano il cambiamento dello stato di un oggetto. Lo stato dei *punti materiali* è perfettamente determinato quando se ne conoscono posizione e velocità: se cambia una di queste due grandezze dev'essere intervenuta una forza. In sistema complesso lo stato è determinato

dalla sua temperatura, dal volume e dalla pressione. Un atomo non soggetto a forze non può cambiare il suo stato se non per mezzo dell'applicazione di una forza. In seguito all'intervento della forza debole il nucleo di quell'atomo può trasformarsi in un nucleo di specie diversa.

13.2 Una rivisitazione del concetto di energia

In Fisica Classica trattiamo spesso particelle come punti materiali soggette a forze di varia natura. Lo stato delle particelle è determinato quando se ne conoscano posizione e velocità. Se i corpi considerati non hanno massa costante (è il caso di un'automobile che man mano che procede consuma carburante), anche la massa determina in qualche modo lo stato del sistema. In certi casi può essere importante la temperatura, etc..

Se un sistema composto da una o più particelle è **isolato** (non può cioè interagire con nulla) possiamo sempre definire una grandezza fisica E , funzione dello stato delle particelle che compongono il sistema, che ha la proprietà secondo cui

$$\Delta E = 0, \quad (13.2)$$

cioè che la sua variazione è nulla. È del tutto evidente che, data una qualunque legge fisica, come $F = ma$, si possa definire $E = F - ma$ e quindi $E = 0$, pertanto anche $\Delta E = E(t + \delta) - E(t) = 0$, avendo indicato con $E(t)$ la grandezza fisica E misurata al tempo t . In questo non c'è nulla d'interessante. Se però riusciamo a individuare combinazioni utili di grandezze fisiche per cui vale quanto sopra possiamo imparare qualcosa di nuovo. Consideriamo, ad esempio, l'**energia meccanica** di una particella di massa m posta a una quota h dal suolo, che si muove con velocità v :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh. \quad (13.3)$$

Questa quantità dipende solamente dallo stato che la particella assume in ogni istante di tempo ed è

costante: $E(t) = E_0 = \text{const}$. Se è costante, la sua variazione nel tempo è nulla. Indicando col pedice f le grandezze nello stato finale e col pedice i quelle nello stato iniziale possiamo scrivere che

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = 0 = \frac{1}{2\Delta t}mv_f^2 + mg\frac{h_f}{\Delta t} - \frac{1}{2\Delta t}mv_i^2 - mg\frac{h_i}{\Delta t}. \quad (13.4)$$

Raccogliendo i termini simili si ottiene

$$0 = \frac{1}{2}m\frac{(v_f^2 - v_i^2)}{\Delta t} + mg\frac{(h_f - h_i)}{\Delta t} \quad (13.5)$$

e osservando che $v_f^2 - v_i^2 = (v_f - v_i)(v_f + v_i)$ possiamo scrivere

$$\frac{1}{2}m(v_f + v_i)\frac{(v_f - v_i)}{\Delta t} = -mg\frac{(h_f - h_i)}{\Delta t}. \quad (13.6)$$

Ora, $(h_f - h_i)/\Delta t$ non è altro che lo spostamento subito dalla particella nell'intervallo Δt diviso per questo stesso intervallo, quindi non è altro che la velocità media della particella v . Ma anche $(v_f + v_i)/2 = v$; inoltre $(v_f - v_i)/\Delta t = a$ non è altro che la variazione della velocità nell'unità di tempo, cioè l'accelerazione della particella, perciò, sostituendo si trova che

$$mva = -mgv \quad (13.7)$$

da cui, dividendo tutto per v si ottiene che la massa della particella per la sua accelerazione a è pari al suo peso mg , come previsto dalla legge di Newton. In generale non è difficile rendersi conto che tutta la dinamica dei corpi è contenuta in un principio fondamentale che è quello della **conservazione dell'energia**.

È il fatto che l'energia si conserva a far sí che $F = ma$. Quest'ultima, in altri termini, è una conseguenza del principio di conservazione dell'energia. Il che non significa che nell'Universo tutto deve restare immobile. Una pallina sollevata a un'altezza h possiede una certa quantità d'energia. Posso aumentare l'**energia cinetica** $\frac{1}{2}mv^2$ della pallina, ma poiché l'energia totale si deve conservare, questo può solo avvenire in seguito a una diminuzione dell'**energia**

potenziale mgh . Il che implica che sia cambiato lo stato della particella: l'altezza h non è piú la stessa. Noi imputiamo questo cambiamento di stato alla presenza di una **forza** che altro non è se non una misura dell'entità del cambiamento.

Osserviamo che la derivata dell'energia potenziale U rispetto alla posizione h è $dU/dh = mg$, che è proprio la forza con la quale il corpo cade. Possiamo dunque dire che la dinamica dei sistemi è determinata unicamente da una funzione scalare U , che è funzione solo delle coordinate, definita in tutto lo spazio. La variazione del valore di questa funzione in un punto dello spazio determina la comparsa di una forza e quindi la variazione della velocità della particella che si trova in quel punto.

Quando scriviamo $U = mgh$ per indicare l'energia potenziale gravitazionale sappiamo bene che questa è definita a meno di una costante. Potremmo benissimo definire $U = mgh + C$ con C costante e non cambierebbe nulla: quello che conta per determinare la dinamica del sistema infatti non è l'energia, ma la sua derivata (la sua variazione). Un altro modo di vedere la stessa cosa è dire che possiamo scegliere come vogliamo il livello al quale $U = 0$. Ancora una volta questo dipende dal fatto che non è possibile misurare l'energia, ma solo **differenze di energia**.

L'energia potenziale gravitazionale si definisce come il **lavoro** fatto dalle forze gravitazionali cambiato di segno:

$$\Delta U = U(h) - U(0) = - \int_h^0 mg dh = mgh. \quad (13.8)$$

Benché di norma non si faccia, si potrebbe definire il **potenziale gravitazionale** V come l'energia potenziale per unità di massa:

$$V = V(h) = \frac{U}{m} = gh \quad (13.9)$$

e l'energia potenziale gravitazionale per un corpo di massa m alla quota h si potrebbe esprimere come $mV(h)$. Quando si studiano le **interazioni gravitazionali** s'impara però che il potenziale gravitazionale è un'altra cosa: è il lavoro per portare una massa unitaria dall'infinito alla posizione nella quale si

deve valutare il potenziale, che dista r dalla sorgente del campo gravitazionale. Attorno alla Terra, dunque, il potenziale gravitazionale sarebbe

$$V = V(r) = \int_{\infty}^r G \frac{M}{r'^2} dr' = -G \frac{M}{r} \Big|_{\infty}^r = -G \frac{M}{r}. \quad (13.10)$$

Le due espressioni del potenziale hanno in comune il fatto di essere entrambe definite come il lavoro fatto dalle forze gravitazionali per portare una massa unitaria da un punto all'altro, cambiato di segno, e di crescere al crescere della distanza dalla sorgente del campo, ma appaiono decisamente diverse l'una dall'altra. Se la forza che tiene insieme il sistema solare è la stessa che fa cadere i corpi sulla Terra, come si spiega che il potenziale dell'una è diverso dal potenziale dell'altra? In realtà non c'è alcuna differenza: quando scriviamo che il potenziale gravitazionale è $V = gh$ stiamo semplicemente assumendo che g sia costante, ma questa è solo un'approssimazione. In effetti sappiamo che il potenziale della Terra, in prossimità della sua superficie, varia sí, ma di pochissimo, perché $h \ll r_0$, dove r_0 è il raggio della Terra. Sostituendo a g la sua espressione

$$g = G \frac{M}{r_0^2}, \quad (13.11)$$

scrivere $V = gh$ equivale a scrivere

$$V = G \frac{M}{r_0^2} h. \quad (13.12)$$

Scriviamo ora l'espressione esatta di V , come data nell'equazione (13.10), approssimandola con una retta (lo possiamo fare se $r_0 + h \simeq r_0$, cioè quando $h \ll r_0$):

$$V(r) = -G \frac{M}{r} = -G \frac{M}{R_0 + h} \simeq -G \frac{M}{r_0} \left(1 - \frac{h}{r_0} \right). \quad (13.13)$$

Il primo addendo di questa somma è una costante irrilevante (contano solo le differenze di potenziale). Il secondo vale

$$G \frac{M}{r_0^2} h = gh. \quad (13.14)$$

Come si vede, scrivere $U = mgh$ equivale a considerare le distanze h come molto piccole rispetto al raggio terrestre. La vera espressione di U dovrebbe essere, in effetti $U = mV$ dove V è dato dall'equazione (13.10). Si tratta di un risultato completamente generale. Ogni funzione si può approssimare, nelle vicinanze di un punto x_0 , con un polinomio. Maggiore è il grado del polinomio, migliore è l'approssimazione con la quale si approssima il valore della funzione. In generale quindi

$$V(r) = -G\frac{M}{r} = -G\frac{M}{R_0 + h} \simeq -G\frac{M}{r_0} \left(1 - \frac{h}{r_0} + \frac{h^2}{2r_0^2} + \dots\right) \quad (13.15)$$

Non è difficile convincersi che lo stesso accade per tutte le altre forze fondamentali. Se calcoliamo il lavoro fatto dalle forze elettriche cambiato di segno otteniamo l'espressione dell'energia potenziale elettrostatica, che è pari al potenziale elettrostatico moltiplicato per la carica elettrica.

Ne concludiamo che, in effetti, potremmo riassumere tutta la fisica in un'unica legge: **l'energia totale dell'Universo è e deve rimanere costante**. Se cambia l'energia in una regione dell'Universo, deve avvenire qualche cambiamento in un'altra regione tale per cui la somma algebrica delle variazioni di energia sia nulla. Se non ci fossero interazioni l'energia dell'Universo sarebbe data dalla somma delle energie cinetiche di tutte le particelle in esso contenute, che non cambierebbe mai perché in assenza di interazioni non ci sarebbero accelerazioni e dunque le velocità delle particelle non potrebbero cambiare. In presenza di interazioni possiamo associare a ogni punto dell'Universo una funzione scalare delle coordinate che chiamiamo energia potenziale la cui variazione deve essere compensata da una variazione opposta dell'energia cinetica. Il *gradiente*, cioè la rapidità con la quale cambia, dell'energia potenziale rappresenta la forza che si osserva sperimentalmente in virtù di questo principio.

13.3 L'energia delle interazioni tra particelle

L'energia potenziale dunque è l'energia determinata dalla presenza di interazioni: in presenza di due o più corpi interagenti si può definire questa quantità. I corpi devono evidentemente essere almeno due altrimenti non avremmo nessun tipo d'interazione.

Mettiamoci nel caso più semplice possibile di due sole particelle elementari che interagiscono. Una delle due particelle la possiamo considerare sorgente di un campo di forze, subito dall'altra che indichiamo come *particella di prova* o viceversa (ricordate sempre il terzo principio della dinamica). La posizione dell'una rispetto all'altra è dunque perfettamente determinata dalla distanza \mathbf{r} tra le due particelle. L'energia potenziale che possiamo associare alla particella di prova deve dunque essere una funzione scalare di \mathbf{r} : $U = U(\mathbf{r})$. Evidentemente deve dipendere dal tipo di particelle interagenti: una cosa è se le particelle hanno carica elettrica, una cosa è se non ce l'hanno. Se indichiamo con la lettera greca ϕ l'insieme delle caratteristiche delle particelle che determinano l'apparire dell'interazione possiamo scrivere che U deve essere funzione anche di questo insieme per ciascuna delle due particelle: $u = U(\mathbf{r}, \phi_1, \phi_2)$. Ovviamente, questa energia dipenderà dal tipo di campo di forze che la particella sorgente genera, che indichiamo con la lettera A : una cosa, ad esempio, è se le particelle cariche sono in quiete e una cosa è se sono in moto. Nel primo caso interagiscono elettrostaticamente, attraverso un campo elettrico; nel secondo caso sarà presente anche un campo magnetico. In definitiva $U = U(\mathbf{r}, \phi_1, \phi_2, A)$. La distanza \mathbf{r} dipende unicamente dalle coordinate di ϕ_1 e ϕ_2 , che rappresentano le due particelle interagenti, perciò l'energia dipende dalle coordinate e dunque

$$U = U(\phi_1, \phi_2, A(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)) \quad (13.16)$$

L'espressione di U può essere complicata a piacere, ma purché le dimensioni fisiche delle cose da cui dipende siano quelle opportune, possiamo sempre approssimarla con un polinomio $U = U_0 + U_1y + U_2y^2 + \dots$. La costante U_0 è irrilevante, perché quello che

conta è solo la differenza di energia, quindi possiamo sempre porre $U_0 = 0$. La variabile y del polinomio sarà una combinazione delle caratteristiche di ϕ_1 , ϕ_2 e A . Nel caso piú semplice avremo

$$y = \phi_1 A(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) \phi_2 \quad (13.17)$$

cioè un semplice prodotto delle caratteristiche. In questo modo se uno dei $\phi_i(\mathbf{x}_i) = 0$, vale a dire la particella corrispondente è assente, $U = 0$. Lo stesso accade se $A = 0$: il campo è assente e non ci sarà interazione.

In generale, dunque, U sarà una funzione qualunque $f(y)$ di questo prodotto, ma sarà sempre esprimibile, almeno in un intorno del punto d'interesse, come un polinomio: al limite come una retta. Un esempio chiarirà meglio la questione: consideriamo sempre le interazioni gravitazionali che sono quelle che conosciamo meglio. L'energia di una particella di massa m nel campo di una particella di massa M si scrive come

$$U = G \frac{Mm}{r}. \quad (13.18)$$

U è funzione delle caratteristiche che determinano, per ciascuna delle due particelle, l'interazione ($\phi_1 = M$ e $\phi_2 = m$) e dalla forma del potenziale del campo che possiamo indicare genericamente come $A = G/r$ (il potenziale prodotto da una particella ϕ si ottiene moltiplicando ϕ per A). Se invece di scrivere l'energia per esteso, ne scriviamo un'espressione approssimata, trascurando la presenza della costante irrilevante, scriveremmo

$$U \simeq \phi_1 A \phi_2 = M \frac{G}{r} m \quad (13.19)$$

che è proprio l'espressione esatta dell'energia potenziale (questo significa che, nel caso in esame, $U_1 = 1$ e $U_{i \neq 1} = 0$). Dunque non importa quanto sia complicata la funzione che definisce la vera energia potenziale di tutte le particelle dell'Universo: possiamo sempre restringerci a considerare due particelle sufficientemente vicine da interagire in modo da produrre un'energia potenziale pari a questo prodotto di caratteristiche $\phi_1 A \phi_2$.



Figura 13.1 Il diagramma di Feynman piú semplice, che rappresenta l'interazione tra un campo e due particelle.

Graficamente possiamo rappresentare l'equazione che definisce il primo termine dello **sviluppo polinomiale** dell'energia in questo modo: disegniamo una freccia ogni volta che compare un fattore ϕ_i ; le due frecce che inevitabilmente dovranno comparire le disegniamo contigue, per indicare che l'interazione tra queste due particelle avviene in un preciso punto dello spazio che è quello in cui la prima freccia converge e da cui la seconda emerge. Da questo stesso punto disegniamo poi una linea ondulata che rappresenta il campo che produce l'interazione tra le due particelle, come nella Figura 13.1. Il diagramma di questa figura si chiama **diagramma di Feynman**¹.

I diagrammi di Feynman sono un vero e proprio strumento di calcolo usato dai Fisici Teorici per calcolare le probabilità che avvengano certi fenomeni e sono troppo complessi per poter essere insegnati a questo livello. Possiamo però provare a darne una libera interpretazione che ne chiarisce il senso vero.

In questo diagramma abbiamo due particelle e un campo nello stesso preciso punto dello spazio: il **vertice** dell'interazione, costituito dal punto in cui convergono le tre linee. Questo non è ragionevole: due particelle non possono stare nello stesso identico punto! Si potrebbe viceversa interpretare questo diagramma come segue: una particella di materia proviene da sinistra; a un certo punto, quando si trova nel vertice, produce un campo, che è rappresentato dalla linea ondulata. In questa visione il campo

¹Dal nome del fisico Richard Feynman che li inventò.

non è qualcosa di permanente nello spazio, ma qualcosa che viene *emesso* dalla particella in continuazione. In seguito all'emissione del campo, che è un processo simile a quello in cui si *lancia* qualcosa da un oggetto in corsa, per effetto della conservazione della quantità di moto, la particella cambia leggermente direzione. In altre parole, quello che abbiamo appena descritto è un processo nel quale una singola particella emette un campo che non influenza il moto di nessun'altra particella nelle vicinanze. In seguito a questa emissione la particella cambia direzione mentre il campo continua a viaggiare fino a distanze infinite. Anche questo non appare molto ragionevole: una sola particella magari emette un campo, ma se non ci sono particelle nelle vicinanze non potremo mai saperlo, dal momento che non c'è modo d'interagire con essa e carpirne qualche informazione.

In effetti, nella teoria di Feynman, usando gli opportuni *valori* per ϕ_1 , ϕ_2 e A si trova che il prodotto $U = \phi_1 A \phi_2$ è nullo. Questo indica che la probabilità che accada questo fenomeno è nulla e quindi questo diagramma non può contribuire all'energia dell'Universo. Di conseguenza il termine $U_1 \phi_1 A \phi_2 = 0$. Non è quello che succede all'energia potenziale gravitazionale, ma solo perché in quel caso stiamo considerando corpi costituiti di moltissime particelle!

Il primo termine dello sviluppo che potrebbe essere non nullo è dunque il termine di grado due:

$$U \simeq U_2 (\phi_1 A \phi_2)^2. \quad (13.20)$$

Dal punto di vista grafico possiamo pensare a questo termine come composto dal prodotto di due diagrammi come quelli di Figura 13.1, opportunamente uniti. Un modo per farlo è quello di unire il diagramma della Figura 13.1 con un altro identico attraverso la linea ondulata: il campo. Come nella Figura 13.2.

