# MATEMATICA $C^3$
# ALGEBRA 2



**Coordinatori del progetto**

Antonio Bernardo, Anna Cristina Mocchetti, Claudio Carboncini

**Autori**

Claudio Carboncini, Antonio Bernardo, Erasmo Modica, Anna Cristina Mocchetti, Germano Pettarin, Francesco Daddi, Angela D'Amato, Nicola Chiriano

**Hanno collaborato**

Gemma Fiorito, Daniela Hérin, Alessandro Albertini, Luciano Sarra, Pierluigi Cunti, Grazia Petrone, Raffaele Santoro, Lisa Maccari, Alessandra Marrata, Gavino Napoletano, Sara Gobbato, Mauro Paladini, Livia Noris, Eugenio Medaglia, Francesca Lorenzoni, Roberto Capancioni, Nicola De Rosa, Riccardo Sala, Lucia Rapella

**Collaborazione, commenti e suggerimenti**

Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica $C^3$ o se vuoi inviare commenti e/o suggerimenti scrivi a antoniobernardo@matematicamente.it

**Versione del documento**

Versione 1.1 del 27.05.2011

**Stampa**

Prima edizione, maggio 2011

ISBN 978-88-96354-10-0

# INDICE

## CAPITOLO 1
## NUMERI REALI E RADICALI



## CAPITOLO 2
## EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

# CAPITOLO 3
# EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO



# CAPITOLO 4
# DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO



# CAPITOLO 5
# SISTEMI NON LINEARI



# CAPITOLO 6
# EQUAZIONI CON MODULI E IRRAZIONALI

# CAPITOLO 7
# LA PROBABILITA'



# CAPITOLO 8
# TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE PIANE

# MATEMATICA C$^3$ -ALGEBRA 2

# 1 NUMERI REALI E RADICALI


Jonycunha, Ponto de convergencia
http://www.flickr.com/photos/jonycunha/4022906268/

# Indice generale

# 1. NUMERI REALI

## ►1. Dai numeri naturali ai numeri irrazionali

Nel volume Algebra 1 abbiamo presentato i diversi insiemi numerici. Li riprendiamo brevemente per poi approfondire i numeri reali e le loro proprietà.

L'insieme dei **numeri naturali** racchiude i numeri che utilizziamo per contare; si indica nel seguente modo:

$$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,...\}$$

Su questi numeri sono definite le seguenti operazioni:

- *addizione*: $n+m$ è il numero che si ottiene partendo da *n* e continuando a contare per altre *m* unità;
- *sottrazione*: $n-m$ è il numero, se esiste ed è unico, che addizionato a *m* dà come risultato *n*;
- *moltiplicazione*: $n\cdot m$ è il numero che si ottiene sommando *n* volte *m*, o meglio sommando *n* addendi tutti uguali a *m*;
- *divisione*: $n:m$ è il numero, se esiste ed è unico, che moltiplicato per *m* dà come risultato *n;*
- *potenza*: $n^m$ è il numero che si ottiene moltiplicando *m* fattori tutti uguali a *n*; con l'aggiunta di $n^1=n$ e $n^0=1$ ;
- *radice*: $\sqrt[n]{m}$ è il numero, se esiste ed è unico, che elevato a *n* dà come risultato *m*.

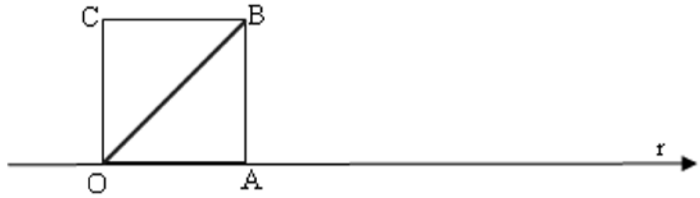
L'addizione, la moltiplicazione e la potenza sono date su tutto l'insieme dei numeri naturali, cioè dati due numeri naturali qualsiasi, *n* ed *m*, la loro somma $n+m$ , il loro prodotto $n\cdot m$ e la potenza $n^m$ , escluso il caso $0^0$ , è un numero naturale. Non sempre, invece, è possibile calcolare la loro differenza $n-m$ , il loro quoziente $n:m$ o la radice $\sqrt[n]{m}$ . Tuttavia, dal punto di vista pratico-applicativo molto spesso si incontrano situazioni nelle quali occorre saper eseguire sempre queste operazioni.
Iniziamo dall'operazione di sottrazione. Sappiamo che in tante situazioni di natura economica, ma non solo, deve essere possibile sottrarre un numero da uno più piccolo. Deve essere possibile, per esempio, comprare un'auto che costa 12.000 euro anche quando in banca abbiamo solo 10.000 euro. Deve quindi essere possibile eseguire una sottrazione del tipo 10000-12000. Il risultato di questa operazione non va poi confuso con il risultato di 12000-10000. Nel secondo caso, infatti, significa che sul nostro conto corrente abbiamo 12.000 euro e dobbiamo spenderne 10.000, ci rimangono infatti 2.000 euro. Nel primo caso invece, ci rimane un debito di 2.000 euro. Per distinguere i due tipi di numeri i matematici mettono davanti al numero il segno + o il segno -. Si genera così l'insieme dei **numeri relativi**

$$\mathbb{Z}=\{...,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,...\}$$

Su questi numeri l'operazione di sottrazione è ovunque definita, in altre parole è possibile eseguire tutte le sottrazioni.
Non è invece possibile eseguire sempre le divisioni. Per esempio non è possibile, con i numeri interi, eseguire la divisione 3:4. Esistono però tante situazioni reali in cui una divisione di questo tipo deve poter essere risolta. Per esempio è possibile dividere in parti uguali 3 uova in 4 persone, basta fare una frittata in una padella tonda e dividere la frittata in quattro parti uguali, a ciascuno toccano $\frac{3}{4}$ di uovo. Deve essere possibile dividere in parti uguali 3 euro tra 4 persone. Dopo aver notato che a nessuno tocca 1 euro intero, si procede a cambiare le monete da 1 euro in monete da 1 decimo di euro, si cambiano quindi i 3 euro con 30 decimi di euro. Dividendo le 30 monete in 4 parti uguali risulta che ciascuno riceve 7 monetine e ne avanzano 2. Per dividere le 2 monete da un decimo si cambiano in monete da un centesimo, ottenendo 20 centesimi di euro. Si dividono allora le 20 monetine in 4 parti uguali, ciascuno avra 5 centesimi di euro. In tutto a ciascuno toccano 75 centesimi di euro.
Per rappresentare il risultato di queste due operazioni di divisioni abbiamo usato nel primo caso la notazione frazionaria $\frac{3}{4}$ e nel secondo caso la notazione decimale 0,75. Le due scritture sono perfettametne equivalenti. Per risolvere tutti i problemi di divisione i matematici hanno costruito un insieme più grande di numeri, detti **numeri razionali** che indichiamo nel seguente modo:

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{n}{m}, n\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{N}, m\neq 0\right\}=\left\{0,+1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},+\frac{2}{3,}-\frac{1}{5},-\frac{11}{17},\frac{129}{1725}...\right\}$$

Con questi numeri è possibile sempre eseguire l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione (ad eccezione della divisiione per 0), la potenza. Non sempre, invece, è possibile eseguire le radici. Per esempio $\sqrt{2}$ , cioè il numero che elevato al quadrato dà 2, non è un numero razionale, cioè non può essere scritto né sotto forma di frazione né sotto forma di numero decimale finito o periodico. I numeri di questo tipo si dicono numeri irrazionali.
Abbiamo già affrontato questo problema nel volume di Algebra 1; per comodità del lettore riportiamo il ragionamento.
Fissiamo sulla retta orientata r  l'unità di misura e disegniamo un quadrato di lato 1. Ci proponiamo di calcolare la misura della sua diagonale:




Dati :
OABC è un quadrato
$\overline{OA}=1$

Obiettivo:
Calcolare $\overline{OB}$
Soluzione: il triangolo OAB è rettangolo in A, quindi per il teorema di Pitagora $\overline{OB}^2=\overline{OA}^2+\overline{AB}^2=2$
Sostituiamo le misure: $\overline{OB}^2=1^2+1^2=2$ ; per ottenere $\overline{OB}$ dobbiamo estrarre la radice quadrata di 2, cioè $\overline{OB}^2=\sqrt{2}$ . Sappiamo che "estrarre la radice quadrata" di un numero significa trovare quel numero che elevato al quadrato dà 2; questo numero deve esistere, perché è il numero che esprime la misura della diagonale OB del quadrato. Ma quanto vale? Come facciamo ad esprimerlo sotto forma di numero decimale, finito o infinito che sia?
$\sqrt{2}$ non è un numero intero, infatti $1^2=1$ e $2^2=4$ , il numero deve quindi essere compreso tra 1 e 2, cioè $1<\sqrt{2}<2$ . Prendiamo tutti i numeri decimali a una sola cifra compresi tra 1 e 2 e calcoliamo il loro quadrato:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | **1,4** | **1,5** | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 | 2 |
| $x^2$ | 1 | 1,21 | 1,44 | 1,69 | **1,96** | **2,25** | 2,56 | 2,89 | 3,24 | 3,61 | 4 |

Nessuno dei numeri decimali a una cifra è il numero che stiamo cercando. Possiamo però osservare che il numero che stiamo cercando è compreso tra 1,4 e 1,5, cioè: $1,4<\sqrt{2}<1,5$ . Abbiamo così ottenuto due valori che approssimano $\sqrt{2}$ a meno di 1/10.
Possiamo migliorare l'approssimazione prendendo tutti i numeri a due cifre decimali compresi tra 1,4 e 1,5

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 1,40 | **1,41** | **1,42** | 1,43 | 1,44 | 1,45 | 1,46 | 1,47 | 1,48 | 1,49 | 1,50 |
| $x^2$ | 1,9600 | **1,9881** | **2,0164** | 2,0449 | 2,0736 | 2,1025 | 2,1316 | 2,1609 | 2,1904 | 2,1904 | 2,2500 |

Nessuno dei numeri elencato è quello che stiamo cercando, tuttavia possiamo concludere che $1,41<\sqrt{2}<1,42$ . Possiamo dire che 1,41 è un valore approssimato per difetto di $\sqrt{2}$ mentre 1,42 è un valore approssimato per eccesso, con un errore dell'ordine di 1/100. Abbiamo quindi migliorato l'approssimazione, ma ancora non abbiamo trovato un numero razionale che sia uguale a $\sqrt{2}$ .
E' possibile continuare indefinitamente questo procedimento, ottenendo valori decimali che approssimano sempre meglio $\sqrt{2}$ . Continuando con lo stesso procedimento costruiamo due classi di numeri razionali che approssimano una per difetto e una per eccesso il numero cercato, migliorando a ogni passaggio l'approssimazione. Il procedimento purtroppo sembra non finire mai, né troviamo cifre che si ripetono periodicamente.

| Valore per difetto | numero | valore per eccesso | ordine dell'errore |
|---|---|---|---|
| 1 | $\sqrt{2}$ | 2 | 1 |
| 1,4 | $\sqrt{2}$ | 1,5 | $10^{-1}$ |
| 1,41 | $\sqrt{2}$ | 1,42 | $10^{-2}$ |
| 1,414 | $\sqrt{2}$ | 1,415 | $10^{-3}$ |
| 1,4142. | $\sqrt{2}$ | 1,4143 | $10^{-4}$ |
| … | … | … | ... |

Il procedimento che abbiamo visto ci dice semplicemente come costruire un'approssimazione del numero ma $\sqrt{2}$ non ci permette di concludere che il procedimento non finirà mai. Per arrivare a dire che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale, dobbiamo fare un ragionamento di tipo diverso. Il tipo di dimostrazione si dice "dimostrazione per assurdo".

Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale e che quindi possa essere scritto in forma di frazione, precisamente $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ . Supponiamo di aver già ridotto ai minimi termini la frazione $\frac{a}{b}$ e che quindi $a$ e $b$ siano primi tra loro. Elevando al quadrato si ha : $2=\frac{a^2}{b^2}$ , che possiamo scrivere come $a^2=2b^2$ . Da ciò segue che $a^2$ è un numero pari, in quanto lo è $2b^2$ . Se $a^2$ è pari lo è anche $a$, poiché il quadrato di un numero pari è pari mentre il quadrato di un numero dispari è dispari. Se $a$ è pari possiamo scriverlo nella forma *2m,* per cui si ha $2b^2=a^2=(2m)^2$ cioè $2b^2=(2m)^2$ .Sviluppiamo il quadrato al secondo membro: $2b^2=4m^2$ , semplifichiamo per 2 si ha: $b^2=2m^2$ . Poiché $2m^2$ è pari lo è anche $b^2$ e per il ragionamento che abbiamo fatto prima lo è anche $b$. Siamo arrivati a concludere che a e b sono entrambi pari, il che non è possibile in quanto avevamo detto di aver già ridotto ai minimi termini la frazione $\frac{a}{b}$ mentre ora ci accorgiamo che essendo entrambi pari si poteva semplificare per 2. Il che è assurdo, pertanto la supposizione che $\sqrt{2}$ si potesse esprimere in forma di frazione è errata.
Oltre a $\sqrt{2}$ vi sono altri infiniti numeri che non possono essere scritti come frazione. Per esempio, tutte le radici quadrate di numeri naturali che non sono quadrati perfetti e tutte le radici quadrate di frazioni che non sono il quadrato di alcuna frazione. Ma anche le radici cubiche del tipo $\sqrt[3]{2}$ , $\sqrt[5]{7}$ , … Un altro famoso numero irrazionale che si incontra nelle misure geometriche è il numero π, che corrisponde alla misura della circonferenza di diametro 1.
Questi numeri sono detti **numeri irrazionali** e insieme ad altri, come π ed altri ancora che conoscerete in seguito, costituiscono l'insieme **J** dei numeri irrazionali.
L'unione degli insiemi $\mathbb{Q}$ e **J** è l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali .

**1** Dimostra con un ragionamento analogo a quello fatto per $\sqrt{2}$ che $\sqrt{3}$ non è razionale.

**2** Per ciascuno dei seguenti numeri reali scrivi una sequenza di almeno sei numeri razionali che lo approssimano per difetto e sei numeri razionali che lo approssimano per eccesso, come nell'esempio:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | $\sqrt{3}$ | A={1; 1,7; 1,73; 1,732; 1,7320; 1,73205; ...} | B={2; 1,8; 1,74; 1,733; 1,7321; 1,73206; ...} |
| b) | $\sqrt{5}$ | A={... | B={... |
| c) | $\frac{6}{7}$ | A={... | B={... |
| d) | $\frac{1}{6}$ | A={... | B={... |

## ►2. I numeri reali

In base a quanto abbiamo detto prima, essendo $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup J$ , i numeri reali sono tutti quei numeri che si possono scrivere in forma decimale con un numero finito o infinito di cifre, non necessariamente periodiche.
Per esempio, la frazione $\frac{17}{16}$ è uguale al numero decimale finito 1,0625.
La frazione $\frac{16}{17}$ è uguale al numero decimale periodico 0,9411764705882352 9411764705882352 9411764705882352 9411764705882352 9411764705882352 9411764705882352 9411764705882352...
Il numero π è invece un numero decimale a infinite cifre non periodico. Riportiamo alcune cifre:
π = 3, 141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 169 399 375 105 820 974 944 592 307 816 406 286 208 998 628 034 825 342 117 067 982 148 086 513 282 306 647 093 844 609 550 582 231 725 359 408 128 481 117 450 284 102 701 938 521 105 559 644 622 948 954 930 381 964 428 810 975 665 933 446 128 475 648 233 786 783 165 271 201 909 145 648 566 923 460 348 610 454 326 648 213 393 607 260 ...
Nonostante i numeri irrazionali siano stati scoperti dallo stesso Pitagora o dai suoi allievi nel IV secolo a.C., solo nel XIX secolo Augustin-Louis Cauchy e Richard Dedekind sono giunti a una formulazione rigorosa di numero reale.
In effetti, assumere che i numeri reali sono tutti quelli che si possono scrivere in forma decimale finita o infinita, del tipo r = n +0,abcdefg..., dove r è il numero reale, n è la parte intera è 0,abcd... è la parte decimale, comporta dei problemi. Per esempio, i numeri interi hanno una doppia rappresentazione: 1 = 0,99999999... A ben osservare tutti i numeri decimali finiti ammettono la doppia rappresentazione: 1,225 = 1,22499999999... Occorre quindi almeno escludere i numeri decimali con il 9 periodico. Oltre questo problema rimane la difficoltà di eseguire le operazioni tra numeri decimali illimitati. Gli algoritmi per

addizionare, sottrarre e moltiplicare due numeri richiedono di cominciare dall'ultima cifra, cosa che non è possibile per i numeri decimali che non finiscono mai. Altro problema non semplice da gestire è il fatto che una definizione di questo tipo è strettamente legata al sistema di numerazione a base 10 che noi utilizziamo.
Già nel volume Algebra 1, nel paragrafo sulle relazioni di equivalenza, abbiamo visto come i matematici hanno potuto costruire l'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi relativi a patire dall'insieme di coppie ordinate di $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ e l'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali relativi a partire dall'insieme di coppie ordinate di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_0$. La questione a questo punto è: possiamo costruire l'insieme dei numeri reali a partire dall'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ ? Per rappresentare il numero $\sqrt{2}$ abbiamo costruito un insieme, chiamiamolo A, di numeri razionali il cui quadrato è minore di 2 e un insieme, chiamiamolo B, di numeri razionali il cui quadrato è maggiore di 2. Sembra allora che il numero $\sqrt{2}$ spezzi l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ in due parti: quella dei numeri razionali *a* tali che $a^2<2$ e quella dei numeri razionali *b* tali che $b^2>2$.
La coppia di insiemi $(A, B)$ caratterizza il numero $\sqrt{2}$, anzi si può dire che $\sqrt{2}$ è proprio la coppia $(A, B)$.
É proprio questa l'idea alla base del ragionamento del matematico tedesco Dedekind (1831-1916). Dedekind chiama **sezione**, o partizione di $\mathbb{Q}$, una coppia di sottoinsiemi non vuoti A e B che devono soddisfare le condizioni: $A\cap B=\emptyset;\ A\cup B=\mathbb{Q};\ \forall a\in A, \forall b\in B, a<b$.

Esempi

- Cosideriamo i due insiemi A e B così definiti: $A=\{x\in\mathbb{Q}\mid x<3\}$, $B=\{x\in\mathbb{Q}\mid x\geq 3\}$. Essi definiscono una sezione di $\mathbb{Q}$, infatti $A\cap B=\emptyset;\ A\cup B=\mathbb{Q}$ e ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B; inoltre possiamo osservare che A non ammette massimo, non essendoci in esso un numero che sia maggiore di tutti gli altri, mentre B ammette il minimo che è 3.
- Siano $A=\{x\in\mathbb{Q}\mid x<-1\}$, $B=\{x\in\mathbb{Q}\mid x>0\}$ la coppia $(A, B)$ non è una sezione di $\mathbb{Q}$ perché pur essendo $A\cap B=\emptyset$ non è $A\cup B=\mathbb{Q}$.
- Siano $A=\left\{x\in\mathbb{Q}\mid x\leq\frac{2}{7}\right\}$, $B=\left\{x\in\mathbb{Q}\mid x\geq\frac{2}{7}\right\}$, anche in questo caso la coppia $(A, B)$ non è una sezione di $\mathbb{Q}$ poiché $A\cap B=\left\{\frac{2}{7}\right\}$.
- Costruiamo gli insiemi A e B nel seguente modo: A sia l'unione tra l'insieme dei numeri razionali negativi e tuti i razionali il cui quadrato è minore di 2, in B mettiamo tutti i razionali il cui quadrato è maggiore di 2. $A=\mathbb{Q}^-\cup\{x\in\mathbb{Q}\mid x^2<2\}$, $B=\{x\in\mathbb{Q}\mid x^2>2\}$. Si ha $A\cap B=\emptyset;\ A\cup B=\mathbb{Q}$, inoltre ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B, dunque $(A, B)$ è una sezione di $\mathbb{Q}$, ma A non possiede il massimo e B non possiede il minimo, in quanto abbiamo già dimostrato che non eisste un numero razionale che ha 2 come quadrato. Questa sezione individua un buco nell'insieme $\mathbb{Q}$.

Gli esempi visti ci permettono di affermare che una partizione $(A, B)$ può essere di tre tipi:

- A ammette massimo e B non ammette minimo;
- A non ammette massimo e B ammette minimo;
- A non ammette massimo e B non ammette minimo.

DEFINIZIONE. Si chiama **elemento separatore** di una partizione $(A, B)$ di $\mathbb{Q}$ il massimo di A o il minimo di B, nel caso in cui almeno uno di questi elementi esista.

Nel primo esempio, poiché esiste il minimo di B, la partizione $(A, B)$ ammette un elemento separatore e identifica il numero razione 3.
Nel quarto esempio non esiste un numero razionale che fa da elemento separatore, la sezione $(A, B)$ identifica un numero irrazionale.

DEFINIZIONE. L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è l'insieme di tutte le partizioni di $\mathbb{Q}$. Chiamiamo numero razionale le partizioni che ammettono elemento separatore, chiamiamo **numero irrazional**e le sezioni che non ammettono elemento separatore.

Ogni numero reale è individuato da due insiemi di numeri razionali: nel primo tutte le approssimazioni per difetto e nell'altro tutte le approssimazioni per eccesso.
Ritornando all'esempio precedente, il numero $\sqrt{2}$ è individuato dalla sezione costituita dagli insiemi $A=\{x\in\mathbb{Q}/x<0 \text{ oppure } x^2<2\}$ e $B=\{x\in\mathbb{Q}/x^2>2\}$.
Nell'insieme A ci sono tutti i numeri razionali negativi oltre quelli che approssimano $\sqrt{2}$ per difetto: $A=\{1; 1{,}4; 1{,}41; 1{,}414; 1{,}4142; 1{,}414213; ...\}$.

Nell'insieme B ci sono tutti i numeri razionali che approssimano $\sqrt{2}$ per eccesso:
$B=\{2;1{,}5;1{,}42;1{,}415;1{,}4143;1{,}41422;1{,}414214;...\}$ .

**3** *Per ciascuno dei seguenti numeri reali scrivi una sequenza di almeno sei numeri razionali che lo approssimano per difetto e sei numeri razionali che lo approssimano per eccesso:*

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ $\qquad\qquad$ $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$

Questa costruzione dell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ a partire dall'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ è puramente astratta e formale, non serve al calcolo, vuole solo concludere il cammino intrapreso per costruire tutti gli insiemi numerici a partire dall'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ .
Dal punto di vista teorico è possibile definire nell'insieme delle partizioni di $\mathbb{Q}$ , l'ordinamento e le operazioni. Dal punto di vista del calcolo useremo le approssimazioni.

**Confronto**. Per confrontare due numeri reali, osserviamo prima di tutto i segni. Se i segni dei numeri sono discordi, il numero negativo è minore del numero positivo. Se i segni dei numeri sono concordi si valuta la parte intera del numero: se sono positivi è più grande quello che ha la parte intera maggiore, viceversa se sono negativi è più grande quello che ha la parte intera minore. A parità di parte intera bisogna confrontare la parte decimale partendo dalle cifre più a sinistra finché non si trova la prima cifra decimale diversa: se i numeri sono positivi è maggiore quello che ha la cifra maggiore; se sono negativi è maggiore quello che ha la cifra minore.

<u>Esempi</u>

- $\sqrt{2}<\sqrt{3}$ per verificarlo ci si può aiutare con la calcolatrice per calcolare le prime cifre decimali dei due numeri $\sqrt{2}=1{,}4142...$ , $\sqrt{3}=1{,}7320...$ ; oppure ci si arriva osservando che il numero che elevato al quadrato dà 2 deve essere minore del numero che elevato al quadrato dà 3.
- $\sqrt{99}<10$ per verificarlo è sufficiente osservare che $\sqrt{100}=10$ .

**4** *Determina per ciascuno dei seguenti numeri irrazionali i numeri interi tra i quali è compreso, come nell'esempio:* $5<\sqrt{30}<6$

a) $\sqrt{50}$ $\quad$ $\sqrt{47}$ $\quad$ $\sqrt{91}$ $\quad$ $\sqrt{73}$ $\quad$ $\sqrt{107}$ $\quad$ $\sqrt{119}$

b) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ $\quad$ $2\sqrt{7}$ $\quad$ $2+\sqrt{7}$ $\quad$ $\sqrt{20}-\sqrt{10}$ $\quad$ $\sqrt{\frac{7}{10}}$ $\quad$ $7+\sqrt{\frac{1}{2}}$

**5** *Disponi in ordine crescente i seguenti numeri reali:*

a) $\sqrt{2}$ $\quad$ $1$ $\quad$ $\frac{2}{3}$ $\quad$ $2{,}0\overline{13}$ $\quad$ $\sqrt{5}$ $\quad$ $\frac{3}{2}$ $\quad$ $0{,}75$

b) $\pi$ $\quad$ $\sqrt{3}$ $\quad$ $\frac{11}{5}$ $\quad$ $0{,}\overline{9}$ $\quad$ $\sqrt{10}$ $\quad$ $3{,}1\overline{4}$ $\quad$ $\sqrt[3]{25}$

Concludiamo il paragrafo con alcuni argomenti già accennati in Algebra 1 ma che trovano solo ora una giusta collocazione teorica.

DEFINIZIONE. Un insieme X si dice **continuo** se ogni partizione (X', X”) di X ammette uno e un solo elemento separatore, cioè se esiste un elemento x appartenente a X tale che per ogni x' di X' e per ogni x” di X” si ha x'≤x≤x”.

TEOREMA DI DEDEKIND. Ogni partizione dell'insieme $\mathbb{R}$ di numeri reali ammette uno e uno solo elemento separatore.

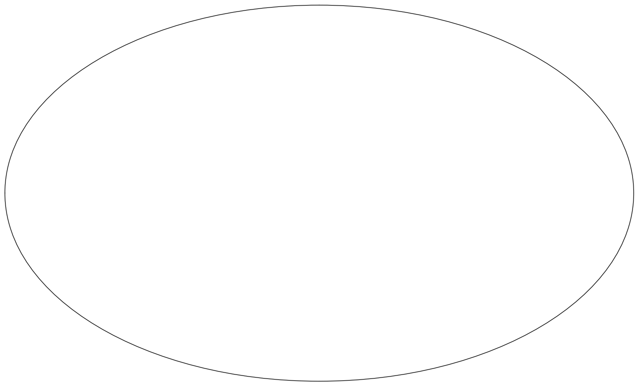
Da questo teorema segue che il numero reale è definito come l'elemento separatore di una sezione (A,B) di numeri reali.

POSTULATO DI CONTINUITÀ DELLA RETTA. Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti della retta geometrica e l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

Da questo postulato segue la possibilità di definire sulla retta un sistema di coordinate: ad ogni punto corrisponde un numero reale (la sua ascissa) e viceversa ad ogni numero reale è associato uno e un solo punto sulla retta; analogamente si ha nel piano dove il sistema di assi cartesiano permette di realizzare una corrispondenza biunivoca tra coppie di numeri reali (ascissa e ordinata del punto) e un punto del piano geometrico. Vedrete in seguito che la possibilità di associare numeri e punti si estende anche allo spazio geometrico.

**6** Suddividi il diagramma di Venn che rappresenta l'insieme dei numeri reali, in sottoinsiemi che rappresentino l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$, l'insieme dei numeri interi relativi $\mathbb{Z}$, l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, l'insieme **J** dei numeri irrazionali. Disponi in maniera opportuna i seguenti numeri

$\sqrt{3}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{5}$ $\qquad$ $\pi$ $\qquad$ $0,\overline{3}$ $\qquad$ $3,14$ $\qquad$ $\frac{3}{2}$ $\qquad$ -2



**7** *Indica il valore di verità delle seguenti affermazioni*

a) un numero decimale finito è sempre un numero razionale V F
b) un numero decimale illimitato è sempre un numero irrazionale V F
c) un numero decimale periodico è un numero irrazionale V F
d) la somma algebrica di due numeri razionali è sempre un numero razionale V F
e) la somma algebrica di due numeri irrazionali è sempre un numero irrazionale V F
f) il prodotto di due numeri razionali è sempre un numero razionale V F
g) il prodotto di due numeri irrazionali è sempre un numero irrazionale V F

## ►3. Valore assoluto

**Valore assoluto**. Si definisce valore assoluto di un numero reale *a*, si indica con |a|, il numero stesso se *a* è positivo o nullo, il suo opposto se *a* è negativo.

$$|a|=\begin{cases} a & \text{se} \quad a\geq 0 \\ -a & \text{se} \quad a<0 \end{cases}$$

Il numero *a* si dice argomento del valore assoluto.

<u>Esempi</u>

■ $|-3|=3$ $\qquad$ ■ $|+5|=5$ $\qquad$ ■ $|0|=0$

### Proprietà del valore assoluto

- $|x+y|\leq|x|+|y|$ Il valore assoluto della somma di due numeri è minore o uguale della somma dei valori assoluti dei due numeri. Si ha l'uguaglianza solo quando i due numeri reali hanno lo stesso segno, oppure quando almeno uno dei due numeri è nullo.
- $|x-y|\leq|x|+|y|$ Il valore assoluto della differenza di due numeri è minore o uguale della somma dei valori assoluti dei due numeri.
- $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$ Il valore assoluto del prodotto di due numeri è uguale al prodotto dei valori assoluti dei due numeri.
- $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$ Il valore assoluto del rapporto di due numeri è uguale al rapporto dei valori assoluti dei due numeri.

<u>Esempi</u>

■ $|5+3|=|5|+|3|$ in entrambi i casi si ottiene 8
■ $|5+(-3)|=2$ mentre $|5|+|-3|=8$ , pertanto $|5+(-3)|<|5|+|-3|$

**8** *Calcola il valore assoluto dei seguenti numeri*

a) $|-5|$ $\qquad$ $|+2|$ $\qquad$ $|-1|$ $\qquad$ $|0|$ $\qquad$ $|-10|$ $\qquad$ $|+7|$
b) $|+3-5|$ $\qquad$ $|-3+5|$ $\qquad$ $|(-1)^3|$ $\qquad$ $|-1-2-3|$ $\qquad$ $|+3\cdot(-2)-5|$

**9** Due numeri reali x ed y sono entrambi non nulli e di segno opposto.
Verifica le seguenti relazioni con gli esempi numerici riportati a fianco.

| | Relazione | x=-3 y=+5 | x=-2 y=+2 | x=-10 y=+1 | x=+1 y=-5 |
|---|---|---|---|---|---|
| a) | \|x\| < \|y\| | V F | V F | V F | V F |
| b) | \|x\| = \|y\| | V F | V F | V F | V F |
| c) | \|x\| < y | V F | V F | V F | V F |
| d) | \|x + y\| < \|x\| + \|y\| | V F | V F | V F | V F |
| e) | \|x - y\| = \|x\| - \|y\| | V F | V F | V F | V F |
| f) | \|\|x\| - \|y\|\| = \|x - y\| | V F | V F | V F | V F |

Quali delle relazioni sono vere in alcuni casi e false in altri, quali sono sempre vere, quali sono sempre false?
a) dipende da x e y; b) dipende da x e y; c) dipende da x e y; d) sempre vera; e) sempre vera; f) sempre falsa.

In generale, se l'argomento del valore assoluto è una funzione $f(x)$ si ha

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x) & \text{se } f(x)\geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x)<0 \end{cases}$$

Esempi

- $|x-1|=\begin{cases} x-1 \text{ se } x\geq 1 \\ -x+1 \text{ se } x<1 \end{cases}$
- $|x^2|=x^2$ infatti $x^2$ è una quantità sempre non negativa.
- $|a^2+1|=a^2+1$ infatti $a^2$ è sempre positivo, aumentato di 1 sarà sempre >0.

