Complementi di Algebra - 4. Numeri complessi

1 Dai numeri naturali ai numeri complessi

1.1 Introduzione

Fu **Girolamo Cardano** (*Ars Magna*, 1545) il primo a trattare esplicitamente i numeri complessi, tentando di risolvere il seguente problema:

“dividere un segmento di lunghezza 10 in due parti tali che il rettangolo da esse formato abbia area 40”

In realtà l’area di un tale rettangolo è al massimo 25, ma l’algebra ci dice qualcosa in più, se consideriamo l’equazione corrispondente al problema:

$$x^2 - 10x + 40 = 0 .$$

Essa conduce alle due soluzioni “sofistiche” $5+\sqrt{-15}$ e $5-\sqrt{-15}$, che usano il numero “immaginario” $\sqrt{-15}$ e il cui prodotto è

$$\left(5+\sqrt{-15}\right)\left(5-\sqrt{-15}\right) = 25 - (-15) = 40$$

e la cui somma è

$$\left(5+\sqrt{-15}\right)+\left(5-\sqrt{-15}\right) = 10 .$$

Nei secoli successivi, numerose altre equazioni algebriche portarono a soluzioni “immaginarie”, come le definì **Cartesio** nel 1637. Ma fu grazie ad **Eulero** che lo studio di tale materia trovò pieno compimento: egli introdusse l’unità immaginaria i, tale che $i^2 = -1$, che permise di scrivere i numeri precedenti come $5 + i\sqrt{15}$ e qualsiasi altro numero complesso nella forma a noi nota:

$$z = a + i\,b$$

L’interpretazione geometrica fu dovuta alle tesi di **Gauss** (1799) e **Argand** (1806) e alla loro introduzione del piano complesso, che oggi porta il loro nome.

1.2 Richiami sugli insiemi numerici

L’insieme

$$\mathbb{N} = \{\, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

dei **numeri naturali**, ovvero degli interi maggiori o uguali a 0, è chiuso rispetto alla <u>somma</u>, ovvero:

1. $a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a + b = c \in \mathbb{N}$

Rispetto a questa operazione, 0 è l’elemento neutro, poiché

2. $a + 0 = 0 + a = a, \quad \forall a \in \mathbb{N}$

Non esiste però l’inverso, ossia un numero b tale che

3. $\nexists b : a + b = b + a = 0, \quad \forall a \in \mathbb{N}.$

Ciò equivale a non poter risolvere in $\mathbb{N}$ l’equazione algebrica

$$x + a = 0$$

ovvero $x + a = b,\ a > b$. Ad es. $x + 5 = 2$

Il numero cercato è come sappiamo l'**opposto** $-a$ di a: ecco da dove deriva la necessità di ampliare l'insieme dei numeri interi includendo anche quelli negativi, costruendo così l'insieme dei **numeri relativi**

$$\mathbb{Z} = \{ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$$

Questo insieme ora non solo è chiuso rispetto alla somma, ma possiede rispetto ad essa l'elemento neutro e l'inverso. È, come si dice, un gruppo additivo.

Possiamo procedere analogamente considerando il <u>prodotto</u> tra due numeri relativi:

1. $a, b \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; a \cdot b = c \in \mathbb{Z}$, ossia $\mathbb{Z}$ è chiuso rispetto al prodotto
2. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \quad \forall a \in \mathbb{Z}$, ossia 1 è l'elemento neutro rispetto al prodotto

Ancora una volta però non esiste però l'inverso, ossia

3. $\nexists b : a \cdot b = b \cdot a = 1, \quad \forall a \in \mathbb{Z}$.

Ciò equivale a non poter risolvere in $\mathbb{Z}$ l'equazione algebrica

$$a\,x + b = 0,\; a \neq 0$$

con b non divisibile esattamente per a, ad es. $7x - 5 = 0$.

Stavolta abbiamo bisogno del numero che chiamiamo **reciproco** $\frac{1}{a}$ di qualsiasi numero relativo non nullo, ossia per ciascun $a \in \mathbb{Z}_0$: ampliamo così il nostro insieme dei numeri, includendo le frazioni ossia i rapporti tra numeri interi, che si chiamano **razionali**

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}_0 \right\}$$

Fanno parte di $\mathbb{Q}$, oltre a ovviamente i numeri interi relativi $a \in \mathbb{Z}$ che possono scriversi nella forma $\frac{a}{1}$, tutti i numeri decimali limitati ma anche quelli illimitati ma periodici: ad es. $0.44444\ldots = \frac{4}{9}$. Una categoria a parte è invece costituita dai numeri decimali illimitati e non periodici che, non appartenendo a $\mathbb{Q}$, si chiamano **irrazionali**.

A questo punto entra in gioco un altro protagonista, **Pitagora**, con la scoperta, suo malgrado, che tali numeri non sono razionali, come ad es. quello che serve a "duplicare il quadrato", ossia che risolve il seguente "problema classico":

"dato un quadrato di lato 1, trovare il lato del quadrato di area doppia".

Il problema equivale a risolvere in $\mathbb{Q}$ l'equazione algebrica

$$x^2 - 2 = 0$$

La soluzione cercato è $\sqrt{2}$, solo che Pitagora non lo sapeva... o non voleva farlo sapere, poiché secondo lui "omnia ratio est", "tutto è numero", o meglio, "tutto è (numero) razionale", mentre invece $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, come dimostra il seguente semplice

TEOREMA. $\sqrt{2}$ non è un numero razionale

<u>Dimostrazione</u>

Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ossia $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}_0$. Senza perdere di generalità possiamo imporre che $\frac{a}{b}$ sia una frazione ridotta ai minimi termini, ossia tale che $MDC(a,b)=1$. Infatti, ad es., $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{3n}{4n}$.

Elevando al quadrato abbiamo allora che $2=\left(\frac{a}{b}\right)^2$, ossia $a^2=2b^2$. Ne consegue che a^2 è pari e quindi che anche a sarà pari (cfr Osservazione successiva), ossia $a=2k$.
Sostituendo nella relazione precedente abbiamo: $4k^2=2b^2$, ovvero $b^2=2k^2$. Ma allora anche b sarà pari, ossia $b=2h$, il che è una contraddizione, poiché avremmo $MDC(a,b)=2$. ■

Osservazione

Il quadrato di un numero pari è ancora pari.

Infatti: $(2k)^2=4k^2=2(2k^2)=2A$

Il quadrato di un numero dispari è ancora dispari.

Infatti: $(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1=2B+1$

I numeri irrazionali come $\sqrt{2}$ si dicono **algebrici**, poiché soluzioni di equazioni algebriche intere (nel nostro caso $x^2-2=0$). Altri numeri irrazionali come $\pi, e, \log 2, \sin 7$ etc. non hanno invece questa proprietà e si dicono **trascendenti**.

L'unione dei numeri razionali con quelli irrazionali costituisce l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri **reali**, che si possono rappresentare graficamente con una retta orientata essendo infiniti come i punti della retta e in relazione d'ordine fra loro.
$\mathbb{R}$ sembrerebbe un insieme in cui possiamo fare di tutto... Ma se da novelli Pitagora dovessimo imbatterci in un'equazione assolutamente analoga alla precedente

$$x^2+2=0$$

passeremmo i nostri guai.... Infatti le soluzioni algebriche di tale equazione non esistono in $\mathbb{R}$: abbiamo perciò bisogno di numeri che reali non sono, ecco perché li chiameremo **immaginari**.
Abbiamo così costruito l'insieme di numeri complessi:

$$\mathbb{C}=\left\{ z=a+ib \,\middle|\, a,b\in\mathbb{R};\, i^2=-1\right\}$$

che "completano" la nostra sequenza degli insiemi numerici, nella quale il successivo è un'estensione di quello precedente:

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$$

1.3 Numeri immaginari

Definizione

Si chiama unità immaginaria il numero i tale che $i^2=-1$.