In questo diagramma due particelle si muovono da sinistra verso destra avvicinandosi. A un certo istante una delle due (quella di sopra, per esempio) emette un campo e cambia direzione. L'altra (quella in basso) *raccoglie*, per così dire, il campo e, come nel caso in cui qualcuno raccolga un oggetto

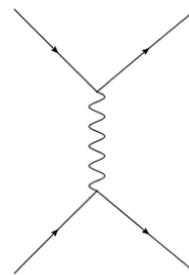


Figura 13.2 L'interazione tra due particelle come descritta da un diagramma di Feynman.

pesante lanciato da qualcun altro, cambia direzione anche lei. Naturalmente potremmo invertire il ruolo del *lanciatore* e del *raccogliatore*: non cambierebbe nulla. Abbiamo appena descritto un processo nel quale due particelle si avvicinano e si respingono l'una con l'altra: non si può dire chi respinge quale: si respingono a vicenda. L'una si può considerare produttrice del campo e l'altra quella che lo subisce o viceversa. L'effetto è lo stesso.

Calcolando questo diagramma con le regole di Feynman si trova in effetti un valore di probabilità diverso da zero. Se poi si confronta questa probabilità d'interazione con quella misurata sperimentalmente, usando le corrette espressioni per ϕ_1 , ϕ_2 ed A , si trova che queste praticamente coincidono! In pratica con le regole di Feynman si può calcolare la probabilità che, ad esempio, un elettrone sia diffuso da un altro elettrone a un certo angolo, avendo l'uno una certa quantità di moto e l'altro, per esempio, sia fermo. Si può quindi misurare questa probabilità misurando la frequenza con la quale elettroni con la quantità di moto scelta sono diffusi da elettroni fermi all'angolo desiderato. Il risultato è un sorprendente accordo tra teoria ed esperimento.

Diremo, allora, che l'interazione tra due particelle funziona così: evidentemente le particelle di materia possono *emettere* dei campi. Se nelle vicinanze si trova una particella in grado di assorbire tale campo, lo fa e in questo modo si manifesta l'interazione. In pratica le due particelle interagiscono perché si

scambiano qualcosa che chiamiamo **campo**, ma che potremmo pensare come a una particella prodotta dalla prima e raccolta dalla seconda. Questo campo è dunque rappresentabile come una **particella mediatrice** di forza che è scambiata tra le particelle di materia che interagiscono. Noi non possiamo *osservare* direttamente questo processo: si tratta soltanto di un'astrazione matematica. Ma questa astrazione rappresenta bene la realtà sperimentale e pertanto siamo autorizzati a pensare che le cose vadano effettivamente così: non importa se non vanno davvero così: la Fisica è una scienza sperimentale e come tale descrive le osservazioni. Le descrive in termini matematici. L'interpretazione che diamo delle equazioni in termini di *oggetti* è del tutto arbitraria, anche se funzionale. Del resto sappiamo bene che i pianeti non sono dei punti, ciò non di meno si possono rappresentare così nella nostra testa quando ne consideriamo il moto descritto dalle equazioni di Newton, che sono l'unica *cosa reale*.

In questa modo il campo elettromagnetico diventa una particella (che chiameremo **fotone**) che è scambiata tra due elettroni e ne provoca la repulsione. Ma come si spiega invece l'attrazione tra un elettrone e un protone? Proviamo a insistere con questa interpretazione prendendo un protone inizialmente fermo. Questo, a un certo punto dovrebbe emettere un fotone e quindi dovrebbe muoversi nel verso opposto a quello nel quale si muove il fotone. Se giunge nelle vicinanze un elettrone che si muove parallelamente al fotone in direzione di quest'ultimo, si scontra con questo e riceve una spinta all'indietro. Apparentemente, dunque, il processo non funziona: il protone e l'elettrone si respingerebbero invece di attrarsi. Ma non dobbiamo dimenticare quanto abbiamo detto sopra! La nostra descrizione qualitativa del processo è una libera interpretazione delle equazioni che sono l'unica descrizione valida della realtà. Basta cambiare il segno dell'energia per provocare un'interazione attrattiva, quindi evidentemente lo stesso processo deve poter descrivere anche questo tipo d'interazioni. Possiamo continuare a immaginare il processo come lo scambio di qualcosa: basta cambiare prospettiva! Pensiamo a due giocolieri che si scambiano delle clavette: le clavette viaggiano in

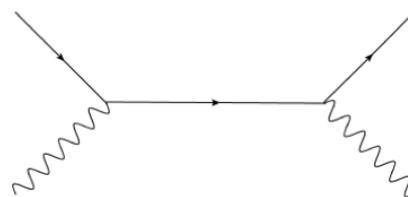


Figura 13.3 L'interazione tra una particella e un campo.

continuazione dall'uno all'altro e viceversa. Fino a quando i due giocolieri si scambiano questi oggetti sono *costretti* in qualche modo a restare vicini. Sono dunque *attratti* l'uno dall'altro. Se smettono di scambiarsi mediatori, invece, possono andare ognuno per la sua strada: uno va al bar, l'altro al bagno e l'interazione è spenta.

13.4 Altri processi

Attaccare le linee di campo dei due diagrammi più semplici per mezzo della linea ondulata non è l'unica possibilità. Un altro modo di fare il prodotto $(\phi_1 A \phi_2)^2$ consiste nell'unire due linee di particelle di materia, come in Figura 13.3.

Possiamo interpretare questo diagramma come quello che descrive un campo *libero* (quello a sinistra che proviene dal basso) che interagisce con una particella di materia (a sinistra). In seguito all'assorbimento del campo la particella si propaga per un po' e poi riemette il campo, che si muove verso il basso a destra. Un elettrone che entra in una regione nella quale è presente un campo elettrico non *consuma* il campo presente. Per interagire con esso lo deve assorbire e rimettere. In questo processo cambia la sua direzione perché la cinematica del processo di riemissione può essere diversa da quella dell'assorbimento.

Questo processo è consentito perché possiede almeno due vertici. Si può vedere che il numero di vertici di un diagramma di Feynman coincide con l'or-

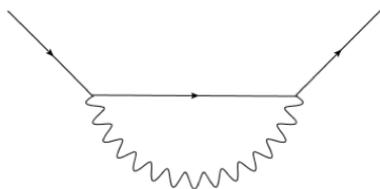


Figura 13.4 L'interazione tra una particella e il suo proprio campo.

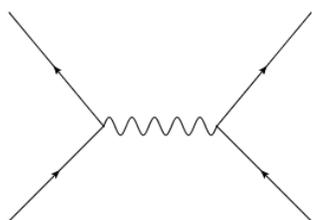


Figura 13.5 Il diagramma di annichilazione.

dine dello sviluppo polinomiale della funzione energia d'interazione. Un altro processo con due vertici è quello che consiste nell'unire due linee di materia e due linee di campo, per ottenere il diagramma di Fig. 13.4.

Questo diagramma rende ragione di quanto accade nel caso in cui la particella in moto emetta un campo e non vi siano particelle nelle vicinanze per *raccoglierlo*. Il campo è semplicemente riassorbito dalla particella.

Ma il diagramma piú interessante si ottiene ruotando di 90 gradi quello di Fig. 13.2, mostrato in Fig. 13.5. Anche questo dovrebbe essere un diagramma legittimo, ma che cosa rappresenta? A prima vista sembra un processo impossibile: una particella (un elettrone) proviene da sinistra in basso e raggiunge un vertice nel quale emette un campo. Da questo punto parte anche un'altra particella che però deve muoversi all'indietro nel tempo (finora abbiamo sempre considerato il tempo come se scor-

resse da sinistra a destra). Trascorso qualche istante, poi, il campo svanisce e dal punto in cui svanisce il campo fuoriesce una particella che si muove verso l'alto a destra, ma un'altra particella che si muove all'indietro sembra finire in questo punto e scomparire anche lei! Naturalmente è possibile che abbiamo trascurato qualche particolare secondo il quale questo diagramma dovrebbe restituire il valore zero, una volta calcolato, ma la spiegazione, sorprendente, è nel prossimo paragrafo.

13.5 L'antimateria

Al Paragrafo 5.3 abbiamo detto che nel 1933 fu scoperta una particella identica all'elettrone, ma con carica elettrica positiva: il positrone. Un elettrone in un campo elettrico si muove in modo tale da spostarsi da punti a potenziale minore a punti a potenziale maggiore. Se avesse carica elettrica positiva, il suo moto sarebbe diverso: si muoverebbe spostandosi dai punti a potenziale maggiore a quelli a potenziale minore. Se noi filmassimo un elettrone in un campo elettrico e poi guardassimo il filmato al contrario confonderemmo il moto con quello di un positrone. In altre parole i positroni si comportano come elettroni che si muovono all'indietro nel tempo e viceversa.

La linea di materia presente in Fig. 13.5 a sinistra, dunque, potrebbe benissimo rappresentare un positrone che si muove al contrario rispetto alla direzione della freccia. Quello che ci dice questo diagramma è che quando un elettrone e un positrone si incontrano **annichilano**: vengono distrutti, spariscono nel nulla; la loro materia è completamente annullata, ma la loro energia no. L'energia posseduta si trasferisce al campo che evidentemente è prodotto nell'annichilazione, che si propaga per un po' di tempo, ma successivamente **materializza** in una coppia particella-antiparticella (la linea di materia che si muove al contrario a destra). La cosa interessante è che nei due vertici si devono conservare tutta una serie di grandezze fisiche, ma tra queste non c'è il tipo di particella. Nel vertice di destra dunque si può produrre una coppia elettrone-positrone identi-

ca a quella iniziale (e in questo caso il risultato netto sarebbe un'interazione tra queste due particelle), ma anche una coppia di muoni $\mu^+\mu^-$!

Partendo da una coppia elettrone–positrone si finisce con l'avere una coppia di muoni (o di altre particelle). Evidentemente questo (o uno analogo) è il meccanismo con il quale i raggi cosmici primari danno origine a particelle di natura diversa: nell'urto deve essere emesso un campo che poi materializza in qualche modo. In effetti si può dimostrare sperimentalmente che il fenomeno esiste e funziona proprio come previsto dalla teoria. Ancora una volta, dunque, abbiamo una conferma della bontà della nostra visione del modo in cui procedono le interazioni tra particelle elementari.

13.6 La produzione delle particelle strane

Vediamo come si può interpretare la produzione di particelle strane alla luce di questa teoria. Come illustrato nel Paragrafo 11 i protoni sono particelle costituite di tre quark: $p = (uud)$, mentre i pioni sono composti di una coppia quark–antiquark e quindi $\pi^- = (d\bar{u})$.

Quando queste due particelle si urtano si possono produrre una Λ e uno dei K , che sono composte a loro volta di quark: $\Lambda = (uds)$ e $k = (d\bar{s})$. Nello stato iniziale abbiamo due quark u , due quark d e un quark \bar{u} , mentre in quello finale ci sono due quark d , un solo quark u e due quark strani: s e \bar{s} . In effetti sembra che ai quark d non accada nulla. Quello che probabilmente succede è che nell'urto si scontrano un quark u del protone con il quark \bar{u} del pione. Trattandosi di una coppia particella–antiparticella possono annichilare emettendo una particella mediatrice di forza. In questo caso molto probabilmente non si produce campo elettromagnetico, ma forte, visto che la sua intensità è molto maggiore. Il mediatore della forza forte è chiamato **gluone**. Il gluone si propaga per un po' e poi materializza in una coppia quark–antiquark diversa: $s\bar{s}$. Questi si legano a quelli che sono stati solo **spettatori** del processo

(non hanno interagito) formando le particelle Λ e K .

13.7 L'interazione debole

Il decadimento dei neutroni procede secondo la reazione $n \rightarrow p + e^- + \nu$ mediato dall'**interazione debole**. Quello che deve accadere è che un quark d del neutrone si trasforma in un quark u formando il protone, con la conseguente emissione di un elettrone e un neutrino. L'interazione debole non *vede* i diversi tipi di quark: il quark d e il quark u sono diversi solo per l'interazione forte e per quella elettromagnetica (avendo carica diversa). L'interazione debole praticamente non distingue tra questi due quark, quindi il quark d può diventare un quark u emettendo un campo debole. Ma dal momento che in questo processo cambia la carica elettrica del quark, il campo debole deve trasportare esso stesso una carica elettrica negativa. Questo campo, mediato dai **bosoni** W , elettricamente carichi, produce una coppia di particelle che nuovamente sono identiche dal punto di vista dell'interazione debole (o meglio sono l'una l'antiparticella dell'altra), ma non per quella elettromagnetica: un elettrone e un neutrino.

Le interazioni deboli possono essere mediate anche da un'altra particella: la Z , che è neutra. La Z è responsabile degli eventi nei quali i neutrini urtano un protone e gli trasferiscono una quantità significativa di energia nel processo $\nu + p \rightarrow \nu + p$. Sperimentalmente questo processo fu osservato per la prima volta al CERN nel 1973. Nell'esperimento si inviava un fascio di neutrini su un bersaglio (costituito di protoni e neutroni). Quando un neutrino urta un protone lo fa muovere nel rivelatore provocando una traccia ionizzata, mentre il neutrino prosegue la sua corsa, dopo essere stato deviato, senza lasciare tracce nel rivelatore.

Il bosone di Higgs

FILMATO NON RIPRODUCIBILE SU QUESTO
SUPPORTO: DIGITA L'URL NELLA CAPTION O
SCARICA L'E-BOOK

Figura 14.1 La massa di una particella è una misura di quanto sia difficile cambiarne lo stato di moto. Da questo punto di vista il meccanismo di Higgs è analogo all'effetto prodotto da un campo magnetico su una biglia d'acciaio [<https://www.youtube.com/watch?v=Dkd0--yxI0w>].

La scoperta del bosone di Higgs avvenuta nel 2012 a opera degli esperimenti ATLAS e CMS all'acceleratore LHC del CERN rappresenta una delle imprese scientifiche più ardite che l'uomo abbia mai realizzato. Per renderla possibile sono infatti state impiegate tecniche al limite della tecnologia.

Dopo la scoperta, che ha avuto grande enfasi su tutti i media, è risultato abbastanza noto a tutti che il bosone di Higgs è la particella responsabile del fatto che tutte le altre particelle possiedono una massa. Tuttavia, essendo abituati a pensare alla massa come a una proprietà intrinseca della materia, risulta difficile immaginare perché ci sia bisogno di un meccanismo per dare massa alle particelle e come sia possibile che questa proprietà emerga dall'interazione con un'altra particella.

In questo capitolo descriviamo quello che si chiama il *meccanismo di Higgs*, che **Peter Higgs** teorizzò nel 1964 per spiegare un complesso problema di fisica fondamentale che ha a che fare con l'osservazione sperimentale della rottura di alcune simmetrie dell'Universo. La spiegazione originale di Higgs ser-

viva di fatto a spiegare la differenza di massa tra i fotoni, responsabili dell'interazione elettromagnetica, e i bosoni vettori intermedi Z e W , responsabili dell'**interazione debole**, attraverso l'introduzione di una nuova particella, successivamente battezzata **bosone di Higgs**. È quindi possibile estendere in modo abbastanza naturale le interazioni di questa particella per fare in modo che questa possa dare la massa anche alle particelle di materia (quark e leptoni).

La spiegazione di Higgs richiede l'introduzione della teoria quantistica dei campi, che va molto al di là degli scopi di questa pubblicazione, ma si può riformulare [31] in termini di fisica classica rovesciando il problema: spiegando cioè prima l'acquisizione della massa da parte delle particelle di materia e poi la differenza di massa tra i fotoni e i bosoni vettori intermedi (Z e W).

14.1 Richiami sul concetto di energia

Il concetto di energia è uno dei più ostici per gli studenti, nonostante il fatto che, tutto sommato, il calcolo dell'energia di un corpo in una determinata condizione sia relativamente semplice. In questo contesto c'interessa osservare come, a dispetto delle apparenze, il calcolo dell'energia di un corpo in condizioni molto diverse, sia sempre esprimibile nella stessa maniera. Nel seguito consideriamo sempre corpi che, nel sistema di riferimento scelto, sono in quiete, per cui la loro energia cinetica è nulla.

Consideriamo inizialmente un corpo di massa m in un campo gravitazionale \mathbf{G} . L'energia assunta

dal corpo in virtù dell'interazione con il campo è esprimibile come

$$U_G = m\mathcal{G}, \quad (14.1)$$

dove \mathcal{G} è il cosiddetto *potenziale gravitazionale*. Vale la pena ricordare che il potenziale di un campo è una funzione scalare del campo stesso e delle coordinate. Nello specifico, scegliendo un punto a distanza infinita come riferimento, abbiamo che

$$\mathcal{G} = \int_{\infty}^r \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}. \quad (14.2)$$

Nell'equazione (14.2), \mathbf{r} rappresenta il vettore che individua la posizione del corpo nel sistema di riferimento scelto. Nel caso semplice in cui il campo gravitazionale sia prodotto da un corpo di massa M possiamo dunque scrivere che

$$U_G = GM \int_{\infty}^r \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}{r^3}, \quad (14.3)$$

dove G è la costante di Newton. Data l'arbitrarietà con la quale si può scegliere il punto nel quale $U_G = 0$, l'energia del corpo è definita a meno di una costante che, proprio per quanto sopra, possiamo sempre scegliere essere uguale a zero (questa scelta è d'ora in poi considerata implicita).

Consideriamo ora un corpo con carica elettrica q immerso in un campo elettrostatico \mathbf{E} . Anche per il campo elettrostatico possiamo definire un potenziale \mathcal{E} ¹ in maniera del tutto analoga a quanto fatto per il campo gravitazionale e in definitiva scrivere che

$$U_E = q\mathcal{E}. \quad (14.4)$$

Il potenziale \mathcal{E} è ancora una volta una funzione scalare del campo e delle coordinate, la cui forma è identica a quella dell'equazione (14.2), avendo cura di sostituire \mathbf{E} a \mathbf{G} .