Nelle espressioni contenenti valori assoluti di argomento letterale si deve cercare di eliminare il valore assoluto.

Esempi

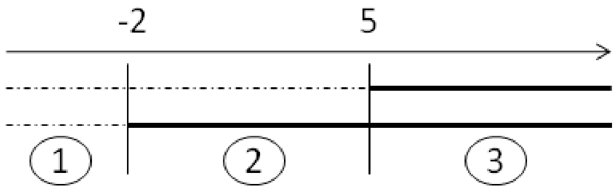
- $f(a)=|a+1|-3a+1$ acquista due significati a seconda che l'argomento del valore assoluto sia non negativo o negativo. La sua espressione algebrica è
  $$f(a)=|a+1|-3a+1=\begin{cases} a+1-3a+1 \text{ se } a+1\geq 0\rightarrow a\geq -1 \\ -(a+1)-3a+1 \text{ se } a+1<0\rightarrow a<-1 \end{cases}=\begin{cases} -2a+1 \text{ se } a\geq -1 \\ -4a \text{ se } a<-1 \end{cases}$$
  Una funzione di questo tipo si dice **definita per casi**.
- $|x-5|= x-5 \text{ se } x\geq 5;\ -(x-5) \text{ se } x<5$

Elimina il segno di valore assoluto dalle seguenti espressioni

**10** $|x+1|$ $\quad |x-1|$ $\quad |x^2+1|$ $\quad |(x+1)^2|$ $\quad |x^2-1|$ $\quad \left|\frac{x+1}{x-1}\right|$

Esempio

- $|x-5|+|x+2|$




L'argomento del primo valore assoluto $|x-5|$ è non negativo quando $x\geq 5$ .
L'argomento del secondo valore assoluto $|x+2|$ è positovo quando $x\geq -2$ .
L'insieme dei numeri reali resta diviso in tre intervalli:
(1) $x<-2$ in questo intervallo entrambi gli argometni dei valori assoluti sono negativi, pertanto $|x-5|+|x+2|=-(x-5)-(x+2)=-x+5-x-2=-2x+3$ .
(2) $-2\leq x<5$ l'argomento del primo valore assoluto è negativo mentre l'argomento del secondo valore assoluto è positivo, pertanto $|x-5|+|x+2|=-(x-5)+(x+2)=-x+5+x+2=7$ .
(3) $x\geq 5$ gli argomenti di entrambi i valori assoluti sono positivi, pertanto $|x-5|+|x+2|=(x-5)+(x+2)=2x-3$ .

Possiamo allora sintetizzare in questo modo $|x-5|+|x+2|=\begin{cases} -2x+3 \text{ se } x<-2 \\ 7 \text{ se } -2\leq x<5 \\ 2x-3 \text{ se } x\geq 5 \end{cases}$

*Come nell'esempio, elimina il segno di valore assoluto dalle seguenti espressioni*

**11** $|x+1|+|x-2|$ $\quad |x+2|+|x-2|$ $\quad |x-2|+|x-3|$

**12** $|x+1|\cdot|x+2|$ $\quad \frac{|x+1|}{|x+2|}$ $\quad \left|\frac{x+1}{4}\right|+\left|\frac{x+2}{x+1}\right|$

# 2. RADICALI

## ►1. Radici quadrate

Ricordiamo che il quadrato di un numero reale *r* è il numero che si ottiene moltiplicando *r* per se stesso: $r^2=r\cdot r$ . Il quadrato di un numero è sempre un numero non negativo; numeri opposti hanno lo stesso quadrato: $(+3)^2=9\ ;\ (-2)^2=+4\ ;\ (-5)^2=(+5)^2=+25$ .
L'operazione inversa dell'elevamento al quadrato si chiama **radice quadrata**. La radice quadrata di un numero reale *a* è allora quel numero che elevato al quadrato, cioè, che moltiplicato per se stesso, dà il numero *a*.
Osserviamo che non esiste la radice quadrata di un numero negativo, poiché non esiste nessun numero che elevato al quadrato può dare come risultato un numero negativo.

DEFINIZIONE. Si dice **radice quadrata** di un numero reale positivo o nullo quel numero reale positivo o nullo che elevato al quadrato dà come risultato il numero dato. In simboli $\sqrt{a}=b \Leftrightarrow b^2=a$ dove $a, b\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ .

Il simbolo $\sqrt{\ }$ è il simbolo della radice quadrata; il numero *a* è detto **radicando**, il numero *b* è detto **radice quadrata** di *a*.
Dalla definizione $\sqrt{a^2}=a$ con $a\geq 0$ .
Per esempio $\sqrt{81}=9$ perché $9^2=81$ ; $\sqrt{\frac{9}{64}}=\frac{3}{8}$ perché $\left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{9}{64}$ .
Osserva ora che $\sqrt{81}=\sqrt{(-9)^2}$ ma non è vero che $\sqrt{(-9)^2}=-9$ perché nella definizione di radice quadrata abbiamo imposto che il risultato dell'operazione di radice quadrata è sempre un numero positivo o nullo.
Questa osservazione ci induce a porre molta attenzione **quando il radicando è un'espressione letterale**: in questo caso $\sqrt{a^2}=a$ non è del tutto corretto poiché *a* può assumere sia valori positivi sia valori negativi.
Scriveremo correttamente $\sqrt{a^2}=|a|$ .

Esempi

- $\sqrt{4}=2$ infatti $2^2=4$
- $\sqrt{25}=5$ infatti $5^2=25$
- $\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$ infatti $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$
- $\sqrt{0{,}01}=0{,}1$ infatti $0{,}1^2=0{,}01$
- $\sqrt{1}=1$ infatti $1^2=1$
- $\sqrt{0}=0$ infatti $0^2=0$
- $\sqrt{-16}$ non esiste perché il radicando è negativo.
- $\sqrt{11}$ esiste ma non è un numero intero né razionale, è un numero irrazionale.
- $\sqrt{x^2}=|x|$ dobbiamo mettere il valore assoluto al risultato perché non conosciamo il segno di x.
- $\sqrt{a^2-4a+4}=\sqrt{(a-2)^2}=|a-2|$ dobbiamo mettere il valore assoluto perché a-2 può anche essere negativo.
- $\sqrt{9(x+1)^2}=3|x+1|$

**13** *Determina le seguenti radici quadrate razionali (quando è possibile calcolarle)*

a) $\sqrt{9}$ $\sqrt{36}$ $\sqrt{-49}$ $\sqrt{64}$ $\sqrt{-81}$

b) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ $\sqrt{\frac{49}{81}}$ $\sqrt{\frac{121}{100}}$ $\sqrt{\frac{144}{36}}$ $\sqrt{\frac{-1}{4}}$

c) $\sqrt{0{,}04}$ $\sqrt{0{,}09}$ $\sqrt{0{,}0001}$ $\sqrt{0{,}16}$ $\sqrt{-0{,}09}$

d) $\sqrt{\frac{144}{9}}$ $\sqrt{25\cdot 16}$ $\sqrt{36\cdot 49}$ $\sqrt{0{,}04\cdot 0{,}0121}$ $\sqrt{\frac{1}{100}}$

e) $\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{6+\sqrt{9}}}}}$ $\sqrt{5+\sqrt{14+\sqrt{2+\sqrt{4}}}}$

**14** *Senza usare la calcolatrice determina per ciascuna delle seguenti radici quadrate il valore approssimato a 1/10:* $\sqrt{3}$ ; $\sqrt{5}$ ; $\sqrt{7}$ ; $\sqrt{11}$ ; $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ; $\sqrt{\frac{17}{4}}$

**15** *Estrai le seguenti radici di espressioni letterali, facendo attenzione al valore assoluto*

$\sqrt{a^2+2a+1}$ $\sqrt{4x^2+8x+4}$ $\sqrt{9-12a+4a^2}$

## ►2. Radici cubiche

DEFINIZIONE: Si dice **radice cubica** di un numero reale *a* quel numero che, elevato al cubo, dà come risultato *a*.
In simboli $\sqrt[3]{a}=b \Leftrightarrow b^3=a$ se $b^3=a$ dove $a, b \in \mathbb{R}$ .

Puoi notare che la radice cubica di un numero reale positivo o negativo o nullo esiste sempre.

Esempi

- $\sqrt[3]{-8}=-2$ infatti $(-2)^3=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=-8$
- $\sqrt[3]{125}=5$ infatti $5^3=5\cdot5\cdot5=125$
- $\sqrt[3]{1}=1$ infatti $1^3=1\cdot1\cdot1=1$
- $\sqrt[3]{0}=0$ infatti $0^3=0\cdot0\cdot0=0$
- $\sqrt[3]{-1000}=-10$ infatti $(-10)^3=-1000$
- $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}$ infatti $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$
- $\sqrt[3]{0,125}=0,5$ infatti $(0,5)^3=0,125$
- $\sqrt[3]{x^3}=x$ per le radici cubiche non si deve mettere il valore assoluto
- $\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}=\sqrt{(x+1)^3}=x+1$ non si deve mettere il valore assoluto

Osserva che la radice cubica di un numero mantiene sempre lo stesso segno del numero in quanto il cubo di un numero reale conserva sempre lo stesso segno della base.

**16** *Determina le seguenti radici cubiche*

a) $\sqrt[3]{27}$ $\sqrt[3]{64}$ $\sqrt[3]{-1}$ $\sqrt[3]{1000}$ $\sqrt[3]{125}$ $\sqrt[3]{-216}$

b) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ $\sqrt[3]{-\frac{64}{125}}$ $\sqrt[3]{\frac{1000}{27}}$ $\sqrt[3]{0,001}$ $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ $\sqrt[3]{-0,008}$

c) $\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{61+\sqrt[3]{25+\sqrt[3]{8}}}}$ $\sqrt[3]{25+\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{122+\sqrt[3]{27}}}}$

**17** *Senza usare la calcolatrice determina per ciascuna delle seguenti radici cubiche il valore approssimato a 1/10*

$\sqrt[3]{3}$ $\sqrt[3]{4}$ $\sqrt[3]{7}$ $\sqrt[3]{100}$ $\sqrt[3]{25}$ $\sqrt[3]{250}$

**18** *Estrai le seguenti radici cubiche di espressioni letterali*

$\sqrt[3]{8a^3+12a^2+6a+1}$ $\sqrt[3]{a^6+9a^4+27a^2+27}$ $\sqrt[3]{1-6x+12x^2-8x^3}$

## ►3. Radici n-esime

Oltre alle radici quadrate e cubiche si possono considerare radici di indice qualsiasi. Si parla in generale di radice n-esima per indicare una radice con un qualsiasi indice n.

DEFINIZIONE. Si dice radice *n*-esima di un numero reale *a* quel numero *b* che elevato ad *n* dà come risultato *a*.
In simboli $\sqrt[n]{a}=b \Leftrightarrow b^n=a$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ .
Non si definisce la radice di indice 0: la scrittura $\sqrt[0]{a}$ è priva di significato.
Alla scrittura $\sqrt[1]{a}$ si dà il valore *a*.

Quando si tratta con le radici n-esime di un numero reale, bisogna fare attenzione se l'indice della radice è pari o dispari. Si presentano infatti i seguenti casi:

- se l'indice *n* è dispari la $\sqrt[n]{a}$ è definita per qualsiasi valore di a∈R, inoltre è negativa se a<0, positiva se a>0 e nulla se a=0;
- se l'indice *n* è pari la $\sqrt[n]{a}$ è definita solo per i valori di a≥0 e si ha che $\sqrt[n]{a} \geq 0$ .

Esempi

- $\sqrt[4]{16}=2$ infatti $2^4=16$
- $\sqrt[4]{-16}$ non esiste
- $\sqrt[5]{32}=2$ infatti $2^5=16$
- $\sqrt[4]{1}=1$ infatti $1^4=1$
- $\sqrt[n]{0}=0$ per ogni n>0
- $\sqrt[5]{-1}=-1$ infatti $(-1)^5=-1$
- $\sqrt[4]{x^4}=|x|$ va il valore assoluto perché l'indice della radice è pari
- $\sqrt[5]{x^5}=x$ non va il valore assoluto perché l'indice della radice è dispari.

**19** *Determina le seguenti radici se esistono*

a) $\sqrt[9]{0}$ $\sqrt[8]{-1}$ $\sqrt[5]{-100000}$ $\sqrt[4]{0{,}0001}$ $\sqrt[4]{81}$

b) $\sqrt[6]{64}$ $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$ $\sqrt[4]{-4}$ $\sqrt[10]{0}$ $\sqrt[4]{0{,}0081}$

c) $\sqrt[5]{34+\sqrt[4]{14+\sqrt{2+\sqrt[3]{8}}}}$ $\sqrt{20+\sqrt[3]{121+\sqrt[4]{253+\sqrt[5]{243}}}}$

## ►4. Condizioni di esistenza

Quando il radicando è un'espressione letterale dobbiamo fare molta attenzione a operare su di esso.
Le **condizioni di esistenza**, in breve si può scrivere C.E., di un radicale con radicando letterale, sono le condizioni cui devono soddisfare le variabili che compaiono nel radicando affinché la radice abbia significato.
Supponiamo di avere la radice $\sqrt[n]{A(x)}$ con A(x) polinomio nell'indeterminata x, dobbiamo distinguere i seguenti casi:

- se *n* è pari la radice esiste per tutti i valori di *x* che rendono non negativo il radicando, cioè C.E. $A(x)\geq 0$
- se *n* è dispari la radice esiste per qualsiasi valore della variabile x, purché esista il radicando stesso.

Esempi

- ■ $\sqrt{x}$ C.E. $x\geq 0$ $\sqrt[3]{x}$ C.E. $\forall x\in\mathbb{R}$
- ■ $\sqrt{-x}$ C.E. $x\leq 0$ $\sqrt[3]{-x}$ C.E. $\forall x\in\mathbb{R}$
- ■ $\sqrt{x-1}$ C.E. $x-1\geq 0 \rightarrow x\geq 1$
- ■ $\sqrt{a^2+1}$ C.E. $\forall a\in\mathbb{R}$ , infatti $a^2$ è sempre positivo pertanto $a^2+1>0\,\forall a\in\mathbb{R}$
- ■ $\sqrt[3]{\dfrac{1}{x+1}}$ C.E. La radice cubica è definita per valori sia positivi sia negativi del radicando,

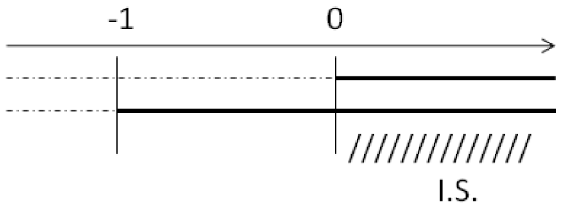
tuttavia bisogna comunque porre la condizione che il denominatore della frazione non sia nullo, quindi $x+1\neq 0\rightarrow x\neq -1$ .

- ■ $\sqrt[4]{xy}$ C.E. $xy\geq 0$
- ■ $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$ C.E. $\sqrt{x}$ esiste per $x\geq 0$ , $\sqrt{x+1}$ esiste per $x+1\geq 0$ , per individuare le

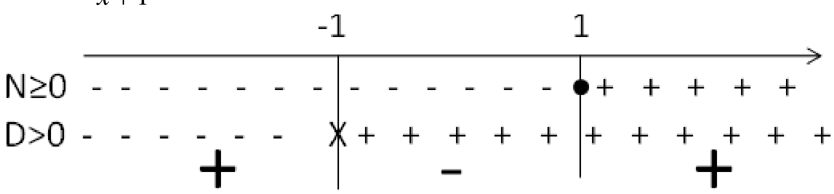
condizioni di esistenza dell'espressione occorre risolvere il sistema

$\begin{cases} x\geq 0 \\ x+1\geq 0\end{cases}$ cioè $\begin{cases} x\geq 0 \\ x\geq -1\end{cases}$

In definitiva C.E. $x\geq 0$ .




- ■ $\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$ C.E. $\dfrac{x-1}{x+1}\geq 0$ Occorre discutere il segno della frazione




Pertanto C.E. $x<-1\vee x\geq 1$

- ■ $\sqrt[5]{a^2(a-3)}$ Poiché la radice ha indice dispari non occorre porre nessuna condizione di esistenza.

*Determina le condizioni di esistenza dei seguenti radicali.*

**20** $\sqrt[3]{x+1}$ $\sqrt{1-x}$ $\sqrt{\dfrac{1}{x+1}}$

**21** $\sqrt{3x^2y}$ $\sqrt[3]{3xy}$ $\sqrt[4]{-2x^2y^2}$

**22** $\sqrt[4]{\dfrac{x^2+1}{x-1}}$ $\sqrt[5]{\dfrac{1}{x^3}}$ $\sqrt{\dfrac{4-x}{x-3}}$

**23** $\sqrt{x^2(x+1)}$ $\sqrt[3]{1+a^2}$ $\sqrt[6]{2x-1}$

**24** $\sqrt{1-x}+2\sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$ $\sqrt{1+|x|}$ $\sqrt{(a-1)(a-2)}$

**25** $\sqrt{|x|+1}\cdot\sqrt[3]{x+1}$ $\sqrt[3]{\dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}}$ $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{3-x}}$

## ►5. Potenze a esponente razionale

In questo paragrafo ci proponiamo di scrivere la radice n-esima di un numero reale a≥0 sotto forma di potenza di a, vogliamo cioè che sia:

$$\sqrt[n]{a}=a^x$$

**Caso con esponente positivo**

Elevando ambo i membri dell'uguaglianza alla potenza *n* otteniamo:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=\left(a^x\right)^n \quad \text{da cui si ottiene} \quad a=a^{n\cdot x}$$

Trattandosi di due potenze con base a≥0 uguali tra loro, l'uguaglianza è resa possibile solo se sono uguali gli esponenti. In altre parole, deve essere:

$$1=n\cdot x \quad \rightarrow \quad x=\frac{1}{n}$$

Possiamo quindi scrivere: $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$

Vediamo ora di generalizzare la formula. Sia *m* un numero intero positivo, possiamo scrivere

$$a^{\frac{m}{n}}=\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$$

Pertanto possiamo scrivere che $a^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

Esempi

- Calcola $27^{\frac{2}{3}}$

Si ha che $27^{\frac{2}{3}}=\left(\sqrt[3]{27}\right)^2=3^2=9$

- Calcola $25^{\frac{3}{2}}$

Si ha che $25^{\frac{3}{2}}=\left(\sqrt[2]{25}\right)^3=5^3=125$

**Caso con esponente negativo**

Per definire la potenza ad esponente razionale negativo è necessario imporre la restrizione a≠0, infatti risulta:

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}}$$

Esempi

- $27^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{27}\right)^2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$
- $125^{-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{125^{-2}}=\sqrt[3]{(5^3)^{-2}}=\sqrt[3]{(5^{-2})^3}=5^{-2}=\frac{1}{25}$
- $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{3}{2}}=\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^{-3}}=\sqrt{8^3}=\sqrt{(2^3)^3}=\sqrt{2^9}$
- $\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}=(49)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{49}=7$

In generale si dà la seguente

DEFINIZIONE. Si dice **potenza a esponente razionale** $\frac{m}{n}$ di un numero reale positivo *a* l'espressione:

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m \quad \text{con} \quad \frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$$

Perché abbiamo dovuto imporre la condizione che *a* sia un numero positivo?

Partiamo dall'espressione $a^{\frac{1}{n}}$ con $n\in\mathbb{N}-\{0\}$ , se n è dispari la potenza $a^{\frac{1}{n}}$ è sempre definita per ogni valore della base a, mentre se è pari $a^{\frac{1}{n}}$ è definita solo per a≥0.

Nel caso generale $a^{\frac{m}{n}}$ con $m\in\mathbb{Z}$ la formula $a^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ è falsa se a<0.

Infatti facciamo un esempio:

$(-2)^{\frac{6}{6}}=\left\{(-2)^{\frac{1}{6}}\right\}^6=\left(\sqrt[6]{-2}\right)^6$ che non è definita nei numeri reali perché non esiste la radice sesta di un numero negativo.

Tuttavia possiamo anche scrivere $(-2)^{\frac{6}{6}}=\left\{(-2)^6\right\}^{\frac{1}{6}}=(64)^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{64}=2$

Arriviamo pertanto a due risultati differenti.

Per estendere la definizione al caso di basi negative sarebbe necessario stabilire un ordine di priorità delle operazioni ma ciò andrebbe contro la proprietà commutativa del prodotto degli esponenti di una potenza di potenza.

**26** *Calcola le seguenti potenze con esponente razionale*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a) | $4^{\frac{3}{2}}$ | $8^{\frac{2}{3}}$ | $9^{-\frac{1}{2}}$ | $16^{\frac{3}{4}}$ |
| b) | $16^{\frac{5}{4}}$ | $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$ | $125^{-\frac{2}{3}}$ | $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{3}{2}}$ |
| c) | $25^{-\frac{3}{2}}$ | $27^{\frac{4}{3}}$ | $32^{\frac{2}{5}}$ | $49^{-\frac{1}{2}}$ |
| d) | $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$ | $\left(-\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$ | $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{5}{2}}$ | $(0{,}008)^{-\frac{2}{3}}$ |
| e) | $4^{0{,}5}$ | $16^{0{,}25}$ | $32^{0{,}2}$ | $100^{0{,}5}$ |

**27** *Trasforma le seguenti espressioni in forma di potenza con esponente frazionario*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a) | $\sqrt{2}$ | $\sqrt[3]{8^2}$ | $\sqrt[7]{5^3}$ | $\sqrt{3^3}$ |
| b) | $\sqrt{\left(\frac{1}{3^3}\right)}$ | $\sqrt[3]{\frac{1}{3^2}}$ | $\sqrt[3]{\frac{1}{25}}$ | $\sqrt[5]{\frac{4^2}{3^2}}$ |

**28** Trasforma nella forma radicale le espressioni:

$$\left((a^2+1)^{\frac{2}{3}}+1\right)^{\frac{1}{4}} \qquad \left(1+\left(1+a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

**29** Scrivi in ordine crescente i seguenti numeri

$0{,}00000001 \qquad (0{,}1)^{10} \qquad (0{,}1)^{0{,}1} \qquad 10^{-10} \qquad \sqrt{0{,}0000000001}$

## ►6. Proprietà invariantiva e semplificazione delle radici

PROPOSIZIONE. Il valore di una radice in $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ non cambia se **moltiplichiamo** l'indice della radice e l'esponente del radicando per uno stesso numero intero positivo.

In simboli $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nt]{a^{mt}}$ con $a\geq 0, m, n, t\in \mathbb{N}-\{0\}$

Esempi

- $\sqrt{2}=\sqrt[4]{2^2}$ abbiamo moltiplicato indice della radice ed esponente del radicando per 2.
- $\sqrt[3]{a}=\sqrt[9]{a^3}$ abbiamo moltiplicato per 3 indice della radice ed esponente del radicando

PROPOSIZIONE. Il valore di una radice in $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ non cambia se dividiamo l'indice della radice e l'esponente del radicando per un loro divisore comune.
In simboli $\sqrt[nt]{a^{mt}}=\sqrt[n]{a^m}$ con $a\geq 0, m, n, t\in \mathbb{N}-\{0\}$

Esempi

- $\sqrt[4]{2^2}=\sqrt{2}$ abbiamo semplificato per 2 indice della radice ed esponente del radicando.
- $\sqrt[10]{3^{15}}=\sqrt{3^3}$ abbiamo semplificato per 5.
- $\sqrt[7]{3^9}$ non è riducibile perché indice della radice ed esponente non hanno divisori comuni.
- $\sqrt[8]{2^6}=2^{\frac{6}{8}}=$ Semplificando la frazione dell'esponente $=2^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{2^3}$
- $\sqrt[6]{\left(\frac{1}{5}\right)^{-9}}=\sqrt[6]{5^9}=\sqrt[2]{5^3}$
- $\sqrt[4]{(-3)^2}=\sqrt[4]{3^2}=\sqrt{3}$
- $\sqrt{10^{-4}}$ semplificando per 2 indice della radice ed esponente del radicando si ha $10^{-2}=\frac{1}{100}$
- $\sqrt{30\cdot 27\cdot 10}$ scomponendo in fattori primi otteniamo le seguenti potenze
$$\sqrt{2\cdot 3\cdot 5\cdot 3^3\cdot 2\cdot 5}=\sqrt{2^2\cdot 3^4\cdot 5^2}=2\cdot 3^2\cdot 5=90$$

Se il radicando è un'espressione letterale, quindi sia positiva che negativa, dobbiamo scrivere

$$\sqrt[nt]{a^{mt}}=\begin{cases}\sqrt[n]{a^m} & \text{se t è dispari}\\ \sqrt[n]{|a^m|} & \text{se t è pari}\end{cases}$$

- $\sqrt{4x^4y^2a^6}=\sqrt{2^2x^4y^2a^6}=2x^2|ya^3|$ abbiamo semplificato per 2 gli esponenti e la radice stessa.
- $\sqrt[12]{a^2+2a+1}=\sqrt[12]{(a+1)^2}=\sqrt[6]{|a+1|}$ Dopo aver riconosciuto che il radicando è il quadrato del binomio, abbiamo semplificato per 2 gli indici.
- $\sqrt{x^2y^2}=|xy|$ ; $\sqrt{x^2+2xy+y^2}=\sqrt{(x+y)^2}=|x+y|$ ; $\sqrt{x^2+y^2}$ non è semplificabile perché il radicando non può essere espresso sotto forma di potenza.
- $\sqrt[6]{(x-1)^2}=\sqrt[3]{|x-1|}$

La proprietà invariantiva si può applicare per semplificare i radicali se la base del radicando è positiva o nulla, se fosse negativa si potrebbe perdere la concordanza del segno, come mostrato dal seguente esempio:

- $\sqrt[10]{(-2)^6}\neq\sqrt[5]{(-2)^3}$

infatti il primo radicando è positivo mentre il secondo è negativo.
Invece la concordanza del segno è conservata in questo esempio:

- $\sqrt[9]{(-2)^3}=\sqrt[3]{-2}$

Infatti pur essendo la base negativa, l'esponente resta dispari, conservando il segno della base.
Se il radicando ha base negativa e nella semplificazione il suo esponente passa da pari a dispari è necessario mettere il radicando in valore assoluto:

- $\sqrt[10]{(-2)^6}=\sqrt[5]{|-2^3|}$

Se il radicando è letterale si segue la stessa procedura: ogni volta che studiando il segno del radicando si trova che la base può essere negativa, se l'esponente del radicando passa da pari a dispari, si mette il modulo per garantire la concordanza del segno.

■ $\sqrt[10]{x^6}=\sqrt[5]{|x^3|}$ C.E: x può assumere qualunque valore di R

**30** *Trasforma i seguenti radicali applicando la proprietà invariantiva*

a) $\sqrt[4]{4}=\sqrt[8]{\ldots}$ $\sqrt[3]{9}=\sqrt[6]{\ldots}$ $\sqrt[5]{5}=\sqrt[15]{\ldots}$ $\sqrt{2}=\sqrt[6]{\ldots}$

b) $\sqrt{2}=\sqrt[\ldots]{16}$ $\sqrt[3]{3}=\sqrt[\ldots]{81}$ $\sqrt[3]{-5}=-\sqrt[\ldots]{25}$ $\sqrt[4]{\frac{3}{2}}=\sqrt[\ldots]{\frac{27}{8}}$

c) $\sqrt[21]{a^7}=\sqrt[6]{\ldots}$ con a>0 $\sqrt[8]{a^{24}}=\sqrt[5]{\ldots}$ con a>0 $\sqrt[3]{27}=\frac{1}{\sqrt{\ldots}}$ $\sqrt{x^4+2x^2+1}=\sqrt[7]{\ldots}$

*Semplifica i radicali*

**31** $\sqrt[4]{25}$ $\sqrt[6]{8}$ $\sqrt[8]{16}$ $\sqrt[9]{27}$

**32** $\sqrt[4]{100}$ $\sqrt[6]{144}$ $\sqrt[4]{169}$ $\sqrt[6]{121}$

**33** $\sqrt[6]{125}$ $\sqrt[4]{49}$ $\sqrt[6]{64}$ $\sqrt[12]{16}$

**34** $\sqrt[6]{\frac{16}{121}}$ $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$ $\sqrt[10]{\frac{25}{81}}$ $\sqrt[15]{\frac{64}{27}}$

**35** $\sqrt[9]{-3^3}$ $\sqrt[6]{(-2)^4}$ $\sqrt[12]{-4^6}$ $\sqrt[10]{-32}$

**36** $\sqrt[6]{5^2-4^2}$ $\sqrt[4]{12^2+5^2}$ $\sqrt[10]{3^2+4^2}$ $\sqrt[4]{10^2-8^2}$

**37** $\sqrt[3]{2^6\cdot 5^{15}}$ $\sqrt[4]{3^4\cdot 4^6}$ $\sqrt[5]{5^5\cdot 4^{10}\cdot 2^{15}}$ $\sqrt[9]{27\cdot 8\cdot 125}$

**38** $\sqrt[4]{9x^2y^4}$ $\sqrt[3]{64a^6b^9}$ $\sqrt[5]{\frac{32a^{10}}{b^{20}}}$ $\sqrt[4]{\frac{20a^6}{125b^{10}}}$

**39** $\sqrt[3]{x^6y^9(x-y)^{12}}$ $\sqrt{\frac{25a^4b^8c^7}{c(a+2b)^6}}$ $\sqrt[8]{\frac{16x^5y^8}{81x}}$ $\sqrt[9]{27a^6b^{12}}$

**40** $\sqrt[6]{\frac{0{,}008x^{15}y^9}{8a^{18}}}$ $\sqrt[10]{\frac{121a^5}{ab^2}}$ $(\sqrt{a+1})^6$ $\sqrt[12]{(2x+3)^3}$

**41** $\sqrt[6]{a+2a+1}$ $\sqrt[9]{a^3+3a^2+3a+1}$ $\sqrt[4]{x^4+2x^2+1}$ $\sqrt[10]{a^4+6a^2x+9x^2}$

**42** $\sqrt[6]{8a^3-24a^2+24a-8}$ $\sqrt[8]{a^4+2a^2x^2+x^4}$ $\sqrt{\frac{25a^4b^6}{a^4+4+4a^2}}$

**43** $\sqrt[9]{x^6+3x^5+3x^4+x^3}$ $\sqrt[4]{a^2+6a+9}$ $\sqrt[9]{8x^3-12x^2+6x+x^3}$

**44** $\sqrt[4]{a^4(a^2-2a+1)}$ $\sqrt[4]{(x^2-6x+9)^2}$ $\sqrt[12]{(x^2+6x+9)^3}$

**45** $\sqrt[6]{\frac{(x^2+1-2x)^3b}{b^7(x^3+3x^2+3x+1)^2}}$ $\sqrt[18]{\frac{a^9+3a^8+3a^7+a^6}{9a^7+9a^5+18a^6}}$ $\sqrt{a^2+2a+1}-\sqrt{a^2-2a+1}$

**46** $\sqrt[2n]{16^n}$ $\sqrt[4n]{\frac{2^{3n}}{3^{2n}}}$ $\sqrt[n^2]{\frac{6^{2n}}{5^{3n}}}$

**47** $\sqrt[3n]{27^n\cdot 64^{2n}}$ $\sqrt[2n^2]{16^{2n}\cdot 81^{2n}}$ $\sqrt[n+1]{16^{2n+2}}$

## ►7. Moltiplicazione e divisione di radici

Prima di operare con i radicali letterali, è necessario determinare le condizioni di esistenza: il prodotto di due radicali esiste là dove sono soddisfatte le condizioni di esistenza di tutti i fattori; il quoziente esiste là dove sono soddisfatte le condizioni di esistenza di dividendo e divisore, inoltre il divisore deve essere diverso da zero.