Potenze di *i*

$$
\begin{array}{cccc}
i^0 = 1 & i^1 = i & i^2 = -1 & i^3 = -i \\
i^4 = 1 & i^5 = i & i^6 = -1 & \dots \\
i^{4k} = 1 & i^{4k+1} = i & i^{4k+2} = -1 & i^{4k+3} = -i
\end{array}
$$

Definizione

Si chiamano immaginari i numeri della forma $i\,b$ con $b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$.
Coi numeri immaginari, per la gioia di Cardano, è finalmente possibile dare un significato anche alle radici quadrate di numeri negativi:

$$\sqrt{-4} = i\sqrt{4} = 2i$$

e quindi le soluzioni dell'antipatica equazione $x^2 + 2 = 0$ diventano i numeri immaginari $\pm i\sqrt{2}$.

Analogamente, coi numeri immaginari è ora possibile risolvere equazioni del tipo

$$x^2 + a^2 = 0$$

che equivalgono infatti, posto $a > 0$, a

$$x^2 = -a^2 \Leftrightarrow x^2 = -1 \cdot a^2 \Leftrightarrow x^2 = i^2 a^2 \Leftrightarrow x = i\,a$$

Esercizi

Eseguire le seguenti operazioni con i numeri immaginari:

1. i^7 $\quad \left[i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i \right]$
2. $(-2i)^8$ $\quad \left[(-2i)^8 = (-2)^8 \cdot i^8 = 2^8 \cdot 1 = 254 \right]$
3. $\left(\sqrt{2}\,i\right)^4$ $\quad \left[\left(\sqrt{2}\,i\right)^4 = \sqrt{2^4} \cdot i^4 = 4 \right]$

1.4 Numeri complessi

Definizione

Chiamiamo complesso ogni numero nella forma "cartesiana" (o algebrica) $a + i\,b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$.
L'insieme dei numeri complessi si indica con

$$\mathbb{C} = \left\{ z = a + i\,b \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R};\, i^2 = -1 \right\}$$

Esempio

Sono numeri complessi i seguenti:

$$-1 + 5i,\; \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},\; e + i\pi,\; 0 - i\log 2 \text{ etc.}$$

1.5 Forma cartesiana dei numeri complessi

Definizione

$a = \mathrm{Re}(z)$ si chiama **parte reale** del numero complesso z

$b = \mathrm{Im}(z)$ ne è invece la **parte immaginaria**

2 Operazioni con i numeri complessi (forma cartesiana)

2.1 Premessa

Definizione

Dato il numero complesso $z = a + i\,b$ ne definiamo
il **coniugato**: $\overline{z} = a - i\,b$
l'**opposto**: $-z = -a - i\,b$

Osservazione

I numeri complessi con parte immaginaria nulla sono numeri reali, da cui segue il fatto che $\mathbb{C}$ è effettivamente un'estensione di $\mathbb{R}$:

$$b = 0 \quad \Rightarrow \quad z = a \in \mathbb{R}$$

I numeri complessi con parte reale nulla sono numeri immaginari:

$$a = 0 \quad \Rightarrow \quad z = ib,\ b \in \mathbb{R}$$

Il numero complesso con parte reale e immaginaria entrambe nulle corrisponde non a 0 ma a $\underline{0} \equiv (0,0)$:

$$a = b = 0 \quad \Rightarrow \quad z \equiv \underline{0}$$

Introduciamo ora le operazioni algebriche tra numeri complessi. Si può facilmente verificare che esse mantengono le proprietà valide in $\mathbb{R}$: associativa, commutativa e distributiva.

2.2 Somma

La somma algebrica di due numeri complessi è il numero complesso ottenuto sommando tra loro le parti reali e immaginarie:
Dati $z = a + i\,b$ e $w = c + i\,d$:

$$z + w = (a + i\,b) + (c + i\,d) = (a + c) + i(b + d)$$

Osservazione

Le operazioni tra numeri complessi scritti in forma cartesiana risultano semplici se si trattano tali numeri come se fossero binomi, ossia come se *i* fosse una variabile.

Osservazione

Proprietà del coniugato: $z + \overline{z} = 2a \ \in \mathbb{R}$

Proprietà dell'opposto: $z + (-z) \equiv \underline{0} \in \mathbb{C}$

Proprietà dell'opposto del coniugato: $z + (-\overline{z}) = 2\,i\,b \ \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$

2.3 Prodotto

Il prodotto tra due numeri complessi è il numero complesso ottenuto usando la proprietà distributiva (prodotto termine a termine, come per i binomi) e sfruttando la relazione $i^2 = -1$:

$$z \cdot w = (a + i\,b) \cdot (c + i\,d) = ac + i\,ad + i\,bc + i^2 bd = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

Proprietà del coniugato:

$$z\cdot\overline{z}=a^2+b^2\in\mathbb{R}^+$$

2.4 Reciproco

Dato $w=c+i\,d\neq\underline{0}$, si definisce

$$\frac{1}{w}=\frac{1}{c+i\,d}=\frac{c-i\,d}{c^2+d^2}=\frac{c}{c^2+d^2}-i\frac{d}{c^2+d^2}$$

E infatti: $(c+i\,d)\cdot\dfrac{c-i\,d}{c^2+d^2}=\dfrac{c^2+d^2}{c^2+d^2}=1$

2.5 Rapporto

Il rapporto tra due numeri complessi, di cui il secondo non nullo, è il numero complesso ottenuto moltiplicando il primo per il reciproco del secondo, ossia "razionalizzando" (moltiplicando numeratore e denominatore per il coniugato del secondo numero):

$$\frac{z}{w}=\frac{z\cdot\overline{w}}{w\cdot\overline{w}}=\frac{(a+i\,b)(c-i\,d)}{(c+i\,d)(c-i\,d)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

Osservazione

$\overline{(z\pm w)}=\overline{z}\pm\overline{w}$ $\qquad$ $\overline{(z\cdot w)}=\overline{z}\cdot\overline{w}$ $\qquad$ $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$

2.6 Potenza

Utilizzando le note proprietà delle potenze di un binomio, possiamo calcolare le potenze successive di *z*:

$$z^2=(a+i\,b)^2=a^2+2\cdot a\cdot i\,b+(i\,b)^2=(a^2-b^2)+i\,2ab$$

$$z^3=(a+i\,b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot i\,b+3\cdot a\cdot(i\,b)^2+(i\,b)^3=(a^3-3ab^2)+i(3a^2b-b^3)$$

In generale, ricordando che la potenza *n*-ma di un binomio è un polinomio completo e omogeneo di grado *n*, nel nostro caso nelle due variabili *a* e *ib*, possiamo usare il **triangolo di Tartaglia** per ricavare i coefficienti di tale polinomio:

$(a+i\,b)^0$							1						
$(a+i\,b)^1$						1		1					
$(a+i\,b)^2$					1		2		1				
$(a+i\,b)^3$				1		3		3		1			
$(a+i\,b)^4$			1		4		6		4		1		
$(a+i\,b)^5$		1		5		10		10		5		1	
$(a+i\,b)^6$	1		6		15		20		15		6		1

Calcolare $(a+i\,b)^n$ diventa così un'operazione non difficile ma sicuramente lunga.

Esercizi

Eseguire le seguenti operazioni coi numeri complessi:

1. $(1+i)(1-2i)$ $\qquad\qquad$ $[=1-2i+i+2=3-i]$

2. $(1+i)-(1-2i)$ $\left[=1+i-1+2i=3i\right]$

3. $\dfrac{1+i}{1-2i}$ $\left[=\dfrac{1+i}{1-2i}\dfrac{1+2i}{1+2i}=\dfrac{1+2i+i-2}{1+4}=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i\right]$

3 Rappresentazione geometrica dei numeri complessi

La forma cartesiana $z=a+ib$ dei numeri complessi è molto utile per poterli agevolmente rappresentare graficamente. È evidente infatti come z sia univocamente determinato dalla coppia di numeri (a,b) che individua un punto sul piano cartesiano, o meglio, su una sua "versione" modificata.