¹Di solito il potenziale elettrostatico si indica col simbolo V o ΔV , ma in questo caso preferiamo adoperare il simbolo \mathcal{E} per rendere evidente il tipo di campo a cui si riferisce e per evitare di confondere il potenziale con il volume, che indichiamo, invece, con V .

Nel caso di una spira di area S , percorsa da corrente I e immersa in un campo magnetico \mathbf{B} , l'energia assunta dalla spira vale

$$U_B = -IS\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{B} \quad (14.5)$$

dove $\hat{\mathbf{z}}$ è un versore orientato in modo da essere perpendicolare al piano su cui si giace la spira. Solitamente la quantità $\mathbf{m} = IS\hat{\mathbf{z}}$ è chiamata *momento magnetico* della spira $\boldsymbol{\mu}$, per cui si scrive che $U_B = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$. È ben noto che, nel caso del campo magnetico, non è possibile scrivere un potenziale scalare, ma abusando leggermente del vocabolario possiamo ridefinire il termine *potenziale* come un'opportuna funzione scalare dei campi e delle coordinate, tale per cui possiamo scrivere che

$$U_B = I\mathcal{B}. \quad (14.6)$$

Dal confronto delle ultime due equazioni si deduce immediatamente che il *potenziale* (così come da noi ridefinito) \mathcal{B} del campo magnetico vale

$$\mathcal{B} = -S\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{B}. \quad (14.7)$$

Sarebbe forse più opportuno definire un termine *ad hoc* per questa funzione, invece di usare il termine *potenziale*, ma per semplicità continuiamo a impiegare questo nome, scritto in caratteri diversi. In definitiva si può osservare come l'energia di un corpo immerso in un campo si possa scrivere sempre nella stessa forma, per tutti i campi noti a uno studente di liceo:

$$U = U_G + U_E + U_B = m\mathcal{G} + q\mathcal{E} + I\mathcal{B}. \quad (14.8)$$

Vale la pena osservare che la sorgente del campo gravitazionale è la massa, quella del campo elettrostatico la carica elettrica e quella del campo magnetico la corrente. Tutti i termini di questa somma hanno la stessa forma: una costante di accoppiamento che dipende dalla natura del campo con il quale la particella in esame interagisce (m , q o I) e il *potenziale* del campo di cui la particella stessa è sorgente (\mathcal{G} , \mathcal{E} o \mathcal{B}).

14.2 Campi autointeragenti

Quanto sopra tiene conto dell'energia posseduta dai corpi immersi nei campi. È però noto anche a studenti di liceo che i campi elettrici e magnetici trasportano energia. Basta considerare un condensatore carico per rendersi conto che l'energia in esso contenuta non può che essere trasportata dal campo elettrico tra le armature; analizzando un circuito RLC, invece, si vede subito che il campo magnetico nell'induttanza deve poter trasportare una certa quantità di energia.

Nel caso classico l'energia del campo è distribuita all'interno di un volume (quello tra le armature del condensatore o all'interno della bobina negli esempi sopra riportati) e si parla dunque di densità di energia dei campi. Per i campi elettrici e magnetici nel vuoto le densità di energia u_E^a e u_B^a si calcolano rispettivamente come

$$u_E^a = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \quad (14.9)$$

e

$$u_B^a = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}. \quad (14.10)$$

Nelle equazioni sopra riportate l'indice a sta a indicare il fatto che questi contributi all'energia derivano dall'*autointerazione* dei campi in questione con sé stessi. Questo spiega perché un tale termine non sia presente per il campo gravitazionale, che non interagisce con sé stesso (possiamo comunque pensare che la sua densità di energia sia $u_G^a = \frac{\gamma}{2} \mathbf{G} \cdot \mathbf{G}$ con $\gamma = 0$). In un volume V in cui siano presenti sia campi elettrici che magnetici, l'energia contenuta dovuta alla presenza di questi campi è quindi

$$U_E^a + U_B^a = V \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right). \quad (14.11)$$

14.3 Sul significato dell'energia

Considerato quanto sopra, l'energia contenuta in un volume V di Universo, nel quale sia presente una

particella di massa m e carica elettrica q , che dunque generi una corrente $I = dq/dt$ se in moto, in presenza di campi elettrici e magnetici, si può scrivere come

$$U = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + m\mathcal{G} + q\mathcal{E} + I\mathcal{B} + V \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right). \quad (14.12)$$

A parte il termine cinetico (che peraltro ha una forma analoga a quelli dovuti all'autointerazione dei campi suggerendo che questi ultimi dovrebbero avere un'analogia natura, come si scopre con la meccanica quantistica dei campi), tutti gli altri termini sono il risultato di un'interazione. Questo suggerisce che, se potessimo *spegnere* tutte le interazioni dell'Universo, l'energia contenuta in quest'ultimo sarebbe nulla (almeno quella potenziale; su questo argomento si potrebbero fare alcune considerazioni che tuttavia esulano dallo scopo di questo articolo e per semplicità, per il momento, ci occuperemo soltanto dei termini non cinetici). Di fatto possiamo interpretare l'energia come una grandezza fisica che caratterizza l'intero Universo il cui valore deve rimanere costante nel tempo. Una variazione dell'energia in una regione dell'Universo comporta una variazione contraria in una regione diversa e questo equivale al manifestarsi di un'interazione. Infatti, secondo l'equazione (14.12) si può avere una variazione dell'energia in una regione solo a seguito dall'accensione di un'interazione oppure della modifica della velocità della particella (il che però implica un'accelerazione, dunque una forza, dunque un'interazione).

In definitiva potremmo dire che in un Universo privo d'interazioni l'energia sarebbe nulla o meglio che l'energia contenuta in una regione qualsiasi di Universo dipende esclusivamente dalla presenza dei campi e più precisamente dal fatto che le particelle interagiscono con questi oppure dal fatto che i campi possono, in certi casi, interagire con sé stessi.

Tenendo conto di ciò possiamo esprimere l'energia contenuta in una regione di volume V nella quale siano presenti campi e particelle in quiete come

$$U = \sum_i \alpha_i \mathcal{F}_i + V \sum_i \beta_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{F}_i, \quad (14.13)$$

dove i coefficienti α_i rappresentano le costanti di accoppiamento tra particelle e campi (che dipendono dalle caratteristiche delle particelle che sono a loro volta sorgenti dello stesso campo) e \mathcal{F}_i opportune funzioni dei campi \mathbf{F}_i che abbiamo chiamato *potenziali*. I coefficienti β_i invece rappresentano le costanti di accoppiamento dei campi con sé stessi.

Ad esempio, consideriamo un condensatore con armature di superficie S distanti d con il vuoto come dielettrico, con all'interno una particella di carica elettrica q vincolata in un punto a distanza δ dall'armatura a potenziale più basso. L'energia in esso contenuta vale

$$U = q\mathcal{E}(\delta) + Sd\frac{\varepsilon_0}{2}E^2 \quad (14.14)$$

con $\mathcal{E}(\delta) = E\delta$ ed $E = |\mathbf{E}|$, trascurando la gravità. Confrontando quest'espressione con la (14.13) vediamo che c'è un solo termine ($i = 1$) per ciascuno dei due addendi per cui $\alpha_1 = q$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{E}(\delta)$, $\beta_1 = \varepsilon_0/2$ e $\mathbf{F}_1 = \mathbf{E}$. Se \mathbf{E} fosse nullo $U = 0$.

14.4 L'introduzione della relatività

Quanto detto finora sul significato fisico dell'energia comincia a vacillare non appena si tenga conto della relatività speciale. In questo caso è noto che all'energia cinetica e a quella dovuta alle interazioni deve essere aggiunto un termine mc^2 detto, per l'appunto, energia a riposo della particella.

Con la relatività viene a cadere il principio (del tutto arbitrario, se vogliamo, ma ragionevole) secondo il quale l'energia contenuta in una regione di spazio dipenda esclusivamente dall'interazione di qualcosa con qualcos'altro. Il termine mc^2 non ha affatto la forma degli altri termini. Dipende esclusivamente dalla natura della particella considerata e sarebbe non nullo anche in assenza di ogni interazione.

È abbastanza naturale chiedersi (sebbene nessuno se lo sia chiesto per molti decenni) perché mai un tale termine debba entrare nella determinazione dell'energia di una particella quando tutti gli altri dipendono dal fatto che la particella in questione interagisce con un campo. E ammettendo che questo sia del tutto ragionevole, perché non esiste un termine del tipo qk^2 dove k^2 sia una combinazione di costanti aventi le dimensioni di un'energia per unità di carica elettrica?

14.5 Il Meccanismo di Higgs

A queste domande risponde il Meccanismo di Higgs. Supponiamo di tornare nella condizione prevista dalla fisica classica, secondo la quale vale l'equazione (14.13). Supponiamo, inoltre, che oltre ai campi già noti ne esista un altro che indichiamo con W , il cui *potenziale* indicheremo con \mathcal{W} . Si noti che il campo W è un campo scalare e non un campo vettoriale. Per quanto stiamo considerando, tuttavia, questo non fa differenza.

In presenza di questo nuovo campo l'equazione (14.13) diventa

$$U = \sum_i \alpha_i \mathcal{F}_i + a\mathcal{W} + V \left(\sum_i \beta_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{F}_i + bW \cdot W \right), \quad (14.15)$$

dove nelle somme abbiamo inclusi i soli campi già noti per rendere esplicito il fatto che il campo W non è tra questi. Il campo è peculiare per un'altra ragione: a differenza di tutti gli altri campi, il cui potenziale \mathcal{F}_i assume il valore minimo quando il campo è nullo, il campo W possiede un potenziale il cui minimo si ottiene per $W = W_0 \neq 0$. Vedremo più avanti il significato di questa scelta. Per il momento prendiamola per buona e scriviamo il campo $W = W_0 + H$. Corrispondentemente $\mathcal{W} = \mathcal{W}_0 + \mathcal{H}$. L'energia si scrive dunque come

$$U = \sum_i \alpha_i \mathcal{F}_i + a(W_0 + \mathcal{H}) + V \left(\sum_i \beta_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{F}_i + b(W_0 + H)^2 \right) \quad (14.16)$$

ed espandendo il quadrato otteniamo

$$U = \sum_i \alpha_i \mathcal{F}_i + a\mathcal{W}_0 + a\mathcal{H} + V \left(\sum_i \beta_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{F}_i + bW_0^2 + bH^2 + 2bW_0H \right). \quad (14.17)$$

Ora consideriamo uno per uno i termini in piú comparsi nell'espressione rispetto a quella originale.

Il termine $a\mathcal{W}_0$ è una costante che dipende unicamente dalle caratteristiche della particella presente nella regione di spazio considerata. a , infatti, è la costante di accoppiamento di questa particella al campo minimo il cui potenziale è \mathcal{W}_0 . In altre parole, questo termine è del tutto analogo a $m\mathcal{G}$ o a $q\mathcal{E}$. L'unica differenza è che il valore del campo con il quale la particella interagisce è costante in tutto l'Universo e vale W_0 . Di fatto $a\mathcal{W}_0$ rappresenta l'energia d'interazione di una particella con un campo la cui intensità è costante. Questo termine perciò dev'essere uguale dappertutto e può solo dipendere dalla natura della particella attraverso la costante d'accoppiamento a . Se per accidente $a\mathcal{W}_0 = mc^2$ questo termine rappresenta proprio l'energia a riposo di una particella.

È così che una particella priva di massa con *carica di Higgs* a acquista una massa m interagendo con il campo nella sua configurazione di minima energia W_0 . Ma cosa vogliono dire gli altri termini?

Il prodotto $a\mathcal{H}$ rappresenta l'interazione delle particelle con il campo di Higgs in eccedenza rispetto al valore che rende minimo il suo potenziale. In altre parole è possibile che in una regione di spazio sia presente un campo di Higgs piú intenso rispetto a quello nel quale il potenziale di Higgs è minimo. Questo non conduce a una maggiore o minore massa per la particella, ma a un'interazione tra la particella e il campo residuo per certi versi paragonabile a quella di una carica con un campo elettrico. Possiamo pensare a questo tipo d'interazione come a un'attrazione o a una repulsione della particella da parte del campo. Il termine $a\mathcal{H}$ infatti non dipende solo dalla particella, ma è del tutto analogo al termi-

ne $q\mathcal{E}$ e pertanto dipende dalla particella (attraverso a) e dal campo (attraverso \mathcal{H}).

bW_0^2 è un termine del tutto irrilevante ai fini della dinamica. Infatti questo è davvero un termine costante, che dipende solamente dal campo nella sua configurazione di minima energia e dalla sua interazione con sé stesso. Questo addendo è uguale in tutti i punti dell'Universo e può essere eliminato ridefinendo la costante additiva arbitraria come $-bW_0^2$.

Il termine bH^2 , analogo a $\varepsilon_0 E^2/2$, rappresenta l'interazione del campo di Higgs in eccesso con sé stesso, mentre quello che si scrive come $2bW_0H$ rappresenta l'interazione del campo H con il campo W_0 . Da una parte questo è analogo a $\varepsilon_0 E^2/2$ rappresentando l'interazione di un campo con un'altro della sua stessa natura; dall'altra il termine in questione è simile, per certi versi, a $a\mathcal{W}_0$, perché uno dei campi coinvolti è proprio quello che determina il valore minimo del potenziale. In sostanza questo addendo nell'energia dipende solo dal campo di Higgs in eccesso (perché tutto il resto è costante) e cresce proporzionalmente alla *quantità* di campo presente. Rappresenta dunque quello che potremmo chiamare la *massa del campo*. Il campo di Higgs, dunque, è un campo massivo.

14.6 Sulla forma del potenziale di Higgs

Nella sezione precedente abbiamo visto che il campo di Higgs possiede due caratteristiche che, in qualche modo, lo rendono diverso dai campi elettrico e magnetico:

- il valore minimo del potenziale di autointerazione non si ottiene per $W = 0$, ma per $W \neq 0$.
- è scalare.

Un modo per far sí che l'energia sia minima quando il campo è diverso da zero è il seguente. Supponiamo di avere un campo autointeragente W . Seguendo

l'analogia finora esposta con i campi elettrici e magnetici scriveremmo il contributo all'energia dovuto all'autointerazione come

$$U = \alpha W^2 \quad (14.18)$$

ma così facendo per $W = 0$ si avrebbe $U = 0$ che corrisponde al valore minimo dell'energia. Si vede subito, infatti, che U è una parabola nel piano (W, U) . Senza rinunciare all'ipotesi secondo la quale i contributi all'energia sono imputabili alle interazioni tra particella e campo e tra campo e campo, possiamo tranquillamente assumere che l'interazione tra campi di Higgs proceda in modo tale da contribuire all'energia secondo l'equazione

$$U = \alpha W^2 + \beta W^4. \quad (14.19)$$

In fondo, il termine W^2 rappresenta il solito contributo all'energia dovuto all'autointerazione dei campi, ma dal momento che W è un campo scalare, il termine W^2 si può pensare anch'esso come un campo scalare che autointeragendo dà luogo al termine βW^4 . Nel caso dei campi vettoriali questo non avviene perché il campo ha carattere vettoriale, mentre l'energia è uno scalare. Ma nel caso di campi scalari è possibile. Seguendo questa linea di pensiero potremmo anche ammettere l'esistenza di termini con potenze superiori di W . Questo non è escluso, ma è ragionevole pensare che la probabilità d'interazione diminuisca fortemente all'aumentare del numero di campi per cui possiamo trascurare i termini di ordine superiore. D'altra parte questo potrebbe anche voler dire che l'espressione sopra ricavata non è altro che l'espansione in serie di Taylor di qualche funzione più complessa del campo W .

Troviamo il minimo di (14.19): questo si ha quando

$$\frac{dU}{dW} = 2\alpha W + 4\beta W^3 = 0, \quad (14.20)$$

e cioè per

$$W^2 = -\frac{\alpha}{2\beta}. \quad (14.21)$$

Se β e α sono discordi (prendiamo, tanto per fissare le idee $\alpha < 0$ e $\beta > 0$) il minimo del potenziale

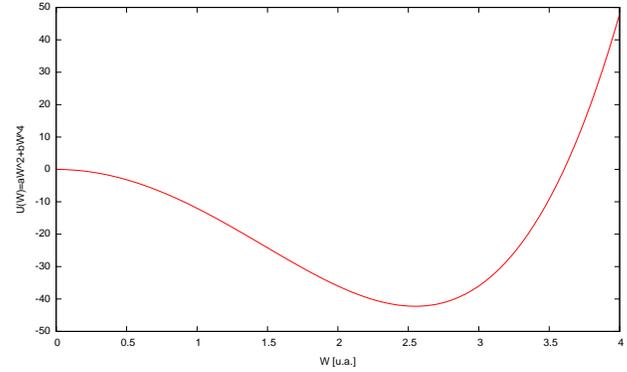


Figura 14.2 Il potenziale del campo di Higgs in funzione dell'intensità del campo in unità arbitrarie. Abbiamo scelto $a = -13$ e $b = 1$.

si ha naturalmente per $W \neq 0$. Se si fa un grafico dell'andamento di U in funzione di W si ottiene la figura mostrata in Fig. 14.2.