**Moltiplicazione e divisione di radici con lo stesso radicando**

Per effettuare la moltiplicazione o la divisione tra radici aventi lo stesso radicando si possono trasformare le radici in forma di potenze con esponente razionale e utilizzare le proprietà delle potenze.

Esempi

- $\sqrt[4]{6}\cdot\sqrt[3]{6}=6^{\frac{1}{4}}\cdot 6^{\frac{1}{3}}=6^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}=6^{\frac{7}{12}}=\sqrt[12]{6^7}$
- $\sqrt[4]{6}:\sqrt[3]{6}=6^{\frac{1}{4}}:6^{\frac{1}{3}}=6^{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}=6^{-\frac{1}{12}}=\frac{1}{\sqrt[12]{6}}$

**Moltiplicazione e divisione di radici con lo stesso indice**

Il prodotto di due radici che hanno lo stesso indice è una radice che ha per indice lo stesso indice e per radicando il prodotto dei radicandi:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

Allo stesso modo, il quoziente di due radici che hanno lo stesso indice è una radice che ha per indice lo stesso indice e per radicando il quoziente dei radicandi:

$$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a:b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Anche per rendersi conto di questa proprietà si possono trasformare le radici in potenze ad esponenti razionali e applicare le proprietà delle potenze:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}=(ab)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{ab}$$

Esempi

- $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{2\cdot 3}=\sqrt{6}$
- $\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{72}}=\sqrt[3]{\frac{9}{72}}=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}$
- $\sqrt{2a}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}:\sqrt{\frac{2b}{9}}$ C.E. $a\geq 0\wedge b>0$ $\quad\sqrt{2a}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}:\sqrt{\frac{2b}{9}}=\sqrt{2a\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{9}{2b}}=\sqrt{\frac{9a^2}{b^2}}=\frac{3a}{b}$

**Moltiplicazione e divisione di radici con indici diversi**

Per moltiplicare o dividere radici con indici differenti è necessario prima ridurre le radici allo stesso indice, cioè trasformarle in radici equivalenti che però hanno lo stesso indice, per questa trasformazione si usa la proprietà invariantiva. Dopo aver ottenuto radici con lo stesso indice si applica la regola precedente.

**Procedura per ridurre due o più radici allo stesso indice:**

1° passo: scomporre in fattori irriducibili tutti i radicandi;
2° passo: porre le condizioni di esistenza;
3° passo: calcolare il minimo comune multiplo tra gli indici delle radici;
4° passo: per ciascuna radice dividere il m.c.m. per l'indice della radice e moltiplicare il quoziente trovato per l'esponente del radicando.

Esempi

- $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}$

Gli indici delle radici sono 2 e 3, il loro m.c.m. è 6, il primo radicando va elevato a 6:2 cioè 3, mentre il secondo radicando va elevato a 6:3 cioè 2

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{2^3\cdot 2^2}=\sqrt[6]{2^5}$$

- $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{8}{27}}:\sqrt[6]{\frac{2}{3}}$

Il m.c.m. tra gli indici delle radici è 6. Il primo radicando va elevato a 12:3=4; il secondo radicando va elevato a 12:4=3; il terzo va elevato a 12:6=2.

$$\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{8}{27}}:\sqrt[6]{\frac{2}{3}}=\sqrt[12]{\frac{3^4}{2^4}\cdot\frac{8^3}{27^3}:\frac{2^2}{3^2}}=\sqrt[12]{\frac{3^4}{2^4}\cdot\frac{(2^3)^3}{(3^3)^3}:\frac{2^2}{3^2}}=\sqrt[12]{\frac{3^4}{2^4}\cdot\frac{2^9}{3^9}:\frac{2^2}{3^2}}=\sqrt[12]{\frac{3^6\cdot 2^9}{3^9\cdot 2^6}}=\sqrt[12]{\frac{2^3}{3^3}}=\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$$

- $\dfrac{\sqrt[3]{x^2 y}\cdot\sqrt{xy}}{\sqrt[6]{x^2 y^3}}$ C.E. $x>0\wedge y>0$ . Il m.c.m. degli indici delle radici è 6, quindi

$$\frac{\sqrt[3]{x^2 y}\cdot\sqrt{xy}}{\sqrt[6]{x^2 y^3}}=\sqrt[6]{\frac{(x^2 y)^2\cdot(xy)^3}{x^2 y^3}}=\sqrt[6]{\frac{x^4 y^2 x^3 y^3}{x^2 y^3}}=\sqrt[6]{\frac{x^7 y^5}{x^2 y^3}}=\sqrt[6]{x^5 y^2}$$

Prima di operare con i radicali letterali, è necessario determinare le condizioni di esistenza: il prodotto esiste là dove sono soddisfatte le condizioni di esistenza di tutti i fattori; il quoziente esiste là dove sono soddisfatte le condizioni di esistenza di dividendo e divisore, inoltre il divisore deve essere diverso da zero

*Esegui le seguenti moltiplicazioni e divisioni di radicali*

**48** $\sqrt{45}\cdot\sqrt{5}$ $\quad\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}$ $\quad\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt[3]{4}$ $\quad\sqrt{75}\cdot\sqrt{12}$

**49** $\sqrt[3]{20}\cdot\sqrt{50}$ $\quad\sqrt{40}:(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5})$ $\quad\sqrt{\frac{1}{5}}\cdot\sqrt{45}$ $\quad\sqrt{3a}:\sqrt{\frac{1}{5}a}$ con a >0

**50** $\sqrt[3]{3}:\sqrt[3]{9}$ $\quad\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[5]{6}:\sqrt[5]{12}$ $\quad\sqrt[6]{81}\cdot\sqrt[6]{81}:\sqrt[6]{9}$ $\quad\sqrt[4]{1+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[4]{2-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[4]{1+\frac{5}{4}}$

**51** $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}$ $\quad\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{8}$ $\quad\sqrt[6]{81}\cdot\sqrt{3}$ $\quad\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}$

**52** $\sqrt{\frac{10}{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{6}{5}}:\sqrt[4]{\frac{2}{25}}$ $\quad\sqrt{\frac{10}{2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{6}{3}}:\sqrt[6]{\frac{4}{9}}$ $\quad\sqrt[3]{4a}\cdot\sqrt[3]{9a}\cdot\sqrt[3]{12a}$ con a>0

<u>Esempio</u>

- $\sqrt[3]{\dfrac{ax+a}{x^2+2x+1}}\cdot\sqrt{\dfrac{x^2-2x+1}{ax-a}}$

Scomponiamo in fattori i radicandi $\sqrt[3]{\dfrac{a(x+1)}{(x+1)^2}}\cdot\sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{a(x-1)}}$

Poniamo le C.E. $x\neq -1\wedge(a>0\wedge x>1)\vee(a<0\wedge x<1)$

Semplifichiamo le frazioni all'interno di ciascun radicando $\sqrt[3]{\dfrac{a}{x+1}}\cdot\sqrt{\dfrac{x-1}{a}}$

Trasformiamo nello stesso indice: il m.c.m. degli indici è 6, quindi

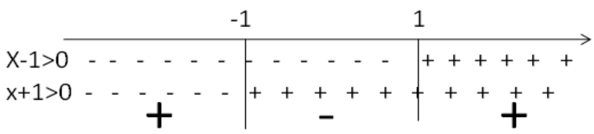
$$\sqrt[3]{\left(\frac{a}{x+1}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{x-1}{a}\right)^3}=\sqrt[6]{\frac{a^2}{(x+1)^2}\cdot\frac{(x-1)^3}{a(x+1)^2}}=\sqrt[6]{\frac{(x-1)^3}{a(x+1)^2}}$$

<u>Esempio</u>

- $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^2-2x+1}}:\sqrt[4]{\dfrac{x^4-2x^3+x^2}{x^2-1}}$

Scomponiamo in fattori i radicandi $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{(x-1)^2}}:\sqrt[4]{\dfrac{(x-1)^2\cdot(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}}$

Determiniamo le C.E. $(x-1)(x+1)>0$




$$x<-1\vee x>1$$

Per le condizioni di esistenza bisogna tener conto che $\sqrt[4]{\dfrac{(x-1)^2\cdot(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}}$ essendo il divisore deve essere diverso da zero, cioè non si deve annullare neanche il numeratore della frazione $\frac{(x-1)^2\cdot(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}$ Semplifichiamo i radicandi $\sqrt[3]{\frac{x^2}{(x-1)^2}}:\sqrt[4]{(x-1)\cdot(x+1)}$

Riduciamo allo stesso indice: il m.c.m. degli indici è 12 $\sqrt[12]{\left[\frac{x^2}{(x-1)^2}\right]^4}:\sqrt[12]{(x-1)^3\cdot(x+1)^3}$

Poniamo sotto la stessa radice $\sqrt[12]{\frac{x^8}{(x-1)^8}\cdot\frac{1}{(x-1)^3\cdot(x+1)^3}}=\sqrt[12]{\frac{x^8}{(x-1)^{11}\cdot(x+1)^3}}$ .

**53** $\sqrt[3]{2ab}\cdot\sqrt[3]{4a^2b^2}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{1}{a^4}}\cdot\sqrt{\frac{a^6b}{2}}:\sqrt{\frac{2b}{a}}$

**54** $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}:\sqrt[6]{x}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{4}{9}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}a}:\sqrt[6]{3a}$

**55** $\sqrt[3]{ax}\cdot\sqrt{xy}\cdot\sqrt[5]{ay}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{(x+1)^2}:\sqrt{x-1}$

**56** $\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)$ $\qquad$ $\sqrt{2}(\sqrt{a}-\sqrt{2})$

**57** $\sqrt{a^2-b^2}:\sqrt{a+b}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}:\sqrt[3]{\frac{a+b}{a-b}}$

**58** $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{4a^4-9}\cdot\sqrt{2a-3}}{\sqrt[3]{2a+3}}$

**59** $\sqrt{\frac{a^2+2a+1}{2a}}\cdot\sqrt{\frac{1+a}{a^2}}:\sqrt{\frac{2}{a}}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{a+1}{a-3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a^2-9}{a^2-1}}$

**60** $\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}:\sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x^2+x-6}}$ $\qquad$ $\sqrt{a^4b}\cdot\sqrt[6]{\frac{a^2}{b}}$

**61** $\sqrt[3]{\frac{a^2-2}{a+3}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a+3}{a-2}}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{1+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[4]{2+\frac{1}{4}}$

**62** $\sqrt{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}:\sqrt{x+y}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}:\sqrt{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}$

**63** $\frac{\sqrt{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}:\sqrt[3]{\frac{x}{y}-\frac{1}{x}}}{\sqrt{\frac{xy}{x+y}}}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{a+2}{a-1}}:\sqrt[3]{\frac{(a-1)^2}{a^2+4a+4}}$

**64** $\sqrt{\frac{x^2-4}{x+1}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x^3-2x^2}}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{\frac{a+b}{a^2-b^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a-2b}{a+2b}}\cdot\sqrt[6]{a^2-4b^2}$

**65** $\sqrt{\frac{a^2b+ab^2}{xy}}\cdot\sqrt[6]{\frac{(a+b)^2}{x^2}}\cdot\sqrt[6]{\frac{x^2y^3}{(a+b)^2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{x}{a^3b^2+a^2b^3}}$ $\qquad$ *R.* $\left[\sqrt[4]{\frac{a+b}{x}}\right]$

## ►8. Potenza di radice e radice di radice

Per elevare a una potenza una radice si eleva a quella potenza il radicando: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$ .

Si capisce il perché di questa proprietà trasformando, come negli altri casi, le radici in esponenti con indici frazionari:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[n]{a^m}$$

Esempi

- $\left(\sqrt{2}\right)^2=\sqrt{2^2}=2$
- $\left(\sqrt[3]{2ab^2c^3}\right)^2=\sqrt[3]{4a^2b^4c^6}$

La radice di un'altra radice è uguale a una radice con lo stesso radicando e con indice il prodotto degli indici delle radici: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$ .

Anche questa proprietà si può spiegare con le proprietà delle potenze:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{mn}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$$

Esempi

- $\sqrt{\sqrt{2}}=\sqrt[2\cdot 2]{2}=\sqrt[4]{2}$
- $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2x}}=\sqrt[12]{2x}$

**66** $\left(\sqrt{3}\right)^2$ $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3$ $\left(\sqrt{4}\right)^2$ $\left(\sqrt[4]{2}\right)^6$

**67** $\left(2\sqrt{3}\right)^2$ $\left(3\sqrt{5}\right)^2$ $\left(5\sqrt{2}\right)^2$ $\left(-2\sqrt{5}\right)^2$

**68** $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2$ $\left(\frac{2}{3}\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\right)^2$ $\left(a\sqrt{2a}\right)^2$ $\left(\frac{1}{a}\sqrt{a}\right)^2$

**69** $\left(2\sqrt[3]{3}\right)^3$ $\left(3\sqrt[3]{3}\right)^3$ $\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}\right)^3$ $\left(\frac{1}{9}\sqrt[3]{9}\right)^3$

**70** $\left(\sqrt{3}\right)^3$ $\left(2\sqrt{5}\right)^3$ $\left(3\sqrt{2}\right)^3$ $\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$

**71** $\left(\sqrt[3]{3}\right)^6$ $\left(\sqrt[3]{5}\right)^5$ $\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$ $\left(\sqrt[6]{3}\right)^4$

**72** $\left(\sqrt[6]{3ab^2}\right)^4$ $\left(\sqrt[4]{16a^2b^3}\right)^2$ $\left(\sqrt[3]{6a^3b^2}\right)^4$ $\left(\sqrt[3]{81ab^4}\right)^4$

**73** $\left(1+\sqrt{2}\right)^2$ $\left(2-\sqrt{2}\right)^2$ $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$ $\left(2\sqrt{2}-1\right)^2$

**74** $\left(3\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)^2$ $\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)^2$ $\left(4\sqrt{3}-3\sqrt{7}\right)^2$ $\left(2\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)^2$

**75** $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$ $\sqrt[3]{\sqrt[3]{16}}$ $\sqrt[3]{\sqrt[4]{15}}$ $\sqrt[5]{\sqrt{a^5}}$

**76** $\sqrt{\sqrt{16}}$ $\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$ $\sqrt[5]{\sqrt{a^{10}}}$ $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{a^{12}}}}$

**77** $\sqrt{\sqrt[3]{3a}}$ $\sqrt{\sqrt[4]{3ab}}$ $\sqrt[3]{\sqrt{(a+1)^5}}$ $\sqrt[4]{\sqrt{(2a)^5}}$

**78** $\sqrt{2(a-b)}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{4a-4b}}}$ $\sqrt{3(a+b)}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{3a+3b}}}$

## ►9. Portare un fattore dentro il segno di radice

Per portare un fattore dentro il segno di radice basta elevarlo all'indice della radice e riscriverlo sotto il segno di radice:

$$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n\cdot b} \quad \text{se } n \text{ pari e } a\geq 0$$
$$a\sqrt[n]{b}=-\sqrt[n]{a^n\cdot b} \quad \text{se } n \text{ pari e } a<0$$
$$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n\cdot b} \quad \text{se } n \text{ dispari}$$

Ricordando che abbiamo posto $\sqrt[1]{a}=a$ , portare un fattore sotto radice quivale a svolgere la moltiplicazione tra una radice di indice 1 e una radice di indice qualsiasi.

<u>Esempi</u>

- $2\sqrt[3]{5}$ portare il 2 dentro il segno di radice $2\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{2^3\cdot 5}=\sqrt[3]{40}$
- $2\cdot\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{2^3\cdot 7}=\sqrt[3]{56}$
- $3\cdot\sqrt{\dfrac{2}{21}}=\sqrt{3^2\cdot\dfrac{2}{21}}=\sqrt{9\cdot\dfrac{2}{21}}=\sqrt{\dfrac{6}{7}}$.
- $-\dfrac{1}{2}\sqrt{3}$ lasciamo fuori dalla radice il segno meno $-\dfrac{1}{2}\sqrt{3}=-\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot 3}=-\sqrt{\dfrac{3}{4}}$
- $-\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{12}=-\sqrt{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\cdot 12}=-\sqrt{\dfrac{1}{9}\cdot 12}=-\sqrt{\dfrac{4}{3}}$
- $(1-\sqrt{2})\cdot\sqrt{3}=-(\sqrt{2}-1)\cdot\sqrt{3}=-\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2\cdot 3}$
- $-2\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{(-2)^3\cdot 5}=\sqrt[3]{-40}$
- $a\cdot\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a^3 b}$ poiché l'indice della radice è dispari a si può portare sotto radice senza porre alcuna condizione.
- $(x-1)\cdot\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{(x-1)^3\cdot x}$ L'indice della radice è dispari, non sono necessarie condizioni sulla x.
- $(x-2)\sqrt{y}$
  per portare dentro il segno di radice il coefficiente *(x-2)* bisogna fare la distinzione:
  $$(x-2)\sqrt{y}=\begin{cases}\sqrt{(x-2)^2 y} & \text{se } x\geq 2\\ -(2-x)\sqrt{y}=-\sqrt{(2-x)^2 y} & \text{se } x<2\end{cases}$$
- $(x-1)\sqrt{x-2}$
  Il radicale esiste per $x-2\geq 0 \rightarrow x\geq 2$ , per questi valori il coefficiente esterno (x-1) è positivo e può essere portato dentro la radice $(x-1)\sqrt{x-2}=\sqrt{(x-1)^2(x-2)}$ .
- $\dfrac{a-1}{a+3}\cdot\sqrt{\dfrac{a+2}{(a-1)^2}}$

Determiniamo le condizioni di esistenza del radicale. Per l'esistenza della frazione deve essere $(a-1)^2\neq 0$, ovvero $a\neq 1$.

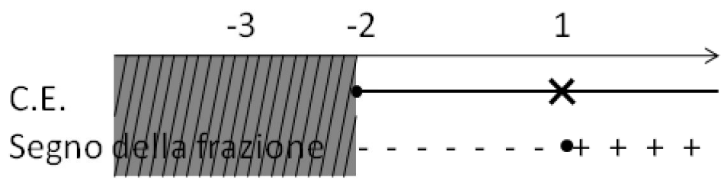
Affinché il radicando sia positivo o nullo, essendo il denominatore sempre positivo (ovviamente per $a\neq 1$ ) , è sufficiente che sia $a+2\geqslant 0$ ovvero $a\geqslant -2$

Pertanto le condizioni di esistenza sono $a\geqslant -2$ e $a\neq 1$

Studiamo il segno della frazione algebrica da portare sotto radice.

Risulta che tale frazione è positiva per $a<-3\vee a\geqslant 1$ mentre è negativa per $-3<a\leqslant 1$

Tenendo conto delle condizioni di esistenza $a\geqslant -2$ e $a\neq 1$ i due casi da esaminare sono $a>1$ e $-2<a<1$ .




Se $a>1$ si ha $\dfrac{a-1}{a+3}\cdot\sqrt{\dfrac{a+2}{(a-1)^2}}=\sqrt{\dfrac{(a-1)^2}{(a+3)^2}\cdot\dfrac{a+2}{(a-1)^2}}=\sqrt{\dfrac{a+2}{(a+3)^2}}$

Se $-2<a<1$ il fattore da portare sotto radice è negativo, quindi

$$-\left(-\frac{a-1}{a+3}\right)\cdot\sqrt{\frac{a+2}{(a-1)^2}}=-\sqrt{\frac{[-(a-1)]^2}{(a+3)^2}\cdot\frac{a+2}{(a-1)^2}}=-\sqrt{\frac{a+2}{(a+3)^2}}$$

Se a=-2 l'espressione da calcolare vale zero.
Il caso a =1 è escluso dalla condizione di esistenza.

*Trasporta dentro la radice i fattori esterni*

**79** $2\sqrt{2}$ $\quad 3\sqrt{3}$ $\quad 2\sqrt{3}$ $\quad 3\sqrt{2}$ $\quad \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\quad \frac{1}{3}\sqrt{3}$

**80** $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ $\quad \frac{2}{3}\sqrt{6}$ $\quad \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}$ $\quad 2\sqrt[3]{2}$ $\quad \frac{1}{3}\sqrt[3]{3}$ $\quad 4\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

**81** $-3\sqrt{3}$ $\quad -2\sqrt[3]{2}$ $\quad \frac{-1}{2}\sqrt[3]{4}$ $\quad \frac{-1}{5}\sqrt{5}$ $\quad -\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}$ $\quad \left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{2}$

**82** $x\sqrt{\frac{1}{5}}$ $\quad x^2\sqrt[3]{x}$ $\quad a\sqrt{2}$ $\quad x^2\sqrt[3]{3}$ $\quad 2a\sqrt{5}$ $\quad a\sqrt{-a}$

**83** $(a-1)\sqrt{a}$ $\quad (x-2)\sqrt{\frac{1}{2x-4}}$ $\quad x\sqrt{\frac{1}{x^2+x}}$

**84** $\frac{a+1}{a+2}\sqrt{\frac{a^2+3a+2}{a^2+4a+3}}$ $\quad \frac{2}{x}\sqrt{\frac{x^2+x}{x-1}-x}$ $\quad \frac{1}{x-1}\sqrt{x^2-1}$

## ►10. Portare uno o più fattori fuori dal segno di radice

È possibile portare fuori dal segno di radice quei fattori aventi come esponente un numero che sia maggiore o uguale all'indice della radice. In generale si parte da un radicale del tipo:

$$\sqrt[n]{a^m} \quad \text{con} \quad m\geq n$$

si divide *m* per *n* e si porta fuori il termine *a* elevato al quoziente *q* della divisione intera, cioè $a^q$ va fuori dalla radice, mentre rimane dentro il segno di radice il termine *a* elevato al resto *r* della divisione intera, cioè $a^r$ resta sotto radice. Quindi si ha:

$$\sqrt[n]{a^m}=a^q\sqrt[n]{a^r}$$

dove *q* è il quoziente della divisione intera *m:n* ed *r* è il resto della stessa divisione.
Si può anche procedere trasformando la potenza $a^m$ nel prodotto di due potenze, una delle quali può essere semplificata con la radice. Per esempio, $\sqrt[3]{a^5}=\sqrt[3]{a^3\cdot a^2}=\sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^2}=a\sqrt[3]{a^2}$
Quando portiamo fuori dalla radice un termine letterale dobbiamo verificare se l'indice della radice è pari o dispari e se il termine che portiamo fuori è positivo o negativo. In particolare

$$\sqrt[n]{a^n b}=\begin{cases} a\sqrt[n]{b} & \text{se } n \text{ dispari} \\ |a|\sqrt[n]{b} & \text{se } n \text{ pari}\end{cases}$$

Esempi

- $\sqrt{1200}$ Si scompone in fattori primi il radicando $1200=2^4\cdot5^2\cdot3$ ne segue allora che $\sqrt{1200}=\sqrt{2^4\cdot5^2\cdot3}=2^2\cdot5\sqrt{3}=20\sqrt{3}$
- $\sqrt{75}=\sqrt{5^2\cdot3}=5\sqrt{3}$
- $\sqrt{720}=\sqrt{2^4\cdot3^2\cdot5}=2^2\cdot3\cdot\sqrt{5}=12\sqrt{5}$
- $\sqrt{2a^2}=|a|\sqrt{2}$ bisogna mettere a in valore assoluto perché sotto radice poteva essere sia negativo che positivo, la radice invece deve essere sempre positiva.
- $\sqrt[3]{a^5b^7cd^3}$ Portare fuori dal segno di radice il maggior numero di fattori.

Occorre eseguire le divisioni intere tra gli esponenti e l'indice della radice.
Cominciamo da $a^5$ risulta 5:3 = quoziente 1, resto 2; per $b^7$ si ha 7:3 = quoziente 2, resto 1; per c non è possibile portare niente fuori; per $d^3$ si ha 3:3= quoziente 1, resto 0.
In definitiva $\sqrt[3]{a^5b^7cd^3}=ab^2d\sqrt[3]{a^2bc}$

- $\sqrt[3]{\frac{3^3x^3y}{z^6}}$ portare fuori dal segno di radice i fattori possibili $\sqrt[3]{\frac{3^3x^3y}{z^6}}=3\frac{x}{z^2}\sqrt[3]{y}$

■ $\sqrt[4]{4x^4-4x^5}$ portare fuori dal segno di radice i fattori possibili

Raccogliamo a fattor comune dentro la radice per poter studiare le condizioni di esistenza del radicale e portare fuori qualche fattore:

$\sqrt[4]{4x^4-4x^5}=\sqrt[4]{4x^4(1-x)}$ C.E. $1-x\geq 0 \rightarrow x\leq 1$

Pertanto $\sqrt[4]{4x^4-4x^5}=\sqrt[4]{4x^4(1-x)}=|x|\sqrt[4]{4(1-x)}=\begin{cases} x\sqrt[4]{4(1-x)} & \text{se } 0\leq x\leq 1 \\ -x\sqrt[4]{1-x} & \text{se } x<0 \end{cases}$

■ $\sqrt{3(a-1)^2}$ portare fuori dalla radice $\sqrt{3(a-1)^2}=|a-1|\sqrt{3}=\begin{cases} (a-1)\sqrt{3} & \text{se } a>1 \\ 0 & \text{se } a=1 \\ (1-a)\sqrt{3} & \text{se } a<1 \end{cases}$

Negli esempi che seguono sommiamo i radicali come nella somma di monomi simili.

■ $\sqrt{8}+\sqrt{2}=\sqrt{2^3}\sqrt{2}=2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

■ $2\sqrt{45}-\sqrt{80}=2\sqrt{3^2\cdot 5}-\sqrt{2^4\cdot 5}=2\cdot 3\cdot\sqrt{5}-2^2\sqrt{5}=6\sqrt{5}-4\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

*Semplifica i radicali portando fuori dei fattori*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 85 | $\sqrt{250}$ | | $R.[5\sqrt{10}]$ | $\sqrt{486}$ | | $R.[9\sqrt{6}]$ | |
| 86 | $\sqrt{864}$ | | $R.[12\sqrt{6}]$ | $\sqrt{3456}$ | | $R.[24\sqrt{6}]$ | |
| 87 | $\sqrt{20}$ | | $\sqrt{0,12}$ | $\sqrt{45}$ | | $\sqrt{48}$ | |
| 88 | $\sqrt{98}$ | | $\sqrt{50}$ | $\sqrt{300}$ | | $\sqrt{27}$ | |
| 89 | $\sqrt{75}$ | | $\sqrt{40}$ | $\sqrt{12}$ | | $\sqrt{80}$ | |
| 90 | $\sqrt{\frac{18}{80}}$ | | $\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{4}{9}}$ | $\sqrt{1-\frac{9}{25}}$ | | $\sqrt{\frac{10}{3}+\frac{2}{9}}$ | |
| 91 | $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{50}{4}}$ | | $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{27}}$ | $\frac{5}{7}\sqrt{\frac{98}{75}}$ | | $\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1000}{81}}$ | |
| 92 | $\sqrt[3]{250}$ | | $\sqrt[3]{24}$ | $\sqrt[3]{108}$ | | $\sqrt[4]{32}$ | |
| 93 | $\sqrt[4]{48}$ | | $\sqrt[4]{250}$ | $\sqrt[5]{96}$ | | $\sqrt[5]{160}$ | |
| 94 | $\sqrt{x^2 y}$ | | $\sqrt{\frac{a^5}{b^2}}$ | $\sqrt{\frac{a^2 b^3 c^3}{d^9}}$ | | $\sqrt{4ax^2}$ | |
| 95 | $\sqrt{9a^2 b}$ | | $\sqrt{2a^2 x}$ | $\sqrt{x^3}$ | | $\sqrt{a^7}$ | |
| 96 | $\sqrt[3]{16a^3 x^4}$ | | $\sqrt[3]{4a^4 b^5}$ | $\sqrt[3]{27a^7 b^8}$ | | $\sqrt{18a^6 b^5 c^7}$ | |
| 97 | $\sqrt{a^2+a^3}$ | | $\sqrt{4x^4-4x^2}$ | $\sqrt{25x^7-25x^5}$ | | $\sqrt[3]{3a^5 b^2 c^9}$ | |
| 98 | $\sqrt[4]{16a^4 b^5 c^7 x^6}$ | | $\sqrt[5]{64a^4 b^5 c^6 d^7}$ | $\sqrt[6]{a^{42} b^{57}}$ | | $\sqrt[7]{a^{71} b^{82}}$ | |
| 99 | $\sqrt{a^3}+\sqrt{a^5}+\sqrt{a^7}$ | | | | | $R.[(a+a^2+a^3)\sqrt{a}]$ | |

## ►11. Somma di radicali

Si dice **radicale** un'espressione del tipo $a\sqrt[n]{b}$ con a e b numeri reali, b≥0 ed n∈N. Il numero a prende il nome di **coefficiente** del radicale.
Operare con i radicali è simile al modo di operare con i monomi. Infatti è possibile effettuare somme algebriche soltanto se i radicali hanno lo stesso indice e lo stesso radicando, mentre si possono sempre effettuare moltiplicazioni e divisioni dopo averli ridotti allo stesso indice.

DEFINIZIONE. Due radicali si dicono **simili** se hanno lo stesso indice e lo stesso radicando.

È possibile effettuare, dunque, somme algebriche soltanto se i radicali sono simili; se si eseguono le somme allo stesso modo in cui si eseguono le somme algebriche dei monomi.

Attenzione quindi a non scrivere scritture errate come la seguente $\underbrace{\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}}_{errato}$ .