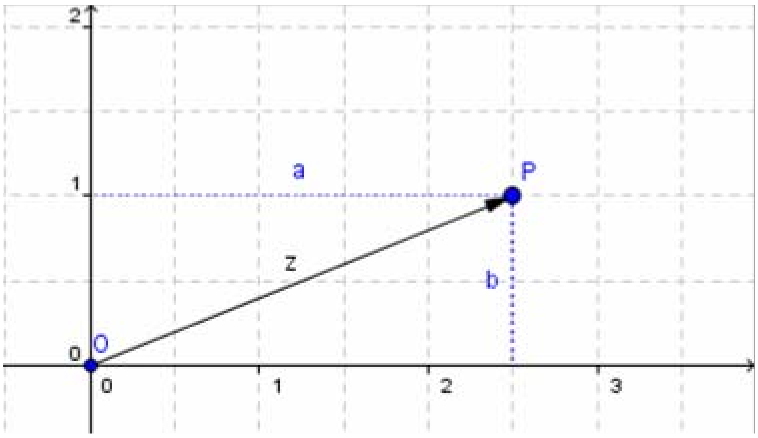
3.1 Piano di Argand-Gauss

Nel piano cartesiano, chiamiamo **asse reale** quello delle ascisse x e **asse immaginario** quello delle ordinate iy; sul primo riportiamo la parte reale a del numero complesso che vogliamo rappresentare, sul secondo la sua parte immaginaria b.

Tali valori individuano univocamente un punto $P(a,b)$ del piano, che chiameremo ora **piano complesso**.

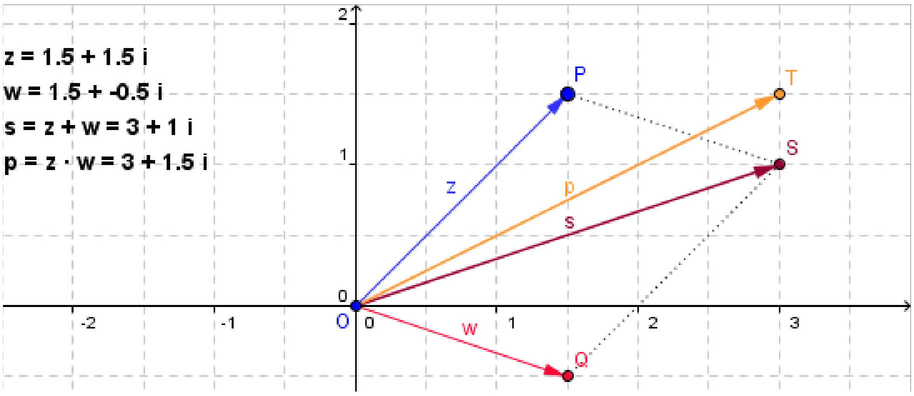
Consideriamo il vettore $z=\overrightarrow{OP}$, di componenti a e b rispettivamente, ossia stabiliamo una corrispondenza biunivoca tra numeri complessi e vettori del piano.

Esempio



Viene naturale definire il **modulo** di z come $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Esercizio 1



Servendoti della figura, calcola $|z+w|$.

$s=z+w$ è la diagonale del parallelogramma $OPSQ$: possiamo calcolarne il modulo, cioè la lunghezza, applicando il teorema del coseno al triangolo OPS.

Notiamo che $\cos(O\hat{P}S)=\cos(\pi-P\hat{O}Q)=-\cos(P\hat{O}Q)$ e che $\overline{OQ}=\overline{PS}=|w|$ e poniamo $\varphi=P\hat{O}Q=\arg(w)-\arg(z)$.

$$\overline{OS}^2=\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2-2\cdot\overline{OP}\cdot\overline{OQ}\cdot\cos(O\hat{P}S) \quad\Leftrightarrow\quad |s|^2=|z|^2+|w|^2+2\cdot|z|\cdot|w|\cdot\cos\varphi$$

3.2 Forma trigonometrica dei numeri complessi

Un vettore $z=\overrightarrow{OP}$ nel piano complesso è univocamente determinato da due valori: finora abbiamo usato le sue componenti $(\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z))$, ovvero le coordinate cartesiane del suo estremo libero $P=(a,b)$. Ma esiste un altro sistema che permette di individuarlo considerando il modulo ρ di $\overrightarrow{OP}$ (cioè la distanza di P dall'origine) e l'argomento ϑ, ovvero l'angolo che $\overrightarrow{OP}$ forma con il semiasse reale positivo.

Tale sistema è detto delle **coordinate polari** di P, ovvero delle componenti trigonometriche di z, che sono facilmente ricavabili da quelle cartesiane grazie a un po' di semplice trigonometria, che porta alle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} a=\rho\cos\vartheta \\ b=\rho\sin\vartheta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho=\sqrt{a^2+b^2} \\ \vartheta=\arctan\dfrac{b}{a}\;(+\pi \text{ se } a<0) \end{cases}$$

$a=\mathrm{Re}(z)$: parte reale $\qquad b=\mathrm{Im}(z)$: parte immaginaria

$\rho=|z|$: modulo $\qquad \vartheta=\arg(z)$: argomento

Esercizi

Calcolare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi:

1. $1+i$ $\qquad \left[\rho=\sqrt{1+1}=\sqrt{2};\quad \vartheta=\arctan\frac{1}{1}=\frac{\pi}{4}\right]$
2. $1-2i$ $\qquad \left[\rho=\sqrt{5};\quad \vartheta=\arctan(-2)\approx-63.4°\right]$
3. $-3+2i$ $\qquad \left[\rho=\sqrt{13};\quad \vartheta=\arctan\left(-\tfrac{2}{3}\right)+180°\approx146.3°\right]$

Forma trigonometrica

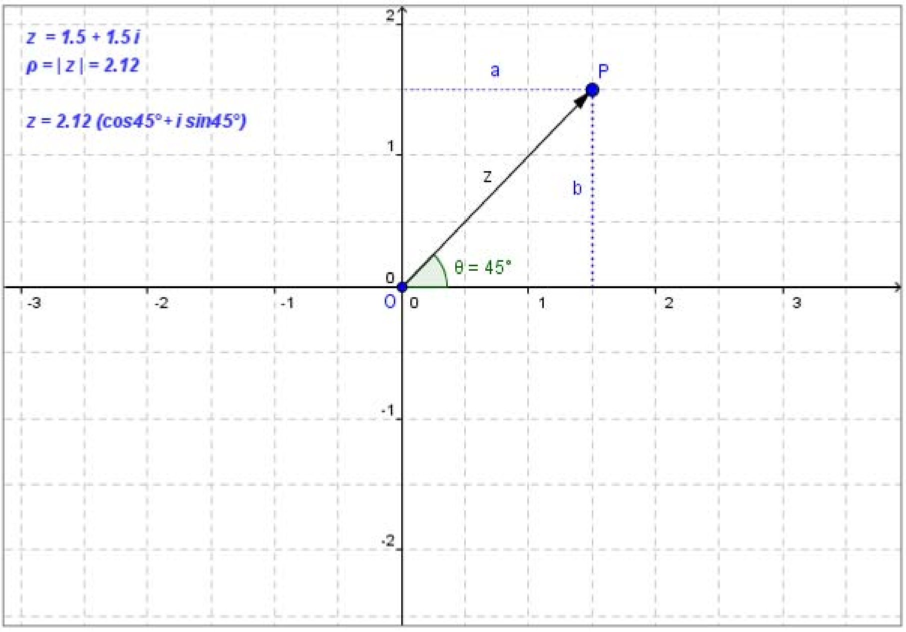
Con le relazioni precedenti è semplice ricavare una nuova rappresentazione per z:

$$z = a + ib = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

Definizione

coniugato $\overline{z} = a - ib = \rho(\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta))$

opposto $-z = -a - ib = \rho(\cos(\vartheta + \pi) + i\sin(\vartheta + \pi))$



Esempio

Trasformiamo $z = -1 + i\sqrt{3}$ in coordinate polari:

abbiamo $\rho = \sqrt{1+3} = 2$ e $\vartheta = \arctan\frac{\sqrt{3}}{-1} = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$ (ci troviamo nel II quadrante)

da cui: $z = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

Trasformiamo $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ in coordinate cartesiane:

abbiamo $a = b = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

da cui: $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

Osservazione

In $\mathbb{C}$ non è possibile definire una relazione d'ordine ossia, fissati due numeri complessi z_1 e z_2, stabilire chi sia “maggiore” dell’altro. È però possibile confrontare i numeri complessi in base al loro modulo, che è per definizione un numero reale (positivo) e usando la relazione d’ordine definita in $\mathbb{R}$. Come sono rappresentati graficamente numeri complessi che hanno lo stesso modulo?