Dalla figura si vede che il minimo dell'energia si ottiene quando $W = \sqrt{-a/2\beta} \simeq 2.5$, avendo scelto $a = -13$ e $b = 1$. L'energia che si ottiene in questo modo è negativa, ma è sufficiente scegliere una costante arbitraria opportuna da sommare a questo valore per renderla positiva o nulla. Lo stato di vuoto *classico* (quello in cui particelle e campi sono assenti) possiede dunque un'energia maggiore di uno stato in cui è presente una certa quantità di campo. Questo implica che un tale stato di vuoto è instabile e tende spontaneamente a evolvere in uno stato di energia più bassa, nel quale è presente un campo di Higgs non nullo. Dobbiamo quindi pensare che il *vero* stato di vuoto sia quello nel quale abbiamo rimosso tutti i campi e le particelle, tranne il campo di Higgs che si riformerà spontaneamente anche se riuscissimo a rimuoverlo. Per questo lo stato nel quale $W = W_0$ si può considerare l'effettivo stato di vuoto che non è quello in cui *non c'è nulla*, ma quello di minima energia.

Questo spiega anche perché abbiamo scelto un campo scalare. Un primo argomento è, come abbiamo visto, che il campo scalare può interagire con sé stesso dando luogo a contributi all'energia con potenze maggiori. Inoltre il campo di Higgs quando

si trova nello stato di minima energia deve essere rappresentativo dello stato di vuoto (che è quello stato nel quale non si misura nulla). Il vuoto non può avere una direzione privilegiata come avrebbe se il campo di Higgs fosse vettoriale.

Possiamo farci un'idea abbastanza precisa di quel che accade con un'altra analogia. Consideriamo una piscina di palline, come quelle che si trovano nei parchi giochi o in alcuni centri commerciali per intrattenere i bambini mentre i genitori fanno shopping. Ammettiamo che la nostra piscina di palline rappresenti un volume di Universo che possiamo osservare. Se la osserviamo da fuori, seduti su una panchina, le palline più in superficie sono sotto il bordo e non sono visibili. La piscina, per noi, è vuota. Non nel senso usuale del termine (la piscina è piena di palline), ma nel senso che è impossibile osservare più di quanto riusciamo a vedere in queste condizioni. Un bambino fuori dalla piscina si muove liberamente, come una particella a massa nulla. Ma se lo facciamo entrare nella regione di spazio in cui è presente il campo di Higgs rappresentato dalle palline, si muoverà con difficoltà. Se si muove lentamente non smuoverà le palline abbastanza da renderle visibili e noi potremo concludere che la massa del bambino nella piscina è maggiore perché occorre una forza maggiore per accelerarlo. Se si muovesse più rapidamente la sua interazione con il campo aumenterebbe e potrebbe causare la comparsa di un campo misurabile (vedremmo saltellare di quando in quando delle palline oltre il bordo). Per noi è come osservare un aumento del campo. Questo fenomeno è quello descritto dal termine $a\mathcal{H}$ dell'energia. Se il campo in eccesso è abbastanza intenso, poi, potremmo osservare anche l'interazione del campo residuo con sé stesso bH^2 come palline che si toccano. Il termine bW_0^2 invece rappresenta l'energia delle palline sotto il bordo: perché sia possibile che le palline arrivino abbastanza vicine al bordo da poter essere osservate in presenza di altre particelle è necessario che le palline interagiscano tra loro: e in effetti lo fanno perché quando una sta sopra l'altra quella in alto non può stare più in basso di quanto sia. Infine il termine $2bW_0H$ rappresenta l'interazione tra campo residuo e campo minimo che si può raffigurare come

quella che esiste tra una pallina in volo (visibile) che rimbalza sulle palline sotto il bordo della piscina più in superficie.

14.7 Campi massivi

L'idea di un campo con massa è forse la più difficile da assimilare per uno studente. Per comprendere cosa sia un campo con massa possiamo fare così: supponiamo di avere una particella di massa M che produce un campo di qualche tipo (per esempio gravitazionale). Il campo prodotto è privo di massa e per questo la particella conserva la sua massa M . Se il campo prodotto avesse massa m , per la conservazione di quest'ultima, la massa della particella che lo produce dovrebbe diminuire e diventare $M - m$. Ma così facendo, prima o poi la particella perderebbe tutta la sua massa. Se infatti in un punto P c'è un campo \mathbf{G} , trascorso un certo tempo Δt , questo campo si è propagato in un punto che dista $c\Delta t$ da P , dove c è la velocità di propagazione del campo (nel caso del campo elettrico sarebbe la velocità della luce). Per fare in modo che in P continui a esserci un campo \mathbf{G} la sorgente deve rimpiazzarlo perdendo un'ulteriore frazione della sua massa e così via.

Se ammettiamo che la particella possa perdere una frazione della sua massa per un tempo limitato Δt_{max} possiamo però ammettere che produca un campo massivo di massa m (diventando una particella di massa $M - m$) il quale, trascorso questo tempo, non può più esistere e deve essere per così dire riassorbito dalla particella che lo ha prodotto. La particella sorgente infatti deve tornare ad avere la massa originale M trascorso il tempo Δt_{max} . Questo implica che il campo può al massimo raggiungere una distanza dalla particella pari a circa

$$L_{max} \simeq c\Delta t_{max}. \quad (14.22)$$

In altre parole un campo massivo non è altro che un campo a raggio limitato. Oltre una certa distanza dalla sorgente, non si osserva più alcun campo.

14.8 La massa dei bosoni vettori

Riscriviamo l'equazione che ci fornisce l'energia contenuta in un volume V di Universo in un caso particolare: prendiamo come volume V quello all'interno di un condensatore carico all'interno del quale sia presente una particella elettricamente carica, con carica q . Trascurando la gravità, l'energia contenuta in questo condensatore è la somma dell'energia elettrostatica della carica q e di quella immagazzinata sotto forma di campo elettrico. Se non avessimo il campo di Higgs quest'energia ammonterebbe a

$$U = U_{em} = q\mathcal{E} + V\frac{\epsilon_0}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}. \quad (14.23)$$

In presenza anche di **interazioni deboli**, all'energia dovremmo sommare un termine del tipo

$$U_{weak} = w\mathcal{Z} + V\frac{\zeta_0}{2}\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z} \quad (14.24)$$

dove \mathbf{Z} rappresenta il campo debole, \mathcal{Z} il suo *potenziale* e ζ_0 è una costante che si deve determinare sperimentalmente e che indica l'intensità dell'autointerazione del campo debole. La simmetria tra le due espressioni è evidente, perciò possiamo riscrivere tutto come

$$U = E_{em} + U_{weak} = \mathbf{c} \cdot \mathcal{D} + V\frac{1}{2}\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}, \quad (14.25)$$

dove \mathbf{D} , \mathcal{D} e \mathbf{c} sono vettori di due componenti. Le componenti del vettore \mathbf{D} sono i moduli di due vettori spaziali:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon_0} E \\ \sqrt{\zeta_0} Z \end{pmatrix}. \quad (14.26)$$

Le componenti di \mathcal{D} sono

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} \\ \mathcal{Z} \end{pmatrix}, \quad (14.27)$$

mentre quelle del vettore \mathbf{c} sono le costanti di accoppiamento ai rispettivi campi:

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} q \\ w \end{pmatrix}. \quad (14.28)$$

Questi vettori, naturalmente, non sono vettori nello spazio ordinario: *vivono* in uno spazio astratto bi-dimensionale i cui assi sono allineati lungo direzioni che dipendono dalle interazioni. In altre parole, la direzione di questi vettori nello spazio astratto definisce in qualche maniera l'intensità relativa tra le diverse interazioni. In un Universo in cui ci siano solo interazioni elettromagnetiche, il vettore \mathbf{D} assumerebbe una data direzione in questo spazio astratto, mentre in un Universo in cui siano presenti sia interazioni elettromagnetiche che deboli, il vettore formerebbe un angolo non nullo con quello precedente. Infine, in un Universo in cui le interazioni elettromagnetiche scomparissero, il vettore \mathbf{D} avrebbe una direzione perpendicolare al primo.

Ripetendo il ragionamento fatto sopra circa la necessità d'introdurre un nuovo campo per giustificare la presenza di un termine di massa nell'espressione dell'energia, dovremmo aggiungere all'equazione (14.25) un campo ϕ che, per potersi sommare a quelli già presenti, deve essere rappresentato da un vettore di campi:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (14.29)$$

Il campo ϕ deve essere autointeragente e presentare un termine di autointerazione del tipo ϕ^4 . In questo caso l'energia si scriverebbe come

$$U = \mathbf{c} \cdot \mathcal{D} + V\frac{1}{2}\mathbf{D} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{a} \cdot \Phi + Vb\phi \cdot \phi + Vc\phi^4 + g\mathbf{V} \cdot \phi, \quad (14.30)$$

dove Φ rappresenta il *potenziale* di ϕ . In questo spazio il potenziale del campo ha la forma che si ottiene facendo ruotare la curva della Figura 14.2 attorno all'asse delle ordinate: sarebbe quindi una superficie con la forma di un *sombrero*. È evidente che in questo caso non c'è un solo minimo del potenziale, ma ce ne sono infiniti. Ogni stato di minimo è equivalente all'altro e rappresenta uno stato di minima

energia del tutto simmetrico a ogni altro che possiamo scegliere. Se scegliamo uno dei possibili stati di minima energia, fissiamo le coordinate (ϕ_1^0, ϕ_2^0) in questo spazio e possiamo scrivere il vettore $\boldsymbol{\phi}$ come

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1^0 + \eta_1 \\ \phi_2^0 + \eta_2 \end{pmatrix}. \quad (14.31)$$

In questo modo l'interazione del campo \mathbf{V} col campo $\boldsymbol{\phi}$, $g\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\phi}$, fa apparire due addendi nell'energia:

$$gE\sqrt{\varepsilon_0}(\phi_0^1 + \eta_1) + gZ\sqrt{\zeta_0}(\phi_2^0 + \eta_2). \quad (14.32)$$

A questo punto osserviamo che $gE\sqrt{\varepsilon_0}\phi_1^0$ e $gZ\sqrt{\zeta_0}\phi_2^0$ sono costanti che possono essere pensate come a quei termini che danno origine ai contributi delle masse dei campi \mathbf{E} e \mathbf{Z} . La massa del campo \mathbf{E} , come sappiamo, è nulla, mentre quella del campo \mathbf{Z} non lo è. Essendo però tutti gli stati di minima energia del potenziale di Higgs equivalenti tra loro, potremmo certamente scegliere uno stato per cui $\phi_1^0 = 0$ e si avrebbe che $\boldsymbol{\phi} = (0, \phi_2)$. Non abbiamo nessuna ragione per preferire uno stato di minimo piuttosto che un altro e l'equazione che ci dà l'energia è perfettamente simmetrica, ma una volta scelto lo stato di minimo la simmetria viene **rotta**. Del resto, anche la direzione degli assi che definiscono le diverse interazioni sono in un certo senso arbitrarie. Quello che possiamo pensare, perciò, è che la direzione dell'asse delle interazioni elettromagnetiche sia proprio quella definita dal punto di minima energia del campo di Higgs, mentre quella dell'asse delle interazioni deboli sia quello perpendicolare. In questo modo i mediatori delle interazioni elettromagnetiche vengono ad assumere automaticamente una massa nulla, mentre quelli delle interazioni deboli acquistano una massa.

In definitiva possiamo ritenere che prima dell'apparizione dell'Universo non fosse presente alcun campo né materia. Alla nascita dell'Universo compare una certa quantità di campo di Higgs, la cui energia non è necessariamente la minima possibile. Di conseguenza i campi di Higgs cominciano a interagire portando l'energia dal valore assunto alla

nascita al valore minimo possibile. Di stati nei quali avviene questo ce ne sono infiniti e naturalmente l'Universo *cadra* in uno solo di questi infiniti stati. Questo definisce una direzione privilegiata nello spazio astratto delle interazioni per cui lungo questa direzione si sviluppa un tipo d'interazione a raggio infinito e a massa nulla, mentre nelle direzioni perpendicolari se ne sviluppano altre a corto raggio.

Fisicast

Il bosone di Higgs è stato oggetto di una puntata speciale di Fisicast: <http://www.radioscienza.it/2012/07/24/il-bosone-di-higgs/>.

Appendice

In questa sezione sono illustrate alcune tecniche generali, per lo piú di carattere matematico, utili per la soluzione di piú problemi ed esercizi.

Approssimazione di funzioni

In certi casi alcune funzioni complicate si possono approssimare con polinomi di grado e coefficienti opportuni. In altre parole

$$f(x) \simeq \sum_{i=0}^n a_i x^i. \quad (14.33)$$

In molti casi è sufficiente fermarsi a $n = 1$, cioè approssimare una funzione con una retta. In questo paragrafo vediamo alcuni esempi.

La funzione radice quadrata

Se x è piccolo la funzione $f(x) = \sqrt{1 + \alpha x}$ si può approssimare con la retta $p(x) = a_0 + a_1 x$. Troviamo i valori di a_0 e di a_1 .

Per $x = 0$, $f(x) = 1$, mentre $p(0) = a_0$. Impo-
nendo che $f(0) = p(0)$ si trova che $a_0 = 1$. Quando
invece $x \neq 0$ abbiamo

$$\sqrt{1 + \alpha x} \simeq 1 + a_1 x \quad (14.34)$$

per cui, elevando al quadrato

$$1 + \alpha x \simeq 1 + a_1^2 x^2 + 2a_1 x. \quad (14.35)$$

Se x è piccolo, il termine $a_1^2 x^2$ è trascurabile e

$$1 + \alpha x \simeq 1 + 2a_1 x \quad (14.36)$$

e quindi $a_1 = \frac{\alpha}{2}$. In definitiva

$$\sqrt{1 + \alpha x} \simeq 1 + \frac{\alpha}{2} x. \quad (14.37)$$

Logaritmo ed esponenziale

Scriviamo il logaritmo di $1 + x$ approssimandolo con una retta:

$$\log(1 + x) \simeq a_0 + a_1 x. \quad (14.38)$$

Per $x = 0$ abbiamo che $a_0 = \log 1 = 0$. Perciò possiamo scrivere che

$$\log(1 + x) \simeq a_1 x, \quad (14.39)$$

che implica che

$$1 + x = e^{a_1 x}. \quad (14.40)$$

Ora, anche nel caso dell'esponenziale si può scrivere

$$e^x \simeq b_0 + b_1 x \quad (14.41)$$

e per $x = 0$ si trova che $\exp 0 = 1 = b_0$ e perciò

$$e^x \simeq 1 + b_1 x. \quad (14.42)$$

Dividiamo questa equazione per l'equazione (14.40) per ottenere

$$\frac{1 + b_1 x}{1 + x} = \frac{e^x}{e^{a_1 x}} = e^{(1-a_1)x}. \quad (14.43)$$

Per $a_1 = 1$ si ha $b_1 = 1$. Questo è l'unico caso in cui la relazione sopra scritta vale per ogni x e deve dunque essere generale. Possiamo quindi scrivere che

$$\log(1 + \alpha x) \simeq \alpha x \quad (14.44)$$

e

$$e^{\alpha x} \simeq 1 + \alpha x. \quad (14.45)$$

Funzioni trigonometriche

Scriviamo le funzioni seno e coseno approssimando ciascuna con un polinomio di primo grado:

$$\begin{aligned}\sin x &\simeq a_0 + a_1x; \\ \cos x &\simeq b_0 + b_1x.\end{aligned}\quad (14.46)$$

Imponendo che, per $x = 0$, $\sin x = 0$ e $\cos x = 1$ si trova che $a_0 = 0$ e $b_0 = 1$, dunque

$$\begin{aligned}\sin x &\simeq a_1x; \\ \cos x &\simeq 1 + b_1x.\end{aligned}\quad (14.47)$$

Ora imponiamo che $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$1 = (a_1x)^2 + (1 + b_1x)^2 = (a_1^2 + b_1^2)x^2 + 1 + 2b_1x \quad (14.48)$$

e trascurando il termine proporzionale a x^2 otteniamo che dev'essere $b_1 = 0$. Ora scriviamo il rapporto

$$R = \frac{\sin(x + \delta) - \sin x}{\delta} \quad (14.49)$$

Quanto piú δ diventa piccolo, tanto piú il rapporto (detto **rapporto incrementale**) si avvicina al valore $R = 1$. Ora scriviamo le funzioni trigonometriche approssimandole con polinomi di primo grado:

$$R \simeq \frac{a_1(x + \delta) - a_1x}{\delta} = a_1. \quad (14.50)$$

Ma poiché tale rapporto deve valere 1, almeno per δ molto piccoli, $a_1 = 1$. In definitiva

$$\begin{aligned}\sin x &\simeq x; \\ \cos x &\simeq 1; \\ \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \simeq \sin x \simeq x;\end{aligned}\quad (14.51)$$

Altre funzioni

Consideriamo la funzione $f(x) = (r + x)^{-1}$, con r costante. Approssimando la funzione con una retta in prossimità di $x = 0$ si ottiene

$$\frac{1}{r + x} \simeq a_0 + a_1x. \quad (14.52)$$

Per $x = 0$ abbiamo che $a_0 = 1/r$, quindi

$$\frac{1}{r + \varepsilon} \simeq \frac{1}{r} + a_1\varepsilon, \quad (14.53)$$

dalla quale ricaviamo

$$a_1 = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{r + \varepsilon} - \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{-\varepsilon}{r(r + \varepsilon)} \right) \simeq -\frac{1}{r^2}. \quad (14.54)$$

Quindi possiamo scrivere che, nell'intorno di $x = 0$,

$$\frac{1}{r + x} \simeq \frac{1}{r} - \frac{x}{r^2} \quad (14.55)$$

Equazioni differenziali a variabili separabili

Un'equazione differenziale è un'equazione nella quale compare una variabile e una sua variazione. Se, ad esempio, la grandezza fisica x varia da $x(0)$ a $x(T)$ in un tempo che va da $t = 0$ a $t = T$, la variazione $\Delta x = x(T) - x(0)$ che avviene nel tempo $\Delta t = T - 0 = T$, è legata al valore di x da un'equazione differenziale per cui

$$\Delta x = f(x(t), \Delta t) \quad (14.56)$$

dove f è una funzione sia di Δt che di x , che a sua volta dipende da t . Un'equazione differenziale a variabili separabili è un'equazione del tipo

$$\Delta x = \alpha x \Delta t. \quad (14.57)$$

Quest'equazione si dice *a variabili separabili* perché possiamo dividere entrambi i membri per x e ottenere

$$\frac{\Delta x}{x} = \alpha \Delta t \quad (14.58)$$

in cui a primo membro compaiono solo x e la sua variazione, mentre a secondo membro compare solo t . La soluzione di questa equazione è

$$x(t) = X_0 e^{\alpha t}. \quad (14.59)$$

dove X_0 è una costante. Infatti $x(0) = X_0$ e $x(T) = X_0 e^{\alpha T}$, per cui

$$\Delta x = X_0 (e^{\alpha T} - 1). \quad (14.60)$$

e quindi

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{X_0 (e^{\alpha T} - 1)}{X_0} = e^{\alpha T} - 1. \quad (14.61)$$

Se T è abbastanza piccolo, possiamo scrivere $e^{\alpha T} \simeq 1 + \alpha T$, infatti, per $T = 0$, l'esponenziale vale 1 e per $T > 0$, ma piccolo, è poco più grande. Sostituendo abbiamo

$$\frac{\Delta x}{x} \simeq 1 + \alpha T - 1 = \alpha T = \alpha \Delta t \quad (14.62)$$

che è proprio l'equazione che volevamo risolvere.