Esempi

- $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ non si può eseguire perché i radicali non sono simili
- $\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}$ non si può eseguire perché i radicali non sono simili
- $\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$
- $2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$
- $\frac{1}{2}\sqrt{7}-\frac{4}{3}\sqrt{7}=\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{3}\right)\sqrt{7}=\frac{3-8}{6}\sqrt{7}=-\frac{5}{6}\sqrt{7}$
- $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}+3\sqrt{3}$ sommiamo tra di loro i radicali simili
  $=(3-2)\sqrt{2}+(2+3)\sqrt{3}=\sqrt{2}+5\sqrt{3}$
- $2\sqrt{a}+3\sqrt{a}=5\sqrt{a}$
- $\sqrt[4]{a^5}+\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt{a}+\sqrt[4]{a^6}:\sqrt[4]{a}=\sqrt[4]{a^5}+\sqrt[4]{a^3\cdot a^2}+\sqrt[4]{a^6:a}=\sqrt[4]{a^5}+\sqrt[4]{a^5}+\sqrt[4]{a^5}=3\sqrt[4]{a^5}$
- $(1+\sqrt{2})\cdot(3\sqrt{2}-1)=1\cdot3\sqrt{2}-1\cdot1+\sqrt{2}\cdot3\sqrt{2}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}-1+3\sqrt{2^2}-\sqrt{2}=$
  $=3\sqrt{2}-1+3\cdot2-\sqrt{2}=2\sqrt{2}+5$
- $(\sqrt{3}+1)^2=(\sqrt{3})^2+(1)^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot1=3+1+2\sqrt{3}=4+2\sqrt{3}$
- $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot(-\sqrt{2})=3+2-2\sqrt{6}=5-2\sqrt{6}$
- $(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=(3)^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2+2\cdot3\cdot\sqrt{2}+2\cdot3\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=14+6\sqrt{2}+6\sqrt{3}+2\sqrt{6}$
- $(\sqrt{2}+4)\cdot(3-\sqrt{2})=\sqrt{2}\cdot3+\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2})+4\cdot3+4\cdot(-\sqrt{2})=3\sqrt{2}-2+12-4\sqrt{2}=10-\sqrt{2}$
- $(\sqrt{2}-3)^3=(\sqrt{2})^3+3(\sqrt{2})^2(-3)+3\sqrt{2}(-3)^2+(-3)^3=\sqrt{2^3}+3(2)(-3)+3(9)\sqrt{2}-27=$
  $=2\sqrt{2}-18+27\sqrt{2}-27=29\sqrt{2}-45$

Esegui le seguenti operazioni con radicali

**100** $3\sqrt{2}+\sqrt{2}$ $\qquad$ $\sqrt{3}-3\sqrt{3}$

**101** $8\sqrt{6}-3\sqrt{6}$ $\qquad$ $\sqrt{5}-3\sqrt{5}+7\sqrt{5}$

**102** $3\sqrt{2}+2\sqrt{2}-3\sqrt{2}$ $\qquad$ $2\sqrt{7}-7\sqrt{7}+4\sqrt{7}$

**103** $11\sqrt{5}+6\sqrt{2}-(8\sqrt{5}+3\sqrt{2})$ $\qquad$ $R.[3(\sqrt{5}+\sqrt{2})]$

**104** $5\sqrt{3}+3\sqrt{7}-[2\sqrt{3}-(4\sqrt{7}-3\sqrt{3})]$ $\qquad$ $R.[7\sqrt{7}]$

**105** $\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{3}{4}\sqrt{2}$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}$

**106** $3\sqrt{5}+\frac{2}{3}\sqrt{2}-\frac{5}{6}\sqrt{2}$ $\qquad$ $R.\ 3\sqrt{5}-\frac{1}{6}\sqrt{2}$

**107** $5\sqrt{10}-(6+4\sqrt{19})+2-\sqrt{10}$ $\qquad$ $\sqrt{5}+\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}$

**108** $-3\sqrt{7}+4\sqrt{2}+\sqrt{3}-5\sqrt{7}+8\sqrt{3}$ $\qquad$ $3\sqrt{3}+5\sqrt{5}+6\sqrt{6}-7\sqrt{3}-8\sqrt{5}-9\sqrt{6}$

**109** $\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}$ $\qquad$ $5\sqrt{6}+3\sqrt[4]{6}-2\sqrt[4]{6}+3\sqrt[3]{6}-2\sqrt{6}$

**110** $\sqrt{75}+3\sqrt{18}-2\sqrt{12}-2\sqrt{50}$ $\qquad$ $R.[\sqrt{3}-\sqrt{2}]$

**111** $3\sqrt{128}-2\sqrt{72}-(2\sqrt{50}+\sqrt{8})$ $\qquad$ $R.[0]$

**112** $3\sqrt{48}+2\sqrt{32}+\sqrt{98}-(4\sqrt{27}+\sqrt{450})$ $\qquad$ $R.[0]$

**113** $\sqrt[4]{162}-\sqrt[4]{32}+5\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{250}$ $R.[\sqrt[4]{2}+12\sqrt[3]{2}]$

**114** $2\sqrt[3]{54}-\sqrt[4]{243}+3\sqrt[4]{48}-\sqrt[3]{250}$ $R.[\sqrt[3]{2}+3\sqrt[4]{3}]$

**115** $\sqrt{\frac{32}{25}}-\sqrt{\frac{108}{25}}+\sqrt{\frac{27}{49}}+\frac{2}{5}\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{8}{9}}$ $R.[\frac{2}{15}\sqrt{2}-\frac{4}{7}\sqrt{3}]$

**116** $2\sqrt{\frac{27}{8}}+5\sqrt{\frac{3}{50}}+7\sqrt{\frac{27}{98}}-5\sqrt{\frac{147}{50}}$ $R.[0]$

**117** $\frac{1}{2}\sqrt{a}-\frac{4}{5}\sqrt{b}-\sqrt{a}+0{,}4\sqrt{b}$ $R.[-\frac{1}{2}\sqrt{a}-\frac{2}{5}\sqrt{b}]$

**118** $6\sqrt{ab}-3\sqrt{a}-7\sqrt{ab}+2\sqrt{a}+9\sqrt{b}+\sqrt{a}$ $R.[9\sqrt{b}-\sqrt{ab}]$

**119** $\sqrt[3]{a-b}+\sqrt[3]{a^4-a^3b}-\sqrt[3]{ab^3-b^4}$ $R.[(1+a-b)\sqrt[3]{a-b}]$

**120** $3\sqrt{x}-5\sqrt{x}$ $2\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}$

**121** $\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}+2\sqrt{a+b}$ $\frac{1}{3}\sqrt{x}-\frac{4}{5}\sqrt{x}+0{,}4\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{a}$

**122** $2a\sqrt{2a}-7a\sqrt{2a}+3a\sqrt{2a}-\frac{1}{2}\sqrt{a}$ $3\sqrt{xy}+3\sqrt{x}-3\sqrt{y}+2\sqrt{xy}-3(\sqrt{x}+\sqrt{x})$

**123** $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2)$ $(3\sqrt{2}-1)(2\sqrt{2}-3)$

**124** $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)$ $(\sqrt{2}-3\sqrt{3})\cdot(3\sqrt{3}-\sqrt{2})$

**125** $(\sqrt{3}+1)^2$ $R.[4+2\sqrt{3}]$ $(\sqrt{3}-2)^2$ $R.[7+4\sqrt{3}]$

**126** $(2+\sqrt{5})^2$ $R.[9+4\sqrt{5}]$ $(4-\sqrt{3})^2$ $R.[19-8\sqrt{3}]$

**127** $(6+2\sqrt{3})^2$ $R.[48+24\sqrt{3}]$ $\left(\sqrt{6}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2$ $R.[\frac{27}{4}-\sqrt{18}]$

**128** $(\sqrt{2}-1)^2$ $(2\sqrt{2}-1)^2$

**129** $(\sqrt{3}+1)^2$ $(\sqrt{3}-3)^2$

**130** $(\sqrt{5}-2)^2$ $(2\sqrt{5}+3)^2$

**131** $(2\sqrt{7}-\sqrt{5})^2$ $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2$

**132** $(\sqrt{2}-3\sqrt{3})^2$ $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$

**133** $(\sqrt{2}-1-\sqrt{5})^2$ $R.[8-2\sqrt{2}-2\sqrt{10}+2\sqrt{5}]$

**134** $(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)^2$ $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$

**135** $(\sqrt[3]{2}-1)^3$ $R.[1+3\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}]$

**136** $(\sqrt[3]{3}+1)^3$ $(\sqrt[3]{2}-2)^3$

**137** $(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})^3$ $(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4})$

**138** $[(\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt[4]{2}-1)]^2$ $(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9})$

**139** $(\sqrt{3}+\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$ $3\sqrt{3}+\sqrt{3}:\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})^2$

**140** $6\sqrt{5}+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}-3\sqrt{5}+\sqrt{25}$ $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{4})$

**141** $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$ $R.[x-y]$

**142** $(\sqrt{x}-1)^2$ $(2x+\sqrt{x})^2$

**143** $(x+\sqrt[3]{x})^3$ $(2x+\sqrt{x})(2x-\sqrt{x})$

**144** $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$ $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{a}\right)\left(\sqrt{a}-\frac{1}{a}\right)$

**145** $2\sqrt{54}-\sqrt[4]{243}+3\sqrt[4]{48}-\sqrt[3]{250}$ $(\sqrt{10}-\sqrt{7})(2\sqrt{10}+3\sqrt{7})$

**146** $\sqrt{48x^2y}+5x\sqrt{27y}$ $\sqrt{5}\sqrt{15}-4\sqrt{3}$

**147** $(\sqrt{7}-\sqrt{5})(2\sqrt{7}+3\sqrt{5})$ $\sqrt{27ax^4}+5x^2\sqrt{75a}$

**148** $\sqrt{125}+3\sqrt[6]{27}-\sqrt{45}-2\sqrt[4]{9}+\sqrt{20}+7\sqrt[8]{81}$

**149** $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt{a}}\cdot\sqrt[9]{a^8}$

**150** $\sqrt[5]{b\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt{b^2\sqrt{b\sqrt{b^2}}}:\sqrt[5]{b^4\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt{b}$ $R.\left[\sqrt[5]{b^7}\right]$

**151** $\sqrt[3]{\dfrac{x}{y^3}-\dfrac{1}{y^2}}+\sqrt[3]{x\,y^3-y^4}-\sqrt[3]{8\,x-8\,y}$

**152** $\left(\sqrt{2}+3\right)\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)^2$

**153** $\left(\sqrt{2}+3\right)\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)^2$

**154** $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\cdot\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}$

**155** $\sqrt[5]{b\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt{b^2\sqrt{b\sqrt{b^2}}}:\sqrt[5]{b^4\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt{b}$ $R.\left[\sqrt{b}\right]$

**156** $\sqrt{\dfrac{4a^2-b^2}{a^2-b^2}}\sqrt{\dfrac{a-b}{2a+b}}$

**157** $\sqrt{\dfrac{9a}{b}}\sqrt{\dfrac{b^2-2b}{3ab-6a}}$

**158** $\sqrt{\dfrac{9a^2-6ab+b^2}{a^2-b^2}}\sqrt{\dfrac{a+b}{3a-b}}$

**159** $\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}\sqrt{\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}}$

**160** $\sqrt[3]{\dfrac{a}{a+3}\sqrt{\dfrac{a}{a+3}\sqrt{\dfrac{a}{a+3}}}}:\sqrt{\dfrac{a}{a+3}}$ $R.\left[\sqrt[4]{\dfrac{a}{a+3}}\right]$

**161** $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}\sqrt{\dfrac{1}{x^2-31}}}}\cdot\sqrt[4]{x+1}$ $R.\left[\sqrt[8]{\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)}\right]$

**162** $\sqrt{\dfrac{a^2-2\,a+1}{a\,(a+1)^3}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{a^2}{(a+1)^2}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{(a+1)^3}{(a-1)^2}}$ $R.\left[\sqrt[3]{\dfrac{a-1}{(a+1)^3}}\right]$

**163** $\left(\sqrt{\dfrac{1}{b^4}+\dfrac{1}{b^2}}+\sqrt{\dfrac{ab^5+ab^4}{a}}-2\sqrt{b+1}\cdot\dfrac{b^2}{(b+1)^2}\right)$ $R.\left[(b-1)^2\sqrt{b+1}\right]$

**164** $\left(\sqrt[3x]{y^x\sqrt[4x]{y}}+\sqrt[6]{y^2\sqrt[2x^2]{y}}\right)\cdot\sqrt[3]{y\sqrt[4x^2]{\dfrac{1}{y}}}$ $R.\left[2\sqrt[3]{y^2}\right]$

**165** $\sqrt[4]{\dfrac{b^2-1}{b}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{3b-3}{6\,b^2}}:\sqrt[6]{\dfrac{(b-1)^4}{4\,b^5}}$ $R.\left[\sqrt[12]{\dfrac{(b+1)^2}{b\,(b-1)}}\right]$

**166** $\sqrt[3]{\dfrac{a^2+2\,a+1}{ab-b}}\cdot\sqrt[6]{\dfrac{a^2-2\,a+1}{ab+b}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{b^2\,(a-1)^2}{2\,a^2+4\,a+2}}$ $R.\left[\sqrt[4]{\dfrac{(a-1)^2}{2}}\right]$

**167** $\sqrt[3]{\dfrac{x^2+2\,xy+y^2}{x+3}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{5\,x}{x^2+6\,x+9}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x+y}{5\,x}}$ $R.\left[\dfrac{x+y}{x+3}\right]$

**168** $\sqrt[3]{\dfrac{x^2-x}{x+1}}\cdot\sqrt[15]{\dfrac{x^2+2\,x+1}{x^2-2\,x+1}}:\sqrt[5]{\dfrac{x-1}{x+1}}$ $R.\left[\sqrt[3]{x}\right]$

**169** $\sqrt{\dfrac{25\,x^3+25\,x^2}{y^3-y^2}}+\sqrt{\dfrac{x^3+x^2}{y^3-y^2}}-x\sqrt{\dfrac{4x+4}{y^3-y^2}}$

**170** $\left(\sqrt{\dfrac{1}{y^4}+\dfrac{1}{y^3}}+\sqrt{\dfrac{x\,y^5+x\,y^4}{x}}-2\sqrt{y+1}\right):\dfrac{(y+1)^2}{y^2}$ $R.\left[(y-1)^2\ \sqrt{y+1}\right]$

**171** $\sqrt[4]{\frac{a^2-a}{(a+1)^2}}\cdot\sqrt[12]{\frac{a^2-2a+1}{(a-1)^7}}:\sqrt[3]{\frac{2a^2-2a+1}{a^3-a^2}-\frac{1}{a-1}}$ $R.\left[\frac{a}{a+1}\sqrt[12]{\frac{a^2}{(a-1)^3}}\right]$

**172** $\sqrt{\frac{a^2b+ab^2}{xy}}\cdot\sqrt[6]{\frac{(a+b)^2}{x^2}}\cdot\sqrt[6]{\frac{x^2y^3}{(a+b)^2}\cdot\sqrt[4]{\frac{x}{a^3b^2+a^2b^3}}}$ $R.\left[\sqrt[24]{\frac{a^{10}b^{11}(a+b)^{11}}{x^{11}}}\right]$

**173** $\sqrt[6]{\frac{1}{x}+4x-4}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x}+4x+4}\cdot\sqrt{\frac{x}{4x^2-1}}$ $R.\left[\sqrt[6]{\frac{2x+1}{2x-1}}\right]$

**174** $\sqrt{\frac{a^2-2a+1}{a(a+1)^3}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a^2}{(a+1)^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{(a+1)^2}{(a-1)^2}}$ $R.\left[\sqrt[3]{\frac{a-1}{(a+1)^2}}\right]$

**175** $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{3}-2+\frac{3}{a}}\cdot\sqrt[6]{\frac{9a^2(a+3)}{(a-3)^2}}\right):\sqrt{\frac{a^2-9}{3a}}$ $R.\left[\sqrt[6]{\frac{27a^3}{a-3}}\right]$

**176** $\sqrt[4]{\frac{a^3-a^2}{(a+1)^3}}\cdot\sqrt[12]{\frac{a^2-2a+1}{(a-1)^7}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2a^2-2a+1}{a^3-a^2}-\frac{1}{a-1}}$ $R.\left[\sqrt[6]{\frac{1}{a(a+1)^2}}\right]$

**177** $\sqrt{1-\frac{1}{y}+\frac{1}{4y^2}}:\left(\sqrt[6]{\frac{1}{8y^3+12y^2+6y+1}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4y^2}}\right)$ $R.[\sqrt{2y-1}]$

**178** $\sqrt[3]{1-\frac{1}{a}+\frac{1}{4a^2}}:\left(\sqrt{1-\frac{1}{4a^2}}\cdot\sqrt[6]{\frac{1}{8a^3+12a^2+6a+1}}\right)$ $R.[\sqrt[6]{4a^2(2a-1)}]$

**179** $\sqrt{\frac{1}{5a}+\frac{1}{25a^2}}+\sqrt{\frac{25a^2-1}{20a^3-4a^2}}-\sqrt{\frac{5a+1}{100a^2}}$ $R.\left[\frac{3}{5a}\sqrt{5a+1}\right]$

**180** $\sqrt[3]{\frac{x}{y^3}-\frac{1}{y^2}}+\sqrt[3]{xy^3-y^4}-\sqrt[3]{8\mathrm{x}-8\mathrm{y}}$ $R.[\frac{(1-y)^2}{y}\sqrt[3]{x-y}]$

**181** $\sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{4x^2}}+\sqrt{\frac{4x^3-4y^3}{x-y}}+\sqrt{4x^4+4x^3y+4x^2y^2}$ $R.\left[\frac{(1+2\mathrm{x})^2}{2\mathrm{x}}\sqrt{x^2+xy+y^2}\right]$

**182** $\sqrt{\frac{a^3+2a^2+a}{a^2+6a+9}}+\sqrt{\frac{a^3+4a^2+4a}{a^2+6a+9}}-\sqrt{\frac{a^3}{a^2+6a+9}}$ $R.[\sqrt{a}]$

**183** $\sqrt{4\mathrm{x}-12\mathrm{y}}+\sqrt{\frac{x^3-3\mathrm{x}^2y}{y^2}}+\sqrt{\frac{xy^2-3\mathrm{y}^3}{x^2}}$ $R.[\frac{(x+y)^2}{xy}\sqrt{x-3\mathrm{y}}]$

**184** $\left(\sqrt[6]{\frac{1}{x^2-2x+1}}+\sqrt[6]{\frac{64a^6}{x^2-2x+1}}+\sqrt[6]{\frac{a^{12}}{x^2-2x+1}}\right)\cdot\sqrt[3]{x-1}$ $R.[(1+a)^2]$

**185** $\left(\sqrt[3x]{y^x\sqrt[4x]{y}}+\sqrt[6]{y^{2}\sqrt[2x^2]{y}}\right)\cdot\sqrt[4x^2]{\frac{1}{y}}$

Le espressioni con radicali possono essere trasformate in potenze.

Esempi

- $\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot b}}{\sqrt[6]{a^5\cdot b}}=\dfrac{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{5}{6}}\cdot b^{\frac{1}{6}}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{5}{6}}\cdot b^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}=a^{\frac{2}{6}}\cdot b^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{a^2 b}$
- $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt[5]{a^2}}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[4]{a^6 b}}{a\sqrt[3]{b}}}=\left(\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{2}{5}}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{\frac{1}{4}}}{ab^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{3}}=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{5}}}\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{12}}}{a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{9}}}=a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{1}{9}}=$

  $=a^{\frac{3}{10}}\cdot b^{\frac{2}{9}}=\sqrt[10]{a^3}\cdot\sqrt[9]{b^2}.$
- $\sqrt[6]{\dfrac{x^3\cdot\sqrt[3]{xy^2}}{x^2-\sqrt{xy}}}=\left(\dfrac{x^3\cdot(xy^2)^{\frac{1}{3}}}{x^2-(xy)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{6}}=\left(\dfrac{x^3\cdot x^{\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{2}{3}}}{x^2-x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{6}}=\left(\dfrac{x^{\frac{10}{3}}\cdot y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}\cdot\left(x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)}\right)^{\frac{1}{6}}=$

  $=\left[x^{\frac{17}{6}}\cdot y^{\frac{2}{3}}\cdot\left(x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right]^{\frac{1}{6}}=x^{\frac{17}{36}}\cdot y^{\frac{1}{9}}\cdot\left(x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{6}}$

**186** $\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a^2}}}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}}}:\sqrt{\dfrac{1}{a}}$ $\quad R.\left[\sqrt{a^3}\right]$

**187** $\sqrt[5]{a\sqrt{a^3}}\cdot\sqrt{a\sqrt[7]{\dfrac{1}{a^2}}}:\sqrt[7]{a^4\sqrt{a}}$ $\quad R.\left[\sqrt[14]{a^3}\right]$

**188** $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt{a\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$ $\quad R.\left[\sqrt[9]{a^{19}}\right]$

**189** $\sqrt[5]{b\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt{b^2\sqrt{b\sqrt{b^2}}}:\sqrt[5]{b^4\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt{b}$ $\quad R.\left[\sqrt{b}\right]$

## ►12. Razionalizzazione del denominatore di un frazione

Razionalizzare il denominatore di una frazione vuol dire trasformarla in una frazione equivalente avente a denominatore un'espressione nella quale non compaiano radici.

**I Caso**: Razionalizzazione del denominatore di una frazione del tipo $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$

Per razionalizzare il denominatore di una frazione di questo tipo basta moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt{b}$, che prende il nome di fattore razionalizzante:

$$\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{b}$$

Esempi

- $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}}=3\dfrac{\sqrt{3}}{2\cdot3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\dfrac{a^2-1}{\sqrt{a-1}}=\dfrac{(a^2-1)\sqrt{a-1}}{\sqrt{a-1}\sqrt{a-1}}=\dfrac{(a^2-1)\sqrt{a-1}}{a-1}=\dfrac{(a-1)(a+1)\sqrt{a-1}}{a-1}=(a+1)\sqrt{a-1}$

**II Caso**: Razionalizzazione del denominatore di una frazione del tipo $\dfrac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$ con n>m.

In questo caso il fattore razionalizzante è $\sqrt[n]{b^{n-m}}$. Infatti si ha:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m}\cdot\sqrt[n]{b^{(n-m)}}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m\cdot b^{n-m}}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

Se abbiamo un esercizio in cui la potenza del radicando supera l'indice della radice, prima di razionalizzare possiamo portare fuori dalla radice.

Esempi

- $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ il fattore razionalizzante è $\sqrt[3]{2^2}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{1\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

- $\frac{ab}{\sqrt[4]{xa^2b^3}}$ il fattore razionalizzante è $\sqrt[4]{x^3a^2b}$

$\frac{ab}{\sqrt[4]{xa^2b^3}}=\frac{ab\cdot\sqrt[4]{x^3a^2b}}{\sqrt[4]{xa^2b^3}\cdot\sqrt[4]{x^3a^2b}}=\frac{ab\sqrt[4]{x^3a^2b}}{\sqrt[4]{x^4a^4b^4}}=\frac{ab\sqrt[4]{x^3a^2b}}{xab}=\frac{\sqrt[4]{x^4a^4b^4}}{x}$

Esempi

- $\frac{1}{\sqrt[3]{b^5}}=\frac{1}{b\sqrt[3]{b^2}}=\frac{1\cdot\sqrt[3]{b}}{b\sqrt[3]{b^2}\cdot\sqrt[3]{b}}=\frac{\sqrt[3]{b}}{b^2}$ con $b\neq 0$ .

**III Caso**: Razionalizzazione del denominatore delle frazioni $\frac{x}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ , $\frac{x}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

Per questo tipo di frazione occorre sfruttare il prodotto notevole $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ . Il fattore razionalizzante nel primo caso è $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ , nel secondo è $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ .
Sviluppiamo solo il primo caso, poiché il secondo è del tutto analogo:

$$\frac{x}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{x\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{x(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}}=\frac{x(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$$

Esempi

- $\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{2\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{\sqrt{3^2}-\sqrt{5^2}}=\frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{3-5}=\frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{-2}=-(\sqrt{3}+\sqrt{5})$
- $\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\cdot(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})\cdot(3+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{2})}{3^2-\sqrt{2^2}}=\frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{9-2}=\frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{7}$
- $\frac{1+\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}=\frac{(1+\sqrt{a})\cdot(1+\sqrt{a})}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})}=\frac{(1+\sqrt{a})^2}{1-\sqrt{a^2}}=\frac{1+2\sqrt{a}+a}{1-a}$

**IV Caso**: Razionalizzazione del denominatore della frazione $\frac{x}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

Anche in questo caso si utilizza il prodotto notevole della differenza di quadrati, solo che va ripetuto più volte.

Esempio

- $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ il fattore di razionalizzazione è $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$

$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2+3+2\sqrt{6}-5}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

il fattore razionalizzante di questa frazione è $\sqrt{6}$

$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{6}$ portando fuori radice si ha $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{6}$

**V Caso**: Razionalizzazione del denominatore di una frazione del tipo $\frac{x}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$

Per razionalizzare un denominatore di questo tipo si utilizza il prodotto notevole
$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ e quello analogo $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

$$\frac{x}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{x}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}\cdot\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{x\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3}=\frac{x\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a+b}$$

*Razionalizza i seguenti radicali*

**190** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad \dfrac{2}{\sqrt{2}}$ $\quad \dfrac{5}{\sqrt{10}}$ $\quad \dfrac{10}{\sqrt{5}}$

**191** $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ $\quad \dfrac{4}{2\sqrt{2}}$ $\quad \dfrac{3}{\sqrt{27}}$ $\quad \dfrac{4}{\sqrt{8}}$

**192** $-\dfrac{10}{5\sqrt{5}}$ $\quad \dfrac{2}{3\sqrt{6}}$ $\quad -\dfrac{3}{4\sqrt{5}}$ $\quad \dfrac{1}{\sqrt{50}}$

**193** $\dfrac{9}{\sqrt{18}}$ $\quad \dfrac{7}{\sqrt{48}}$ $\quad \dfrac{3}{\sqrt{45}}$ $\quad \dfrac{5}{\sqrt{125}}$

**194** $\dfrac{6}{5\sqrt{120}}$ $\quad \dfrac{1}{3\sqrt{20}}$ $\quad \dfrac{\sqrt{2}}{5\sqrt{50}}$ $\quad 3\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{324}}$

**195** $\dfrac{a}{\sqrt{a}}$ $\quad \dfrac{x}{\sqrt{x}}$ $\quad \dfrac{a\,x}{\sqrt{2\,a}}$ $\quad \dfrac{2\,a}{\sqrt{2}}$

**196** $\dfrac{a}{2\sqrt{a}}$ $\quad \dfrac{x}{3\sqrt{2\,x}}$ $\quad \dfrac{x^2}{a\sqrt{x}}$ $\quad \dfrac{3\,x}{\sqrt{12\,x}}$

**197** $\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ $\quad \dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ $\quad \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ $\quad \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$

**198** $\dfrac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}}$ $\quad \dfrac{\sqrt{3}-1}{3\sqrt{3}}$ $\quad \dfrac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ $\quad \dfrac{\sqrt{5}-5\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$

**199** $\dfrac{\sqrt{16}+\sqrt{40}}{\sqrt{8}}$ $\quad \dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{20}}{2\sqrt{5}}$ $\quad \dfrac{9-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ $\quad \dfrac{3\,a-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$

**200** $\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}$ $\quad \dfrac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x^2-y^2}}$ $\quad \dfrac{x}{\sqrt{2\,x+1}}$ $\quad \dfrac{2\,x}{\sqrt{x^3-2\,x^2}}$

**201** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ $\quad \dfrac{2}{\sqrt[3]{4}}$ $\quad \dfrac{3}{\sqrt[3]{5}}$ $\quad \dfrac{4}{\sqrt[3]{6}}$

**202** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ $\quad \dfrac{2}{\sqrt[3]{4}}$ $\quad \dfrac{3}{\sqrt[3]{5}}$ $\quad \dfrac{4}{\sqrt[3]{6}}$

**203** $\dfrac{2}{3\sqrt[3]{2}}$ $\quad \dfrac{6}{5\sqrt[3]{100}}$ $\quad \dfrac{2}{\sqrt[5]{9}}$ $\quad \dfrac{3}{2\sqrt[6]{27}}$

**204** $\dfrac{10}{\sqrt[5]{125}}$ $\quad \dfrac{16}{\sqrt[3]{36}}$ $\quad \dfrac{9}{\sqrt[4]{2025}}$ $\quad \dfrac{1}{\sqrt[5]{144}}$

**205** $\dfrac{a\,b}{\sqrt[3]{a^2\,b}}$ $\quad \dfrac{a\,b^2}{\sqrt[3]{a\,b^2}}$ $\quad \dfrac{3\,a^2\,b}{\sqrt[4]{9\,a\,b^3}}$ $\quad \dfrac{2\sqrt{a}}{\sqrt[4]{27\,a\,b^2\,c^5}}$

**206** $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt[5]{16\,a^2\,b^3\,c^4}}$ $\quad \dfrac{\sqrt[3]{x^2\,y}+\sqrt[3]{x\,y^2}}{\sqrt[3]{x\,y}}$ $\quad \dfrac{3-a\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9\,a}}$ $\quad \dfrac{1-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{4\,a^2\,x}}$

**207** $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ $\quad \dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ $\quad \dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ $\quad \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

**208** $\dfrac{3}{\sqrt{2}+1}$ $\quad \dfrac{2}{\sqrt{2}-1}$ $\quad \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ $\quad \dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

**209** $\dfrac{3}{2+3\sqrt{3}}$ $\quad \dfrac{x}{\sqrt{x}+1}$ $\quad \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ $\quad \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

**210** $\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{a\,b}}$ $\quad \dfrac{x}{\sqrt{y}-\sqrt{x+y}}$ $\quad \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}}$ $\quad \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}$

**211** $\dfrac{7}{\sqrt{7+2\sqrt{6}}}$ $\quad \dfrac{a-2}{\sqrt{a}-2}$

**212** $\dfrac{a-x}{\sqrt{a}-2\sqrt{x}}$ $\quad \dfrac{x+1}{\sqrt{x\,(x+1)}}$

**213** $\dfrac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ $\dfrac{-3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+1}$

**214** $\dfrac{2}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+2}$ $\dfrac{(a+b)^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{ab}}$

**215** $\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{9}}$ $\dfrac{6}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}}$

**216** $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}}$ $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{3}}$

**217** $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt[3]{2}-1}$ $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}$

**218** $\dfrac{a-4b^2}{\sqrt{a}-2b}$ $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}-1}$

**219** $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}$ $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

**220** $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{3\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$ $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

**221** $\dfrac{a+2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

## ►13. Radicali doppi

Si dice radicale doppio un'espressione del tipo $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ oppure $\sqrt{a-\sqrt{b}}$

In alcuni casi i radicali doppi possono essere trasformati in radicali semplici mediante la seguente formula:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Questa formula è utile solo quando $a^2-b$ è un quadrato perfetto.

Esempi

- $\sqrt{7-\sqrt{40}}=\sqrt{\dfrac{7+\sqrt{49-40}}{2}}-\sqrt{\dfrac{7-\sqrt{49-40}}{2}}=\sqrt{\dfrac{7+3}{2}}-\sqrt{\dfrac{7-3}{2}}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$ .
- $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2^2-3}}{2}}-\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2^2-3}}{2}}=\sqrt{\dfrac{2+1}{2}}-\sqrt{\dfrac{2-1}{2}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}-\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=$
  $=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ .
- $\sqrt{7+2\sqrt{6}}=\sqrt{7+\sqrt{24}}=\sqrt{\dfrac{7-\sqrt{49-24}}{2}}+\sqrt{\dfrac{7-\sqrt{49-24}}{2}}=\sqrt{\dfrac{7+5}{2}}+\sqrt{\dfrac{7-5}{2}}=\sqrt{6}+1$ .
- $\sqrt{5+\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{25-3}}{2}}+\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{25-3}}{2}}=\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{22}}{2}}+\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{22}}{2}}$ la formula non è stata di alcuna utilità in quanto il radicale doppio non è stato eliminato.

**222** $\sqrt{12-\sqrt{23}}$ $\sqrt{12+2\sqrt{5}}$ $\sqrt{15+\sqrt{29}}$ $\sqrt{3+\sqrt{5}}$

**223** $\sqrt{3-\sqrt{8}}$ $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ $\sqrt{4-\sqrt{7}}$ $\sqrt{5+\sqrt{21}}$

**224** $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$ $\sqrt{6-3\sqrt{3}}$ $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ $\sqrt{6-\sqrt{11}}$

**225** $\sqrt{7+3\sqrt{5}}$ $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$ $\sqrt{7-\sqrt{33}}$ $\sqrt{7+2\sqrt{6}}$

**226** $\sqrt{7-\sqrt{13}}$ $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ $\sqrt{8-\sqrt{55}}$ $\sqrt{8+4\sqrt{3}}$

**227** $\sqrt{8-\sqrt{39}}$ $\sqrt{8-4\sqrt{7}}$ $\sqrt{8+\sqrt{15}}$ $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

**228** $\sqrt{\dfrac{15}{2}-\sqrt{\dfrac{86}{9}}}$ $\sqrt{\dfrac{5}{2}-\sqrt{6}}$ $\sqrt{\dfrac{8}{5}-\sqrt{\dfrac{7}{4}}}$ $\sqrt{10+\sqrt{19}}$

## ►14. Equazioni, disequazioni e sistemi a coefficienti irrazionali

Avendo imparato come operare con i radicali puoi risolvere equazioni, sistemi e disequazioni con coefficienti irrazionali.