Esercizio 1

Individua nel piano complesso i punti per cui $|z| = 2$.

Si tratta dei punti della circonferenza di centro l’origine e raggio 2.

Individua nel piano complesso i punti per cui $1 < |z| < 2$.
Si tratta dei punti della corona circolare di centro l'origine e raggi 1 e 2 rispettivamente.

4 Operazioni con i numeri complessi (forma trigonometrica)

4.1 Prodotto

Il prodotto tra due numeri complessi scritti in forma trigonometrica ha una comoda proprietà:

$$\rho_1\left(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1\right)\cdot\rho_2\left(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2\right) =$$
$$= \rho_1\cdot\rho_2\cdot\left(\cos\vartheta_1\cdot\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\cdot\sin\vartheta_2\right) + i\left(\sin\vartheta_1\cdot\cos\vartheta_2 + \cos\vartheta_1\cdot\sin\vartheta_2\right) =$$
$$= \rho_1\,\rho_2\left(\cos\left(\vartheta_1+\vartheta_2\right) + i\sin\left(\vartheta_1+\vartheta_2\right)\right)$$

Ossia, il prodotto è un numero complesso il cui modulo è il prodotto dei moduli e l'argomento è la somma degli argomenti.

4.2 Reciproco

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho\left(\cos\vartheta + i\sin\vartheta\right)} = \tfrac{1}{\rho}\left(\cos\vartheta - i\sin\vartheta\right) = \tfrac{1}{\rho}\left(\cos\left(-\vartheta\right) + i\sin\left(-\vartheta\right)\right)$$

La direzione di $\frac{1}{z}$ è quindi simmetrica a quella di z rispetto l'asse reale.

4.3 Rapporto

Analogamente a quanto visto col prodotto, il rapporto tra due numeri complessi scritti in forma trigonometrica è un numero complesso il cui modulo è il rapporto dei moduli e l'argomento è la differenza degli argomenti:

$$\frac{\rho_1\left(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1\right)}{\rho_2\left(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2\right)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos\left(\vartheta_1-\vartheta_2\right) + i\sin\left(\vartheta_1-\vartheta_2\right)\right)$$

4.4 Potenza

Usiamo il prodotto tra numeri complessi scritti in forma trigonometrica:

$$z^2 = \left[\rho\left(\cos\vartheta + i\sin\vartheta\right)\right]^2 = \rho^2\left(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta + i\cdot 2\sin\vartheta\cos\vartheta\right) = \rho^2\left(\cos 2\vartheta + i\sin 2\vartheta\right)$$
$$z^2 = \left[\rho\left(\cos\vartheta + i\sin\vartheta\right)\right]^3 = \ldots = \rho^3\left(\cos 3\vartheta + i\sin 3\vartheta\right)$$

Procedendo per induzione, si può dimostrare in generale la validità della

Regola di De Moivre

$$z^n = \left[\rho\left(\cos\vartheta + i\sin\vartheta\right)\right]^n = \rho^n\left(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta\right) \quad n\in\mathbb{N}$$

Come vedremo, in realtà la formula vale $\forall n\in\mathbb{R}$.

Verifichiamola ad es. per i numeri interi negativi:

$$z^{-n}=\left[\rho(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)\right]^{-n}=\frac{1}{\left[\rho(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)\right]^{n}}=\frac{1}{\rho^n(\cos n\vartheta+i\sin n\vartheta)}\cdot\frac{\cos n\vartheta-i\sin n\vartheta}{\cos n\vartheta-i\sin n\vartheta}=$$
$$=\frac{1}{\rho^n}(\cos n\vartheta-i\sin n\vartheta)=\frac{1}{\rho^n}(\cos(-n\vartheta)+i\sin(-n\vartheta))$$

c.v.d.

Esercizi

Calcolare le seguenti potenze intere dei numeri complessi indicati, usando l'abbreviazione $\operatorname{cis} x=\cos x+i\sin x$:

1. $z=1+i,\quad z^4$ $\quad\left[\begin{array}{l} z=\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ z^4=\sqrt{2^4}\operatorname{cis}\left(4\frac{\pi}{4}\right)=4\operatorname{cis}\pi=-4\end{array}\right]$

2. $z=1-2i,\quad z^4$ $\quad\left[\begin{array}{l} \rho=\sqrt{5};\quad \vartheta=\arctan(-2)\\ z^4=25\operatorname{cis}(4\arctan(-2))\end{array}\right]$

3. $z=-2-3i,\quad z^2$ $\quad\left[\begin{array}{l} \rho=\sqrt{13};\quad \vartheta=\arctan\frac{3}{2}+\pi\\ z^2=13\operatorname{cis}\left(2\arctan\frac{3}{2}+2\pi\right)\end{array}\right]$

Osservazione

Applicando la regola di De Moivre, ribadiamo come in $\mathbb{C}$ sia possibile calcolare anche le potenze con base reale negativa:

$$(-2)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\tfrac{1}{2}\pi+i\sin\tfrac{1}{2}\pi\right)=\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{2}+i\sin\tfrac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}(0+i)=i\sqrt{2}$$

Osservazione

Se il numero complesso u ha modulo unitario, cioè se si trova, nel piano di Gauss, sulla circonferenza goniometrica (centrata sull'origine e di raggio unitario), si ottiene:

$$\begin{array}{c} u=\cos\alpha+i\sin\alpha\\ |u|=1\end{array}\quad\Rightarrow\quad u^n=(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$$

Esercizio 1

Servendoti anche della figura successiva, calcola $|z+w|$.

Poniamo $z=\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ e $w=\sigma(\cos\beta+i\sin\beta)$.

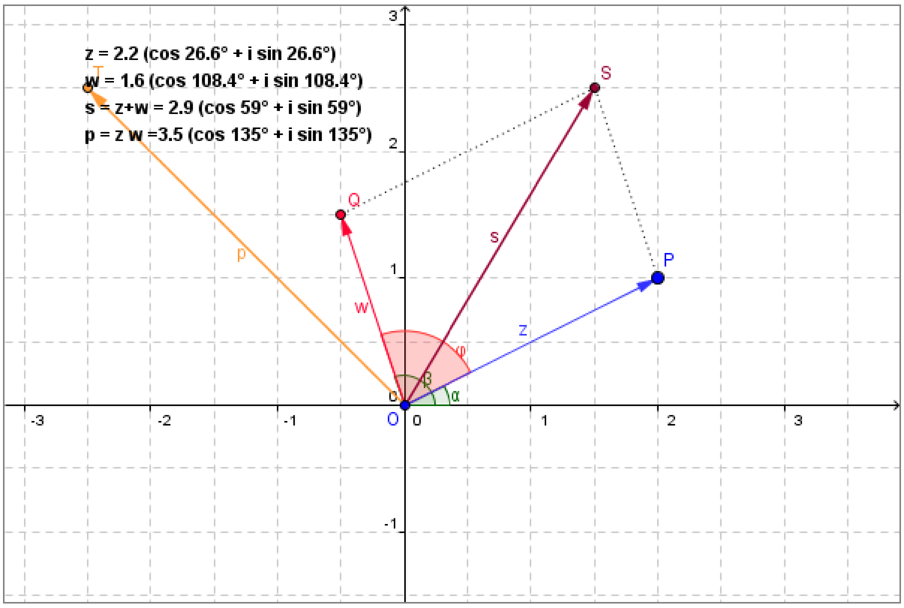
$s=z+w$ è la diagonale del parallelogramma $OPSQ$. Notiamo che $\varphi=P\hat{O}Q=\beta-\alpha$, da cui $\cos\left(O\hat{P}S\right)=\cos\left(\pi-P\hat{O}Q\right)=-\cos\varphi$; inoltre $\overline{OQ}=\overline{PS}=\sigma$.