Unità naturali

La scelta delle **grandezze fisiche fondamentali** è del tutto arbitraria. Nel **Sistema Internazionale** (SI) le grandezze fondamentali sono quelle di **lunghezza**, **massa** e **tempo**. In questo sistema la **velocità** è una **grandezza fisica derivata**.

Non sempre questa è la scelta più opportuna. In effetti possiamo scegliere di considerare fondamentale la velocità e definire l'unità di misura come la velocità della luce c che, in questo sistema, evidentemente vale $c = 1$, che possiamo considerare adimensionale (le velocità infatti si misureranno in frazioni della velocità della luce). Se oltre alla velocità scegliamo l'energia E come altra grandezza fisica fondamentale, che possiamo misurare in un'unità a

piacere, come il MeV o il GeV, tutte le altre si possono esprimere come grandezze fisiche derivate. Questo sistema di unità di misura si chiama delle **unità naturali**. In effetti, l'energia di una particella ferma è, secondo la teoria della relatività

$$E = mc^2 \quad (14.63)$$

ed essendo $c = 1$ e adimensionale, possiamo scrivere

$$E = m \quad (14.64)$$

dal che si vede che le masse si misurano in unità di energia. In effetti si dice che la massa del protone è di circa 1 GeV, intendendo dire che la massa in kg di questa particella vale circa $1 \text{ GeV} / (3 \times 10^8)^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} = 1.6 \times 10^{-19} \times 10^9 \text{ J} \times (3 \times 10^8)^{-2} \text{ m}^{-2} \text{ s}^2 \simeq 0.18 \times 10^{-26} \text{ J m}^{-2} \text{ s}^2$. Considerando che 1 J corrisponde a $1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$ abbiamo che $m_p \simeq 1.8 \times 10^{-27} \text{ kg}$. Un elettrone, invece, *pesa* circa 0.5 MeV.

Se una particella è in moto la sua energia è tale che

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (14.65)$$

che, in unità naturali, si scrive

$$E^2 = p^2 + m^2. \quad (14.66)$$

È evidente da com'è scritta che quest'equazione, non solo la massa ha le stesse dimensioni fisiche dell'energia, ma anche le quantità di moto si misurano in queste unità.

Aggiungendo alle unità fondamentali quella definita da un'altra costante: la **costante di Planck** $\hbar = h/2\pi \simeq 6.6 \times 10^{-16} \text{ eV s}$ si ottiene il risultato secondo il quale le grandezze fisiche corrispondenti a lunghezza e tempo sono derivate e si misurano entrambe in unità di energia alla meno uno: $[L] = [E^{-1}]$, $[T] = [E^{-1}]$. Così un secondo diventa un tempo pari a

$$1 \text{ s} = \frac{1 \text{ s}}{\hbar \text{ eV s}} \simeq 0.1 \times 10^{16} \text{ eV}^{-1} = 0.1 \times 10^{10} \text{ MeV}^{-1} \quad (14.67)$$

e la lunghezza corrispondente a 1 m diventa

$$1 \text{ m} = \frac{1 \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ms}^{-1} \times 6.6 \times 10^{-16} \text{eVs}} \simeq 0.05 \times 10^8 \text{ eV}^{-1}. \quad (14.68)$$

Le unità naturali dunque si definiscono imponendo che $\hbar = c = 1$ come grandezze fisiche fondamentali e adimensionali. Sono molto comode per risolvere esercizi di cinematica relativistica, in cui tutte le potenze di c svaniscono, valendo 1 e non avendo dimensioni.

Prova a risolvere gli esercizi usando queste unità e vedrai che i conti si semplificheranno notevolmente. Puoi sempre tornare nelle unità canoniche moltiplicando per opportune potenze di c e \hbar tali da riportare le unità di misura a quelle del SI.

Soluzione degli esercizi

Esercizio 1.1

osservati da Terra, gli orologi a bordo di un satellite GPS si muovono piú lentamente perché la velocità della luce c è la stessa a bordo del satellite che si muove e per noi che siamo fermi. Espressa nel SI la velocità dei satelliti GPS è di 4000 m/s. In unità di c è quindi

$$\beta = \frac{4 \times 10^3}{3 \times 10^8} \simeq 1.3 \times 10^{-5} \quad (\text{S.69})$$

e di conseguenza il fattore di Lorentz γ vale

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \simeq 1.0000000001, \quad (\text{S.70})$$

differisce cioè da 1 per una parte su 10^{10} (possiamo scrivere $\gamma = 1 + 10^{-10}$). Di conseguenza, indicando con τ il tempo trascorso a bordo del satellite e con t quello misurato a Terra, essendo $t = \gamma\tau$, si ha che un secondo a bordo del satellite dura un po' piú di quello a Terra: precisamente 10^{-10} secondi in piú.

La durata di un giorno è maggiore di $86400 \times 10^{-10} \simeq 10^5 \times 10^{-10} = 10^{-5}$ secondi. In un mese gli orologi accumulano un ritardo pari a 30 volte questo, pari a 3×10^{-4} s e in un anno il ritardo ammonta a $12 \times 3 \times 10^{-4} = 0.0036$ s o 3.6 millesimi di secondo. Sembra poco, ma in questo tempo la luce percorre ben $3 \times 10^8 \times 3.6 \times 10^{-3} = 1\,080\,000$ m, cioè piú di 1000 km!

Dal momento che i satelliti GPS orbitano a una quota di 20000 km, sbagliare la loro distanza di 1000 km significa commettere un errore del 5 %, che naturalmente si riflette in un errore analogo sulla posizione rilevata a terra. Il che può significare un errore nella determinazione del punto d'intersezione delle sfere dell'ordine di alcuni km. Senza le correzioni relativistiche apportate agli orologi di

bordo (che a Terra sono starati in modo da marciare piú rapidamente di quanto dovrebbero cosicché in volo sono sincronizzati con quelli a Terra), la costellazione GPS sarebbe del tutto inutile.

Esercizio 1.2

Il muone che viaggia verso la Terra vede quest'ultima venirgli incontro a una velocità $v = 0.995c$. Se fosse fermo la distanza tra lui e la Terra sarebbe di 10 km, ma dal momento che si vengono incontro, un raggio di luce che partisse dal muone e venisse riflesso dalla Terra impiegherebbe meno tempo a tornare al muone rispetto a quando il muone è fermo. Dal momento che le distanze si possono misurare valutando il tempo di andata e ritorno della luce, la costanza della sua velocità altera la misura delle distanze.

La distanza vista dal muone è $\ell' = \ell/\gamma$ dove γ è il fattore di Lorentz della Terra vista dal muone che vale

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0.995)^2}} \simeq 10. \quad (\text{S.71})$$

La distanza da percorrere, secondo il muone, è dunque di appena 1 km.

Esercizio 1.3

Il fascio di N elettroni che attraversa la differenza di potenziale ΔV acquista un'energia cinetica complessiva $K = Ne\Delta V$, dove e è la carica dell'elettrone in modulo. Quando colpisce il bersaglio l'energia

cinetica del fascio è trasferita all'acqua. Il trasferimento di energia provoca un innalzamento della temperatura ΔT di m kg di questa per il quale

$$\Delta U = mc_a \Delta T \quad (\text{S.72})$$

essendo $c_a = 4.186 \text{ J}/(\text{kg K})$ il calore specifico dell'acqua. Imponendo che $\Delta U = K$ si trova il numero di elettroni nel fascio:

$$N = \frac{mc_a \Delta T}{e \Delta V}. \quad (\text{S.73})$$

La massa dell'acqua si trova sapendo che la sua densità è $\rho = 1 \text{ kg}/\ell^3$ pertanto $m = 2 \text{ kg}$. Abbiamo dunque

$$N = \frac{2 \times 4.186 \times 10^{-4}}{1.6 \times 10^{-19} 10^5} \simeq 5 \times 10^{10}. \quad (\text{S.74})$$

L'energia totale di ogni elettrone è la somma della sua energia cinetica e della sua massa a riposo (che in unità naturali vale $511 \text{ keV} = 5.11 \times 10^5 \text{ eV}$). In queste unità, l'energia cinetica degli elettroni si scrive semplicemente come $K = 10^5 \text{ eV}$ e quindi

$$E = K + m \simeq 6 \times 10^5 \text{ eV}. \quad (\text{S.75})$$

Il fattore di Lorentz dell'elettrone è dunque

$$\gamma = \frac{E}{m} \simeq \frac{6}{5} \simeq 1.2 \quad (\text{S.76})$$

e di conseguenza la sua velocità β si ricava da

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \simeq 0.31 \quad (\text{S.77})$$

da cui si ricava che $v = c\beta \simeq 3 \times 10^8 \sqrt{0.31} \simeq 1.7 \times 10^8 \text{ m/s}$. Per percorrere i 150 m che separano il calorimetro dall'acceleratore dunque gli elettroni impiegano un tempo pari a

$$t = \frac{L}{v} = \frac{150}{1.7 \times 10^8} \simeq 9 \times 10^{-7} \text{ s} = 0.9 \mu\text{s}. \quad (\text{S.78})$$

Se non avessimo usato la cinematica relativistica, la velocità degli elettroni sarebbe risultata essere pari a

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} \simeq \sqrt{\frac{2}{5}} \simeq 0.6, \quad (\text{S.79})$$

che in unità SI vale $v = 0.6 \times 3 \times 10^8 = 1.8 \times 10^8 \text{ m/s}$. Gli elettroni dovrebbero quindi impiegare

$$t_c = \frac{L}{v} \simeq \frac{150}{1.8 \times 10^8} = 0.8 \mu\text{s}. \quad (\text{S.80})$$

Eseguendo l'esperimento si trova, in effetti, che quando l'acqua aumenta la propria temperatura di $10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}$, il tempo impiegato dagli elettroni a raggiungere il calorimetro è compatibile con l'essere $0.9 \mu\text{s}$ e non compatibile con $0.8 \mu\text{s}$.

Esercizio 1.4

I protoni circolano lungo un anello grazie alla **Forza di Lorentz** che si scrive

$$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}. \quad (\text{S.81})$$

Dal momento che il campo magnetico è perpendicolare a \mathbf{v} il modulo della forza vale semplicemente $F = evB$. Nel sistema di riferimento del protone questa forza dev'essere assente e quindi dev'essere uguale e contraria alla forza centrifuga il cui modulo è $F = mv^2/r$. Uguagliando queste due quantità si ricava

$$evB = m \frac{v^2}{r} \quad (\text{S.82})$$

da cui possiamo ricavare il raggio dell'orbita

$$r = \frac{mv}{eB}. \quad (\text{S.83})$$

L'energia cinetica dei protoni è molto più alta della loro massa a riposo perciò possiamo porre $v \simeq c$. In effetti il fattore di Lorentz dei protoni, sapendo che $m \simeq 1 \text{ GeV}$, vale

$$\gamma = \frac{E}{m} \simeq \frac{7 \times 10^{12}}{10^9} = 7000, \quad (\text{S.84})$$

e quindi

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \simeq 0.9999999898. \quad (\text{S.85})$$

Se non tenessimo conto della relatività otterremmo per r il valore di

$$r = \frac{1.7 \times 10^{-27} \times 3 \times 10^8}{1.6 \times 10^{-19} \times 8.4} \simeq 0.38 \text{ m} \quad (\text{S.86})$$

(la massa del protone in unità SI si trova dividendo la massa in GeV per c^2). In effetti la massa del protone aumenta di un fattore γ e dunque il raggio di curvatura dell'orbita è di

$$\gamma r = 7000 \times 0.38 = 2660 \text{ m}. \quad (\text{S.87})$$

La lunghezza della traiettoria è quindi di ben $L = 2\pi r \simeq 17 \text{ km}$! In effetti LHC è ancora più lungo: 27 km. Il motivo è che la macchina non ha la forma di una circonferenza, ma di un ottagono con gli spigoli curvi, per semplificarne la costruzione. Il raggio di curvatura che abbiamo calcolato, dunque, è quello che si trova in corrispondenza degli spigoli dell'ottagono.

Esercizio 2.1

Il tempo in prossimità di un corpo massivo scorre in maniera diversa rispetto a quanto fa in assenza di gravità. I satelliti della costellazione GPS orbitano a una quota di 20 000 km da Terra (la cui massa è di circa 6×10^{24} kg) e sono quindi soggetti a un potenziale gravitazionale

$$\mathcal{G} = G \frac{M}{r} = 6.6 \times 10^{-11} \frac{6 \times 10^{24}}{2 \times 10^4} \simeq 2.0 \times 10^{10} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}. \quad (\text{S.88})$$

Un orologio sulla Terra invece è soggetto a un potenziale di

$$\mathcal{G}' = G \frac{M}{r'} = 6.6 \times 10^{-11} \frac{6 \times 10^{24}}{6 \times 10^3} \simeq 6.6 \times 10^{10} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}. \quad (\text{S.89})$$

Rispetto a un orologio molto lontano da ogni sorgente di campo gravitazionale il tempo a Terra scorre più lentamente: un secondo trascorso secondo il primo, per l'orologio a Terra dura

$$\frac{\mathcal{G}'}{c^2} \simeq 73 \mu\text{s} \quad (\text{S.90})$$

in più. A bordo dei satelliti invece il ritardo è di

$$\frac{\mathcal{G}}{c^2} \simeq 22 \mu\text{s} \quad (\text{S.91})$$

quindi gli orologi di bordo anticipano mediamente di $73 - 22 = 51 \mu\text{s}$ al secondo rispetto a quelli a Terra. Questa correzione non è costante (perché l'orbita non è circolare) e il suo valore è calcolato a Terra e inviato a bordo del satellite durante le comunicazioni con le stazioni di controllo. Notate che questa correzione compensa parzialmente quella dovuta alla relatività ristretta.

Esercizio 3.1

Data la lunghezza d'onda della luce, possiamo ricavarne la frequenza secondo la formula

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad (\text{S.92})$$

facile da ricordare perché ν ha le dimensioni di un tempo alla meno uno e λ quelle di una lunghezza. Per ottenere una grandezza fisica con le dimensioni di $[T^{-1}]$ è dunque necessario dividere una velocità per una lunghezza. Ricaviamo perciò che la frequenza della luce del Sole è compresa tra $\nu_2 = 3 \times 10^8 / 400 \times 10^{-9} = 0.75 \times 10^{15}$ Hz e $\nu_1 = 3 \times 10^8 / 750 \times 10^{-9} = 0.4 \times 10^{15}$. Sapendo che $h = 6.63 \times 10^{-34}$ Js o 4.14×10^{-15} eVs, l'energia dei fotoni corrispondenti è quindi compresa tra

$$E_1 = h\nu_1 = 4.14 \times 10^{-15} \times 0.4 \times 10^{15} = 1.66 \text{ eV} \quad (\text{S.93})$$

e

$$E_2 = h\nu_2 = 4.14 \times 10^{-15} \times 0.75 \times 10^{15} = 3.11 \text{ eV}. \quad (\text{S.94})$$

L'energia media trasportata dai fotoni è dunque attorno ai 2 eV. L'energia che hanno gli elettroni che

hanno subito effetto fotoelettrico è pari a quella dei fotoni sottratta dell'energia di legame dell'elettrone. Nel caso del silicio, l'energia necessaria a un elettrone per diventare conduttore è di 1.1 – 1.2 eV. Il silicio è il materiale usato per costruire le celle fotovoltaiche. La radiazione solare che incide su una cella libera gli elettroni del silicio e li fa passare in uno stato in cui sono praticamente liberi. Il moto di questi elettroni genera la corrente fotovoltaica.