**Equazioni di primo grado**

Esempi

■ $\sqrt{3}x=9$

$\sqrt{3}x=9 \rightarrow x=\frac{9}{\sqrt{3}} \rightarrow x=\frac{9}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{9\sqrt{3}}{3}=3\sqrt{3}$

■ $(\sqrt{3}-1)x-\sqrt{6}=2x-\sqrt{2}(3\sqrt{2}+1)+1$

$\sqrt{3}x-x-\sqrt{6}=2x-3\cdot 2-\sqrt{2}+1$ $\quad\sqrt{3}x-x-2x=\sqrt{6}-6-\sqrt{2}+1$ $\quad\sqrt{3}x-3x=\sqrt{6}-\sqrt{2}-5$

$x(\sqrt{3}-3)=\sqrt{6}-\sqrt{2}-5$

■ $x=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-5}{\sqrt{3}-3}$

$x=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-5}{\sqrt{3}-3}\cdot\frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}-3}=\frac{\sqrt{18}-3\sqrt{6}-\sqrt{6}-5\sqrt{3}-15}{3-9}=\frac{3\sqrt{2}-4\sqrt{6}-5\sqrt{3}-15}{-6}=-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{2}{3}\sqrt{6}+\frac{5}{6}\sqrt{3}+\frac{5}{2}$

*Risolvi le seguenti equazioni a coefficienti irrazionali*

**229** $\sqrt{2}x=2$ $\quad\sqrt{2}x=\sqrt{12}$ $\quad 2x=\sqrt{6}$ $\quad\sqrt{2}x=\sqrt{6}+\sqrt{14}$

**230** $x-\sqrt{3}=2(x-\sqrt{3})$ $\quad R.[\sqrt{3}]$ $\quad 2\sqrt{3}x-\sqrt{2}=\sqrt{2}$ $\quad R.[\frac{\sqrt{6}}{3}]$

**231** $2x+\sqrt{5}=\sqrt{5}x+2$ $\quad R.[1]$ $\quad(1+\sqrt{2})x=\sqrt{2}(1-\sqrt{2})$ $\quad R.[4-3\sqrt{2}]$

**232** $\frac{1-x}{\sqrt{2}}-\frac{x}{\sqrt{8}}=x-\sqrt{2}$ $\quad R.[18-12\sqrt{2}]$ $\quad 2x-(x+\sqrt{3})\sqrt{2}x=2x+3\sqrt{5}$ *impossibile*

**233** $\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\frac{x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{x-1}{2}$ $\quad R.[-(1+\sqrt{2})]$

**234** $\frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}+\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}=2$ $\quad$ *impossibile*

**235** $(x+\sqrt{2})^2-(x+\sqrt{3})^2=6$ $\quad R.\left[\frac{-7(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2}\right]$

**236** $\frac{x-\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}-3x}{4}=2x$ $\quad R.\left[-\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3}\right]$

**237** $2(x-1)^2-\sqrt{2}x=1+2x(x-2)$ $\quad R.\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

**238** $\frac{\sqrt{3}}{3x-6}-\frac{1}{20-10x}=\sqrt{3}+2$ $\quad R.\left[\frac{36+17\sqrt{3}}{30}\right]$

**239** $\frac{3x-2}{\sqrt{8}x-\sqrt{32}}+\frac{5x}{4\sqrt{3}x-8\sqrt{3}}=0$ $\quad R.\left[\frac{36-10\sqrt{6}}{29}\right]$

### Disequazioni di primo grado

Esempio

■ $(\sqrt{3}-1)x \leq \sqrt{3}$

$(\sqrt{3}-1)x \leq \sqrt{3} \rightarrow x \leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \rightarrow x \leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} \rightarrow x \leq \frac{3+\sqrt{3}}{3-1} \rightarrow x \leq \frac{3+\sqrt{3}}{2}$

*Risolvi le seguenti disequazioni a coefficienti irrazionali*

**240** $4x+\sqrt{2} < 2x-\sqrt{2}$ R. $[x<-\sqrt{2}]$

**241** $(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}+\sqrt{2}x) < 3\sqrt{2}$ R. $\left[x>\frac{\sqrt{2}-6}{2}\right]$

**242** $x\sqrt{2}+\sqrt{5} > \sqrt{10}$ R. $\left[x>\frac{\sqrt{10}(\sqrt{2}-1)}{2}\right]$

**243** $3(x-\sqrt{3}) < 2(x+\sqrt{3})-\sqrt{6}$ R. $[x<5\sqrt{3}-\sqrt{6}]$

**244** $\frac{x-\sqrt{2}}{2} \leq \frac{2x-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ R. $\left[x \geq \frac{4\sqrt{3}-4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{7}\right]$

**245** $\begin{cases} \sqrt{2}x \geq 2 \\ (3-\sqrt{2})x < \sqrt{2} \end{cases}$ *impossibile*

**246** $\begin{cases} 2(x-\sqrt{2}) > 3x-\sqrt{3} \\ (x-\sqrt{2})^2 > (x-\sqrt{3})^2-\sqrt{3} \end{cases}$ R. $\left[\frac{\sqrt{3}-3+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} < x < \sqrt{3}-2\sqrt{2}\right]$

### Sistemi di primo grado

Esempio

■ $\begin{cases} x(2+\sqrt{2})+y=\sqrt{2}(2+x) \\ x-(\sqrt{2}+1)y=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+2y) \end{cases}$ risolviamolo con il metodo di sostituzione

$\begin{cases} 2x+\sqrt{2}x+y=2\sqrt{2}+\sqrt{2}x \\ x-(\sqrt{2}+1)y=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}y \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+\cancel{\sqrt{2}x}+y=2\sqrt{2}+\cancel{\sqrt{2}x} \\ x-(\sqrt{2}+1)y=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}y \end{cases}$ $\begin{cases} 2x=2\sqrt{2}-y \\ x-(\sqrt{2}+1)y=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}y \end{cases}$

$\begin{cases} x=\frac{2\sqrt{2}-y}{2} \\ x-(\sqrt{2}+1)y=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}y \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{2\sqrt{2}-y}{2} \\ \frac{2\sqrt{2}-y}{2}-\sqrt{2}y+y=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}y \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{2\sqrt{2}-y}{2} \\ \frac{2\sqrt{2}-y}{2}-\cancel{\sqrt{2}y}+y=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\cancel{\sqrt{2}y} \end{cases}$

$\begin{cases} x=\frac{2\sqrt{2}-y}{2} \\ \frac{2\sqrt{2}-y+2y}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{2\sqrt{2}-y}{2} \\ 2\sqrt{2}-y+2y=-\sqrt{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{2\sqrt{2}-y}{2} \\ y=2\sqrt{2}-\sqrt{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{2\sqrt{2}-y}{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$

*Risolvi i seguenti sistemi a coefficienti irrazionali*

**247** $\begin{cases} \sqrt{2}\,x+\sqrt{3}\,y = 5 \\ \sqrt{3}\,x+\sqrt{2}\,y = 2\sqrt{6} \end{cases}$ $R.\left(\sqrt{2};\ \sqrt{3}\right)$ $\begin{cases} x-\sqrt{3} = 2-y \\ x+2 = y+\sqrt{3} \end{cases}$ $R.\left(\sqrt{3};\ 2\right)$

**248** $\begin{cases} x+2y = \sqrt{2}-1 \\ 2x-2y = 2\sqrt{2} \end{cases}$ $R.\left(\sqrt{2}+\sqrt{3};\ -1\right)$ $\begin{cases} \dfrac{2\left(x+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}+2\sqrt{3}} = \dfrac{y}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{2x-y}{2\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $R.$ $R.\left(\sqrt{2}+\sqrt{3};\ 2\sqrt{2}\right)$

**249** $\begin{cases} x+\sqrt{3}y=2 \\ \sqrt{3}x-4y=1 \end{cases}$ $R.\left(\dfrac{\sqrt{3}+8}{7};\dfrac{2\sqrt{3}-1}{7}\right)$ $\begin{cases} \sqrt{2}x-y=1 \\ 2x+\sqrt{2}y=0 \end{cases}$ $R.\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4};-\dfrac{1}{2}\right)$

**250** $\begin{cases} 4x-2\sqrt{5}y=\sqrt{2} \\ \sqrt{2}x+y=-2 \end{cases}$ $R.\left(\dfrac{5\sqrt{5}-11\sqrt{2}}{6};\dfrac{10-5\sqrt{10}}{6}\right)$

**251** $\begin{cases} \sqrt{3}x+4\sqrt{2}y=4 \\ \sqrt{12}x+8\sqrt{2}y=8 \end{cases}$ indeterminato

**252** $\begin{cases} 2x+3\sqrt{2}y=2 \\ \sqrt{3}x-y=-\sqrt{8} \end{cases}$ $R.\left(\dfrac{2-3\sqrt{6}}{5};\dfrac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{5}\right)$

**253** $\begin{cases} x+y=3\sqrt{5} \\ \sqrt{8}x+2\sqrt{2}y=-5\sqrt{11} \end{cases}$ impossibile

**254** $\begin{cases} x-3\sqrt{3}y=\sqrt{27} \\ -\sqrt{3}x+\sqrt{243}y=0 \end{cases}$ $R.\left(\dfrac{9+9\sqrt{3}}{2};\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

**255** $\begin{cases} \sqrt{2}x+2y=4 \\ 2x+\sqrt{32}y=-1 \end{cases}$ $R.\left(\dfrac{1}{2}+4\sqrt{2};-2-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$

**256** $\begin{cases} x+\sqrt{3}y=2 \\ \sqrt{3}x-4y=1 \end{cases}$ $R.\left(\dfrac{\sqrt{3}+8}{7};\dfrac{2\sqrt{3}-1}{7}\right)$

**257** $\begin{cases} 4x-2\sqrt{5}y=\sqrt{2} \\ \sqrt{2}x+y=-2 \end{cases}$ $R.\left(\dfrac{5\sqrt{5}-11\sqrt{2}}{6};\dfrac{10-5\sqrt{10}}{6}\right)$

**258** $\begin{cases} \sqrt{2}x-y=1 \\ 2x+\sqrt{2}y=0 \end{cases}$ $R.\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4};-\dfrac{1}{2}\right)$

**259** $\begin{cases} 2x+3\sqrt{2}y=2 \\ \sqrt{3}x-y=-\sqrt{8} \end{cases}$ $R.\left(\dfrac{2-3\sqrt{6}}{5};\dfrac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{5}\right)$

**260** $\begin{cases} \sqrt{3}x+4\sqrt{2}y=4 \\ \sqrt{12}x+8\sqrt{2}y=8 \end{cases}$ indeterminato

**261** $\begin{cases} x-3\sqrt{3}y=\sqrt{27} \\ -\sqrt{3}x+\sqrt{243}y=0 \end{cases}$ $R.\left(\dfrac{9+9\sqrt{3}}{2};\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

**262** $\begin{cases} x+y=3\sqrt{5} \\ \sqrt{8}x+2\sqrt{2}y=-5\sqrt{11} \end{cases}$ impossibile

**263** $\begin{cases} \sqrt{2}x+2y=4 \\ 2x+\sqrt{32}y=-1 \end{cases}$ $R.\left(\dfrac{1}{2}+4\sqrt{2};-2-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$

## ►15. Esercizi di riepilogo

*Per ciascuna delle seguenti affermazioni indica se è Vera o Falsa.*

**264** É dato un quadrato di lato $3\sqrt{2}$ .

a) Il suo perimetro è in numero irrazionale V F
b) La sua area è un numero irrazionale V F

**265** É dato un rettangolo di base $\sqrt{12}$ e altezza 14.

a) Il suo perimetro è un numero irrazionale V F
b) La sua area è un numero razionale V F
c) Il perimetro non esiste perché non si sommano numeri razionali con numeri irrazionali V F
d) La misura del perimetro è un numero sia razionale che irrazionale V F

**266** Un triangolo rettangolo ha i cateti lunghi rispettivamente $\sqrt{3}$ cm e $\sqrt{13}$ cm.

a) L'ipotenusa ha come misura un numero razionale V F
b) Il perimetro è un numero irrazionale V F
c) L'area è un numero irrazionale V F

**267** É dato un quadrato di lato $1+\sqrt{5}$

a) La misura della diagonale è in numero irrazionale V F
b) L'area è un numero irrazionale V F

**268** É dato un rettangolo di base $\sqrt{12}$ e altezza $\sqrt{3}$ .

a) Il perimetro è un numero irrazionale V F
b) L'area è un numero irrazionale V F
c) La misura della diagonale è un numero irrazionale V F
d) Il quadrato della misura del perimetro è un numero irrazionale V F

**269** Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 7cm. Determina, se esiste, una possibile misura dell'altro cateto in modo questa sia un numero irrazionale e che l'ipotenusa sia, invece, un numero razionale.

**270** Perché l'uguaglianza $\sqrt{(-5)^2}=-5$ è falsa?

**271** Determina il valore di verità delle seguenti affermazioni

a) La radice terza del triplo di *a* è uguale ad *a*. V F
b) Dati due numeri reali positivi, il quoziente delle loro radici quadrate è uguale alla radice quadrata del loro quoziente. V F
c) Il doppio della radice quadrata di a è uguale alla radice quadrata del quadruplo di a. V F
d) Dati due numeri reali positivi, la somma delle loro radici cubiche è uguale alla radice cubica della loro somma. V F
e) La radice cubica di 2 è la metà della radice cubica di 8. V F
f) Dati due numeri reali positivi, il quoziente delle loro radici quadrate è uguale alla radice quadrata del loro quoziente. V F
g) Dati due numeri reali positivi, la somma delle loro radici cubiche è uguale alla radice cubica della loro somma. V F
h) Dati un numero reale positivo, la radice quadrata della sua radice cubica è uguale alla radice cubica della sua radice quadrata. V F
i) Sommando due radicali letterali simili si ottiene un radicale che ha la stessa parte letterale dei radicali dati. V F

**272** Riscrivi in ordine crescente i radicali $\sqrt{5};\ 4\sqrt{2};\ 2\sqrt{3}$

**273** Verifica che il numero irrazionale $\sqrt{7-2\sqrt{6}}$ appartiene all'intervallo (2; 3) e rappresentalo sull'asse dei numeri reali.

**274** Sono assegnati i numeri $\alpha=\sqrt[3]{(\sqrt{30}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{30}+\sqrt{3})}+\sqrt[4]{(7\sqrt{2}-\sqrt{17})\cdot(7\sqrt{2}-\sqrt{17})}$ e $\beta=(3+\sqrt{43})\cdot(3-\sqrt{5})-\dfrac{3}{2+\sqrt{5}}$ , quali afffermazioni sono vere?

[A] sono entrambi irrazionali [B] solo α è irrazionale [C] α è minore di β
[D] α è maggiore di β [E] β è irrazionale negativo

**275** Le misure rispetto al cm dei lati di un rettangolo sono i numeri reali $l_1=\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{8}}\cdot\sqrt[3]{1-\dfrac{2}{7}}\cdot\sqrt[3]{25}$ e $l_2=\sqrt{\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot(\sqrt[8]{6})^3:\sqrt[4]{\sqrt{6}}$ . Determinare la misura del perimetro e della diagonale del reattangolo.

**276** Se x è positivo e diverso da 1, l'espressione $E=\sqrt[4]{\frac{4}{\sqrt{x}-1}-\frac{4}{\sqrt{x}+1}}:\sqrt[4]{\frac{4}{\sqrt{x}-1}+\frac{4}{\sqrt{x}+1}}$ è uguale a:

[A] $\sqrt[4]{\frac{1}{x}}$ [B] $\sqrt[8]{\frac{1}{x}}$ [C] $\frac{1}{x}$ [D] $\sqrt[8]{x}$ [E] 0

**277** Stabilire se la seguente affermazione è vera o falsa. Per tutte le coppie (a,b) di numeri reali positivi con a=3b, l'espressione $E=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{a+b}{a-b}$ ha il numeratore doppio del denominatore.

**278** *Calcola il valore delle seguenti espressioni letterali per i valori indicati delle lettere*

a) $x+2\sqrt{3}$ per $x=\sqrt{3}$
b) $\sqrt{2}x+3\sqrt{6}$ per $x=\sqrt{3}$
c) $x^2+x-1$ per $x=\sqrt{2}$
d) $x^2+\sqrt{5}x-1$ per $x=\sqrt{5}$
e) $(x+2\sqrt{2})^2$ per $x=\sqrt{2}$

**279** Trasforma in un radicale di indice 9 il seguente radicale $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}}{\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2}}:\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+1}$

*Determina l'Insieme delle Soluzioni delle seguenti equazioni a coefficienti irrazionali*

**280** $\frac{x\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{3x+3}{\sqrt{3}}$ $R.[-1]$

**281** $\frac{\sqrt{3}+x}{x-\sqrt{3}}+\frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}=2$ $R.[2\cdot(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})]$

**282** Per quale valore di *k* il sistema lineare è determinato?

$$\begin{cases} x\sqrt{3}+(k-\sqrt{3})y=1 \\ -2x+y\sqrt{6}=-k \end{cases}$$

**283** L'insieme di soluzioni della disequazione $(\sqrt{2}-\sqrt{3})x<0$ è:

[A] $x\geq 0$ [B] $x\leq 0$ [C] $x>0$ [D] $x<0$ [E] sempre verificata.

**284** Stabilire se esistono valori di a che rendono positiva l'espressione:

$$E=\frac{2a-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{(a+2)\cdot\sqrt{2}}{2}+\frac{4}{\sqrt{2}}-1$$

# MATEMATICA C$^3$ -ALGEBRA 2

# 2. EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Stuartpilbrow, *225/365 Z is for Zzzzzzzzzzz*
http://www.flickr.com/photos/stuartpilbrow/3326749916/

## Indice

## ►1. Definizioni

DEFINIZIONI. Si dice **equazione di secondo grado**, un'equazione del tipo: $a x^2 + b x + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. I valori *a, b, c* prendono il nome di **coefficienti** e, in particolare, *c* viene detto **termine noto**. Un'equazione di secondo grado si definisce:
**monomia** quando il secondo e il terzo coefficiente sono nulli $a x^2 = 0$
**incompleta pura** quando il secondo coefficiente è nullo $a x^2 + c = 0$ ;
**incompleta spuria** quando il terzo coefficiente è nullo $a x^2 + b x = 0$ ;
**completa** quando i tre coefficienti sono tutti diversi da zero $a x^2 + b x + c = 0$ .

## ►2. Risoluzione equazione di secondo grado pura

Il coefficiente della *x* è nullo e l'equazione si presenta nella forma: $ax^2 + c = 0$ .
Si procede portando a secondo membro il termine noto e dividendo per il coefficiente di $x^2$:

$$a x^2 + c = 0 \;\rightarrow\; a x^2 = -c \;\rightarrow\; x^2 = -\frac{c}{a} \;\rightarrow\; x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Esempi

- $4 x^2 - 9 = 0$

$$4 x^2 = +9 \;\rightarrow\; x^2 = \frac{9}{4} \;\rightarrow\; x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \;\rightarrow\; x_1 = +\frac{3}{2} \vee x_2 = -\frac{3}{2}$$

- $4 x^2 + 9 = 0$

$4 x^2 + 9 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = -\frac{9}{4}$ L'equazione non ammette soluzioni reali in quanto il quadrato di un numero reale è sempre non negativo, di conseguenza, l'equazione non è verificata per nessun valore dell'incognita.

Le soluzioni dell'equazione incompleta pura $ax^2 + c = 0$ dipendono dal segno del rapporto $-\frac{c}{a}$ :

- se $-\frac{c}{a} > 0$ , ovvero se *a* e *c* sono discordi, l'equazione ammette le **due soluzioni reali e distinte**:
- se $-\frac{c}{a} < 0$ , ovvero se *a* e *c* sono concordi, l'equazione **non ammette soluzioni reali;**
- se $-\frac{c}{a} = 0$ , allora $c = 0$ , l'equazione ha **due radici reali coincidenti nulle** $x_1 = x_2 = 0$ .

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1** | $x^2 - 1 = 0$ | $x^2 = \frac{49}{25}$ | $16 x^2 = 1$ | $x^2 - 25 = 0$ |
| **2** | $x^2 - 9 = 0$ | $25 = 9 x^2$ | $x^2 + 36 = 0$ | $4 - x^2 = 0$ |
| **3** | $x^2 = 49$ | $4 - 9 x^2 = 0$ | $4 x^2 - 9 = 0$ | $9 x^2 - 25 = 0$ |
| **4** | $x^2 + 16 = 0$ | $2 x^2 - 1 = 0$ | $4 x^2 + 16 = 0$ | $1 + x^2 = 50$ |
| **5** | $27 x^2 - 3 = 0$ | $7 x^2 = 28$ | $4 x^2 - 4 = 0$ | $5 x^2 - 125 = 0$ |
| **6** | $0{,}04\, x^2 = 1$ | $x^2 - 0{,}01 = 0$ | $\frac{1}{2} x^2 - 2 = 0$ | $0{,}5\, x^2 - 4{,}5 = 0$ |

**7** $2 x^2 - 32 = 0$ R. $x_1 = +4 \vee x_2 = -4$

**8** $3 x^2 + 3 = 0$ R. $I.S. = \emptyset$

**9** $x^2 - 3 = 0$ R. $x_1 = \sqrt{3} \vee x_2 = -\sqrt{3}$

**10** $x^2 + 4 = 0$ R. $I.S. = \emptyset$

**11** $5 x^2 - 3 = 0$ R. $x_1 = \frac{\sqrt{15}}{5} \vee x_2 = -\frac{\sqrt{15}}{5}$

**12** $4\left(x^2 - \frac{3}{4}\right) = 13$ R. $x_1 = +2 \vee x_2 = -2$

## ►3. Risoluzione equazione incompleta spuria

L'equazione si presenta nella forma: $a x^2+b x = 0$ .
Si raccoglie a fattore comune la $x$: $x(a x+b) = 0$
applicando la legge di annullamento del prodotto si ottiene: $x = 0$ *oppure* $a x+b = 0$
Le soluzioni dell'equazione incompleta spuria sono: $x_1 = 0 \vee x_2 = -\frac{b}{a}$

Esempio

- $2 x^2-4 x = 0$ .

Raccogliendo a fattor comune si ha: $2 x(x-2) = 0$ da cui, applicando la legge di annullamento del prodotto, segue che $2x=0 \vee x-2=0$ da cui $x=0 \vee x=2$ .

**13** $x^2-3 x=0$ $\quad x^2+2 x=0$
**14** $x^2-x=0$ $\quad x^2+x=0$
**15** $\sqrt{2} x^2+\sqrt{3} x=0$ $\quad x^2+\sqrt{2} x=0$
**16** $2x^2+6x=0$ $\quad 9x^2+16x=0$
**17** $5x=25x^2$ $\quad 81x^2=9x$
**18** $-2x^2+4x=0$ $\quad 7x^2-2x=0$
**19** $5\sqrt{2} x^2-2\sqrt{2} x=0$ $\quad \frac{1}{2} x-\frac{1}{4} x^2=0$
**20** $\frac{1}{6} x^2+\frac{1}{4} x=0$ $\quad 3x^2-\frac{4}{3} x=0$
**21** $3 x^2-2 x=0$ R. $x_1=0 \vee x_2=\frac{2}{3}$
**22** $7 x^2+2 x=0$ R. $x_1=0 \vee x_2=-\frac{2}{7}$
**23** $x^2+5 x=0$ R. $x_1=0 \vee x_2=-5$
**24** $18 x^2-36 x=0$ R. $x_1=0 \vee x_2=2$
**25** $1000 x-2000 x^2=0$ R. $x_1=0 \vee x_2=\frac{1}{2}$
**26** $6 x^2=5 x$ R. $x_1=0 \vee x_2=\frac{5}{6}$
**27** $3 x^2-2 x=4 x$ R. $x_1=0 \vee x_2=2$
**28** $0{,}1 x^2-0{,}5 x=0$ R. $x_1=0 \vee x_2=5$
**29** $0{,}5 x^2+0{,}1 x=0$ R. $x_1=0 \vee x_2=0{,}2$
**30** $x^2-3 x=0$ R. $x_1=0 \vee x_2=3$

## ►4. Risoluzione equazione completa

Per risolvere l'equazione di secondo grado completa si applica una formula che si ottiene utilizzando il metodo del completamento del quadrato:

| | |
|---|---|
| $a x^2+b x+c = 0$ | |
| $4 a^2 x^2+4 a b x+4 a c = 0$ | si moltiplicano ambo i membri per *4a* |
| $4 a^2 x^2+4 a b x+4 a c+b^2 = b^2$ | si aggiunge ad ambo i membri $b^2$ |
| $4 a^2 x^2+4 a b x+b^2 = b^2-4 a c$ | si porta *4ac* a secondo membro |
| $(2 a x+b)^2 = b^2-4 a c$ | il primo membro risulta il quadrato di un binomio |
| $k = 2 a x+b$ | sostituiamo il binomio *2ax+b* con la la variabile *k* |
| $k^2 = b^2-4 a c$ | ora l'equazione diventa una equazione di secondo grado pura |
| $k_{1,2} = \pm\sqrt{b^2-4 a c}$ | calcoliamo le soluzioni in *k* |
| $2 a x+b = \pm\sqrt{b^2-4 a c}$ | al posto di *k* sostituiamo il binomio *2ax+b* |
| $2 a x = -b\pm\sqrt{b^2-4 a c}$ | si separa il monomio con l'incognita |
| $x_{1,2} = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4 a c}}{2 a}$ | si risolve l'equazione di primo grado rispetto alla *x* |

Si è soliti porre $\Delta = b^2-4 a c$ .

Le soluzioni sono quindi date dalla formula: $x_{1,2} = \dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2 a}$

$\Delta$ prende il nome di **discriminante** dell'equazione. La parola discriminante deriva dal verbo *discrimen* (=divisione); in effetti, il $\Delta$ permette di effettuare una distinzione tra la tipologia delle soluzioni di un'equazione di secondo grado. Si possono infatti presentare tre casi:

- Primo caso $\Delta = b^2-4 a c > 0$
  Il radicale $\sqrt{\Delta}$ è un numero reale e l'equazione ammette le **due soluzioni reali e distinte**:
  $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2 a} \vee x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2 a}$
- Secondo caso: $\Delta = b^2-4 a c = 0$
  L'equazione ammette **due radici reali e coincidenti** date dall'espressione: $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2 a}$
- Terzo caso: $\Delta = b^2-4 a c < 0$
  L'equazione **non ammette soluzioni reali**

<u>Esempi</u>

■ $3 x^2-5 x+2 = 0$

$a=+3,\ b=-5,\ c=+2;\ \rightarrow\ \Delta = b^2-4 a c\ \rightarrow\ \Delta = (-5)^2-4(+3)(+2) = 25-24 = 1$

$x_{1,2} = \dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2 a}\ \rightarrow\ x_{1,2} = \dfrac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{(+2)(+3)}\ \rightarrow\ x_{1,2}=\dfrac{5\pm 1}{6}\ \rightarrow\ x_1 = \dfrac{5+1}{6}=\dfrac{6}{6}=1 \vee x_2 = \dfrac{5-1}{6}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

■ $4 x^2-12 x+9 = 0$

$a=+4,\ b=-12,\ c=+9;\ \rightarrow\ \Delta = b^2-4 a c\ \rightarrow\ \Delta = (-12)^2-4(+4)(+9) = 144-144 = 0$

$x_{1,2} = -\dfrac{b}{2 a}\ \rightarrow\ x_{1,2} = \dfrac{-(-12)}{2(+4)}=\dfrac{12}{8}\ \rightarrow\ x_1 = x_2 = \dfrac{3}{2}$

■ $x^2-x+3 = 0$

$a=+1,\ b=-1,\ c=+3;\ \rightarrow\ \Delta = b^2-4 a c\ \rightarrow\ \Delta = (-1)^2-4(+1)(+3) = 1-12 < 0$

L'equazione non ha soluzioni reali.

**Riassumiamo e schematizziamo la risoluzione di un'equazione di secondo grado:**

| Equazioni incomplete | | | |
|---|---|---|---|
| Coefficienti | Nome | Equazione | Soluzioni |
| $b=0,\ c=0$ | Monomia | $a\,x^2 = 0$ | $x_1 = x_2 = 0$ |
| $b=0,\ c\neq 0$ | Pura | $a\,x^2 + c = 0$ | se $a$ e $c$ sono concordi $I.S.=\emptyset$<br>se $a$ e $c$ sono discordi $+\sqrt{-\frac{c}{a}} \vee x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$ |
| $b\neq 0,\ c=0$ | Spuria | $a\,x^2 + b\,x = 0$ | $x_1=0 \vee x_2=-\frac{b}{a}$ |

| Equazione $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ completa con $a\neq 0$ | |
|---|---|
| Discriminante | Soluzioni |
| $\Delta > 0$ | Due soluzioni reali e distinte $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2\,a}$ |
| $\Delta = 0$ | Due soluzioni reali e coincidenti $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2\,a}$ |
| $\Delta < 0$ | Nessuna soluzione reale $I.S. = \emptyset$ |

**31** $x^2 - 5\,x + 6 = 0$ R. $x_1=2 \vee x_2=3$

**32** $x^2 + x - 20 = 0$ R. $x_1=-5 \vee x_2=4$

**33** $2\,x^2 - 6\,x - 6 = 0$ R. $x_1=\frac{3+\sqrt{21}}{2} \vee x_2=\frac{3-\sqrt{21}}{2}$

**34** $x^2 - 3\,x + 6 = 0$ R. $I.S.=\emptyset$

**35** $-x^2 + x + 42 = 0$ R.. $x_1=-6 \vee x_2=7$

**36** $-x^2 + 10\,x - 25 = 0$ R. $x_1=x_2=5$

**37** $-2\,x^2 + 7\,x - 5 = 0$ R. $x_1=1 \vee x_2=\frac{5}{2}$

**38** $3\,x^2 + 2\,x - 1 = 0$ R. $x_1=-1 \vee x_2=\frac{1}{3}$

**39** $2\,x^2 - \sqrt{5}\,x - 1 = 0$ R. $x_1=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{13}}{4} \vee x_2=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{13}}{4}$

**40** $x^2 - 2\sqrt{3}\,x - 4 = 0$ R $x_1=\sqrt{3}-\sqrt{7} \vee x_2=\sqrt{3}+\sqrt{7}$

**41** $-2\,x^2 + \sqrt{2}\,x + 6 = 0$ R. $x_1=-\sqrt{2} \vee x_2=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

**42** $-\frac{4}{3}x^2 - x + \frac{3}{2} = 0$ R. $x_1=-\frac{3}{2} \vee x_2=\frac{3}{4}$

**43** $-\frac{4}{5}x^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{20} = 0$ R. $x_1=\frac{1}{8} \vee x_2=\frac{1}{2}$

**44** $x^2 - \sqrt{5}\,x - \sqrt{5} = 0$ R $x_1=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5+4\sqrt{5}}}{2} \vee x_2=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{5+4\sqrt{5}}}{2}$

**45** $x^2 - 3\,x - 2 = 0$ R. $x_1=\frac{3+\sqrt{17}}{2} \vee x_2=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$

**46** $-x^2 + 4\,x - 7 = 0$ R. $I.S.=\emptyset$

**47** $x^2 - 5\,x + 3 = 0$ R. $x_1=\frac{5+\sqrt{13}}{2} \vee x_2=\frac{5-\sqrt{13}}{2}$

**48** $x^2-4x+9=0$ R. $I.S.=\emptyset$

**49** $x^2-4x-9=0$ R. $x_1=2+\sqrt{13} \vee x_2=2-\sqrt{13}$

**50** $x^2+6x-2=0$ R. $x_1=-3+\sqrt{11} \vee x_2=-3-\sqrt{11}$

**51** $x^2-3x-\frac{5}{2}=0$ R. $x_1=\frac{3+\sqrt{19}}{2} \vee x_2=\frac{3-\sqrt{19}}{2}$

**52** $2x^2-3x+1=0$ R. $x_1=1 \vee x_2=\frac{1}{2}$

**53** $\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{3}x-1=0$ R. $x_1=1 \vee x_2=-\frac{3}{4}$

**54** $3x^2+x-2=0$ R. $x_1=-1 \vee x_2=\frac{2}{3}$

**55** $3x^2-\frac{2}{3}x-1=0$ R. $x_1=\frac{1+2\sqrt{7}}{9} \vee x_2=\frac{1-2\sqrt{7}}{9}$

**56** $\sqrt{2}x^2-x-3\sqrt{2}=0$ R. $x_1=-\sqrt{2}\,;\, x_2=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

## ►5. Formula ridotta per equazioni di secondo grado

Se il coefficiente *b* del termine di primo grado $a x^2+bx+c=0$ è un numero pari, conviene applicare una formula, detta **formula ridotta**, che semplifica i calcoli.
Supponiamo $b=2k$, l'equazione $ax^2+bx+c=0$ diventa $ax^2+2kx+c=0$ nella formula risolutiva dell'equazione si ottiene:

$$x_{1,2}=\frac{-2k\pm\sqrt{(2k)^2-4ac}}{2a}=\frac{-2k\pm\sqrt{4k^2-4ac}}{2a}=\frac{-2k\pm\sqrt{4(k^2-ac)}}{2a}=$$
$$=\frac{-2k\pm2\sqrt{k^2-ac}}{2a}=\frac{2\left(-k\pm\sqrt{k^2-ac}\right)}{2a}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}$$

Dato che $b=2k$ quindi $k=\frac{b}{2}$ la formula ridotta che conviene utilizzare quando *b* è pari è:

$$x_{1,2}=\frac{\left(-\frac{b}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}$$

La quantità sotto radice, uguale a $\frac{\Delta}{4}$, è detta anche **discriminante ridotto**.