Applicando il teorema del coseno al triangolo OPS otteniamo:

$$\overline{OS}^2=\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2-2\cdot\overline{OP}\cdot\overline{OQ}\cdot\cos\left(O\hat{P}S\right)\quad\Leftrightarrow\quad|s|^2=|z|^2+|w|^2+2\cdot|z|\cdot|w|\cdot\cos\varphi$$

e quindi

$$|z+w|^2=\rho^2+\sigma^2+2\rho\sigma\cos(\beta-\alpha)$$



5 Radici *n*-esime di un numero complesso

5.1 Definizione e calcolo

Una volta definita la potenza *n*-ma di un numero complesso $z=\rho(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)$, è naturale chiedersi che forma assuma la sua radice *n*-ma, ossia il numero complesso $w=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ tale che:

$$w^n=z \quad (z\neq\underline{0})$$

Applicando De Moivre, dev'essere:

$$r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=\rho(\cos\vartheta+i\sin\vartheta).$$

Tale uguaglianza è soddisfatta se e solo se valgono le seguenti uguaglianze tra numeri reali:

$$\begin{cases} r^n=\rho \\ n\varphi=\vartheta+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=\sqrt[n]{\rho} \\ \varphi=\dfrac{\vartheta}{n}+k\dfrac{2\pi}{n} \quad (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

Notiamo che per $k=0, 2n, 4n\ldots$ otteniamo gli stessi valori dell'angolo φ o, in altre parole, se ne hanno *n* valori differenti per $k=0,1,\ldots,n-1$.
Tali valori, che dipendono da *k*, sono le *n* radici *n*-me di *z* in $\mathbb{C}$:

$$\sqrt[n]{z}^{\,*}=w_k=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\vartheta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\vartheta+2k\pi}{n}\right) \quad k=0,\ldots,n-1$$

Usiamo il simbolo $\sqrt[n]{\ }^{\,*}$ per distinguerlo da quello della radice *n*-ma in $\mathbb{R}$.

Esercizi

Calcolare le seguenti radici di numeri complessi:

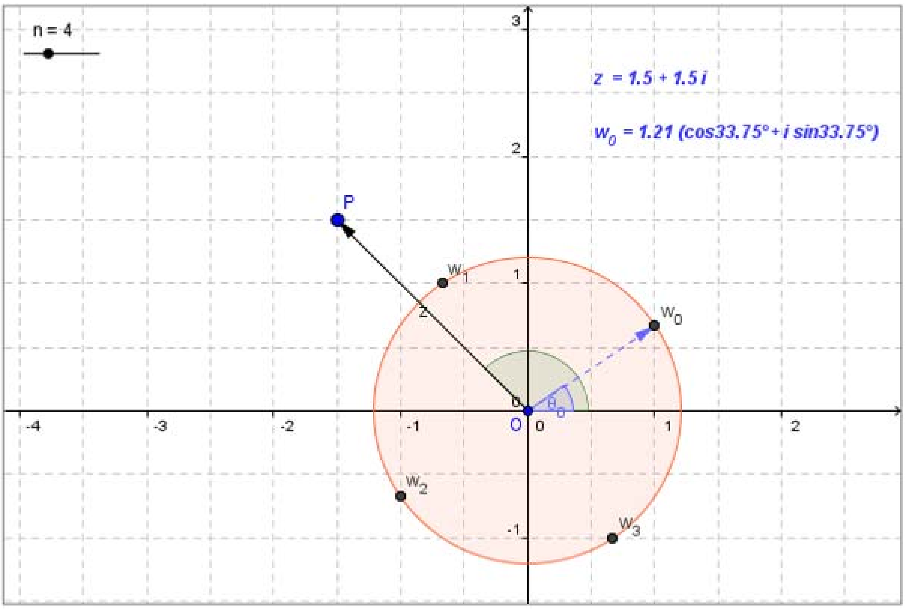
1. $w=\sqrt[4]{1+i}$ $\quad\left[\begin{array}{c} z=1+i=w_k^4 \quad k=0,\dots,3 \\ \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}=r^4\operatorname{cis}4\varphi \Rightarrow r=\sqrt[8]{2};\quad 4\varphi=\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ \varphi_0=\frac{\pi}{16},\varphi_1=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}=\frac{9\pi}{16},\varphi_2=\frac{17\pi}{16},\varphi_3=\frac{25\pi}{16} \end{array}\right]$

2. $w=\sqrt[5]{1-\sqrt{3}\,i}$ $\quad\left[\begin{array}{c} z=1-\sqrt{3}\,i=w_k^5 \quad k=0,\dots,4 \\ 2\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}=r^5\operatorname{cis}5\varphi \Rightarrow r=\sqrt[5]{2};\quad 5\varphi=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \\ \varphi_0=\frac{2\pi}{15},\varphi_1=\frac{2\pi}{15}+\frac{2\pi}{5}=\frac{8\pi}{15},\varphi_2=\frac{14\pi}{15},\varphi_3=\frac{20\pi}{15},\varphi_4=\frac{26\pi}{15} \end{array}\right]$

5.2 Rappresentazione geometrica delle radici di un numero complesso

Le *n* radici complesse $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ del numero *z* si collocano ai vertici di un poligono regolare di *n* lati inscritto in una circonferenza di raggio $\sqrt[n]{\rho}$. Tal vertici distano angolarmente tra loro $\dfrac{2\pi}{n}$.

Tale circonferenza è cioè divisa in *n* distinte "fette", di cui la prima inizia ad un angolo $\vartheta_0=\vartheta/n\equiv\vartheta_n$. Quindi, se ad es. *z* è reale, anche la prima radice w_0 sarà reale poiché $\vartheta_0=\vartheta/n=0$.



5.3 Radici dell'unità

Il discorso appena fatto vale per qualsiasi $z\in\mathbb{C}$, quindi anche per $z=1$, che in forma trigonometrica diventa:

$$z=1\cdot(\cos 0+i\sin 0)=1\cdot(\cos 2\pi+i\sin 2\pi).$$

Le sue *n* radici *n*-me formano un poligono regolare di *n* lati iscritto nella circonferenza goniometrica, il cui primo vertice w_0 coincide con $z=1$ (sull'asse reale).

Ad es. le radici ottave di $z=1$ sono:

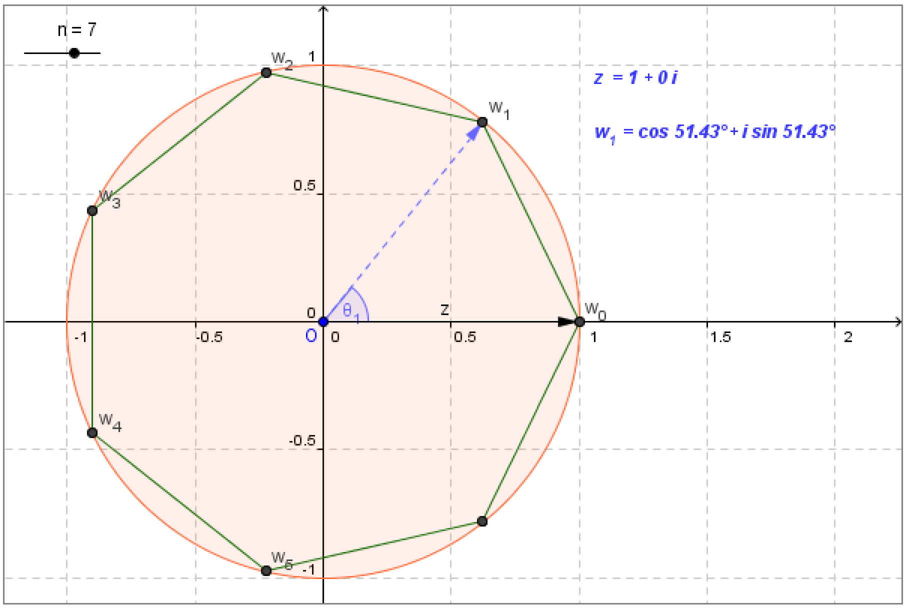
$w_0=1(=z)$ $\quad w_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad w_2=i$ $\quad w_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$w_4=-1(=-w_0)$ $\quad w_5=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\left(=-w_1=\overline{w_3}\right)$ $\quad w_6=-i(=-w_2)$ $\quad w_7=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\left(=-w_3=\overline{w_1}\right)$