Esercizio 3.2

Un elettrone accelerato da una differenza di potenziale di 80 kV ha un'energia cinetica pari a 80 keV: il 16 % della sua energia a riposo di 511 keV. La sua energia totale è dunque $80 + 511 = 591$ keV (è la somma dell'energia cinetica e di quella a riposo). Possiamo quindi ricavarne la velocità sfruttando la definizione del fattore di Lorentz

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} \quad (\text{S.95})$$

da cui, sapendo che $\gamma = E/m \simeq 1.16$ si ricava che

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \simeq 1 - \frac{1}{0.16} \simeq 0.26 \quad (\text{S.96})$$

e quindi $\beta \simeq 0.51$ (in altre parole gli elettroni del microscopio viaggiano a circa metà della velocità della luce. La quantità di moto degli elettroni è dunque pari a $p = \gamma m \beta = 1.16 \times 511 \times 0.51 \simeq 300$ keV e di conseguenza sono assimilabili a onde di lunghezza d'onda pari a

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi}{3 \times 10^5} \simeq 2.1 \times 10^{-5} \text{ eV}^{-1} \quad (\text{S.97})$$

(ricordiamo che in unità naturali $\hbar = h/2\pi = 1$ e le distanze si misurano in unità di energia alla meno uno). Per avere la lunghezza in metri basta moltiplicare per opportune potenze di c e di \hbar in unità SI. Moltiplicando per \hbar che ha le dimensioni di un'energia per un tempo otteniamo una grandezza che le dimensioni di un tempo, che possiamo trasformare in una lunghezza moltiplicando per una velocità:

$$\begin{aligned} \lambda[\text{m}] &= \lambda[\text{eV}^{-1}] \hbar[\text{eV s}] c[\text{ms}^{-1}] \\ &= 2.1 \times 10^{-5} \times 6.58 \times 10^{-16} \times 3 \times 10^8 \simeq 4.3 \times 10^{-11} \end{aligned} \quad (\text{S.98})$$

Per confronto le onde luminose hanno una lunghezza d'onda dell'ordine dei 500 nm, cioè di 5×10^{-7} m, vale a dire 5 ordini di grandezza maggiore! Un microscopio elettronico perciò permette di apprezzare dettagli 100 000 volte più piccoli rispetto a quello ottico.

Esercizio 4.1

Se il guadagno di energia ΔE da parte di una particella di energia E che attraversa in un tempo Δt una regione di spazio in cui viene accelerata è

$$\Delta E = \alpha E \Delta t \quad (\text{S.99})$$

dividendo per E abbiamo che

$$\frac{\Delta E}{E} = \alpha \Delta t. \quad (\text{S.100})$$

Quando si trova un'equazione del genere, la [soluzione](#) è sempre del tipo

$$E = E_0 e^{\alpha t}. \quad (\text{S.101})$$

dove E_0 è l'energia della particella al tempo $t = 0$ ed E quella al tempo t . Poiché α deve avere le dimensioni fisiche di un tempo alla meno uno, dovendo essere l'argomento dell'esponenziale adimensionale, possiamo definire $\alpha = 1/\tau$ e scrivere

$$E = E_0 e^{\frac{t}{\tau}}, \quad (\text{S.102})$$

dove τ è una grandezza che ha la dimensioni fisiche di un tempo $[\tau] = [T]$.

Per calcolare la probabilità di aver viaggiato per un tempo t senza perdere energia, facciamo così: supponiamo che una particella di energia E_0 viaggi per un tempo t_0 sufficientemente piccolo durante il quale la probabilità di guadagnare energia si può considerare costante: $P \simeq p$. Se dopo essere sopravvissuta all'attraversamento di questa regione,

avendo guadagnato energia, si muove ancora per un tempo t , la probabilità di guadagnare energia dall'istante $t = 0$ è ora

$$P = p^2 \quad (\text{S.103})$$

e così via: dopo aver attraversato n strati, ciascuno per una durata molto breve, la probabilità di sopravvivenza è $P = p^n$. Scriviamo n come $n = t/t_0$ e osserviamo che P deve essere un numero compreso tra 0 e 1, così come p . Ridefinendo $p = 1/k$, possiamo scrivere

$$P = k^{-\frac{t}{t_0}} \quad (\text{S.104})$$

Così facendo è evidente che, per $t = 0$, $P = 1$ (cioè la probabilità di sopravvivenza dopo un tempo $t = 0$ è 1, che è ovvio perché non essendo trascorso alcun tempo lo stato della particella non può essere cambiato), mentre per $t \rightarrow \infty$, $P \rightarrow 0$ (cioè per tempi molto molto lunghi è improbabile che la particella sopravviva). Questo sembra del tutto ragionevole.

Possiamo naturalmente scrivere che

$$P = k^{-\frac{t}{t_0} \frac{\tau}{\tau}} = \left(k^{\frac{t}{\tau}}\right)^{-\frac{\tau}{t_0}} = \left(k^{\frac{t}{\tau}}\right)^{-\frac{\tau}{t_0}} E_0^{\frac{\tau}{t_0}} E_0^{-\frac{\tau}{t_0}} \quad (\text{S.105})$$

Portando dentro la parentesi $E_0^{-\frac{\tau}{t_0}}$ e sostituendo la stessa con l'equazione (S.102) si ottiene

$$P = \left(E_0 e^{\frac{t}{\tau}}\right)^{-\frac{\tau}{t_0}} E_0^{\frac{\tau}{t_0}} = E^{-\frac{\tau}{t_0}} E_0^{\frac{\tau}{t_0}}. \quad (\text{S.106})$$

Il fattore $E_0^{\frac{\tau}{t_0}}$ è una costante

$$E_0^{\frac{\tau}{t_0}} = A \quad (\text{S.107})$$

così come l'esponente di E

$$\frac{\tau}{t_0} = \gamma \quad (\text{S.108})$$

perciò

$$P = AE^{-\gamma}. \quad (\text{S.109})$$

Quindi il numero di particelle di energia E che giungeranno a noi dopo aver viaggiato per un tempo t

è proporzionale a questa probabilità e va dunque come una legge di potenza.

Esercizio 5.1

L'energia di una particella di massa m e quantità di moto p è

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (\text{S.110})$$

dove c è la velocità della luce.

Considerando che nello stato iniziale abbiamo un neutrone fermo, indicando con m_n la sua massa, l'energia vale

$$E_{in} = m_n c^2. \quad (\text{S.111})$$

Nello stato finale, per la conservazione della quantità di moto, deve essere

$$\vec{p}_p = -\vec{p}_e \quad (\text{S.112})$$

dove \vec{p}_p indica la quantità di moto del protone e \vec{p}_e quella dell'elettrone. Abbiamo che

$$|\vec{p}_p| = |\vec{p}_e| = p \quad (\text{S.113})$$

e quindi possiamo scrivere che

$$E_{fin} = \sqrt{p^2 c^2 + m_p^2 c^4} + \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4}. \quad (\text{S.114})$$

Imponendo che l'energia iniziale sia uguale a quella finale possiamo scrivere che

$$m_n^2 c^2 = 2p^2 + m_p^2 c^2 + m_e^2 c^2 + 2\sqrt{p^2 + m_p^2 c^2} \sqrt{p^2 + m_e^2 c^2}. \quad (\text{S.115})$$

Lasciamo a secondo membro solo il prodotto delle radici:

$$(m_n^2 - m_p^2 - m_e^2) c^2 - 2p^2 = 2\sqrt{p^2 + m_p^2 c^2} \sqrt{p^2 + m_e^2 c^2} \quad (\text{S.116})$$

ed eleviamo al quadrato entrambi i membri:

$$(M^2 c^2 - 2p^2)^2 = 4(p^2 + m_p^2 c^2)(p^2 + m_e^2 c^2), \quad (\text{S.117})$$

dove $M^2 = (m_n^2 - m_p^2 - m_e^2)$. Notate che l'espressione a secondo membro ha le dimensioni di una massa al quadrato e così, sebbene si potesse definire quest'espressione con una generica variabile x , abbiamo preferito usare il simbolo M^2 per rendere palese il fatto che si tratta di una grandezza fisica che ha queste dimensioni. Questo aiuta sempre nella soluzione di un problema di fisica.

Sviluppiamo i quadrati e semplifichiamo. Prima abbiamo

$$M^4 c^4 + 4p^4 - 4p^2 M^2 c^2 = 4p^4 + 4p^2 (m_e^2 c^2 + m_p^2 c^2) + 4(m_p m_e)^2 c^4 \quad (\text{S.118})$$

e quindi, semplificando il termine $4p^4$ presente a destra e a sinistra, portando i termini proporzionali a p^2 a primo membro e gli altri a secondo membro e, infine, dividendo tutto per c^2 otteniamo

$$4p^2 (m_e^2 + m_p^2 + M^2) = M^4 c^2 - 4(m_p m_e)^2 c^2. \quad (\text{S.119})$$

Si vede subito che, avendo usato il simbolo M^2 per rappresentare la combinazione presente nell'equazione (S.116), l'espressione trovata è dimensionalmente corretta. Infatti, a primo membro abbiamo una quantità di moto al quadrato, che ha le dimensioni di una massa al quadrato per una velocità al quadrato, moltiplicata per una cosa che ha le dimensioni di una massa al quadrato a sua volta. Pertanto il primo membro ha le dimensioni di una massa alla quarta per una velocità al quadrato. Che sono le dimensioni fisiche del secondo membro, come appare in maniera evidente dalla forma dell'equazione.

A questo punto è facile ricavare p^2 come

$$p^2 = \frac{M^4 - 4(m_p m_e)^2}{4(M^2 + m_e^2 + m_p^2)} c^2 = \frac{M^4 - 4(m_p m_e)^2}{4m_n^2} c^2. \quad (\text{S.120})$$

Facciamo un ultimo controllo dimensionale: il numeratore della frazione ha le dimensioni di una massa alla quarta e il denominatore di una massa al quadrato. Quindi la frazione ha le dimensioni di una massa al quadrato che, moltiplicata per una velocità al quadrato (c^2) dà proprio le dimensioni di una quantità di moto al quadrato.

Si vede subito che la quantità di moto p è una costante che dipende solo dalle masse delle particelle partecipanti alla reazione: m_n , m_p e m_e . Trascurando m_e rispetto alle altre due masse (questa è un'approssimazione ragionevole dal momento che $m_e \simeq m_p/2000$) e sapendo che $m_n \simeq m_p$ possiamo riscrivere questa quantità di moto come

$$p^2 \simeq \frac{(m_n^2 - m_p^2)^2}{4m_n^2} c^2 = \frac{(m_n - m_p)^2 (m_n + m_p)^2}{4m_n^2} c^2 \simeq \frac{(m_n - m_p)^2 (2m_n)^2}{4m_n^2} c^2 = (m_n - m_p)^2 c^2. \quad (\text{S.121})$$

La massima quantità di moto permessa per un elettrone da decadimento β è dunque dell'ordine di $p_{max} \simeq (m_n - m_p)c$. L'energia di un elettrone con questa quantità di moto è

$$E_{max} = \sqrt{(m_n - m_p)^2 c^4 + m_e^2 c^4} = c^2 \sqrt{(m_n - m_p)^2 + m_e^2} \quad (\text{S.122})$$

Sostituendo i valori $m_n \simeq 1.675 \times 10^{-27}$ kg, $m_p \simeq 1.673 \times 10^{-27}$ kg, $m_e \simeq 9 \times 10^{-31}$ e $c = 3 \times 10^8$ m/s abbiamo che

$$E_{max} \simeq 2 \times 10^{-13} \text{ J} \quad (\text{S.123})$$

(l'unità di misura è quella del SI, avendo usato tutte unità di questo sistema). Possiamo riscrivere questo valore in un'unità più adeguata per la fisica delle particelle: in eV. Per farlo basta ricordare che $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$ e quindi, trattando le unità di misura come se fossero quantità algebriche, abbiamo che

$$1 = \frac{1 \text{ eV}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ J}} \quad (\text{S.124})$$

così che, moltiplicando per 1 l'espressione in (S.123) otteniamo

$$E_{max} \simeq 2 \times 10^{-13} \text{ J} \times \frac{1 \text{ eV}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ J}} \simeq 10^6 \text{ eV} = 1 \text{ MeV}. \quad (\gamma mv)^2 \simeq \left(\frac{63 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19}}{3 \times 10^8} \right)^2 - (9 \times 10^{-31} \cdot 3 \times 10^8)^2. \quad (\text{S.131})$$

Sperimentalmente è proprio quello che si osserva, il che significa che la massa del neutrino è trascurabile. Il valore massimo dell'energia dell'elettrone varia, anche se di poco, da specie atomica a specie atomica a causa della diversa energia di legame con la quale i neutroni sono legati nel nucleo.

Si vede subito che il secondo addendo sotto la radice è trascurabile rispetto al primo essendo l'ordine di grandezza del primo addendo pari a $(6-19-8) \times 2 = -42$, mentre per il secondo abbiamo $(-31+8) \times 2 = -46$. Il risultato è che possiamo estrarre la radice solo del primo addendo per cui

Esercizio 5.2

Una particella di massa m e carica q che si muove con velocità v perpendicolarmente alle linee di forza di un campo magnetico d'intensità B percorre una traiettoria circolare di raggio

$$r = \gamma \frac{mv}{qB}, \quad (\text{S.126})$$

dove

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (\text{S.127})$$

Possiamo ricavare B invertendo la formula del raggio:

$$B = \gamma \frac{mv}{qr}. \quad (\text{S.128})$$

Per ricavarne il valore dobbiamo conoscere, oltre a $m \simeq 9 \times 10^{-31} \text{ kg}$ (la massa del positrone, identica a quella dell'elettrone) e $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ (l'opposto della carica elettrica dell'elettrone), il valore di v .

Questo possiamo ottenerlo sapendo che

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 = (\gamma mv)^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (\text{S.129})$$

per cui

$$\gamma mv = \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2}. \quad (\text{S.130})$$

Sappiamo che, in un caso $E = 63 \text{ MeV}$ pertanto avremo, in unità del SI,

$$\gamma mv \simeq 33.6 \times 10^{-21} \quad (\text{S.132})$$

in unità del SI (kg m s^{-1}). Quando $E = 23 \text{ MeV}$, evidentemente la quantità di moto vale, nelle stesse unità, 12.4×10^{-21} .

Per valutare B dobbiamo conoscere i rispettivi raggi di curvatura, che possiamo misurare sull'immagine con un righello, con una risoluzione di 1 mm, sapendo che lo spessore dell'assorbitore è di 6 mm.

Possiamo misurare la corda più lunga possibile della traccia meno energetica (quella più curva), che è $L = 43 \pm 1 \text{ mm}$. La **sagitta**, cioè la distanza tra la corda e il punto medio dell'arco di circonferenza corrispondente, è $s = 5 \pm 1 \text{ mm}$. Utilizzando il teorema di Talete possiamo scrivere che

$$2 \frac{r-s}{L} = \frac{L}{2s} \quad (\text{S.133})$$

da cui possiamo ricavare r come

$$r = \frac{L^2}{4s} + s \simeq 97 \text{ mm}. \quad (\text{S.134})$$

L'errore da attribuire a questa quantità si dovrebbe ricavare usando le regole della **propagazione degli errori**. In questo caso possiamo limitarci a stimarlo osservando che l'**errore relativo** sulla misura della sagitta (il peggiore tra i due) è dell'ordine del 20 % ($\delta s/s = 1/5 = 0.2$). Il valore di r non può essere noto con una precisione migliore di questa quindi $\delta r \simeq 19 \text{ mm}$ e $r = (97 \pm 19) \text{ mm}$. Da questa misura ricaviamo il valore del campo che è

$$B \simeq \frac{2.4 \times 10^{-21}}{1.6 \times 10^{-19} \cdot 97 \times 10^{-3}} \simeq 0.15 \text{ T}. \quad (\text{S.135})$$

L'unità di misura di B è ovviamente quella del sistema internazionale, avendo usato tutte unità in questo sistema. Anche in questo caso, l'errore relativo $\delta B/B$ deve essere al meglio del 20 %, quindi deve valere $\delta B \simeq 0.03$ T: $B = (0.15 \pm 0.03)$ T. Questo valore coincide, entro gli errori, con quello pubblicato nell'articolo di Anderson [17] di 15 000 Gauss.

Poiché l'energia iniziale del positrone è un fattore circa 3 rispetto a quella finale, il raggio di curvatura prima di attraversare l'assorbitore deve essere dello stesso fattore più ampio. Ricaviamo la sagitta in funzione del raggio e della corda:

$$s = \frac{r \pm \sqrt{(r-L)(r+L)}}{2} \quad (\text{S.136})$$

(ci sono due possibili valori della sagitta; quello che interessa a noi è il più piccolo). Nel caso in cui $L \ll r$ possiamo scrivere

$$r^2 - L^2 = r^2 \left(1 - \left(\frac{L}{r} \right)^2 \right) \quad (\text{S.137})$$

e quindi, essendo $\sqrt{1-x} \simeq 1 - \frac{x}{2}$,

$$\sqrt{(r-L)(r+L)} \simeq r \sqrt{1 - \left(\frac{L}{r} \right)^2} \simeq r \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{L}{r} \right)^2 \right) \quad (\text{S.138})$$

e, in definitiva

$$s \simeq \frac{L^2}{2r}. \quad (\text{S.139})$$

Quando r diventa un fattore tre più ampio, s diventa un fattore 3 più piccola, quindi ci aspettiamo una sagitta di circa 1.7 mm, che è proprio quel che si vede eseguendo la misura (con la risoluzione che abbiamo assunto possiamo vedere che la sagitta è di circa 2 mm). Evidentemente il positrone proviene dal lato in cui la sua energia è maggiore, quindi, guardando la foto si comprende che percorre gli archi di circonferenza in senso antiorario.

La **Forza di Lorentz** $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ è diretta in modo tale da essere perpendicolare alla velocità e al campo e il suo verso deve essere quello uscente dal

palmò della mano destra con il pollice messo in direzione della velocità e le altre dita in direzione del campo. Il campo quindi deve essere perpendicolare al piano della foto ed entrante in esso.

Esercizio 6.1

La prima reazione $p + p \rightarrow p + \bar{p}$ non è permessa perché non conserva il numero barionico (che vale 2 nello stato iniziale e 0 in quello finale). La reazione $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$ invece è consentita per il motivo opposto.

La produzione di un neutrone e un positrone dallo scontro tra un protone e un pione neutro è vietata perché non è conservato il numero leptonico (che nello stato iniziale è nullo e nello stato finale vale -1).

La reazione $p + n \rightarrow n + p + \pi^0$ può avvenire perché non viola alcuna legge di conservazione.

Il decadimento del pione carico in $\pi^0 + \nu_e$ non può avvenire perché non conserva il numero leptonico.

La reazione $\pi^- + p \rightarrow n + \pi^0$ è consentita perché tutti i numeri quantici sono conservati.