Vediamo qualche applicazione pratica della formula ridotta.

Esempi

- $x^2-4x+3=0$

Il coefficiente di primo grado è pari, per cui conviene utilizzare la formula ridotta :

$$x_{1,2}=\frac{\left(-\frac{b}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1(3)}}{1}=2\pm\sqrt{1}$$ quindi $x_1=1 \vee x_2=3$ .

- $-x^2-2x+24=0$

$$x_{1,2}=\frac{\left(-\frac{b}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-(-1)(24)}}{-1}=-1\pm\sqrt{25}$$ quindi $x_1=-6 \vee x_2=4$

- $-3x^2-6x+12=0$

Dividendo l'equazione per $-3$ si, per il secondo principio di equivalenza, l'equazione equivalente $x^2+2x-4=0$ Poiché il coefficiene della x è pari si può applicare la formula ridotta.

$$x_{1,2}=\frac{\left(-\frac{b}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-a\,c}}{a}=\frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-1\,(-4)}}{1}=-1\pm\sqrt{5}$$ quindi $x_1=-1+\sqrt{5}\vee x_2=-1-\sqrt{5}$

Quando b è pari e a vale 1, la formula si dice **ridottissima** $x_{1,2}=\left(-\frac{b}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-a\,c}$ .

■ $x^2-6x+8=0$

$$x_{1,2}=\left(-\frac{b}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-a\,c}=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm1\rightarrow x_1=2\,;\,x_2=4$$

Risolvi le seguenti equazioni, applicando quando possibile la formula ridotta o ridottissima.

57 $3x^2-2x-2=0$ R. $x_1=\frac{1+\sqrt{7}}{3}\vee x_2=\frac{1-\sqrt{7}}{3}$

58 $x^2+6x-3=0$ R. $x_1=-3+2\sqrt{3}\vee x_2=-3-2\sqrt{3}$

59 $4x^2-8x+3=0$ R. $x_1=\frac{1}{2}\vee x_2=\frac{3}{2}$

60 $7x^2-2x-5=0$ R. $x_1=1\vee x_2=-\frac{5}{7}$

61 $40x^2+80x-30=0$ R. $x_1=\frac{-2+\sqrt{7}}{2}\vee x_2=\frac{-2-\sqrt{7}}{2}$

62 $5x^2-4x+1=0$ R. $I.S.=\emptyset$

63 $5x^2-4x-9=0$ R. $x_1=-1\vee x_2=\frac{9}{5}$

64 $\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{3}{4}=0$ R. $x_1=\frac{-4+\sqrt{34}}{6}\vee x_2=-\frac{4+\sqrt{34}}{6}$

65 $6x^2-4x-2=0$ R. $x_1=1\vee x_2=-\frac{1}{3}$

66 $90x^2-180x-270=0$ R. $x_1=3\vee x_2=-1$

67 $\frac{3}{2}x^2-4x+2=0$ R. $x_1=2\vee x_2=\frac{2}{3}$

68 $\frac{4}{3}x^2-6x+6=0$ R. $x_1=3\vee x_2=\frac{3}{2}$

69 $x^2-6x+1=0$ R. $x_1=3+2\sqrt{2}\vee x_2=3-2\sqrt{2}$

70 $3x^2-12x-3=0$ R. $x_1=2+\sqrt{5}\vee x_2=2-\sqrt{5}$

71 $7x^2-6x+8=0$ R. $I.S.=\emptyset$

72 $3x^2-18x+27=0$ R. $x_1=x_2=3$

73 $9x^2+12x+1=0$ R. $x_1=\frac{-2+\sqrt{3}}{3}\vee x_2=-\frac{2+\sqrt{3}}{3}$

74 $9x^2-12x+4=0$ R. $x_1=x_2=\frac{2}{3}$

75 $4x^2-32x+16=0$ R. $x_1=4+2\sqrt{3}\vee x_2=4-2\sqrt{3}$

76 $3x^2+10x+20=0$ R. $I.S.=\emptyset$

## ►6. Esercizi vari sulle equazioni di secondo grado

*Esercizi vari sulle equazioni di 2° grado*

**77** $(x-2)(3-2x)=x-2$ R. $x_1=1 \vee x_2=2$

**78** $(3x+1)\left(\frac{5}{2}+x\right)=2x-1$ R. $x_1=-1 \vee x_2=-\frac{7}{6}$

**79** $3x-x^2=x^2+3(x-2)$ R. $x_1=\sqrt{3} \vee x_2=-\sqrt{3}$

**80** $(2x-3)(2x+3)=27$ R. $x_1=-\frac{3}{2} \vee x_2=+\frac{3}{2}$

**81** $2(x-1)(x+1)=2$ R. $x_1=-1 \vee x_2=+1$

**82** $(2x-1)(4-x)-11x=(1-x)^2$ R. $I.S.=\emptyset$

**83** $x(1-5x)=[3-(2+5x)]x-(x^2-1)$ R. $x_1=-1 \vee x_2=+1$

**84** $2x^2=x+x^2-(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})$

**85** $(x-3)^2=9-6x$ R. $x_1=x_2=0$

**86** $(x-2)^3-1=x^3+12x-11$ R. $x_1=\frac{\sqrt{3}}{3} \vee x_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

**87** $\frac{3x-2}{2}=x^2-2$ R. $x_1=2 \vee x_2=-\frac{1}{2}$

**88** $\frac{x-3}{2}-\frac{x^2+2}{3}=1+x$ R. $I.S.=\emptyset$

**89** $\frac{x-2}{3}-(3x+3)^2=x$ R. $x_1=-1 \vee x_2=-\frac{29}{27}$

**90** $(x+5)^2=5(4x+5)$ R. $x_1=0 \vee x_2=10$

**91** $(x-2)^3-x^3=x^2-4$ R. $x_{1,2}=\frac{6\pm 2\sqrt{2}}{7}$

**92** $\frac{1}{2}(x-2)^2-x=2$ R. $x_1=0 \vee x_2=6$

**93** $(x+1)^3-(x+2)^2=\frac{2x^3-1}{2}$ R. $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{21}}{4}$

**94** $\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{2x-5}{3}=-\frac{5}{3}x$ R. $I.S.=\emptyset$

**95** $(x-1)(x+3)=3x^2-3$ R. $x_1=0 \vee x_2=1$

**96** $(x+2)^3+4x^2=(x-2)^3+16$ R. $x_1=x_2=0$

**97** $(3x-2)^2-4=6x^2$ R. $x_1=0 \vee x_2=4$

**98** $(2-x)^3-(2-x)^2=\frac{3-4x^3}{4}$ R. $I.S.=\emptyset$

**99** $(x+200)^2+x+200=2$ R. $x_1=-199 \vee x_2=-202$

**100** $(4-3x)^3+27x^3=64+24x$ R. $x_1=0 \vee x_2=\frac{14}{9}$

**101** $3(34x-47)^2-2(34x-47)=1$ R. $x_1=\frac{24}{17} \vee x_2=\frac{70}{51}$

**102** $\left(\frac{x-1}{3}-\frac{x}{6}\right)^2=(x+1)^2$ R. $x_1=-\frac{8}{5} \vee x_2=-\frac{4}{7}$

**103** $\frac{1}{\sqrt{10}}x^2+1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)x$

**104** $(3x-1)^2+(2x+1)^2=(3x-1)(2x+1)$ R. $I.S.=\emptyset$

**105** $(x^2+x+1)(x^2-x-1)=(x^2-1)^2$ R. $x_{1,2}=1\pm\sqrt{3}$

**106** $(x+1)^4-(x+1)^3=x^3(x+4)-x(x+1)^2+3x$ R. $x_1=0 \vee x_2=\frac{1}{5}$

**107** $\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)^3+\frac{1}{6}x^2=\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)^3+\frac{1}{6}(x+1)^3+\frac{3}{2}x^4$ R. $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{141}}{6}$

**108** $\frac{x-2}{2}\cdot\frac{x+2}{3}+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]+4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{3}$ R. $x_1=0 \vee x_2=\frac{2}{25}$

**109** $(2-3x)^2-1=8(1-2x)+(2x+1)^2-1$ R. $x_1=-1 \vee x_2=+1$

**110** $x^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})x-\sqrt{6}=0$ R. $x_1=-\sqrt{3} \vee +\sqrt{2}$

**111** $\frac{2\sqrt{3}x+1}{\sqrt{2}}-(x-\sqrt{3})^2=\frac{1-3\sqrt{2}x}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}x(\sqrt{2}+2)$ R. $I.S.=\emptyset$

**112** $\sqrt{3}(2x-30)^2-2\sqrt{27}(60-4x)=0$ R. $x_1=9 ; x_2=15$

**113** $\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$ R. $x_1=-\frac{2}{3} \vee x_2=\frac{2}{13}$

**114** $\frac{x^2-16}{9}+\frac{(x-1)^2}{3}=\frac{x(x-2)}{9}+\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$ R. $x_{1,2}=\frac{31\pm\sqrt{433}}{24}$

**115** $\frac{(x-1)(x+2)}{2}+\frac{(x+2)(x-3)}{3}=\frac{(x-3)(x+4)}{6}$ R. $x_1=-1 \vee x_2=\frac{1}{2}$

**116** $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3x^2-7x+2}{2}-\frac{x}{4}+\frac{5x-13}{2}=\frac{2}{3}x(1-x)-\frac{73}{12}x+\frac{15}{12}$ R. $x_1=-6 \vee x_2=+6$

**117** $\frac{(x^2+2x+1)^2}{4}+\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{(x^4-1)}{8}-(2x^2-2x+1)^2+9x^3\left(\frac{3}{8}x-1\right)+\frac{1}{4}x^2(x^2+20)=0$

R. $x_{1,2}=1\pm\frac{\sqrt{5}}{4}$

<u>Esempi</u>

■ $(x-1)^2=16$

Sostituendo $x-1=t$ l'equazione diventa $t^2=16$ , le cui soluzioni sono $t_1=-4 ; t_2=+4$ . Per determinare la x sostituiamo i valori travati della relazione $x-1=t$ si ha

$$\begin{cases} x-1=-4 \rightarrow x=-4+1=-3 \\ x-1=+4 \rightarrow x=+4+1=+5 \end{cases}$$

■ $(x-1)^2+2(x-1)=0$

Sostituendo $x-1=t$ l'equazione diventa $t^2+2\text{t}=0$ che si risolve $t(t+2)=0 \rightarrow t_1=0 \wedge t+2=0 \rightarrow t_2=-2$ . Sostituendo nella relazione $x-1=t$ si ha

$$\begin{cases} x-1=0 \rightarrow x=+1 \\ x-1=-2 \rightarrow x=-2+1=-1 \end{cases}$$

*Risolvi le seguenti equazioni con opportune sostituzioni:*

**118** $(4\text{x}+3)^2=25$ R. $x_1=-2 \vee x_2=\frac{1}{2}$

**119** $(x-5)^2+9=0$ $\quad$ $(3\text{x}-1)^2-36=0$

**120** $4(2\text{x}+1)^2=36$ $\quad$ $(3\text{x}-5)^2-49=0$

**121** $3(2\text{x}+5)^2-4(2\text{x}+5)=0$ $\quad$ $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-2\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$

## ►7. Discussione e risoluzione di equazioni numeriche frazionarie

Problema

Sono assegnate le due frazioni algebriche $f_1 = \frac{3x+2}{1+x}$ e $f_2 = \frac{2x+3}{x-2}$. Esiste almeno un **valore reale** che sostituito alla variabile $x$ rende $f_1$ uguale ad $f_2$ ?

La soluzione al problema viene cercata impostando l'equazione $\frac{3x+2}{1+x} = \frac{2x+3}{x-2}$, che presenta l'incognita al denominatore. Ricordiamo che:

DEFINIZIONE: Un'**equazione** in cui compare l'incognita al denominatore si chiama **frazionaria o fratta.**

Possiamo senz'altro affermare che, se esiste il valore reale che rende $f_1$ uguale ad $f_2$, esso non deve annullare né il denominatore di $f_1$, né quello di $f_2$.

**Procedura risolutiva**

1° passo: determiniamo il m.c.m. dei denominatori: $m.c.m. = (1+x)\cdot(x-2)$

2° passo: imponiamo le **C**ondizioni di **E**sistenza: $C.E.\ x \neq -1 \wedge x \neq 2$
La ricerca del valore che risolve il problema viene ristretta ai numeri reali appartenenti all'insieme, $D = R - \{-1, 2\} = I.D.$ detto **D**ominio dell'equazione o **I**nsieme di **D**efinizione

3° passo: applichiamo il primo principio d'equivalenza trasportando al primo membro la frazione del secondo membro $\frac{3x+2}{1+x} - \frac{2x+3}{x-2} = 0$. Riduciamo allo stesso denominatore (m.c.m.)

$$\frac{(3x+2)\cdot(x-2)-(2x+3)\cdot(1+x)}{(1+x)\cdot(x-2)} = 0$$

4° passo: applichiamo il secondo principio moltiplicando ambo i membri per il m.c.m., certamente diverso da zero per le condizioni poste; l'equazione diventa: $(3x+2)\cdot(x-2)-(2x+3)\cdot(1+x) = 0$

5° passo: svolgendo i calcoli ci accorgiamo che l'equazione è di secondo grado; portiamo l'equazione alla forma canonica: $3x^2-6x+2x-4-2x-3-2x^2-3x = 0 \rightarrow x^2-9x-7 = 0$

6° passo: calcoliamo il discriminante: $\Delta = b^2-4ac = 81+28 = 109$ essendo positivo, l'equazione è determinata e ammette due soluzioni reali distinte:

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{109}}{2} \rightarrow x_1 = \frac{9-\sqrt{109}}{2} \vee x_2 = \frac{9+\sqrt{109}}{2}$$

7° passo: confrontiamo le soluzioni con le **C.E.** ; in questo caso le radici appartengono all'insieme **D**; diciamo che sono accettabili e l'insieme soluzione è: $\boldsymbol{I.S.} = \left\{\frac{9-\sqrt{109}}{2}, \frac{9+\sqrt{109}}{2}\right\}$

*Svolgiamo altri esempi per poi fissare la procedura risolutiva per un'equazione fratta:*

**122** Determina l'insieme soluzione dell'equazione: $\frac{x^2}{x^2-3x+2} = \frac{x-2}{x-1} + \frac{1}{x+2}$

1° passo: determiniamo il m.c.m. dei denominatori; per fare questo dobbiamo scomporre in fattori i denominatori. Riscriviamo: $\frac{x^2}{(x-2)(x-1)} = \frac{x-2}{x-1} + \frac{1}{x+2}$ il m.c.m. è $(x-2)(x-1)(x+2)$

2° passo: imponiamo le Condizioni di Esistenza: $C.E.\ x \neq 1 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq -2$ quindi $D = \mathbb{R} - \{1, 2, -2\} = I.D.$ .

3° passo: trasportiamo al primo membro ed uguagliamo a zero; riduciamo allo stesso denominatore (m.c.m.) ambo i membri dell'equazione: $\frac{x^3+2x^2-x^2+3x-2-x^3-2x^2+4x^2+8x-4x-8}{(x-2)(x-1)(x+1)} = 0$

4° passo: applichiamo il secondo principio di equivalenza moltiplicando ambo i membri per il m.c.m., certamente diverso da zero per le condizioni poste; l'equazione diventa: $3x^2+7x-10 = 0$

5° passo: calcoliamo il discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac = 49 + 120 = 169$ essendo positivo, l'equazione è determinata e ammette due soluzioni reali distinte: $x_{1,2} = \frac{-7 \pm 13}{6} \rightarrow x_1 = -\frac{10}{3} \vee x_2 = 1$

6° passo: confrontiamo con le C.E. ; in questo caso solo $x_1$ appartiene all'insieme D; diciamo che l'insieme soluzione è: $\boldsymbol{I.S.} = \left\{-\frac{10}{3}\right\}$ mentre $x_2 = 1$ non è accettabile.

**123** Determina l'insieme soluzione dell'equazione: $\frac{3(x+1)}{x-1} = 1 - \frac{2x-3}{x}$

1° passo: determiniamo il m.c.m. dei denominatori; $m.c.m. = x \cdot (x-1)$

2° passo: Imponiamo le **C**ondizioni di **E**sistenza: $\boldsymbol{C.E.\ x \neq 0 \ \wedge \ x \neq 1}$ quindi

*Prosegui tu riempiendo le parti lasciate vuote:*

3° passo: riduci allo stesso denominatore (m.c.m.) ambo i membri dell'equazione:

4° passo: applica il secondo principio moltiplicando ambo i membri per il m.c.m., certamente diverso da zero per le condizioni poste; l'equazione in forma canonica è:

5° passo: calcola il discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 48 = \ldots\ldots$ essendo negativo, l'equazione non ammette soluzioni reali.

6° passo: l'insieme soluzione è: $I.S. = \emptyset$ l'equazione è impossibile.

**124** Determina l'insieme soluzione dell'equazione: $\frac{6}{9x^2 - 12x + 4} + \frac{1}{3x - \frac{1}{2}} = 0$

1° passo: l'equazione è fratta quindi scomponiamo i denominatori per determinare il m.c.m.

$\frac{6}{(3x-2)^2} + \frac{2}{6x-1} = 0$ quindi $m.c.m. = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2° passo: **C**ondizioni di **E**sistenza: $\boldsymbol{C.E.} \ldots\ldots\ldots\ldots$ quindi $\boldsymbol{D} = \mathbb{R} - \{\ldots\ldots\ldots\ldots\} = \boldsymbol{I.D.}$

3° passo: esegui i calcoli per determinare la forma canonica:

4° passo: calcola il discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots$ essendo …….., l'equazione è determinata e ammette due soluzioni reali $\ldots\ldots\ldots\ldots x_1 = \ldots\ldots \vee x_2 = \ldots\ldots$

5° passo: confrontiamo con le C.E.; diciamo che **sono** ………… e l'insieme soluzione è: $\boldsymbol{I.S.} = \{\ldots\ldots\ldots\}$

*Determina l'**I**nsieme **S**oluzione delle seguenti equazioni frazionarie:*

**125** $\frac{3}{x}-2=x$ R. $x_1=-3 \vee x_2=1$

**126** $\frac{4-3x}{x}=\frac{3-2x}{x^2}$ R. $x_1=x_2=1$

**127** $\frac{1}{x}=\frac{1}{x+1}-1$ R. $I.S.=\emptyset$

**128** $\frac{x}{2}=\frac{x+2}{x-2}+1$ R. $x_1=0 \vee x_2=6$

**129** $\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}=0$ R. $x_1=-1 \vee x_2=-2$

**130** $\frac{3x}{x^2-9}+\frac{x}{2x-6}=1$ R. $x_{1,2}=\frac{9\pm 3\sqrt{17}}{2}$

**131** $\frac{x+9}{x-3}=2-\frac{x-3}{x+9}$ R. $I.S.=\emptyset$

**132** $\frac{x}{x+1}=\frac{4}{x+2}$ R. $x_{1,2}=1\pm\sqrt{5}$

**133** $\frac{4x-3}{x^2-4}-\frac{3x}{x-2}=\frac{4}{2-x}-\frac{4x}{2+x}$ R. $x_1=1$ ; $x_2=5$

**134** $\frac{3x+2}{2x^2-2x-12}-\frac{3-x}{4x-12}=-\frac{3}{x+2}$ R. $x_1=-19$ ; $x_2=2$

**135** $\frac{2x+1}{x}=\frac{x}{2x+1}$ R. $x_1=-1 \vee x_2=-\frac{1}{3}$

**136** $\frac{4-x}{18-2x^2}+\frac{2}{3-x}=\frac{6x}{4x+12}$ impossibile

**137** $x-1-\frac{1}{x-1}=\frac{6}{6-6x}$ impossibile

**138** $\frac{6x-6}{x^2-4x+3}+\frac{x^2-x-6}{x-3}=-2$ R. $x_1=-3$ ; $x_2=2$

**139** $\frac{x-4}{x-2}+\frac{x-1}{x^2-5x+6}-\frac{4-2x}{3-x}=0$ R. $x=-1$

**140** $\frac{x-3}{x-1}-\frac{4}{3}+\frac{x-1}{x+1}=0$ R. $x_{1,2}=3\pm\sqrt{10}$

**141** $\frac{x-1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{2+x}{x^2+x}=0$ R. $x_1=x_2=-1$

**142** $3\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{9}{3x-1}=10$

**143** $\frac{x+1}{\sqrt{2}-x}=\frac{x-2}{x-2\sqrt{2}}$ R. $x_1=0\,;\,x_2=\frac{1+3\sqrt{2}}{2}$

**144** $\frac{1}{x^2+x-2}-\frac{1}{x^3-2x^2+x}=\frac{1}{3x^2-3x}$ R. $x_1=-\frac{1}{2}\,;\,x_2=4$

**145** $\frac{1}{2x-4}-\frac{2}{x+1}-\frac{x}{x-1}=\frac{1}{x^2-3x+2}$ R. $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{97}}{4}$

**146** $\frac{2x}{x^2+2x-8}-\frac{2x+7}{x^2-3x-4}=0$ R. $x_1=-2$ ; $x_2=\frac{28}{17}$

**147** $\frac{1-x}{x^2-4x+3}-\frac{4}{9-x^2}+\frac{x-3}{x^2+4x+3}=-\frac{5}{3-x}$ R. $x_1=-5$ ; $x_2=-\frac{1}{5}$

**148** $\frac{4x-7}{x+2}+\frac{1-6x^2}{x^2-5x+6}=\frac{x}{2x^2-2x-12}-2$ impossibile

**149** $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}=\frac{3}{(x-2)^3}$ R. $x_1=-1$ ; $x_2=3$

**150** $\frac{1}{x+3}-\frac{5(x+2)}{(x+3)^2}=\frac{5x-1}{(x+3)^3}$ R. $x_1=-5$ ; $x_2=-1$

**151** $\frac{3}{(3x-6)^2}-\frac{x^2-4}{(3x-6)^4}$ R. $x=\frac{28}{13}$

**152** $\frac{2x}{x^2-2x+1}=\frac{-7}{3x^2-21x+18}+\frac{2x}{x^2-3x+2}$ R. $x_1=-14$ ; $x_2=-1$

**153** $\frac{5x-3}{x^2-5x}+\frac{2}{x}=\frac{3x}{x^2+3x}-\frac{2}{x+3}-\frac{4}{5-x}$ R. $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{313}}{4}$

**154** $\frac{x-9}{4x-x^2}-\frac{3x+2}{2-x}=\frac{x-5}{x+2}+\frac{2x^4+6x^3}{x(x-4)(x^2-4)}$ impossibile

**155** $\frac{3-3x}{x^2-1}+\frac{8x}{2-2x}=0$ R. $x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{97}}{8}$

**156** $\frac{1}{x^2-9}+\frac{2}{x-3}+\frac{2x}{3x+8}+\frac{31}{3x^2-27}=\frac{1}{3}$ R. $x_1=-1 \vee x_2=1$

**157** $\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}}{\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x+1}}=\frac{2x}{1-x}-\frac{2x}{1+x}$ R. $x_1=-\frac{1}{3} \vee x_2=\frac{1}{3}$

**158** $\frac{x+1}{x-2\sqrt{3}}-\frac{1-x}{x+2\sqrt{3}}=\frac{x^2+8}{x^2-12}$ R. $x_1=\sqrt{6}-\sqrt{2} \vee x_2=\sqrt{2}-\sqrt{6}$

**159** $\left(\frac{x+1}{x}\right)^2-\frac{2(3x-1)}{x^2}=5$ R. $x_1=-\frac{3}{2} \vee x_2=\frac{1}{2}$

**160** $\frac{(x-2)^2}{x^2-1}+\frac{x+2}{x+1}=\frac{x}{2x+2}$ R. $x_1=\frac{4}{3} \vee x_2=3$

**161** $-\frac{x^2}{x+2}+\frac{2x}{x-2}=\frac{-x+x^3}{x^2-4}$ R. $x_1=0 \vee x_2=3$

**162** $\frac{5}{x+1}+\frac{2x}{x-2}=\frac{6x^2-10}{x^2-x-2}$ R. $x_1=0 \vee x_2=\frac{7}{4}$

**163** $\frac{x+1}{x-2}-\frac{3x}{x+3}=\frac{x^2+2x}{x^2+x-6}$ R. $x_1=-\frac{1}{3} \vee x_2=3$

**164** È vero che in $\mathbb{R}$ $\frac{3}{1+x^2}=\frac{3}{x^4+2x^2+1}$ e $\frac{2x+14}{x^3-x^2+4x+4}-\frac{4}{x-1}=\frac{2}{x^2+4}$ sono equivalenti?

**165** Verifica che vale 1 il prodotto delle soluzioni dell'equazione $\frac{x}{1-x^3}+\frac{2x-2}{x^2+x+1}=0$ .

**166** Per l'equazione $\frac{2x+1}{1+x}+\frac{5}{1-x}-\frac{2}{x^2-1}=0$ stabilisci quali delle seguenti proposizioni sono vere dando una breve spiegazione anche per le proposizioni che ritieni false.

- L'equazione è determinata nel suo Dominio V F
- Il m.c.m. dei suoi termini è $(1-x)\cdot(x^2-1)$ V F
- Il suo I.S. è $I.S.=\{-1,4\}$ V F
- Nelle forma canonica i tre coefficienti sono numeri pari V F

**167** Sull'asse reale rappresenta il **D**ominio e l'**I**nsieme **S**oluzione dell'equazione $\frac{x+2}{x}=2+\frac{x}{x+2}$ .

**168** Stabilisci se esiste qualche numero reale per cui la somma delle due frazioni

$f_1 = \frac{2-x}{x+2}$ *e* $f_2 = \frac{x+1}{x-1}$ è uguale a $\frac{9}{5}$ .

**169** L'espressione $E = \frac{4x}{1-x^2} + \frac{1-x}{1+x} - \frac{1+x}{1-x}$ non assume mai il valore –1. VERO o FALSO?

## ►8. Discussione e risoluzione di equazioni letterali

Ricordiamo la:

DEFINIZIONE. Una equazione è letterale se i coefficienti dell'incognita sono espressioni letterali, cioè se oltre all'incognita (in genere indicata con la lettera x) compare un'altra lettera (in genere a, b, k, ….).

Esempio

- *L'equazione* $k x^2 - (2k-1)x + (k-3) = 0$ *è letterale di secondo grado in forma canonica; i suoi coefficienti dipendono dal parametro* $k$ .

Il parametro $k$ può assumere qualunque valore numerico e l'equazione rappresenta una famiglia di equazioni le cui caratteristiche variano a seconda dei valori attribuiti al parametro.
Notiamo subito che se $k$ assume il valore zero, l'equazione non è più di secondo grado, se $k$ assume il valore 3, l'equazione è ancora di secondo grado incompleta (spuria) mancando del termine noto.
**Discutere** un'equazione letterale di secondo grado significa analizzare come varia l'equazione, e quindi il suo insieme delle soluzioni, al variare del parametro. L'obiettivo è quello di stabilire per quali valori reali di $k$ l'equazione ammette soluzioni reali.
Ricordando che le soluzioni di un'equazione di secondo grado si determinano con la formula

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ in cui compaiono i tre coefficienti a, b, c. Procediamo analizzando:

- **il primo coefficiente** $a = k$ : se $k = 0$ l'equazione diventa $x - 3 = 0$ di primo grado con $I.S. = \{3\}$ ;
- **il secondo coefficiente** $b = -2k+1$ : se è nullo, ossia se $k = \frac{1}{2}$ l'equazione diventa $\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2} = 0$ equazione pura con due soluzioni reali opposte $x_1 = -\sqrt{5} \vee x_2 = \sqrt{5}$ ;
- **il terzo coefficiente** $c = k-3$ : se è nullo, cioè se $k = 3$ l'equazione diventa $3x^2 - 5x = 0$ , equazione spuria con due soluzioni reali $x_1 = 0 \vee x_2 = \frac{5}{3}$

Prima conclusione: per tutti i valori di $k$ dell'insieme $\mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{2}, 3\right\}$ l'equazione è completa e l'esistenza di soluzioni reali dipende dal discriminante.

- **calcoliamo il discriminante**: $\Delta = (-2k+1)^2 - 4k(k-3) = 8k+1$ , quindi
  1. se $8k+1 < 0 \quad \rightarrow \quad k < -\frac{1}{8}$ l'equazione non ammette soluzioni reali e $I.S. = \emptyset$ ;
  2. se $8k+1 \geq 0 \quad \rightarrow \quad k \geq -\frac{1}{8}$ l'equazione ammette due soluzioni reali:
     2.1 distinte se $k > -\frac{1}{8} \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{(2k-1) \pm \sqrt{8k+1}}{2k}$
     2.2 coincidenti se $k = -\frac{1}{8} \quad \rightarrow \quad x_1 = x_2 = 5$

Riassumendo:

| $k\,x^2-(2k-1)x+(k-3)=0$ *con* $k\in\mathbb{R}$ | | |
|---|---|---|
| Condizioni sul parametro | Insieme soluzione | Equazione |
| $k=0$ | $x=3$ | Di primo grado |
| $k=\frac{1}{2}$ | $x_1=-\sqrt{5} \vee x_2=+\sqrt{5}$ | Pura |
| $k=3$ | $x_1=0 \vee x_2=\frac{5}{3}$ | Spuria |
| $k\in\mathbb{R}-\left\{0,\frac{1}{2},3\right\}$ | | Completa: $\Delta=8k+1$ |
| $k<-\frac{1}{8}$ | $\Delta<0$ non esistono soluzioni reali $I.S.=\emptyset$ | |
| $k\geq-\frac{1}{8}$ | $\Delta\geq 0$ esistono soluzioni reali | |
| $k>-\frac{1}{8}$ reali distinte | $x_1=\frac{(2k-1)-\sqrt{8k+1}}{2k} \vee x_2=\frac{(2k-1)+\sqrt{8k+1}}{2k}$ | |
| $k=-\frac{1}{8}$ reali coincidenti | $x_1=x_2=5$ | |

Esempio

- *Discutere, al variare di* $k\in\mathbb{R}$ *la realtà delle radici dell'equazione* $x^2-3x+1-k=0$ .