Osservazione

Si può verificare facilmente che l'insieme U_n delle *n* radici *n*-me dell'unità forma un **gruppo** rispetto al prodotto fra numeri complessi. Infatti:

1. U_n è chiuso, ovvero il prodotto tra due qualsiasi suoi elementi appartiene ancora a U_n
2. $w_0 = 1$ è l'elemento neutro, poiché il suo prodotto con un qualsiasi elemento *w* dà come risultato *w*
3. ogni elemento *w* ha un inverso, tale che moltiplicato per *w* dà 1 (ad es. $w_1^{-1} = w_7$ per $n = 8$)



Il fatto che in $\mathbb{C}$ ogni numero abbia esattamente *n* radici *n*-me porta ad una conseguenza importantissima, nota come Teorema fondamentale dell'Algebra, che enunceremo nel par. 9.

Dobbiamo a Gauss l'aver compreso l'equivalenza fra i seguenti problemi, risolubili nel piano complesso:

- la ricerca delle radici *n*-me dell'unità
- la divisione della circonferenza in *n* parti uguali
- la costruzione di un *n*-gono regolare
- la risoluzione dell'equazione $x^n - 1 = 0$

6 Forma esponenziale dei numeri complessi

6.1 Formule di Eulero

Grazie agli sviluppi di funzioni in serie, Eulero (1743) riuscì a dimostrare che:

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$$

Possiamo quindi rapresentare un numero complesso anche in forma esponenziale:

$$z = \underbrace{a + i\,b}_{\text{Algebrica}} = \underbrace{\rho\left(\cos\vartheta + i\sin\vartheta\right)}_{\text{Trigonometrica}} = \underbrace{\rho\, e^{i\vartheta}}_{\text{Esponenziale}}$$

Osservazione

In particolare, per $\vartheta = \pi$ otteniamo “la” formula di Eulero per antonomasia, che mette in relazione i cinque numeri più importanti della Matematica:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Esempio

Verifichiamo la formula di duplicazione per il seno:

$$\sin 2\vartheta = \frac{e^{i2\vartheta} - e^{-i2\vartheta}}{2i} = \frac{\left(e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}\right)\left(e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}\right)}{2i} = 2 \cdot \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i} \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} = 2 \sin\vartheta \cos\vartheta$$

6.2 Giustificazione della formula di Eulero

La formula di Eulero è una delle più belle formule della matematica, frutto della mente di uno dei più geniali matematici di tutti i tempi. È una formula incredibilmente feconda di conseguenze, ma la sua dimostrazione richiede di conoscere argomenti che verranno trattati molto più in là nel nostro percorso, specificamente nel capitolo di Analisi dedicato alle Serie di funzioni (*****), al quale rimandiamo per completezza.
Chi ama la matematica non potrà non stupirsi della genialità e della profondità di pensiero che tale dimostrazione sottintende. Qui si ritiene però utile fornire almeno una giustificazione della formula, senza entrare nei dettagli “tecnici”.

Il matematico scozzese Colin Maclaurin nel 1720, continuando il lavoro che l’inglese Brook Taylor aveva sviluppato qualche anno prima (1715), dimostrò tra gli altri i seguenti sviluppi in serie (somme di infiniti termini) di funzioni elementari:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Sostituendo nel primo sviluppo ix al posto di *x*, calcolando le potenza successive di *i* e separando i termini reali da quelli immaginari, otteniamo:

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} + i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) = \cos x + i \sin x$$

Esempio

$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

6.3 Operazioni con i numeri complessi (forma esponenziale)

Le operazioni fra numeri complessi scritti in forma esponenziale sono facilmente ricavabili da quelle in forma trigonometrica.
Abbiamo così la regola per il prodotto:

$$\rho_1 e^{i\vartheta_1} \cdot \rho_2 e^{i\vartheta_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$$

per il reciproco:

$$\frac{1}{\rho e^{i\vartheta}} = \tfrac{1}{\rho} e^{-i\vartheta}$$

per il rapporto:

$$\frac{\rho_1 e^{i\vartheta_1}}{\rho_2 e^{i\vartheta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\vartheta_1 - \vartheta_2)}$$

per la potenza:

$$\left(\rho e^{i\vartheta}\right)^n = \rho^n e^{in\vartheta}$$

e per le radici n-me:

$$\sqrt[n]{\rho e^{i\vartheta}}^{\,*} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\vartheta+2k\pi}{n}} \qquad k = 0,\dots,n-1$$

Osservazione

La regola per la potenza vale, in forma esponenziale, $\forall n \in \mathbb{R}$.

Poiché essa è equivalente alla regola di De Moivre (in forma trigonometrica), possiamo concludere che:

$$z^a = \rho^a \left(\cos a\vartheta + i \sin a\vartheta\right) = \rho^a e^{ia\vartheta} \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

6.4 Tabella riassuntiva delle operazioni

forma	***Somma***	***Prodotto***
Alg	$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$	$(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i(bc+ad)$
Tri		$\rho_1(\cos\vartheta_1+i\sin\vartheta_1)\cdot\rho_2(\cos\vartheta_2+i\sin\vartheta_2)=$ $=\rho_1\rho_2\left(\cos(\vartheta_1+\vartheta_2)+i\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)\right)$
Esp		$\rho_1 e^{i\vartheta_1}\cdot\rho_2 e^{i\vartheta_2}=\rho_1\rho_2 e^{i(\vartheta_1+\vartheta_2)}$
	Reciproco	***Rapporto***
Alg	$\frac{1}{c+id}=\frac{c-id}{c^2+d^2}=\frac{c}{c^2+d^2}-i\frac{d}{c^2+d^2}$	$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$
Tri	$\frac{1}{\rho(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)}=\frac{1}{\rho}\left(\cos(-\vartheta)+i\sin(-\vartheta)\right)$	$\frac{\rho_1(\cos\vartheta_1+i\sin\vartheta_1)}{\rho_2(\cos\vartheta_2+i\sin\vartheta_2)}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos(\vartheta_1-\vartheta_2)+i\sin(\vartheta_1-\vartheta_2)\right)$
Esp	$\frac{1}{\rho e^{i\vartheta}}=\frac{1}{\rho}e^{-i\vartheta}$	$\frac{\rho_1 e^{i\vartheta_1}}{\rho_2 e^{i\vartheta_2}}=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\vartheta_1-\vartheta_2)}$
	Potenza	***Radici***
Alg	$(a+ib)^n=$ potenza di binomio (Tartaglia)	
Tri	$\left[\rho(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)\right]^n=\rho^n(\cos n\vartheta+i\sin n\vartheta)$ De Moivre	$\sqrt[n]{z^*}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\vartheta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\vartheta+2k\pi}{n}\right)\ k=0,\dots,n-1$
Esp	$\left(\rho e^{i\vartheta}\right)^n=\rho^n e^{in\vartheta}$	$\sqrt[n]{z^*}=\sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\vartheta+2k\pi}{n}}\quad k=0,\dots,n-1$

7 Equazioni e disequazioni nel campo complesso

7.1 Teorema fondamentale dell'Algebra

Abbiamo già incontrato (cfr ***) il Teorema fondamentale dell'Aritimetica, che sta alla base della scomposizione in fattori primi:

ciascun numero naturale è fattorizzabile in modo univoco come prodotto di potenze di numeri primi

L'esistenza di *n* radici *n*-me di $z \in \mathbb{C}$ conduce al Teorema fondamentale dell'Algebra, che possiamo enunciare in diversi modi fra loro equivalenti:

- in $\mathbb{C}$ ogni polinomio $P_n(z)$ di grado *n* ha esattamente *n* zeri (radici), distinte o no
- in $\mathbb{C}$ ogni polinomio $P_n(z)$ di grado *n* si scompone univocamente in *n* fattori lineari, distinti o no
- in $\mathbb{C}$ ogni equazione algebrica $P_n(z)=0$ di grado *n* ha esattamente *n* soluzioni, distinte o no

Inoltre:

- $P_n(\alpha)=0 \Rightarrow P_n(\overline{\alpha})=0$

  ossia, se $\alpha \in \mathbb{C}$ è soluzione dell'equazione, allora lo è anche la sua coniugata $\overline{\alpha}$: le soluzioni complesse vanno cioè sempre "a coppia", mentre le soluzioni reali possono essere anche distinte (osserviamo che $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{\alpha}=\alpha$).