Lo scontro tra un muone e un neutrone non può dare origine a un neutrone un protone e un anti-neutrino perché se il numero leptonico è conservato ($L_\mu(\mu^+) = L_\mu(\bar{\nu}_\mu)$), non lo è quello barionico (c'è un solo barione, il neutrone, con $B = 1$ a sinistra, e due barioni con $B = 1$, a destra).

Per motivi analoghi è vietata la reazione $\mu^- + e^- \rightarrow \bar{p} + e^-$. A destra abbiamo un barione, che non c'è a sinistra. Inoltre abbiamo, nello stato iniziale, $L_e = 1$ e $L_\mu = 1$, mentre nello stato finale $L_e = 1$, ma $L_\mu = 0$.

Lo scontro tra due pioni può dare origine a una coppia protone-antiprotone, perché il numero barionico è complessivamente nullo nello stato finale, così come nello stato iniziale.

Non può invece dare origine alla produzione di $p + n + \pi^-$ perché il numero barionico dello stato finale vale $B = 2$, mentre è sempre nullo nello stato iniziale.

Esercizio 7.1

Consideriamo l'urto di un protone di massa m e con velocità v con un altro protone fermo nel sistema di riferimento del laboratorio e che nell'urto si produca un π^0 . La reazione che stiamo studiando è

$$p + p \rightarrow p + p + \pi^0. \quad (\text{S.140})$$

Notate che tutti i numeri quantici sono conservati (carica elettrica, **numero barionico**, **numero leptonic**). La quantità di moto iniziale è

$$P_{in} = \gamma m v. \quad (\text{S.141})$$

dove γ è il **fattore di Lorentz** che fa *aumentare* la massa efficace della particella, man mano che la sua velocità si avvicina a quella della luce. Nello stato finale la quantità di moto è

$$P_{out} = \gamma_1 m v_1 + \gamma_2 m v_2 + \gamma_\pi m_\pi v_\pi \quad (\text{S.142})$$

dove le grandezze con il pedice 1 si riferiscono a un protone e quelle col pedice 2 all'altro. Oltre alla quantità di moto deve essere conservata l'energia, perciò abbiamo che

$$\begin{aligned} \sqrt{\gamma^2 m^2 v^2 c^2 + m^2 c^4} + m c^2 &= \sqrt{\gamma_1^2 m^2 v_1^2 c^2 + m^2 c^4} + \\ &\sqrt{\gamma_2^2 m^2 v_2^2 c^2 + m^2 c^4} + \\ &\sqrt{\gamma_\pi^2 m_\pi^2 v_\pi^2 c^2 + m_\pi^2 c^4}. \end{aligned} \quad (\text{S.143})$$

Usando questo approccio vediamo subito che i conti si complicano non poco. In questi casi conviene usare un *trucco*. Innanzi tutto osserviamo che

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4. \quad (\text{S.144})$$

Questa relazione vale per qualsiasi particella di massa m , quantità di moto p ed energia E . La massa a riposo di una particella è una costante, che non dipende dal sistema di riferimento nel quale si misura. Questo significa che la combinazione $E^2 - p^2 c^2$ è a sua volta una costante indipendente dal sistema di riferimento.

Possiamo allora calcolare questa quantità nel sistema di riferimento che ci fa più comodo. Nel caso della reazione in esame l'energia iniziale, misurata nel sistema del laboratorio in cui uno dei protoni è fermo e l'altro ha quantità di moto p , vale

$$E_{in} = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} + m c^2 \quad (\text{S.145})$$

mentre la quantità di moto totale vale semplicemente

$$P_{in} = p. \quad (\text{S.146})$$

La differenza tra l'energia al quadrato e la quantità di moto al quadrato moltiplicata per c^2 è dunque

$$E_{in}^2 - P_{in}^2 c^2 = 2m^2 c^4 + 2m c^2 \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (\text{S.147})$$

Per calcolare la stessa quantità nello stato finale, poiché possiamo scegliere il sistema di riferimento che ci fa più comodo, possiamo metterci nel sistema di riferimento del centro di massa, cioè in quello in cui le tre particelle risultano avere quantità di moto tali da annullarsi a vicenda, per cui

$$P_{fin} = 0. \quad (\text{S.148})$$

Nel caso più semplice le tre particelle sono prodotte ferme nel centro di massa e l'energia è semplicemente la somma delle masse moltiplicate per la velocità della luce al quadrato:

$$E_{fin} = 2m c^2 + m_\pi c^2. \quad (\text{S.149})$$

Attenzione! Il fatto che $P_{in} \neq P_{fin}$ non significa che stiamo violando la conservazione della quantità di moto! Le due quantità infatti sono calcolate in sistemi di riferimento diversi. Quello che importa è che la differenza $E_{fin}^2 - P_{fin}^2 c^2$ rimanga costante. Questa differenza vale

$$4m^2 c^4 + m_\pi^2 c^4 + 4m m_\pi c^4. \quad (\text{S.150})$$

Imponendo che questa sia uguale a quella calcolata nello stato iniziale (anche se in un sistema di riferimento diverso) otteniamo l'equazione

$$2m^2c^4 + m_\pi^2c^4 + 4mm_\pi c^4 = 2mc^2\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \quad (\text{S.151})$$

da cui si ricava

$$\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = E = mc^2 + \frac{m_\pi^2}{2m}c^2 + 2m_\pi c^2. \quad (\text{S.152})$$

Quella che abbiamo appena trovato è la minima energia (**energia di soglia**) che deve avere un protone affinché, scontrandosi con un protone fermo, possa dare luogo alla produzione di un π^0 .

Esercizio 7.2

Abbiamo due fotoni la cui quantità di moto è \vec{p}_1 e \vec{p}_2 , con, rispettivamente, energie E_1 ed E_2 . Poiché i fotoni hanno massa nulla deve essere

$$E_1^2 - p_1^2c^2 = 0 \quad (\text{S.153})$$

e

$$E_2^2 - p_2^2c^2 = 0. \quad (\text{S.154})$$

Supponiamo che i fotoni siano il prodotto del decadimento di una particella di massa M . Nel sistema di riferimento in cui questa particella è ferma l'energia è Mc^2 e la quantità di moto è nulla. La differenza tra l'energia al quadrato e la quantità di moto al quadrato moltiplicata per c^2 , che è un invariante relativistico, vale dunque Mc^2 . Questa grandezza è appunto un invariante, perciò non cambia passando da un sistema di riferimento a un altro. Calcoliamola nel sistema di riferimento del laboratorio, in cui la particella di massa M si sta muovendo e decade nei due fotoni. Per la conservazione della quantità di moto abbiamo che

$$\vec{P}_M = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad (\text{S.155})$$

e per la conservazione dell'energia si deve avere che

$$E_M = E_1 + E_2. \quad (\text{S.156})$$

L'energia totale al quadrato nello stato finale è

$$E_M^2 = (E_1 + E_2)^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \quad (\text{S.157})$$

mentre il prodotto $P_M^2c^2$ vale

$$P^2c^2 = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2c^2 = p_1^2c^2 + p_2^2c^2 + 2p_1p_2c^2\cos\theta \quad (\text{S.158})$$

dove θ è l'angolo formato dai vettori \vec{p}_1 e \vec{p}_2 . La differenza $E_M^2 - P^2c^2$ è un invariante perciò deve valere Mc^2 :

$$E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 - (p_1^2c^2 + p_2^2c^2 + 2p_1p_2c^2\cos\theta) = Mc^2. \quad (\text{S.159})$$

Ora osserviamo che $E_1^2 - p_1^2c^2 = E_2^2 - p_2^2c^2 = 0$ e quindi

$$2E_1E_2 - 2p_1p_2c^2\cos\theta = Mc^2 \quad (\text{S.160})$$

e che, poiché il fotone ha massa nulla $E_i = p_i c$ e l'equazione diventa

$$2E_1E_2 - 2E_1E_2\cos\theta = Mc^2 \quad (\text{S.161})$$

da cui si ricava che

$$M = \frac{2E_1E_2(1 - \cos\theta)}{c^2}. \quad (\text{S.162})$$

Basta dunque conoscere l'energia e la direzione dei due fotoni per sapere quale particella ha dato origine al decadimento.

Esercizio 8.1

Il numero di particelle misurate con un ritardo t è proporzionale alla frequenza $f(t)$: $N(t) = Af(t)$. Nella formula (8.13) compaiono solo i rapporti tra i numeri di particelle $N(t)$ e $N(0)$ che dunque sono uguali ai rapporti $f(t)/f(0)$.

Possiamo dunque assumere $N(0) = 3.47$ e la vita media si può stimare dalla misura a $t = 1.00 \mu\text{s}$:

$$\tau_1 = -t \frac{1}{\log \frac{N(t_1)}{N(0)}} = -1.00 \frac{1}{\log \frac{2.42}{3.47}} \simeq 2.77 \mu\text{s}. \quad (\text{S.163})$$

Usando la misura a $t = 1.97 \mu\text{s}$ si trova $\tau_2 \simeq 1.94 \mu\text{s}$, mentre dalla misura a $t = 3.80 \mu\text{s}$ si ottiene $\tau_3 \simeq 2.72 \mu\text{s}$.

Il valore della vita media del muone si può quindi stimare come la **media** di questi, che vale $\langle \tau \rangle \simeq 2.48 \mu\text{s}$. L'errore da associare a questo numero si ricava valutando la **varianza** che vale $\sigma_\tau = 0.22 \mu\text{s}$ e dividendola per la radice del numero di misure: $\delta_\tau = \sigma_\tau / \sqrt{3} \simeq 0.16 \mu\text{s}$.

Il risultato si esprime come

$$\tau_\mu = 2.48 \pm 0.16 \mu\text{s}. \quad (\text{S.164})$$

La vita media del muone, come risulta da **misure** eseguite fino al 2012 è

$$\tau_\mu = 2.1969811 \pm 0.0000022 \mu\text{s}, \quad (\text{S.165})$$

valore che differisce da quello da noi trovato di circa $0.28 \mu\text{s}$ (meglio di due **deviazioni standard**).

Esercizio 9.1

Il pione carico ha una vita media pari a circa $\tau \simeq 10^{-8}$ s. Una volta prodotto si muove, nel sistema del laboratorio, con quantità di moto p che dipende dall'energia dei protoni usati.

Il decadimento è un processo stocastico perciò il pione può decadere, in linea di principio, in un tempo che va da 0 a ∞ . In media, circa 1/3 dei pioni sarà decaduto nel tempo di una vita media, data la forma della **legge del decadimento** e ricordando che $e \simeq 3$.

Lo spazio percorso in media in questo tempo vale

$$L \simeq v\tau = \frac{p}{m}\tau. \quad (\text{S.166})$$

Se $p \gg m$, $v \simeq c$ e quindi

$$L \simeq c\tau = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 10^{-8} \text{s} = 3 \text{ m}. \quad (\text{S.167})$$

In realtà, in questo caso, bisogna considerare che il tempo τ , nel sistema di riferimento del laboratorio, si dilata di un fattore

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{S.168})$$

e quindi la distanza L può essere molto più lunga. Calcoliamo questo fattore sapendo che

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 = (\gamma^2 v^2 + c^2) m^2 c^2. \quad (\text{S.169})$$

Ma ora

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{c^2}{c^2 - v^2} \quad (\text{S.170})$$

e sostituendo

$$E^2 = \left(\frac{c^2}{c^2 - v^2} v^2 + c^2 \right) m^2 c^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} m^2 c^4 = \gamma^2 m^2 c^4 \quad (\text{S.171})$$

e pertanto

$$\gamma = \frac{E}{mc^2}, \quad (\text{S.172})$$

vale a dire γ rappresenta la frazione di energia in più rispetto alla massa a riposo della particella. Nel nostro caso abbiamo dunque

$$L = \gamma c\tau = \frac{E}{mc} \tau. \quad (\text{S.173})$$

Un pione di $300 \text{ MeV}/c$ di quantità di moto, avendo una massa pari a circa $140 \text{ MeV}/c^2$ ha un'energia pari a

$$E = \sqrt{(300 \text{ MeV}/c)^2 c^2 + (140 \text{ MeV}/c^2)^2 c^4} \simeq 330 \text{ MeV} \quad (\text{S.174})$$

e quindi il suo γ vale

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} \simeq \frac{330 \text{ MeV}}{140 \frac{\text{MeV}}{c^2} c^2} \simeq 2.4. \quad (\text{S.175})$$

Lo spazio a disposizione per accelerare i pioni è di poco superiore ai 7 m (2.4×3 m).

Esercizio 9.2

Per permettere la produzione di una particella si devono conservare energia e quantità di moto. Nello stato iniziale abbiamo che l'energia iniziale E_{in} è pari alla somma dell'energia del pione e di quella associata alla massa a riposo m del [protone](#), cioè

$$E_{in} = E_{\pi} + mc^2. \quad (\text{S.176})$$

Quest'energia deve essere uguale a quella dello stato finale E , nel quale si trova una particella di massa M , che si muove con quantità di moto P , la cui energia è $E = \sqrt{P^2c^2 + M^2c^4}$. Inoltre si deve conservare la quantità di moto e quindi

$$p_{\pi} = P, \quad (\text{S.177})$$

perciò

$$E^2 = p_{\pi}^2c^2 + M^2c^4 = E_{\pi}^2 + m^2c^4 + 2mE_{\pi}c^2 \quad (\text{S.178})$$

e sostituendo l'energia del pione con la sua espressione $E_{\pi}^2 = p_{\pi}^2c^2 + m_{\pi}^2c^4$

$$p_{\pi}^2c^2 + M^2c^4 = p_{\pi}^2c^2 + m_{\pi}^2c^4 + mc^2 + 2mE_{\pi}c^2 \quad (\text{S.179})$$

da cui si ottiene che

$$E_{\pi} = \frac{M^2c^4 - m_{\pi}^2c^4 - mc^2}{2mc^2}. \quad (\text{S.180})$$

Quando dunque il pione assume quest'energia si può formare una particella di massa M . È in corrispondenza di questi casi che si osserva l'aumento della sezione d'urto. Usando l'equazione (S.180) si può quindi conoscere la massa della particella che si è formata conoscendo l'energia del pione in corrispondenza della quale la sezione d'urto presenta il valore massimo.

Esercizio 9.3

Per produrre le risonanze Δ con fasci di pioni si deve conservare, oltre alla carica elettrica, anche il

numero barionico. Le Δ sono barioni perciò, se nello stato finale c'è solamente una Δ , il numero barionico dello stato iniziale deve essere $B = +1$, che si può ottenere con un neutrone oppure un protone. Il segno del pione dipende quindi dalla risonanza che si vuole produrre. Per la Δ^- , ad esempio, la carica complessiva dello stato iniziale deve valere -1 in unità di carica del protone, perciò la reazione è



Analogamente, per produrre la Δ^0 si devono usare pioni negativi su protoni:



Le altre due reazioni sono



e



Esercizio 10.1

Per calcolare l'energia minima che dovrebbe avere un fascio di pioni per produrre un mesone K possiamo procedere analogamente a quanto fatto nella [soluzione](#) dell'Esercizio 7.1.

Consideriamo l'urto di un pione di massa m e con velocità v con un protone fermo nel sistema di riferimento del laboratorio. L'energia necessaria a produrre una risonanza con la massa del mesone K è almeno

$$E = m_Kc^2 \quad (\text{S.185})$$

dove m_K è la massa del K . Questa energia deve essere disponibile nel centro di massa del sistema pione-protone, in cui il protone è fermo e il pione si muove. Ricordando che la massa di una particella è un invariante relativistico possiamo affermare che

$$E^2 = E_{in}^2 - p_{in}^2c^2 \quad (\text{S.186})$$

dove E_{in} è l'energia complessiva dello stato iniziale composto del pione e del protone, mentre p_{in} la quantità di moto di questo stesso stato. Nello stato iniziale l'unica particella in moto è il pione perciò

$$p_{in} = p_{\pi} \quad (\text{S.187})$$

mentre all'energia contribuiscono sia il pione che il protone:

$$E_{in} = E_{\pi} + m_p c^2 = \sqrt{p_{\pi}^2 c^2 + m_{\pi}^2 c^4} + m_p c^2. \quad (\text{S.188})$$