Osserviamo che il primo e il secondo coefficiente sono indipendenti dal parametro *k*, quindi analizziamo il terzo coefficiente: $c=1-k$ : se $k=1$ l'equazione diventa un'equazione spuria con due radici reali $x_1=0 \vee x_2=3$ .
Prima conclusione: per tutti i valori di k dell'insieme $\mathbb{R}-\{1\}$ l'equazione è completa e l'esistenza di soluzioni reali dipende dal discriminante.
Calcoliamo il discriminante: $\Delta=9-4(1-k)=4k+5$ , quindi:

1. se $k<-\frac{5}{4}$ l'equazione non ammette soluzioni reali e $I.S.=\emptyset$
2. se $k\geq-\frac{5}{4}$ l'equazione ammette due radici reali
   2.1. distinte se $k>-\frac{5}{4} \rightarrow x_1=\frac{3-\sqrt{4k+5}}{2} \vee x_1=\frac{3+\sqrt{4k+5}}{2}$
   2.2. coincidenti se $k=-\frac{5}{4} \rightarrow x_1=x_2=\frac{3}{2}$

Riassumendo

| $x^2-3x+1-k=0$ *con* $k\in\mathbb{R}$ | | |
|---|---|---|
| Condizioni sul parametro | Insieme soluzione | Equazione |
| $k=1$ | $x=3$ | Spuria |
| $k\in\mathbb{R}-\{1\}$ | | Completa: $\Delta=4k+5$ |
| $k<-\frac{5}{4}$ | $\Delta<0$ non esistono soluzioni reali $I.S.=\emptyset$ | |
| $k\geq-\frac{5}{4}$ | $\Delta\geq 0$ esistono soluzioni reali | |
| $k>-\frac{5}{4}$ reali distinte | $x_1=\frac{3-\sqrt{4k+5}}{2} \vee x_2=\frac{3+\sqrt{4k+5}}{2}$ | |
| $k=-\frac{5}{4}$ reali coincidenti | $x_1=x_2=\frac{3}{2}$ | |

Esempio

- ■ *Discutere la seguente equazione letterale:* $\frac{x^2}{m-1}+3+m=\frac{2mx}{m-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)$

L'equazione pur presentando delle frazioni è intera, in quanto l'incognita $x$ non compare al denominatore, dipendente solo dal parametro $m$.
Osservazione: se $m=0$ oppure $m=1$ l'equazione è priva di significato.
Procediamo ponendo la condizione sul parametro ***C.E.*** $m\neq 0 \wedge m\neq 1$.

- 1° passo: trasportiamo a sinistra del segno di uguaglianza i termini di destra ed eseguiamo il calcolo nella parentesi: $\frac{x^2}{m-1}+3+m-\frac{2mx}{m-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)=0 \rightarrow \frac{x^2}{m-1}+3+m-\frac{2mx}{m-1}-\frac{2mx}{m-1}\cdot\frac{1}{m}$ ;
- 2° passo: semplifichiamo nell'operazione di moltiplicazione il fattore *m*, avendo posto nelle C.E. $m\neq 0$ $\frac{x^2}{m-1}+3+m-\frac{2mx+2x}{m-1}=0$ ;
- 3° passo: riduciamo allo stesso denominatore e applichiamo il secondo principio d'equivalenza delle equazioni, essendo $m\neq 1$ per le C.E. Si ha: $x^2+3m-3+m^2-m-2mx-2x=0$ ;
- 4° passo: l'equazione di secondo grado in forma canonica è: $x^2-2x(m+1)+m^2+2m-3=0$

Discussione

- il primo coefficiente $a=1$ non dipende dal valore del parametro, quindi l'equazione è di secondo grado per qualunque valore di $m\in\mathbb{R}-\{0,1\}$ ;
- il secondo coefficiente $b=-2(m+1)$ : se $m=-1$ l'equazione diventa $x^2-4=0$, equazione pura con due soluzioni reali opposte $x_1=-2 \vee x_2=2$ ;
- il terzo coefficiente $c=m^2+2m-3$ : se $c=m^2+2m-3=0 \rightarrow m=1 \vee m=-3$ (non consideriamo il caso $m=1$ per le C.E.) l'equazione diventa $x^2+4x=0$, equazione spuria con due soluzioni reali $x_1=0 \vee x_2=-4$ .

Prima conclusione: per tutti i valori di $m$ nell'insieme $\mathbb{R}-\{0,1,-1,-3\}$ l'equazione è completa e l'esistenza di soluzioni reali dipende dal discriminante.

- Calcoliamo il discriminante: $\frac{\Delta}{4}=(m+1)^2-(m^2+2m-3)=4$ ; esso risulta indipendente dal valore del parametro e sempre positivo, quindi l'equazione ammette due soluzioni reali distinte $x_1=m-1 \vee x_2=m+3$ .

Riassumendo in una tabella tutti i risultati ottenuti:

| $\frac{x^2}{m-1}+3+m=\frac{2mx}{m-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)$ *con* $m\in\mathbb{R}$ | | |
|---|---|---|
| Condizioni sul parametro | Insieme soluzione | Equazione |
| $m=0 \vee m=1$ | | Priva di significato |
| $m=-1$ | $x_1=-2 \vee x_2=2$ | Pura |
| $\cancel{m=1} \vee m=-3$ | $x_1=0;\ x_2=-4$ | Spuria |
| $m\in\mathbb{R}-\{0,1,-1,-3\}$ | $x_1=m-1 \vee x_2=m+3$ | Completa: $\Delta=4$ |

Esempio

- Discutere la seguente equazione parametrica: $\frac{k+x}{2x}\left(\frac{k+x}{k-x}+\frac{k-x}{k+x}\right)=k+\frac{2k}{kx-x^2}-1$

L'equazione è fratta, poiché nel denominatore compare l'incognita x.

- 1° passo: trasportiamo i termini del secondo membro a sinistra del segno uguale e scomponiamo in fattori i denominatori: $\frac{k+x}{2x}\left(\frac{k+x}{k-x}+\frac{k-x}{k+x}\right)-k-\frac{2k}{x(k-x)}+1=0$ ;
  Poniamo le Condizioni d'Esistenza: $C.E.\ x\neq 0 \wedge x\neq k \wedge x\neq -k$
- 2° passo: svolgiamo i calcoli entro la parentesi e moltiplichiamo $\frac{k^2+x^2}{x(k-x)}-k-\frac{2k}{x(k-x)}+1=0$ ;
- 3° passo: riduciamo allo stesso denominatore, applichiamo il secondo principio d'equivalenza e otteniamo la forma canonica $kx^2+kx\cdot(1-k)+k\cdot(k-2)=0$ **.**

**Osservazione**: con le condizioni poste sull'incognita: $C.E.\ x\neq 0 \wedge x\neq k \wedge x\neq -k$ , procediamo alla discussione dell'equazione:

- il primo coefficiente $a=k$ : se $k=0$ le **C.E.** si riducono a $x\neq 0$ e l'equazione diventa $0x=0$ indeterminata, quindi $I.S.=\mathbb{R}-\{0\}$ per le condizioni poste sull'incognita.
  Con la condizione $k\neq 0$ dividiamo tutti i coefficienti per *k*, l'equazione diventa $x^2+x\cdot(1-k)+(k-2)=0$ **;**
- il secondo coefficiente $b=(1-k)$ : se $k=1$ le **C.E.** sono $x\neq 0 \wedge x\neq 1 \wedge x\neq -1$ e l'equazione diventa $x^2-1=0$ , equazione pura con due soluzioni reali opposte $x_1=-1 \vee x_2=1$ non accettabili per le C.E.
- il terzo coefficiente $\boldsymbol{c=k-2}$ : se $k=2$ le **C.E.** sono $x\neq 0 \wedge x\neq 2 \wedge x\neq -2$ e l'equazione diventa $x^2-x=0$ , equazione spuria con due soluzioni $x_1=0 \vee x_2=1$ di cui $x_1=0$ non accettabile per le C.E.

*Prima conclusione*: per tutti i valori di $k$ dell'insieme $\mathbb{R}-\{0,1,2\}$ l'equazione è completa e l'esistenza di soluzioni reali dipende dal discriminante.

Calcoliamo il discriminante: $\Delta=(1-k)^2-4(k-2)=(k-3)^2$ ; essendo $\Delta\geq 0$ per qualunque $k$ , si avranno sempre due soluzioni reali

1. coincidenti se $k=3 \rightarrow x_1=x_2=1$ accettabili essendo le $C.E.\ x\neq -3 \wedge x\neq 0 \wedge x\neq 3$ ;
2. distinte se $k\neq 3 \rightarrow x_1=1 \vee x_2=k-2$ e confrontando con le C.E. si ottiene $x_1=1$ non accettabile se $k=-1$ ; $x_2$ sempre accettabile per $k\in\mathbb{R}-\{0,1,2,3,-1\}$ .

Riassumendo:

| $\frac{k+x}{2x}\left(\frac{k+x}{k-x}+\frac{k-x}{k+x}\right)=k+\frac{2k}{kx-x^2}-1\ con\ k\in\mathbb{R}$ | | | |
|---|---|---|---|
| Condizioni sul parametro | Condizioni sull'incognita | Insieme Soluzione | Equazione |
| | $x\neq -k \wedge x\neq 0 \wedge x\neq k$ | | |
| $k=0$ | $x\neq 0$ | $I.S.=\mathbb{R}-\{0\}$ | indeterminata |
| $k=1$ | $x\neq -1 \wedge x\neq 0 \wedge x\neq 1$ | $x_1=-1 \vee x_2=1$ non accet. | pura |
| $k=2$ | $x\neq -2 \wedge x\neq 0 \wedge x\neq 2$ | $x_1=0 \vee x_2=1$<br>$x_1$ non accettabile | spuria |
| $K\in\mathbb{R}-\{0,1,2\}$ | | | Completa $\Delta=(k-3)^2$ |
| $k=3$ | $x\neq -3 \wedge x\neq 0 \wedge x\neq 3$ | $x_1=x_2=1$ accettabili | |
| $K\in\mathbb{R}-\{0,1,2,3\}$ | $x\neq -k \wedge x\neq 0 \wedge x\neq k$ | $x_1=1 \vee x_2=k-2$ | |
| $k=-1$ | | $x_1=1$ non accettabile | |
| $K\in\mathbb{R}-\{0,1,2,3,-1\}$ | | $x_2=k-2$ accettabile | |

*Risolvi le seguenti equazioni letterali ed eventualmente discutile*

**170** $x^2-ax=0$ R. $x_1=0 \vee x_2=a$

**171** $ax^2-4a^3=0$ R. $a=0 \to \mathbb{R}$; $a\neq 0 \to x_1=-2a \vee x_2=2a$

**172** $x^2+(x-a)^2=2ax$ R. $x_1=\frac{1-\sqrt{2}}{2}a \vee x_2=\frac{1+\sqrt{2}}{2}a$

**173** $(2x-a)x=ax$ R. $x_1=0 \vee x_2=6$

**174** $x^2-ax-6a^2=0$ R. $x_1=-2a \vee x_2=3a$

**175** $(a-3)x^2-ax+3=0$ R. $x_1=1 \vee x_2=\frac{3}{a-3}$

**176** $ax^2-a^2x+x^2+x-ax-a=0$ R. $x_1=a \vee x_2=-\frac{1}{a+1}$

**177** $\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a-1}=0$ R. $a\neq 0 \wedge a\neq 1 \to x_1=0 \vee x_2=\frac{1-a}{a}$

**178** $\frac{x}{a+1}+\frac{x^2}{a-1}=0$ R. $a\neq -1 \wedge a\neq 1 \to x_1=0 \vee x_2=\frac{1-a}{a+1}$

**179** $\frac{2x}{3+kx}-\frac{x}{3-kx}=0$ R. $x_1=0 \vee x_2=\frac{1}{k}$

**180** $\frac{m-n}{mn}x^2=\frac{2m^2n}{m^2-n^2}-\frac{mn}{m+n}$ R. $x_{1,2}=\frac{\pm m}{m-n}$

**181** $\frac{mx-x^2}{m^2-3m+2}-\frac{x}{2-m}-\frac{m+1}{m-1}=0$ R. $x_1=m-2 \vee x_2=m+1$

**182** $\frac{x^2+2tx}{t^2-tx}-2=\frac{3t}{t-x}+\frac{x+t}{t}$ R. $x=-3t$

**183** $\frac{x-1}{k+1}-\frac{x^2+1}{k^2-1}=\frac{2k}{1-k^2}$ R. $x_1=-1\,; x_2=k$

**184** $2\cdot\sqrt{m}-x=\frac{m-1}{x}$ R. $x_{1,2}=\sqrt{m}\pm 1$

**185** Attribuisci il valore di verità alla seguente proposizione: “L’equazione $1-\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k-x}=0$ ammette due soluzioni reali coincidenti se $k=2$ ”.

**186** Nell’equazione $(a-1)\cdot(x+a)=\frac{x+a}{x-1}\cdot[x(a+1)-2a]$ , dopo aver completato la discussione, stabilisci per quali valori di *a* le radici che si ottengono dall’equazione completa sono entrambe positive.

**187** Motiva la verità della proposizione. “l’equazione $3kx^2+(x-k)^2+2k(k+x)=0$ ammette radici reali opposte se $k<-\frac{1}{3}$ ”

**188** Per quali valori del parametro *b* l’equazione $\frac{5x^2-4(b+1)}{b^2-4}-\frac{3x-1}{b+2}=\frac{3-2x}{2-b}-\frac{3x}{b^2-4}$ ha una soluzione negativa.

**189** Per l’equazione $(x-k-1)^2=(k+1)\cdot(k-2x+x^2)$ , completate le implicazioni:

$k=0 \to$ equazione …………… $\to$ *I.S.*=…………………

$k=-1 \to$ equazione …………… $\to$ $x_1$=…………………

………… $\to$ equazione pura $\to$ due soluzioni reali ………… se ………… $x_1$=……… $\vee$ $x_2$=………

**190** Stabilisci per quali valori del parametro *m* l’equazione $\frac{m+2}{x-2}+mx=2$ ammette soluzioni reali distinte. Se $m=-2$ sono accettabili le radici reali trovate?

**191** Dopo aver completato la discussione dell’equazione parametrica $\frac{x+1}{b-1}+\frac{b-1}{x+1}=\frac{3x^2+2-bx}{bx+b-1-x}$ , determina se esiste qualche valore del parametro per cui $I.S.=\left\{0,\frac{3}{2}\right\}$ .

**192** Le soluzioni dell'equazione $(x+b)^2=(b+1)^2$ con $b\neq -1$ sono:

[A] $x_1=-1\,;\ x_2=1$ [B] $x_1=-2b-1\,;\ x_2=1$ [C] $x_1=x_2=1$ [D] $x_1=1-2b\,;\ x_2=1$

**193** L'equazione $x^2-(2k+1)x+3k+1=0$ ammette soluzioni reali coincidenti per

[A] $k=1$ [B] $k=\dfrac{-2+\sqrt{7}}{2}$ [C] $k=0$ [D] $k_1=\dfrac{2+\sqrt{7}}{2} \vee k_2=\dfrac{2-\sqrt{7}}{2}$

## ►9. Relazioni tra soluzioni e coefficienti

Consideriamo una generica equazione di secondo grado $ax^2+bx+c=0$ nell'ipotesi in cui ammetta soluzioni reali (cioè $\Delta\geq 0$ ), e sommiamo e moltiplichiamo le soluzioni (o radici) dell'equazione:

- $x_1+x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=-\dfrac{2b}{2a}=-\dfrac{b}{a}$
- $x_1\cdot x_2=\left(\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cdot\left(\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=-\dfrac{b^2-\Delta}{2a}=\dfrac{b^2+4ac-b^2}{4a^2}=\dfrac{4ac}{4a^2}=\dfrac{c}{a}$

Quindi, la somma delle radici è $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ il prodotto delle radici è $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$

Questa relazione vale anche nel caso in cui le radici sono coincidenti (Δ=0) e nel caso in cui le radici non sono reali ( Δ<0).

Esempio

- *Determina le radici dell'equazione* $x^2+2x-15=0$ *senza applicare la formula risolutiva, ma sfruttando la somma e il prodotto delle radici stesse.*

Calcolo il discriminante $\Delta=64$ pertanto le radici sono reali. Esse hanno come somma $-\dfrac{b}{a}=-2$ e come prodotto $\dfrac{c}{a}=-15$ . Le coppie di numeri che hanno per prodotto -15 sono -3 e +5, oppure +3 e -5, oppure +15 e -1, oppure -15 e +1. Tra tutte queste coppie l'unica che ha per somma -2 è la coppia -5 e +3. Pertanto le soluzioni dell'equazione sono $x_1=3 \vee x_2=-5$ .

- *Determina la somma e il prodotto delle soluzioni dell'equazione* $2x^2+11x-3=0$ *senza risolverla.*

Calcolo il discriminante $\Delta=145>0$ pertanto le radici sono reali e distinte. Applicando le precedenti formule si ha: $x_1+x_2=-\dfrac{11}{2}$ ; $x_1\cdot x_2=-\dfrac{3}{2}$ .

- *Data l'equazione* $x^2\sqrt{2}+3x-2\sqrt{2}=0$ *, determina, senza risolverla, la somma e il prodotto delle radici.*

Calcolo il discriminante $\Delta=25>0$ pertanto le radici sono reali e distinte. Applicando le precedenti formule si ha: $x_1+x_2=-\dfrac{3}{\sqrt{2}}=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ; $x_1\cdot x_2=-\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-2$ .

- *Determina* somma e prodotto delle radici dell'equazione: $x^2+2x+15=0$

Calcolo il discriminante $\Delta=-56<0$ le radici non sono reali anche se la loro somma e il loro prodotto sono reali, infatti applicando le precendeti precedenti formule si ha: $x_1+x_2=-2$ e $x_1\cdot x_2=15$ .

- *Determina* somma e prodotto delle radici dell'equazione: $x^{21}-12x+36=0$

Il discriminate $\Delta=12^2-4\cdot 36=144-144=0$ . Le radici sono coindidenti, applicando la formula risolutiva si ha $x_1=x_2=6$ . Applicando le formule per calcolare somma è prodotto si ha $x_1+x_2=12$ e $x_1\cdot x_2=36$ .

- *Si determini la relazione che lega i coefficienti della generica equazione di secondo grado alla differenza delle radici.*

$x_1-x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}-\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=-\dfrac{2\sqrt{\Delta}}{2a}=-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{a}$ se $-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{a}>0 \to x_1>x_2$ , se $-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{a}<0 \to x_1<x_2$

- *Si determini la relazione che lega i coefficienti della generica equazione di secondo grado alla somma dei reciproci delle radici.*

Si vuole cioè esprimere $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ attraverso i coefficienti *a*, *b*, *c* dell'equazione.

Osserviamo in via preliminare che tale somma è possibile con la condizione $x_1 \neq 0 \wedge x_2 \neq 0$ che implica $c \neq 0$. Si ha: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1 \cdot x_2}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{c}$

**194** Si determini la relazione che lega i coefficienti della generica equazione di secondo grado alla somma dei quadrati delle radici. Si vuole esprimere, attraverso i coefficiente *a*, *b*, *c* dell'equazione la quantità $x_1^2+x_2^2$. Si tenga presente la seguente identità $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$.

**195** *Per ciascuna delle seguenti equazioni, completa la tabella sottostante:*

| equazioni | | discriminante | $I.S. \subset \mathbb{R}$ ? | $x_1+x_2$ | $x_1 \cdot x_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| a) | $5x^2+2x-1=0$ | $\Delta=$ | | | |
| b) | $-3x^2+1=0$ | $\Delta=$ | | | |
| c) | $6x^2+7x=0$ | $\Delta=$ | | | |
| d) | $-x^2+x-1=0$ | $\Delta=$ | | | |
| e) | $x^2+2x+1=0$ | $\Delta=$ | | | |
| f) | $2x^2-7x+1=0$ | $\Delta=$ | | | |

Senza risolvere le equazioni determina somma e prodotto dello loro radici

**196** $x^2+4ax+a=0$ $\quad$ $2x^2-\sqrt{2}x+1=0$

**197** $2x^2+6kx+3k^2=0$ $\quad$ $3\sqrt{3}x^2-6\sqrt{3}x+2=0$

**198** $\sqrt{2}x^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})x+4=0$ $\quad$ $(\sqrt{5}+\sqrt{3})x^2-(\sqrt{5}-\sqrt{3})x+1=0$

Scrivi un'equazione di secondo grado che ammettte come radici le soluzioni indicate:

**199** $x_1=-2;\ x_2=5$ $\quad$ $x_1=7;\ x_2=2$

**200** $x_1=-\frac{1}{2};\ x_2=\frac{3}{4}$ $\quad$ $x_1=\frac{2}{3};\ x_2=\frac{1}{3}$

**201** $x_1=\sqrt{2};x_2=\sqrt{5}$ $\quad$ $x_1=\frac{1+\sqrt{2}}{2};\ x_2=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

**202** Dell'equazione $3\sqrt{2}x^2-5x+\sqrt{2}=0$ è nota la radice $x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ; senza risolvere l'equazione determinare l'altra radice.

**203** Senza risolvere le equazioni stabilisci quale ha come soluzioni due numeri reali positivi e quale due numeri reali reciproci: $e_1:\ 5x^2+2x-1=0$; $e_2:\ -x^2+x-1=0$; $e_3:\ 2x^2-7x+1=0$

**204** Un'equazione di secondo grado ha il primo coefficiente uguale a $-\frac{3}{2}$ ; sapendo che l'insieme soluzione è $I.S.=\left\{-\frac{3}{4};\sqrt{2}\right\}$ determinate i suoi coefficienti *b* e *c*.

**205** Dell'equazione $ax^2+bx+c=0$ la somma delle soluzioni è $\frac{21}{5}$ e una soluzione è $x_1=3{,}2$ ; determinate $x_2$ .

**206** Determinate i coefficienti *a*, *b*, *c* di un'equazione di secondo grado sapendo che $x_1=1-\sqrt{2}$ , il prodotto delle soluzioni è $-1$ e la somma del secondo con il terzo coefficiente è $9$ .

**207** Determinate i coefficienti b e c dell'equazione $x^2+bx+c=0$ sapendo che una radice è tripla dell'altra e la loro somma è 20.

**208** Dopo aver completato la discussione dell'equazione parametrica $\frac{x+1}{b-1}+\frac{b-1}{x+1}=\frac{3x^2+2-bx}{bx+b-1-x}$ , determina se esiste qualche valore del parametro per cui $x_1+x_2=x_1 \cdot x_2$ .

### Determinare due numeri conoscendone la somma e il prodotto

Consideriamo la generica equazione di secondo grado $a x^2+bx+c=0$ nell'ipotesi in cui ammetta soluzioni reali $x_1$ e $x_2$ . Essendo $a \neq 0$ , è possibile dividere ambo i membri per *a*, ottenendo: $x^2+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=0$ . Dato che $s=x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ e $p=x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$ si avrà $x^2-s x+p=0$ .

Tale equazione risolve quindi la classe di problemi del tipo: "*determinare due numeri che sommati danno s e moltiplicati danno p.*"

Dall'equazione $x^2-s x+p=0$ discende che tali numeri esistono reali se e solo se $\Delta=s^2-4 p \geq 0$ ovvero se il quadrato della somma è maggiore o uguale al quadruplo del loro prodotto.

Esempi

- *Determinare due numeri che sommati danno 12 e moltiplicati danno 35.*

L'equazione che risolve il problema è: $x^2-12 x+35=0$ . Le soluzioni sono $x_1=5 \vee x_2=7$ .

- *Determinare due numeri che sommati danno 5 e moltiplicati danno 9.*

L'equazione che risolve il problema è: $x^2-5 x+9=0$ .

Poiché $\Delta=s^2-4 p=25-36=-11$ , l'equazione non ammette soluzioni reali e, di conseguenza, non esistono due numeri aventi la somma e il prodotto richiesti.

*Determina, se possibile, due numeri aventi somma e prodotto indicati:*

**209** $S=3 ;\ P=5$ $\qquad$ $S=7 ;\ P=2$

**210** $S=-3 ;\ P=-8$ $\qquad$ $S=-5 ;\ P=4$

**211** $S=\frac{1}{2} ;\ P=\frac{2}{3}$ $\qquad$ $S=\sqrt{2} ;\ P=2$

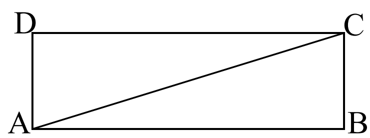
**212** $S=\sqrt{7}-1 ;\ P=6$ $\qquad$ $S=a+1 ;\ P=a^2$

### Problemi di natura geometrica di secondo grado

Problema

*Determinate la misura della diagonale di un rettangolo avente il perimetro di 80m. e l'area di 375m².*

| Dati | Obiettivo |
| --- | --- |
| $2 p=80$<br>$A=375\,(m^2)$ | $\overline{AC}$ ? |




Soluzione

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}$ per il teorema di Pitagora sul triangolo *ABC*.

Sono incognite le misura dei lati, quindi poniamo $\overline{AB}=x$ e $\overline{BC}=y$ con $x>0$ e $y>0$

Il problema si formalizza con il sistema: $\begin{cases} x+y=40 \\ x \cdot y=375 \end{cases}$ che esprime la ricerca di due numeri nota la loro somma 40 e il loro prodotto 375. I numeri richiesti sono le soluzioni reali positive dell'equazione $t^2-40 t+375=0$ e precisamente $t_1=15 \vee t_2=25$ .

Per come abbiamo disegnato la figura abbiamo quindi: $\overline{AB}=25\text{m} ; \overline{BC}=15\text{m}$ da cui $\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{850}\, m=5 \sqrt{34}\, m$ .

**213** Determinate il perimetro del rombo avente $area=24\,(m^2)$ , sapendo che la somma delle misure delle sue diagonali è $14\,(m)$ .

**214** Costruire i due triangoli isosceli aventi $area=120\,(m^2)$ sapendo che $31\,(m)$ è la somma delle misure della base con l'altezza.

**215** Il triangolo rettangolo *ABC* ha l'ipotenusa *AC* di $40\, cm$ e l'altezza *BH* ad essa relativa di *cm19*,2. Determinate la misura delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

## ►10. Scomposizione del trinomio di secondo grado

Si consideri il trinomio di secondo grado: $a x^2+b x+c$ e sia $a x^2+b x+c=0$ (con $\Delta\geq 0$ ) l'equazione associata a tale trinomio. Effettuiamo le seguenti operazioni:

$$a x^2+b x+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$$

Si sostituiscono le relazioni trovate nel precedente paragrafo

$$= a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2]=$$

$$= a[x^2-x_1 x+x_2 x+x_1\cdot x_2]=$$

Si effettua il raccoglimento parziale

$$= a[x(x-x_1)-x_2(x-x_1)] =$$
$$= a(x-x_1)(x-x_2)$$

È quindi possibile distinguere i casi:

- <u>I caso</u>: $\Delta>0$ Il trinomio di secondo grado può essere scomposto nella forma: $a(x-x_1)(x-x_2)$ ;
- <u>II caso</u>: $\Delta=0$ Il trinomio di secondo grado può essere scomposto nella forma: $a(x-x_1)^2$ ;
- <u>II caso</u>: $\Delta<0$ Il trinomio di secondo grado non può essere scomposto.

| Discriminante | Scomposizione |
|---|---|
| $\Delta>0 \rightarrow x_1\neq x_2$ | $a x^2+b x+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ |
| $\Delta=0 \rightarrow x_1=x_2$ | $a x^2+b x+c = a(x-x_1)^2$ |
| $\Delta<0 \rightarrow x_{1,} x_2\notin\mathbb{R}$ | $a x^2+b x+c$ è irriducibile |

<u>Esempi</u>

- *Scomporre in fattori* $x^2-5x+6$
  Applicando la formula ottenuta nel I caso si ha: $x^2-5x+6 = (x-2)(x+3)$
- *Scomporre in fattori* $x^2-12x+36$
  Applicando la formula ottenuta nel II caso si ha: $x^2-12x+36 = (x-6)^2$
- *Scomporre in fattori* $2x^2+3x+5$
  Essendo $\Delta = 9-40 = -31$ , il trinomio è irriducibile.
- *Scomporre il trinomio* $-5x^2+2x+1$ .

1° passo: calcolo del discriminante dell'equazione associata $-5x^2+2x+1=0$ :
$\Delta=(2)^2-4(-5)(+1)=4+20=24$ positivo, quindi esistono due radici reali distinte
2° passo: calcolo le radici dell'equazione associata $-5x^2+2x+1=0$ :

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{24}}{-10}=\frac{1\pm\sqrt{6}}{5} \text{ quindi } x_1=\frac{1-\sqrt{6}}{5} \vee x_2=\frac{1+\sqrt{6}}{5}$$

3° passo: scrivo la scomposizione: $-5x^2+2x+1 = -5\left(x-\frac{1-\sqrt{6}}{5}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{6}}{5}\right)$

- *Scomporre il trinomio* $6x^2+x-2$

1° passo: calcolo del discriminante dell'equazione associata $6x^2+x-2=0$ : $\Delta=1^2-4(-12)=49$ positivo, quindi esistono due radici reali distinte
2° passo: calcolo le radici dell'equazione associata $6x^2+x-2=0$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{12}=\frac{1\pm 7}{12} \text{ quindi } x_1=-\frac{2}{3} \vee x_2=\frac{1}{2}$$

3° passo: scrivo la scomposizione: $6x^2+x-2 = 6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right) = (2x-1)(3x+2)$

- *Scomporre il trinomio* $x^2-12x+36$

Il discriminante dell'equazione associata è $\Delta=12^2-4\cdot 36=0$ ; le soluzioni sono coincidenti, precisamente $x_{1,2}=\frac{+12\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{12}{2}=6$ Il polinomio si scompone $x^2-12x+36=(x+6)(x+6)=(x+6)^2$ . In questo caso si poteva riconoscer facilmente il quadrato del binomio.

**Attenzione**
Si vuole scomporre in fattori il trinomio $p=4x^2+2x-6$ , avente tutti i coefficienti pari.
Anche se osserviamo che tutti i suoi coefficienti sono pari, NON POSSIAMO DIVIDERE PER DUE, non essendo una equazione; il polinomio $p=2x^2+x-3$ è diverso da quello assegnato, mentre le equazioni associate all'uno e all'altro sono equivalenti. Nel procedere alla scomposizione possiamo usare l'equazione $2x^2+x-3=0$ le cui radici sono: $x_1=-\frac{3}{2}\vee x_2=1$ , e procedere alla scomposizione del trinomio assegnato: $p=4x^2+2x-6=4\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-1)$

**216** Scrivere un'equazione di secondo grado che ammetta le soluzioni $x_1=\frac{1}{2}$ e $x_2=3$ .

In virtù di quanto visto in questo paragrafo, si ha: $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)=0$ da cui: $x^2+3x-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0$

cioè: $x^2+5x-\frac{3}{2}=0$ ovvero: $2x^2+5x-3=0$

*Scomponi in fattori i seguenti trinomi di secondo grado*

**217** $x^2-5x-14=0$ R. $(x+2)(x-7)$

**218** $2x^2+6x-8=0$ R. $2(x-1)(x+4)$

**219** $-3x^2+\frac{39}{2}x-9$ R. $-3\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-6)$

**220** $-2x^2+7x+4$ R. $-2(x-4)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

**221** $4x^2+4x-15$ R. $4\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)$

**222** $3x^2+3x-6$ R. $3(x-1)(x+2)$

**223** $4x^2-9x+2$ R. $4(x-2)\left(x-\frac{1}{4}\right)$

**224** $2x^2+2x-\frac{3}{2}$ R. $2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)$

**225** $3x^2+5x-2$ R. $3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+2)$

**226** $4x^2-24x+20$ R. $4(x-5)(x-1)$

**227** $2x^2-\frac{4}{3}x-\frac{16}{3}$ R. $2(x-2)\left(x+\frac{4}{3}\right)$

**228** $\frac{4}{3}x^2+\frac{11}{3}x-\frac{7}{2}$ R. $\frac{4}{3}\left(x-\frac{3}{4}\right)\left(x+\frac{7}{2}\right)$

**229** $3x^2-6x-12$ R. $3(x-1-\sqrt{5})(x-1+\sqrt{5})$

**230** $2x^2-8x+2$ R. $2(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})$

**231** $-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{8}$ R. $-\frac{1}{2}\left(x-1-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$

**232** $-\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{2}x-\frac{45}{8}$ R. $-\frac{3}{4}\left(x+3-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(x+3+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

## ►11. Regola di Cartesio

Se in un'equazione di secondo grado i coefficienti sono tutti diversi da zero e il discriminante è non negativo, è possibile avere delle informazioni sui segni delle soluzioni senza calcolarle esplicitamente.