Questo porta ad un semplice ragionamento:

- $P_1(z)=0 \Rightarrow$ esiste un'unica soluzione reale
- $P_2(z)=0 \Rightarrow$ le due soluzioni sono o entrambe reali o complesse e coniugate
- $P_3(z)=0 \Rightarrow$ esiste una soluzione reale, le altre due sono o entrambe reali o complesse e coniugate
- $P_4(z)=0 \Rightarrow$ possiamo avere le seguenti tipologie di soluzioni: 4 reali, 2 reali + 2 c.c. o 2+2 c.c.

e così via.

La conclusione è notevole: data l'equazione $P_n(z)=0$,

- se *n* è dispari,
  - esiste almeno una soluzione reale
- se *n* è pari:
  - se $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ è soluzione, esiste necessariamente un'altra soluzione $\alpha_2 \in \mathbb{R}$
  - se $\alpha \in \mathbb{C}$ è soluzione, anche $\overline{\alpha}$ è soluzione

Osservazione

È ben noto come la somma di quadrati non sia scomponibile in $\mathbb{R}$. in $\mathbb{C}$ invece è un prodotto notevole:

$$a^2+b^2=(a-ib)(a+ib)$$

ossia è il prodotto (somma per differenza) tra due numeri complessi coniugati. Per inciso, corrisponde al quadrato del loro modulo.

Osservazione

Alcune radici possono comparire più di una volta, ossia avere una **molteplicità** >1.
Inoltre, le radici complesse coniugate in genere compaiono come fattore quadratico (somma di quadrati).
La somma dei gradi dei fattori in cui si scompone il polinomio è comunque sempre *n*.

Ad es. $P_7(x) = 108 + 108x + 144x^2 + 112x^3 + 63x^4 + 31x^5 + 9x^6 + x^7$ si scompone in

$$P_7(x) = (x+3)^3 (x^2+2)^2$$

e ha come radici $x = -3$ con molteplicità 3 (ossia contata 3 volte) e $x = \pm i\sqrt{2}$ ciascuna con molteplicità 2.

7.2 Equazioni algebriche in $\mathbb{C}$

Per la risoluzione in $\mathbb{C}$ di equazioni algebriche (ossia polinomiali) distinguiamo due casi:

1. equazioni a coefficienti reali ma con soluzioni complesse
2. equazioni a coefficienti complesse

1. Equazioni a coefficienti reali

Esempio

Un caso già noto è quello di equazioni di 2° grado con discriminante negativo, come l'equazione di Cardano vista ad inizio del capitolo:

$$x^2 - 10x + 40 = 0 \qquad \text{con } \frac{\Delta}{4} = 25 - 40 = -15 < 0$$

che ha soluzioni complesse e coniugate

$$x = 5 \pm \sqrt{-15} = 5 \pm i\sqrt{15}$$

2. Equazioni a coefficienti complessi

Esempio

$(2-2i)x^2 - (3-2i)x - 5i = 0$

$\Delta = 45 + 28i = (7+2i)^2$

$x = -i, \; x = \frac{5}{4} + \frac{5}{4}i$

Esempio

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $|z|^2 = z^2 + z + 1$

Posto $z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$, per definizione di modulo il secondo membro dev'essere reale e >0. Sviluppando abbiamo:

$a^2 + b^2 = (a^2 - b^2 + a + 1) + ib(1-2a) \quad \Rightarrow \quad b(1-2a) = 0$

Quindi abbiamo due casi:

$b = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 = a^2 + a + 1 \quad \Rightarrow \quad a = -1 \quad \Rightarrow \quad z = -1$

$a = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} + b^2 = \frac{1}{4} - b^2 - \frac{1}{2} + 1 \quad \Rightarrow \quad b^2 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$

8 Funzioni nel campo complesso (cenni)

8.1 Funzioni esponenziale e logaritmo in $\mathbb{C}$

Possiamo estendere agli argomenti $z = a + i\,b \in \mathbb{C}$ la funzione **esponenziale** ridefinendola come segue:

$$e^z := e^a \cdot e^{ib} = e^a\left(\cos b + i \sin b\right)$$

In tal modo viene mantenuta la proprietà $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$.

Eulero (1751) riuscì a dirimere elegantemente anche la disputa nata tra Leibniz e il sempre polemico Johann Bernoulli relativamente alla natura del logaritmo di numeri negativi. Infatti, con la sua "solita" formula, concluse che il **logaritmo** di un numero complesso è in realtà una corrispondenza uno-a-molti.
Infatti, se scriviamo *z* in forma esponenziale

$$z = \rho \cdot e^{i(\vartheta + 2k\pi)} \quad k \in \mathbb{Z}$$

possiamo definire, in modo da preservare le proprietà note in $\mathbb{R}$,

$$\log z := \log \rho + i\left(\vartheta + 2k\pi\right) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Poiché la parte immaginaria di $\log z$ è $\vartheta = \arg z$, è chiaro che lo stesso valore si ripete periodicamente ogni 2π.

8.2 Funzioni trigonometriche in $\mathbb{C}$

Funzioni circolari

Dalle formule di Eulero possiamo ricavare una nuova rappresentazione (esponenziale) delle funzioni circolari:

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$$
$$e^{-i\vartheta} = \cos\vartheta - i\sin\vartheta$$

Sommando e sottraendo membro a membro tali espressioni, la seconda delle quali è stata ottenuta dalla prima sostituendo ϑ con $-\vartheta$, otteniamo:

$$\sin\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i} \text{ e } \cos\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}, \text{ da cui } \tan\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{i\left(e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}\right)}$$

e le semplici formule di *n*-plicazione:

$$\sin n\vartheta = \frac{e^{in\vartheta} - e^{-in\vartheta}}{2i} \text{ e } \cos n\vartheta = \frac{e^{in\vartheta} + e^{-in\vartheta}}{2}.$$

Esempio

Verifichiamo nuovamente la formula di duplicazione per il seno:

$$\sin 2\vartheta = \frac{e^{i2\vartheta} - e^{-i2\vartheta}}{2i} = \frac{\left(e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}\right)\left(e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}\right)}{2i} = 2 \cdot \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i}\frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} = 2\sin\vartheta\cos\vartheta$$

Funzioni iperboliche

Ricordando le definizioni delle funzioni iperboliche

$$\sinh\vartheta=\frac{e^{\vartheta}-e^{-\vartheta}}{2},\ \cosh\vartheta=\frac{e^{\vartheta}+e^{-\vartheta}}{2}$$

ricaviamo le relazioni

$$\sinh(i\vartheta)=\sin\vartheta,\ \cosh(i\vartheta)=\cos\vartheta\ .$$

Funzioni inverse

Dalle definizioni esponenziali delle funzioni trigonometriche è possibile ricavare quelle per le loro inverse.