Sostituendo l'espressione di E in termini della massa del K otteniamo che

$$m_K^2 c^4 = E_{\pi}^2 + m_p^2 c^4 + 2E_{\pi} m_p c^2 - p_{\pi}^2 c^2 \quad (\text{S.189})$$

e osservando che

$$E_{\pi}^2 - p_{\pi}^2 c^2 = m_{\pi}^2 c^4 \quad (\text{S.190})$$

si arriva all'espressione

$$m_K^2 c^4 = m_{\pi}^2 c^4 + m_p^2 c^4 + 2E_{\pi} m_p c^2 \quad (\text{S.191})$$

dalla quale si ricava l'energia che deve avere il pione:

$$E_{\pi} = \frac{m_K^2 - m_{\pi}^2 - m_p^2}{2m_p} c^2 \quad (\text{S.192})$$

Bibliografia

- [1] D. Knuth (1997), *The Art of Computer Programming*. Vol. 1–4, Addison–Wesley Professional. ISBN: 978-0321751041
- [2] A. Einstein (1905), Zur Elektrodynamik bewegter Körper, *Annalen der Physik* **17**, 891-921
- [3] G. Organtini (2012), Navigatori GPS e teoria della relatività, *Accastampato* **9**.
- [4] R. Ariew, (2000), *G. W. Leibniz and Samuel Clarke: Correspondence*, Hackett Publishing Co. Inc. Indianapolis/Cambridge
- [5] I. Newton (1725), *Principi matematici della filosofia naturale*, a cura di A. Pala, ed. UTET.
- [6] M. Planck (1901), On the law of distribution of energy in the normal spectrum, *Annalen der Physik* **4**, 553.
- [7] A. Einstein (1905), *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt*, *Annalen der Physik* **17** (6), 132. doi:10.1002/andp.19053220607.
- [8] W. Gerlach e O. Stern, Das magnetische Moment des Silberatoms, *Zeitschrift für Physik* **9** (1), 353. doi:10.1007/BF01326984.
- [9] D. Pacini (1912). *La radiazione penetrante alla superficie ed in seno alle acque*. *Il Nuovo Cimento*, Series VI 3: 93D100. doi:10.1007/BF02957440
- [10] V. F. Hess (1912). *Über Beobachtungen der durchdringenden Strahlung bei sieben Freiballonfahrten*. *Physikalische Zeitschrift* XIII: 1084-91
- [11] R. A. Millikan (1925), *High frequency rays of cosmic origin*, *Proc Natl Acad Sci U S A*. 1926 January; 12(1): 48–55
- [12] B. Rossi (1930). *On the Magnetic Deflection of Cosmic Rays*. *Physical Review* **36** (3): 606. doi:10.1103/PhysRev.36.606
- [13] D. V. Skobelzyn, *A New Type of Very Fast Beta Rays* *Z. Phys.* **54** (1929) 686
- [14] A. M. Hillas (2006) *Cosmic Rays: Recent Progress and some Current Questions*, arXiv:astro-ph/0607109 v2
- [15] E. Fermi (1949) *On the Origin of the Cosmic Radiation* *Physical Review* **75**, pp. 1169-1174
- [16] La lettera con la quale Pauli propose l'ipotesi del neutrino è riprodotta in L. Brown, *The idea of the neutrino* *Phys. Today* **31**(9), 23 (1978); doi: 10.1063/1.2995181
- [17] D. Anderson (1933). *The Positive Electron*. *Physical Review* **43** (6): 491–494. doi:10.1103/PhysRev.43.491
- [18] P. Kunze (1933), *Untersuchung der Ultrastrahlung in der Wilsonkammer*, *Zeitschrift für Physik* **1933**, Volume 83, Issue 1-2, pp 1-18
- [19] P. M. S. Blackett e G. P. S. Occhialini (1933) *Some photographs of the tracks of penetrating radiation*, *Proceedings of the Royal Society of*

- London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, Vol. 139, No. 839
- [20] J. C. Street e E. C. Stevenson (1937), [New Evidence for the Existence of a Particle of Mass Intermediate Between the Proton and Electron](#), *Phys. Rev.* 52, 1003–1004
- [21] C. D. Anderson e S. H. Neddermeyer (1937) [Note on the nature of cosmic-ray particles](#), *Phys. Rev.* 50, 263
- [22] G. D. Rochester e C. C. Butler (1947), [Evidence for the existence of new unstable elementary particles](#), *Nature* 160, 855-857
- [23] V. D. Hopper e S. Biswas (1950), [Evidence Concerning the Existence of the New Unstable Elementary Neutral Particle](#), *Phys. Rev.* 80, p 1099.
- [24] S. Okubo (1962) [Note on unitary symmetry in strong interactions](#), *Progress in theoretical physics* 27 (5) p. 949. doi:10.1143/PTP.27.949
- [25] M. Conversi e O. Piccioni (1944), [Misura diretta della vita media dei mesoni frenati](#), *Il Nuovo Cimento* Vol. 2, 1, 40–70.
- [26] M. Gell–Mann (1961), [The Eightfold Way: A Theory of Strong Interaction Symmetry](#) Synchrotron Laboratory Report CTSL-20. California Institute of Technology. doi:10.2172/4008239
- [27] V. E. Barnes et al. (1964) [Observation of a Hyperon with Strangeness Number Three](#) *Physical Review Letters* 12 (8).
- [28] P. A. M. Dirac (1931) [Quantised singularities in the electromagnetic field](#), *Proc. R. Soc. Lond. A* 1931 **133**.
- [29] The ATLAS Collaboration (2012) [Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC](#), *Phys.Lett. B* **716** 1-29. 10.1016/j.physletb.2012.08.020
- [30] The CMS Collaboration (2012) [Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC](#), *Phys.Lett. B* **716** 30. 10.1016/j.physletb.2012.08.021
- [31] Giovanni Organtini (2012) [Unveiling the Higgs mechanism to students](#), *Eur. J. Phys.* **33**1397 doi:10.1088/0143-0807/33/5/1397

Storia delle edizioni

Questo testo è anche il risultato del contributo di coloro che hanno segnalato errori o imprecisioni, o che hanno suggerito modi alternativi o più comprensibili di spiegare alcuni concetti. Di seguito sono indicati i contributori e gli interventi segnalati, in ordine cronologico.

1. Anonimo: al Paragrafo "Semiconduttori", nei cristalli di tipo p gli elettroni si trovano nella banda di valenza e non in quella di conduzione
2. Ciro Chiaiese: segnalati errori nel Paragrafo [1.7](#); alcune equazioni erano sbagliate.
3. Claudia Pinzari: suggerita una riformulazione del metodo per giungere alle trasformazioni di Lorentz.

Abbiamo inoltre apportate alcune modifiche in paragrafi che giudicavamo poco chiari o che sono risultati tali dopo aver discusso con alcuni lettori. In particolare in questa versione è stata abbastanza rivisto il paragrafo che illustra l'emissione del corpo nero e quello nel quale si illustrano gli effetti relativistici sulla massa classica.

Indice analitico

- acceleratore, 18, 71, 72, 79, 85, 98, 109
- adrone, 68
- α , raggi, 53, 56
- amplificatore, 47
- Anderson, Carl, 62, 63
- annichilazione, 106
- anno luce, 9
- antenna, 29
- \bar{K} , 89, 90, 92
- antimateria, 62, 106
- $\bar{\nu}$, 62
- \bar{p} , 62
- antiprotone, 62
- apparente, forza, 22
- atomo, 95
- Avogadro, numero di, 45, 95
- banda, 45
 - di conduzione, 46
 - di valenza, 46
- barione, 67, 68, 89, 90, 92
- barionico, numero, 67, 72, 89, 97
- barn, 73
- base, 47
- beauty, quark, 97
- berillio, 72
- β , decadimento, 60, 61
- β , raggi, 53, 55, 60, 61
- ^{210}Bi , 60
- bianca
 - particella, 94
- Bismuto 210, 60
- Biswas, S, 64
- Blackett, Patrick, 63
- bosone, 69
 - di Higgs, 18, 109
 - vettore, 109, 116
- W, 107
- Z, 107
- bottom, quark, 97
- Bracciano, Lago di, 54
- branching ratio, 75
- Butler, Clifford, 64
- camera
 - a nebbia, 59, 64
 - a scintilla, 56
 - di Wilson, 59
- campo
 - magnetico, 59, 62, 64, 109
 - terrestre, 55
- canale
 - di decadimento, 75
- centrifuga, forza, 23
- charm, quark, 97
- ^{60}Co , 60
- Cobalto 60, 60
- collettore, 47
- collider, 18, 19
- collisore, 18, 19
- colore, 93, 94
- composizione delle velocità, 12
- Compton, effetto, 33
- Compton, lunghezza d'onda, 34
- confinamento, 95
- conservazione
 - del numero barionico, 67, 89, 97, 131
 - del numero leptonic, 67, 97, 131
 - dell'energia, 61, 68, 77, 100, 131
 - della carica, 60, 63, 67, 131
 - della quantità di moto, 57, 61, 131
 - della stranezza, 86
- contrazione della lunghezza, 11
- corpo nero, 29
- corrente, 45
- cosmici, provenienza dei raggi, 57

- cosmici, raggi, 10, 53, 55, 56, 60, 63, 65, 71, 85, 98
 costante
 di Planck, 69, 121
 Creative Commons, 3
 cristallo drogato, 46
 Ξ , 87, 89, 91
 Ξ^* , 89

 debole, forza, 74
 debole, interazione, 74
 debole, interazione o forza, 61, 107
 decadimento, 73, 74
 β , 60
 del muone, 63
 decadimento β , 61
 decupletto di barioni, 90
 definizione operativa, 73
 Δ , 81, 89, 91, 94
 diagramma di Feynman, 103
 dilatazione del tempo, 9
 diodo, 46
 Dirac, Paul, 62
 down, quark, 91
 drogato, cristallo, 46

 effetto Compton, 33
 effetto est-ovest, 55
 effetto fotoelettrico, 31
 Einstein, Albert, 7, 32, 95
 elettrone, 56, 59, 60
 elettroscopio, 53
 emettitore, 47
 energia, 100
 di soglia, 71, 132
 meccanica, 100
 energia a riposo, 17
 energia-impulso, quadrivettore, 17
 energia-impulso, tensore, 26
 equazione
 differenziale, 120
 a variabili separabili, 120
 equazione di Schrödinger, 48, 50
 equazioni di Maxwell, 9, 39
 equivalenza, principio di, 22

 errore
 propagazione dell', 129
 relativo, 129
 esclusione
 principio di, 42
 esclusione, principio di, 41
 est-ovest, effetto, 55
 η , 89, 90, 92
 etere, 9
 evento, 14

 fasi, spazio delle, 76
 fattore relativistico di Lorentz, 60, 131
 Fermi, Enrico, 57, 60
 Fermi, Modello di, 57
 fermione, 69
 Feynman, diagramma di, 103
 Finnegans Wake, 89
 forte, forza, 68, 74
 forte, interazione, 68, 74
 forte, interazione o forza, 68
 forza
 centrifuga, 23
 debole, 74, 99
 di gravità, 99
 di Lorentz, 16, 55, 59, 130
 di Van der Waals, 95
 elettromagnetica, 99
 forte, 68, 74, 99
 gravitazionale, 99
 forza apparente, 22
 forza debole, 61, 107
 forza forte, 68
 fotoelettrico, effetto, 31
 fotone, 32, 33, 69, 105
 funzione d'onda, 49

 Galileo, trasformazioni di, 9, 12
 γ di Lorentz, 60, 131
 γ , raggi, 56
 Gauss (u.m.), 130
 Gell-Mann, Murray, 89
 gemelli, paradosso dei, 12, 28
 generale, relatività, 12, 21
 Gerlach, Walther, 40

- ginocchio, 56
 gluone, 107
 GPS, 10, 27, 123
 grandezza fisica
 derivata, 121
 fondamentale, 121
 gravità, 99

 Hertz, Heinrich, 31
 Hess, Viktor, 53, 55
 Higgs
 bosone di, 109
 meccanismo di, 109
 Higgs, bosone di, 18, 109
 Higgs, Peter, 109
 Hopper, V, 64

 impuslo, 15
 indeterminazione, principio di, 34
 inerziale, sistema, 12, 21, 22
 interazione
 debole, 74, 77, 99
 elettromagnetica, 99
 forte, 68, 74, 99
 gravitazionale, 99
 interazione debole, 61, 107
 interazione forte, 68
 invariante, 14
 invariante di Lorentz, 14
 ionizzazione, 53
 isolante, 45

 jamendo, 3
 Joyce, James, 89

K, 86, 92
K, 89
K, 89
 Knuth, Donald, 3
 Kolhörster, Werner, 55
 Kunze, Paul, 63

 lacuna, 46
 Lago di Bracciano, 54
 Λ , 85, 86, 89, 90
 larghezza
 di una particella, 36
 \LaTeX , 3
 Legge di Newton, 40
 leptone, 67, 74
 τ , 97
 leptonico, numero, 67, 97
 Livorno, 54
 Lorentz, fattore relativistico, 60, 131
 Lorentz, Forza di, 130
 Lorentz, forza di, 16, 55, 59
 Lorentz, invariante di, 14
 Lorentz, trasformazioni di, 9
 luce, 77
 luce, velocità della, 18
 lunghezza d'interazione, 74
 lunghezza d'onda Compton, 34
 lunghezza, contrazione della, 11

 magnetico
 campo, 109
 Malerba, Luigi, 7, 33
 mano destra, regola della, 55
 massa
 invariante, 80
 massa a riposo, 16
 massa invariante, 72, 82
 massa nulla, 18
 materializzazione, 71, 106
 Maxwell, equazioni di, 9, 39
 meccanismo di Higgs, 109
 Mendeleev, Dmitriji, 42, 89
 mesone, 68, 89, 90
 Michelson, Albert Abraham, 7
 microscopio elettronico, 36
 Millikan, Robert, 55
 Minkowski, spazio di, 14
 Modello di Fermi, 57
 momento angolare, 37
 Morley, Edward, 7
 moto browniano, 95
 MPEG Streamclip, 3
 μ , 64
 μ , 63, 64, 67, 75–77, 81, 97
 muone, 10, 35, 63, 64, 67, 75–77, 81, 97
 Muster Mark, 89

- Neddermeyer, Seth, 63
 neutrino, 18, 60, 62
 Newton, legge di, 40
 ^{60}Ni , 60
 Nichel 60, 60
 ν , 62
 numero
 barionico, 67, 72, 89, 97
 leptonico, 67, 97
 numero d'onda, 35
 numero di Avogadro, 45, 95

 Occhialini, Giuseppe, 63
 Okubo, Susumo, 89
 Ω , 87, 91
 Ω^- , 89
 onda elettromagnetica, 77
 Open Source, 3
 ottetto
 di barioni, 90, 92
 di mesoni, 90, 92

 Pacini, Domenico, 54, 55
 pallone aerostatico, 55
 paradosso
 dei gemelli, 12, 28
 particella bianca, 94
 particelle strane, 85, 86
 Pauli, Principio di, 93, 94
 Pauli, principio di, 41, 42
 Pauli, Wolfgang, 42, 93, 94
 Periodica, Tavola, 89
 periodica, tavola, 42
 Perrin, Jean Baptiste, 95
 π , 63, 64, 68, 72, 74, 76, 77, 79–81, 85–87, 89, 90,
 92, 134
 pione, 63, 64, 68, 72, 74, 76, 77, 79–81, 85–87, 89,
 90, 92, 134
 pixel, 47
 Planck, costante di, 31, 69, 121
 Planck, Max, 30
 ^{210}Po , 60
 Polonio 210, 60
 positrone, 62, 106
 potenziale, 101

 primari, raggi cosmici, 56, 71
 principio
 di equivalenza, 22
 di esclusione, 42, 93, 94
 di Pauli, 93, 94
 principio d'indeterminazione, 34
 principio di esclusione, 41
 principio di Pauli, 41
 propagazione
 degli errori, 129
 protone, 18, 56, 60, 61, 63, 67, 68, 72, 77, 85–87,
 94, 97, 131, 132, 134
 provenienza dei raggi cosmici, 57

 quadripulso, 17
 quadri-velocità, 15
 quadri-vettore, 13, 14
 quadri-vettore energia–impulso, 17
 quantizzazione dell'energia, 38
 quanto, 30
 quark, 19, 89, 91
 beauty, 97
 bottom, 97
 charm, 97
 down, 91
 strange, 91
 top, 97
 up, 91

 Rabi, Isidor, 63
 radiazione
 α , 53
 β , 53, 55, 60, 61
 radioattività, 53
 raggi
 γ cosmici, 10
 α , 53, 56
 β , 53, 55, 60, 61
 cosmici, 53, 55, 56, 60, 63, 65, 71, 85, 98
 primari, 56, 71, 72
 secondari, 57
 solari, 57
 γ , 56
 X, 56
 raggi cosmici, sorgenti, 57

- raggi cosmici: provenienza, 57
- rapporto di diramazione, 75
- rapporto incrementale, 120
- regola
 - della mano destra, 55
- relatività
 - generale, 21
 - ristretta, 7
- relatività generale, 12
- relatività speciale, 7
- relatività, teoria della, 61, 71
- Riemann, tensore di, 26
- riga, in uno spettro, 38
- risonanza, 83
- risonanze, 79, 80
- ristretta, relatività, 7
- Rochester, George, 64
- Rossi, Bruno, 55
- rottura della simmetria, 117

- sagitta, 129
- scarica
 - degli elettroscopi, 53
- Schrödinger, equazione di, 48, 50
- Schrödinger, Erwin, 48
- sciacquone, 47
- scintilla, camera a, 56
- secondari, raggi cosmici, 57
- semiconduttori, 45
- sezione d'urto, 73, 79
 - elettromagnetica, 74
 - forte, 74
- SI, 73, 121
- Σ , 89, 90
- Σ^* , 89, 91
- Sistema Internazionale, 73, 121
- Skobeltsyn, Dmitri, 59
- soglia, energia di, 71, 132
- solari, raggi cosmici, 57
- sorgente
 - di raggi cosmici, 57
- spazio
 - delle fasi, 77
- spazio curvo, 25
- spazio delle fasi, 76
- spazio piatto, 25
- speciale, relatività, 7
- spettro, 38
 - dei raggi cosmici, 56
 - del decadimento β , 61
- spin, 40, 69
- Stazione zero, 7
- Stern, Otto, 40
- Stern–Gerlach, esperimento di, 40
- stocastico, 75
- strane, particelle, 85, 86
- stranezza, 85–87, 90, 107
- strange, 91
- supernovae, 57

- τ , leptone, 97
- Tavola Periodica, 89
- tavola periodica, 42
- tempo proprio, 10
- tempo, dilatazione del, 9
- tensore, 21
 - di Riemann, 26
 - energia–impulso, 26
 - metrico, 22
- teoria
 - della relatività, 61, 71
- top, quark, 97
- transistor, 47
- trasformazioni di Galileo, 9, 12
- trasformazioni di Lorentz, 9

- unità naturali, 12, 69, 121
- up, quark, 91

- valenza, 42
- Van der Waals, forza di, 95
- Van der Waals, Johannes, 95
- velocità
 - della luce, 18
- velocità della luce, 121
- velocità, composizione delle, 12
- vita media, 74

- W, 107
- Wilson, camera di, 59
- Wilson, Charles, 59

X, raggi, 56

Ξ , 87, 89, 91

Ξ^* , 89

Z, 107