Poniamo $x=\sin\vartheta \Leftrightarrow \vartheta=\arcsin x$, da cui $x=\dfrac{e^{i\vartheta}-e^{-i\vartheta}}{2i}$ e ponendo $u=e^{i\vartheta}$ si ha:

$$x=\frac{u-\frac{1}{u}}{2i}=\frac{u^2-1}{2iu}\quad\Leftrightarrow\quad u^2-2ixu-1=0$$

da cui risolvendo per *u*:

$$u=ix\pm\sqrt{1-x^2}=e^{i\theta}$$

prendendo la soluzione positiva e usando il logaritmo complesso:

$$i\vartheta=\log\left(ix+\sqrt{1-x^2}\right)\quad\Rightarrow\quad \arcsin x=\vartheta=-i\log\left(ix+\sqrt{1-x^2}\right)$$

Analogamente si trovano le altre relazioni, che qui riassumiamo:

$$\arcsin x=-i\log\left(ix+\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\arccos x=-i\log\left(x+i\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\arctan x=\frac{i}{2}\log\frac{i+x}{i-x}$$

9 Applicazioni dei numeri complessi

9.1 Applicazioni tecniche

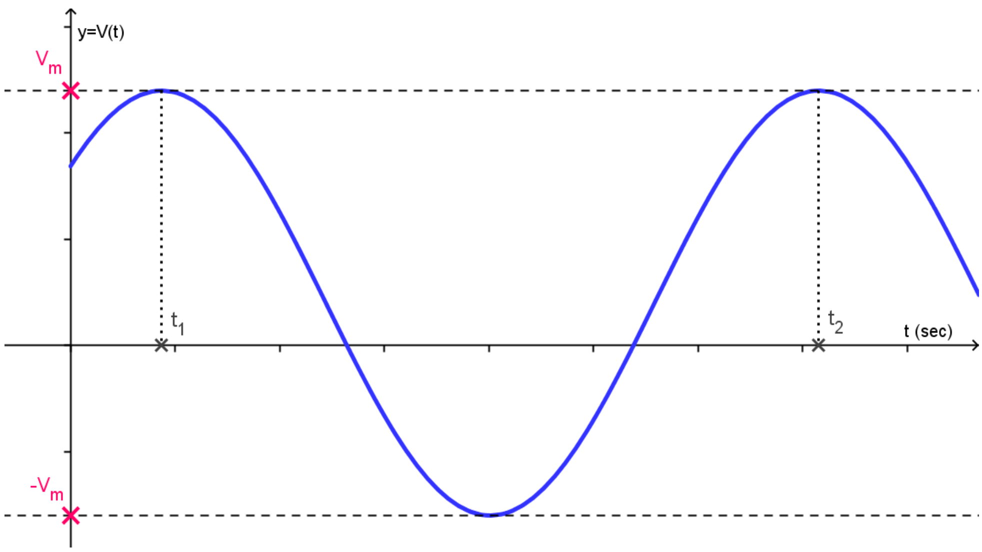
L’utilità dei numeri complessi è illimitata, sia nel campo della matematica pura che nel campo della matematica applicata, della fisica e della tecnica.
Occupiamoci in particolare delle applicazioni dei numeri complessi in elettrotecnica ed elettronica (teoria dei segnali).

I segnali elettronici più importanti sono quelli **sinusoidali**, detti anche alternati. Questo non solo perché la tensione di rete, con cui si alimentano tutti gli elettrodomestici nelle nostre case, è una tensione alternata (di valore efficace 220 Volt), ma soprattutto perché si dimostra che (teorema di Fourier):

qualsiasi segnale periodico può ottenersi come sovrapposizione di infiniti segnali sinusoidali con frequenza multipla rispetto alla frequenza del segnale di partenza.

Tali segnali sono detti **armoniche** del segnale.

Entriamo nei particolari. Una segnale sinusoidale ha un grafico temporale del tipo indicato in figura:

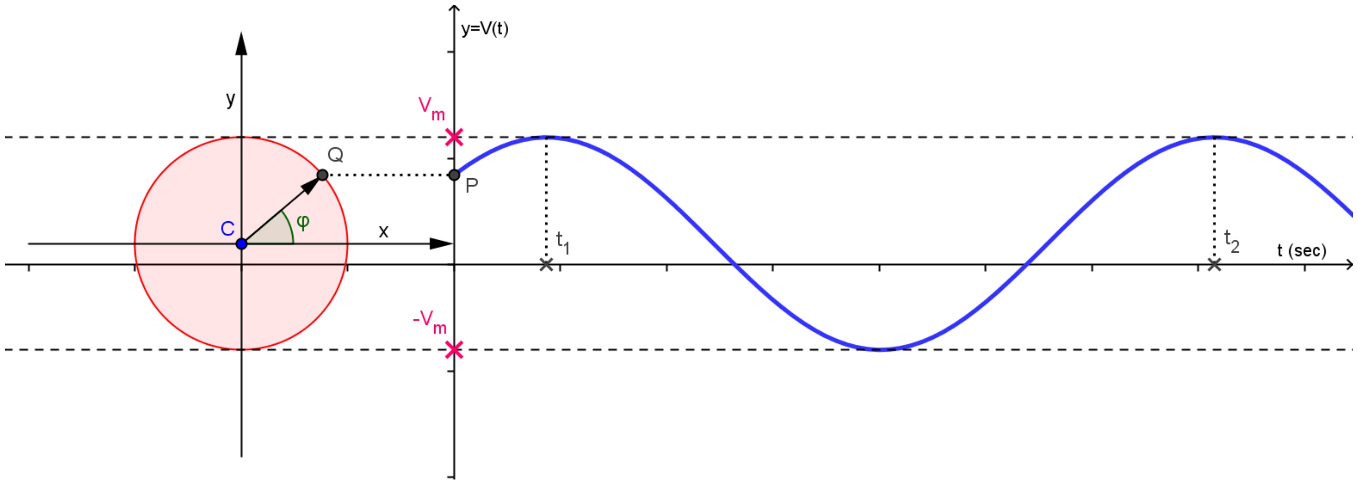


Come si vede si tratta di una funzione periodica, che cioè assume gli stessi valori ad intervalli di tempo regolari detti **periodi**. In figura è mostrato il periodo $T = t_2 - t_1$. L’inverso del periodo si chiama **frequenza** e si misura in Hertz. In Europa, ad es., la tensione di rete è sinusoidale con frequenza 50 Hz.

I valori della funzione sono compresi fra un valore massimo positivo, indicato con V_m, ed un valore minimo negativo, indicato con $-V_m$. Il valore medio della funzione è nullo.
Il valore massimo è in relazione al **valore efficace**, che fornisce la media dei quadrati dei valori della funzione in un periodo, preso sotto radice. Il valore efficace è a sua volta in relazione con gli effetti termici

che si ottengono quando una tensione alternata è applicata ai capi di un conduttore, con conseguente passaggio di corrente alternata nel medesimo.

Possiamo pensare che la sinusoide fornisca, istante per istante, l'ordinata di un punto Q che si muova di moto uniforme, in senso antiorario, su una circonferenza di raggio V_m e centro C posto sull'asse x che supponiamo avente la stessa direzione e verso dell'asse t, come in figura:



A sua volta al punto Q si può associare il vettore $\overrightarrow{CQ}$, che ruota in senso antiorario con velocità angolare $\omega = 2\pi/T$.
All'istante $t=0$ il punto Q si trova nella posizione indicata in figura e forma con l'asse x un angolo φ, detto **fase** del segnale.
A questo punto il vettore $\overrightarrow{CQ}$ si può rappresentare con un numero complesso: ciò consente di rappresentare tutte le grandezze presenti in un circuito in regime sinusoidale (tensioni, correnti ed impedenze dei componenti) con numeri complessi.
Dal momento che l'algebra dei numeri complessi è abbastanza semplice, lo studio del circuito risulta quasi immediato.

Autori
Nicola Chiriano: teoria ed esercizi
Giuseppe Pipino: integrazioni, esercizi
Antonio Bernardo: editing

Collaborazione, commenti e suggerimenti
Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C3, o se vuoi inviare dei commenti e/o suggerimenti scrivi a antoniobernardo@matematicamente.it

Versione del documento
Versione 1.0 del 18.12.2009