DEFINIZIONE. In un'equazione $a x^2+b x+c=0$ , dove i coefficienti sono tutti non nulli, le coppie di coefficienti *(a, b)* e (*b, c)* sono dette **coppie di coefficienti consecutivi.**
Una coppia di coefficienti consecutivi presenta:
una **permanenza** se i coefficienti hanno lo stesso segno;
una **variazione** se i coefficienti hanno segni diversi.

Esempi

| | $a$ | | $b$ | | $c$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $+2x^2-3x-1$ | $+$ | variazione | $-$ | permanenza | $-$ |
| $-x^2-3x-1$ | $-$ | permanenza | $-$ | permanenza | $-$ |
| $-3x^2+4x-1$ | $-$ | variazione | $+$ | variazione | $-$ |
| $+2x^2+x-1$ | $+$ | permanenza | $+$ | variazione | $-$ |

TEOREMA DI CARTESIO. In un'equazione di secondo grado $a x^2+b x+c=0$ con $a, b, c\neq 0$ e $\Delta=b^2-4ac\geq 0$ , il numero di radici positive è uguale al numero di variazioni presenti nelle coppie di coefficienti consecutivi. Se vi è una sola variazione, le radici sono discordi e il valore assoluto maggiore è quello della radice positiva se la variazione è nella coppia *(a,b)*, mentre è della radice negativa se la variazione è nella coppia *(b,c)*.

Cerchiamo di capire, attraverso degli esempi, perché i segni dei coefficienti dell'equazione di secondo grado completa hanno una stretta relazione con i segni delle sue soluzioni reali.

Esempio

*L'equazione* $x^2+2x-3=0$ *ha soluzioni reali in quanto* $\Delta=16>0$ *; dal momento che vi è una sola variazione, quello della coppia (b,c), l'equazione ha radici discordi e il valore assoluto maggiore è quello della radice negativa.*

Dimostriamo quanto è stato affermato ricordando che $x_1+x_2=-\frac{b}{a} \wedge x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ ; nell'equazione proposta si ha: $x_1+x_2=-\frac{2}{1} \wedge x_1\cdot x_2=-\frac{3}{1}$ dunque prodotto negativo e somma negativa. Il prodotto di due numeri è negativo quando i fattori sono discordi, quindi una soluzione positiva e una negativa. Chiamiamo $x_1$ la soluzione negativa e $x_2$ la soluzione positiva, poiché $x_1+x_2=-2<0$ deduciamo che in valore assoluto è più grande il numero negativo, cioè $|x_1|>|x_2|$ . Riassumendo:

| $x^2+2x-3=0$ | $a$ | | $b$ | | $c$ | $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ | $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $+$ | permanenza | $+$ | variazione | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |

Esempio

*L'equazione* $-x^2+5x-6=0$ *ha soluzioni reali in quanto* $\Delta=1>0$ *; dal momento che vi sono due variazioni, l'equazione ha due radici positive. Dimostra quanto è stato affermato completando la tabella e completando il ragionamento.*

| $-x^2+5x-6=0$ | $a$ | $b$ | $c$ | $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ | $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | …… | …… | …… | …… | …… | …… | …… |
| | ……… | ……… | | | | | |

Essendo il prodotto ………… e la somma ………. le due soluzioni reali sono………………… pertanto 2 ……………. → 2 soluzioni …………..

Esempi

- L'equazione $2x^2-6x-56$ ha soluzioni reali in quanto $\Delta=484>0$ ; dal momento che vi è una sola variazione, l'equazione ha radici discordi e il valore assoluto maggiore è quello della radice positiva dal momento che la variazione è nella coppia *(a,b)*.
- L'equazione $-3x^2-24x-21=0$ ha soluzioni reali in quanto $\Delta=324>0$ ; dal momento che non vi sono variazioni, l'equazione ha due radici negative.
- L'equazione $x^2-10x+25=0$ ha due soluzioni coincidenti in quanto $\Delta=0$ ; dal momento che vi sono due variazioni, le due radici coincidenti sono positive.

*Determina il segno delle soluzioni di ogni equazione senza risolverla, dopo aver verificato che* $\Delta\geq 0$

**233** $x^2-5x+6=0$ $\qquad -x^2+x+42=0$ $\qquad x^2+x-20=0$

**234** $3x^2+2x-1=0$ $\qquad 2x^2-\sqrt{5}x-1=0$ $\qquad 3x^2+5x+1=0$

**235** $-x^2-x+1=0$ $\qquad -5x+1-x^2=0$ $\qquad -1-x^2-2x=0$

**236** $1+x+2x^2=0$ $\qquad x^2-4\sqrt{2}x+2=0$ $\qquad -\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{8}$

## ►12. Equazioni parametriche

DEFINIZIONE. Si definisce **parametrica** un'equazione i cui coefficienti dipendono da un parametro.

L'equazione $3x^2+(k-1)x+(2-3k)=0$ è parametrica di secondo grado nell'incognita x; i suoi coefficienti dipendono dal valore assegnato al parametro k e quindi la natura e il segno delle sue soluzioni dipendono da k.

In molti problemi di applicazione della matematica in situazioni reali in cui compare un parametro, non interessa tanto determinare le soluzioni dell'equazione che formalizza il problema, quanto sapere se le soluzioni hanno determinate caratteristiche.

Sappiamo che attraverso i coefficienti di un'equazione di secondo grado si possono determinare alcune relazioni tra le sue soluzioni:

- si hanno soluzioni reali se $\Delta=b^2-4ac\geq 0$ ;
  - reali coincidenti se $\Delta=b^2-4ac=0$ ,
  - reali distinte se $\Delta=b^2-4ac>0$
- la somma delle soluzioni è $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ e il prodotto delle soluzioni è $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ .

Nell'equazione precedente si ha $\Delta=(k-1)^2-12(2-3k)$ dipendente dal parametro k.

Dall'analisi del $\Delta$ si potranno dedurre quali condizioni deve verificare k affinché esistano soluzioni reali;

Dall'analisi di somma e prodotto $x_1+x_2=-\frac{(k-1)}{3}$ *;* $x_1\cdot x_2=\frac{(2-3k)}{3}$ potremo stabilire il segno delle soluzioni reali.

**237** Assegnata l'equazione $(k+1)x^2+(2k+3)x+k=0$ stabilire per quale valore di k

a) L'equazione si riduce al primo grado.
b) L'equazione ammette soluzioni reali; distinguere i casi "soluzioni coincidenti" e "soluzioni distinte".
c) La somma delle soluzioni sia nulla; determina in tal caso le soluzioni.

*Svolgimento guidato*

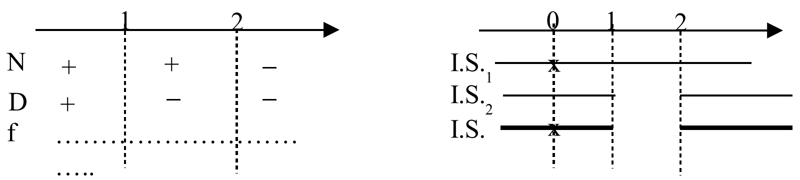
a) l'equazione diventa di primo grado se il coefficiente $a$ si annulla $a=k+1 \rightarrow k=\ldots\ldots$ :; in questo caso si ha l'equazione $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ di primo grado, da cui $x=\ldots\ldots\ldots$
b) studiamo il segno del discriminante: $\Delta=(2k+3)^2-4k(k+1)=\ldots\ldots\ldots\ldots\geq 0$ da cui ricaviamo
   - se $k=-\frac{9}{8}$ le soluzioni sono $\ldots\ldots\ldots\ldots$ e $x_1=x_2=\ldots\ldots$
   - se $k>-\frac{9}{8}$ le soluzioni sono $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ .
c) dalla formula ricaviamo $x_1+x_2=-\frac{(2k+3)}{(k+1)}$ e quindi ponendo $(2k+3)=\ldots\ldots$ si ha somma nulla se $k=\ldots\ldots$ ; somma nulla equivale ad annullare il secondo coefficiente, quindi le soluzioni sono $\ldots\ldots\ldots$ ; in questo caso sono reali? Perché?

**238** Assegnata l'equazione $(1-k)x^2+(k-2)x+1=0$ , stabilite i valori da assegnare al parametro affinché le soluzioni reali distinte abbiano la somma positiva.

*Svolgimento guidato*

Nel testo del problema vi sono due richieste: a) le soluzioni siano reali distinte e b) abbiano somma positiva.

Il problema si formalizza attraverso il sistema $\begin{cases}\Delta>0\\ -\frac{b}{a}>0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}(k-2)^2-4(1-k)>0\\ -\frac{k-2}{1-k}>0\end{cases}$ ; risolviamo la prima disequazione: $d_1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots>0 \rightarrow k^2>0 \rightarrow I.S._1=\{k\in\mathbb{R}\mid k\neq 0\}$ e la seconda $d_2$ cercando il segno del numeratore e del denominatore: $\begin{cases}N: -k+2>0 \rightarrow k<2\\ D:\ 1-k>0 \rightarrow k<1\end{cases}$ da cui con la tabella dei segni ricaviamo $I.S._2=\{k\in\mathbb{R}\mid k\ldots\ldots\ldots \vee k>\ldots\ldots\ldots\}$ .




Dal grafico ricava $I.S.=I.S._1\cap I.S._2=\{k\in\mathbb{R}\mid k\ldots\ldots\ldots \vee 0<k<\ldots\ldots \vee k\ldots\ldots\ldots\}$

**239** Assegnata l'equazione $(k+1)x^2+(k+3)x+k=0$ stabilire per quale valore di $k$ una sua soluzione è $x=-1$ . In tale caso determinare l'altra soluzione.

*Traccia di svolgimento*

Ricordiamo che un valore numerico è soluzione di un'equazione se sostituito all'incognita trasforma l'equazione in una uguaglianza vera. Per questo motivo, sostituendo all'incognita il valore fissato, il parametro $k$ dovrà verificare l'uguaglianza: $(k+1)(-1)^2+(k+3)(-1)+k=0 \rightarrow$ ..................
Sostituendo il valore di k trovato, l'equazione diventa: $3x^2+5x+2=0$ ; l'altra soluzione può essere trovata o con la formula risolutiva, oppure ricordando che $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{5}{3} \rightarrow x_2=\ldots\ldots$ o anche $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{2}{3} \rightarrow x_2=\ldots\ldots\ldots$ .

**240** Giustificare la verità della seguente proposizione: "per qualunque valore assegnato al parametro $m$ l'equazione $(m-1)^2+2mx+m+1=0$ ha soluzioni reali distinte".

Determinare $m$ affinché: $a)\ x_1+x_2=1-\sqrt{3}$ ; $b)\ x_1\cdot x_2=\frac{12}{5}$ ; $c)\ x_1+x_2=1-x_1\cdot x_2$

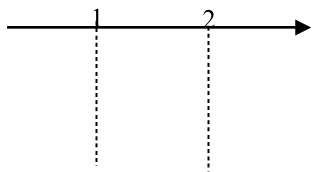
**241** Nell'equazione $7x^2+(k-5)x-(k+2)=0$ determinare $k$ affinché le soluzioni siano reali; distingui i casi "reali coincidenti" e "reali distinte".
Nel primo caso determina $x_1=x_2=\ldots\ldots\ldots\ldots$ ; nel secondo caso, determina $k$ affinché

- Il prodotto delle soluzioni sia $-\frac{8}{3}$ .
- Una soluzione sia nulla.
- Le soluzione siano una il reciproco dell'altra, cioè: $x_1=\frac{1}{x_2}$ .
- La somma dei reciproci delle soluzioni sia $\frac{1}{2}$ .
- La somma delle soluzioni superi il loro prodotto di 2.

**242** Verificare che nell'equazione $(2m-3)x^2-(m+2)x+3m-2=0$ si hanno due valori del parametro per cui le soluzioni sono reali coincidenti. Determina i due valori.

**243** Nell'equazione $x^2-2(k+2)x+(k^2-3k+2)=0$ determinare $k$ affinché le soluzioni siano reali, con somma positiva e prodotto negativo.
*Traccia di svolgimento:* Il problema richiede tre condizioni alle quali deve soddisfare contemporaneamente il parametro, pertanto si formalizza con il sistema $\begin{cases}\Delta\geq 0\\ -\frac{b}{a}>0\\ \frac{c}{a}<0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}4(k+2)^2-4(k^2-3k+2)\geq 0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots>0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots<0\end{cases}$ ; da cui

$d_1:\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\geq 0 \rightarrow I.S._1=\ldots\ldots\ldots$
$d_2:\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots>0 \rightarrow I.S._2=\ldots\ldots\ldots$
$d_3:(k-2)(k-1)<0$ da cui la tabella dei segni




e $I.S._3=\ldots\ldots\ldots$

**244** $x^2-2x-k=0$ determinare $k$ in modo che

- le soluzioni siano reali e distinte (Δ>0) R. $[k>-1]$
- la somma delle soluzioni sia 10 $(x_1+x_2=10)$ impossibile
- il prodotto delle soluzioni sia10 $(x_1\cdot x_2=10)$ R. $[k=-10]$
- una soluzione sia uguale a 0 (sostituire 0 alla x) R. $[k=0]$
- le radici siano opposte $(x_1+x_2=0)$ impossibile
- le radici sono reciproche $(x_1\cdot x_2=1)$ R. $[k=-1]$
- le radici sono coincidenti (Δ=0) R. $[k=-1]$
- la somma dei quadrati delle radici è 12 $(x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=12)$ R. $[k=4]$
- la somma dei reciproci delle radici è -4 $\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-4\right)$ R. $\left[k=\frac{1}{2}\right]$
- la somma dei cubi delle radici è 1
  $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1^2x_2-3x_1x_2^2=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=1$ R. $\left[k=-\frac{7}{6}\right]$

**245** $x^2-kx-1=0$ determinate $k$ in modo che

- le soluzioni siano coincidenti impossibile
- la somma delle radici sia 8 R. $[k=8]$
- le radici siano opposte R. $[k=0]$
- una radice sia $-\frac{1}{3}$ R. $\left[k=\frac{8}{3}\right]$

**246** $x^2+(k+1)x+k=0$ determinate $k$ affinché

- una soluzione sia uguale a zero R. $[k=0]$
- abbia soluzioni opposte R. $[k=-1]$
- non abbia soluzioni reali impossibile
- le radici siano reciproche R. $[k=1]$

**247** $x^2-kx+6=0$ determinate $k$ affinché

- la somma delle radici sia 7 R. $[k=7]$
- le radici sono reali e opposte impossibile
- la somma dei reciproci delle radici sia -6 R. $[k=-36]$
- una radice sia $-\frac{3}{2}$ R. $\left[k=-\frac{11}{2}\right]$

**248** $x^2+(k+1)x+k^2=0$ determinare $k$ affinché

- abbia come soluzione -1 R. $[k=0;1]$
- abbia una soluzione doppia ($x_1=x_2$) R. $\left[k=1;-\frac{1}{3}\right]$
- le radici siano reciproche R. $[k=\pm 1]$
- una radice sia l'opposto della reciproca dell'altra impossibile

**249** $kx^2-2kx+k-2=0$ determinare $k$ affinché

- una radice sia nulla R. $[k=2]$
- la somma dei reciproci delle radici sia 1 R. $[k=-2]$
- la somma dei quadrati delle radici sia 4 R. $[k=2]$
- la somma delle radici superi di 5 il loro prodotto R. $\left[k=\frac{1}{2}\right]$

**250** $x(x-a)=\frac{a+x}{a+2}$ determinate $a$ affinché

- una soluzione sia 1 R. $[a=-1\pm\sqrt{2}]$
- l'equazione sia di primo grado R. impossibile
- una soluzione sia uguale al reciproco dell'altra R. $[a=-1]$
- la somma delle soluzioni sia il doppio del loro prodotto R. $\left[\frac{-2\pm\sqrt{3}}{2}\right]$

**251** Per quale valore di $k\in\mathbb{R}$ l'equazione $kx^2-x+k=0$ non ammette soluzioni reali?

**252** Per quale valore di $k\in\mathbb{R}$ l'equazione $x^2+(k-2)x+1=0$ ammette due soluzioni reali e distinte?

Per quale valore di $k$ l'equazione $(k-1)x^2+kx+(k+1)=0$ ha una soluzione nulla?

[A] $k=1$ [B] $k=-1$ [C] $k=0$ [D] nessun valore di k

**253** Per quale valore di $k$ l'equazione $kx^2+\frac{1}{2}x+1=0$ ha due soluzioni identiche?

[A] $k=\frac{1}{4}$ [B] $k=\frac{1}{16}$ [C] $k=2$ [D] nessun valore di k

**254** Per quale valore di $k$ l'equazione $(k+3)x^2-2x+k=0$ ammette due soluzioni reciproche?

[A] $k=0$ [B] $k=-3$ [C] qualsiasi [D] nessun valore di k

**255** Per quale valore di k l'equazione $(k+1)x^2-kx-4=0$ ha una soluzione uguale a 2?

[A] k=4 [B] k=-2 [C] k=0 [D] k=-1

**256** Se l'equazione $(k+1)x^2-kx-4=0$ ha una soluzione uguale a 2 quanto vale l'altra soluzione?

[A] $x=0$ [B] $x=-2$ [C] $x=\frac{1}{2}$ [D] $x=2$

## ►13. Problemi di secondo grado in una incognita

*La risoluzione dei problemi … serve ad acuire l'ingegno e a dargli la facoltà di penetrare l'intera ragione di tutte le cose. (R. Descartes)*

Sappiamo che nel corso degli studi o nell'attività lavorativa possono presentarsi problemi di diversa natura: di tipo economico, scientifico, sociale; possono riguardare insiemi numerici o figure geometriche. La matematica ci può aiutare a risolvere i problemi quando essi possono essere tradotti in "forma matematica", quando cioè è possibile trascrivere in simboli le relazioni che intercorrono tra le grandezze presenti nel problema e quando si può costruire, tramite queste relazioni, un modello matematico che ci permetta di raggiungere la soluzione al quesito posto dalla situazione problematica.
Affronteremo problemi di tipo algebrico o geometrico, che potranno essere formalizzati attraverso equazioni di secondo grado in una sola incognita.
Teniamo presente, prima di buttarci nella risoluzione del problema, alcuni passi che ci aiuteranno a costruire il modello matematico:

- la lettura "attenta" del testo al fine di individuare l'ambiente del problema, le parole chiave, i dati e le informazioni implicite, l'obiettivo;
- la scelta della grandezza incognita del problema, la descrizione dell'insieme in cui si ricerca il suo valore, le condizioni che devono essere soddisfatte dall'incognita;
- la traduzione in "forma matematica" delle relazioni che intercorrono tra i dati e l'obiettivo, cioè l'individuazione del modello matematico (equazione risolvente).

Dopo aver risolto l'equazione occorre confrontare la soluzione trovata con le condizioni poste dal problema.

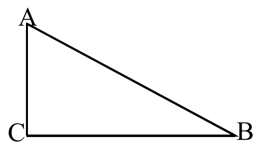
Problema 1

*Nel triangolo rettangolo ABC, rettangolo in C l'ipotenusa supera il cateto maggiore CB di 2m; la differenza tra i cateti è 23m. Determinare la misura del perimetro e l'area di ABC.*

Dati / Obiettivo

$\overline{AB}=\overline{CB}+2$
$\overline{CB}-\overline{AC}=23$
$A\widehat{C}B=retto$

$?\ 2p$
$?\ Area$




*Strategia risolutiva.* Osserva che $2p=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}$ ; $Area=\dfrac{\overline{BC}\cdot\overline{AC}}{2}$

Poni $\overline{BC}=x$ dai dati si ha $\begin{matrix}\overline{AB}=x+2\\ \overline{AC}=x-23\end{matrix}$ con $\begin{cases} x>0 & \text{essendo misura di un segmento}\\ x>23 & \text{poiché } \overline{AC} \text{ deve essere positiva}\end{cases}$

Essendo il triangolo rettangolo, i lati sono legati dal teorema di Pitagora quindi si deve verificare: $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2 \rightarrow (x+2)^2=(x-23)^2+x^2$ . L' equazione risolvente di secondo grado, in forma canonica: $x^2-50x+525=0$ con $\Delta=400$ . L'equazione è determinata con il discriminante positivo, quindi esistono due soluzioni reali distinte: $x_1=15 \vee x_2=35$ entrambe positive. Ai fini del problema $x_1$ non è accettabile, quindi il problema ha una sola soluzione e $\overline{BC}=35$ ; $\overline{AB}=37$ ; $\overline{AC}=12$
*Conclusione:* $2p=35+37+12=84\,(m)$; $Area=210\,(m^2)$

Problema 2

*Un padre aveva 26 anni alla nascita del figlio; moltiplicando le età attuali del padre e del figlio si trova il triplo del quadrato dell'età del figlio; calcolare le due età.*

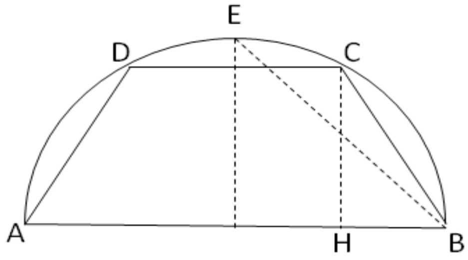
Indichiamo con $p$ l'età attuale del padre e con $f$ l'età del figlio
Dati: $p=f+26$ ; $p\cdot f=3f^2$ Obiettivo: $?f$ ; $?p$
*Strategia risolutiva*: I dati permettono di impostare la relazione $(f+26)\cdot f=3\cdot f^2$ che esprime il legame tra le età di oggi del padre e del figlio; siamo di fronte ad un'equazione di secondo grado nell'incognita $f$ .
La soluzione dell'equazione deve essere espressa da un numero positivo poiché esprime l'età.
*Risolviamo*: $2f^2-26f=0$ le cui soluzioni sono $f_1=0 \vee f_2=13$ . Per le condizioni poste la soluzione del problema è $f=13$ .
*Risposta*: Oggi il figlio ha 13 anni e il padre 39 anni.

Problema 3

*Il trapezio isoscele ABCD è inscritto in una semicirconferenza di diametro AB di misura 25cm; determina le misure dei lati del trapezio sapendo che il perimetro è 62cm.*

Dati Obiettivo

$\overline{AB}=25$
$2p=62$ ? $\overline{DC}$
$\overline{AB}\|\overline{DC}$ ? $\overline{CB}$
$\overline{AD}=\overline{CB}$




*Strategia risolutiva*:

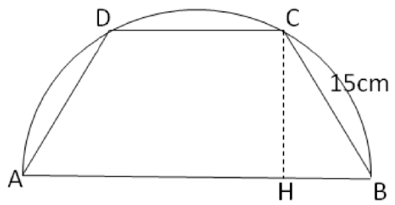
$\overline{AB}+\overline{DC}+2\,\overline{BC}=62$ ; fissiamo come incognita la misura in cm di BC: $\overline{BC}=x$

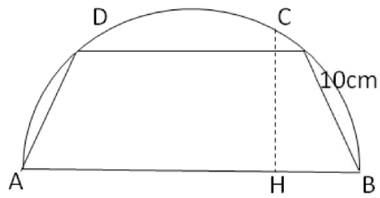
Determiniamo le condizioni sull'incognita: dovrà essere $x>0$ poiché rappresenta la misura di un segmento e inoltre affinché esista realmente il trapezio isoscele il punto $C$ non deve coincidere con il punto medio E dell'arco DC, quindi $x<\frac{25}{2}\sqrt{2}$

Tracciata l'altezza $CH\ (H\in AB)$ si ha $\overline{DC}=\overline{AB}-2\,\overline{HB}$ e per il 1° teorema di Euclide sul triangolo $ACB$, rettangolo in $C$, $\overline{HB}:\overline{CB}=\overline{CB}:\overline{AB}$ ; determiniamo quindi la misura di $HB$ in funzione dell'incognita fissata: $\overline{HB}=\frac{x^2}{25}$ da cui $\overline{DC}=25-\frac{2x^2}{25}$

Costruiamo l'equazione risolvente: $25+2x+25-\frac{2x^2}{25}=62 \rightarrow x^2-25x+150=0$ che ha soluzioni reali perché ……………… entrambe positive perché …………………………

Si ottiene $x_1=10 \lor x_2=15$ , entrambe accettabili. Si hanno dunque due trapezi inscritti:




Problema 4

*Un capitale di 25000 € viene depositato in banca a un tasso di interesse annuo c. Gli interessi maturati durante il primo anno non vengono ritirati. Nell'anno seguente si investono sia il capitale sia gli interessi maturati a un tasso di interesse annuo aumentato dello 0,5%. Alla fine dei due anni si ritira la somma di 26291,10 €. Calcola i tassi di interesse praticati dalla banca.*

Svolgimento. Assumiamo come variabile c il tasso di interesse praticato il primo anno, espresso come numero decimale e non in forma percentuale. Il tasso praticato nel secondo anno sarà c+0,05.

Alla fine del primo anno in banca rimane tra capitale e interessi $25000+25000\cdot c=25000(1+c)$ . Nel secondo anno il tasso praticato è c+0,005 che va applicato alla somma 25000(1+c).

Si ottiene quindi l'equazione $25000(1+c)(1+c+0{,}005)=26291{,}10$

Risolvo l'equazione

$25000(1+c)(1{,}005+c)=26291{,}10$ moltiplicando tra le parentesi tonde si ha

$25000(1{,}005+c+1{,}005c+c^2)=26291{,}10$ dividendo per 25000 primo e secondo membro

$1{,}005+c+1{,}005c+c^2=\frac{26291{,}10}{25000}$ riscrivendo in ordine l'equazione si ha

$c^2+2{,}005c-0{,}046644$ applico la formula risolutiva

$c_{1,2}=\frac{-2{,}005\pm\sqrt{4{,}020025+0{,}186576}}{2}=\frac{-2{,}005\pm2{,}051}{2}$ $c_1=-2{,}028$ $c_2=0{,}023$

La soluzione $c_1$ è negativa e non è accettabile.

La risposta al problema è 0,023 cioè 2,3% il primo anno e 2,8% il secondo anno.

**257** Il quadrato di un numero reale supera la metà del numero stesso di 5. Determina i numeri reali che rendono vera la proposizione enunciata. [-2; 5/2]

**258** Il prodotto della metà di un numero relativo con il suo successivo è 666. Quali numeri verificano questa proprietà? [36; -37]

**259** Trova un numero positivo che addizionato al proprio quadrato dia come somma 156.

**260** Un numero addizionato al quadrato della sua metà, dà come risultato 120. Trova il numero.

**261** Verifica che non esiste alcun numero reale tale che il quadrato del suo doppio uguagli la differenza tra il triplo del suo quadrato e il quadrato della somma del numero con 3.

**262** Due numeri naturali hanno rapporto 2/3 e somma dei loro quadrati 3757. Individua i numeri che verificano questa proprietà. [51, 34]

**263** La somma dei quadrati di due numeri pari consecutivi è 580. Quali sono i due numeri?[16; 18]

**264** Di due numeri naturali consecutivi si sa che la somma dei loro reciproci è 9/20. Quali sono i due numeri? [4: 5]

**265** Di cinque numeri interi consecutivi si sa che la differenza tra il quadrato della somma degli utlimi due numeri e la somma dei quadrati dei primi tre è 702. Qual è il più piccolo di questi numeri? [17]

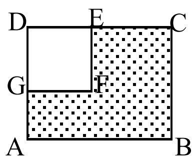
**266** Due navi partono contemporaneamente da uno stesso porto e arrivano alla stessa destinazione dopo aver percorso sulla stessa rotta a velocità costante 720 miglia. Sapendo che una delle due navi viaggia con una velocità di 1 nodo (1 miglio all'ora) superiore a quella dell'altra nave e che percià arriva 3 ore prima a destinazione, determina le velocità in nodi delle due navi. [15; 16]

**267** Due navi che viaggiano su rotte perpendicolari a velocità costante si incontrano in mare aperto. Sapendo che una delle navi viaggia a 15 nodi (1 nodo = 1 miglio all'ora), dopo quanto tempo le due navi si trovano alla distanza di 40 miglia?

**268** Un maratoneta durante una llenamento fa due giri di un percorso di 22 km mantenendo in ciasscun giro una velocità costante ma nel secondo giro la velocità è inferiore di 0,5 km/h rispetto al primo giro. A quali velocità a corso se ha impiegato complessivamente 2 ore e un quarto?

**269** Un capitale di 1200 € è depositato in banca a un certo tasso di interesse annuale. Alla scadenza del primo anno gli interessi maturati vengono ridepositati sullo stesso conto. Alla scadenza del secondo anno si ritira la somma di 12854,70 euro. Qual è stato il tasso di interesse? [3,5%]

**270** Da un cartoncino rettangolare (ABCD, come in figura) si vuole ritagliare un




quadrato (DEFG) in modo che le due parti ottenute siano equivalenti. Determinare la misura del lato del quadrato sapendo che $\overline{EC}=6\,cm$ e $\overline{AG}=4\,cm$. $[\overline{DE}=12\text{cm}]$

**271** Un terreno a forma rettangolare di 6016m$^2$ viene recintato con un muro lungo 350m. Quali sono le dimensioni del rettangolo? [47; 128]

**272** Determinare sul segmento AB di misura 5m un punto P tale che il rettangolo delle due parti sia equivalente al quadrato di lato 2m. Rappresenta con un disegno le situazioni soluzione. [1cm; 4cm]

**273** Calcolare perimetro e area del triangolo ABC isoscele sulla base AB sapendo che la differenza tra la base e l'altezza ad essa relativa è m.0,5 e tale è anche la differenza tra il lato CB e la base stessa. [2p=25m; A=30m$^2$]

**274** La superficie del rettangolo ABCD supera di m$^2$119 la superficie del quadrato costruito sul lato minore AD. Determinare il perimetro e la misura della diagonale sapendo che i 7/10 del lato maggiore AB sono uguali ai 12/5 del lato minore. [2p=62m; d=25m]

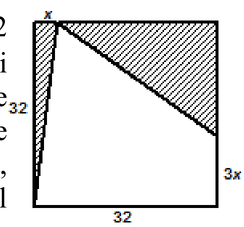
**275** Nel trapezio rettangolo ABCD, il rapporto tra la base maggiore AB e la minore CD è 8/5, il lato obliquo forma con AB un angolo di 45°.Determinare il perimetro sapendo che l'area è 312 m$^2$. $[2p=64+12\sqrt{2}]$

**276** Determina il perimetro di un rombo che ha l'area di 24m$^2$ e il rapporto tra le diagonali 4/3. [40m]

**277** Un rettangolo ABCD ha il perimetro di 48cm e l'area di 128cm$^2$. A una certa distanza $x$ dal vertice A sui due lati AD e AB si prendono rispettivamente i punti P e Q. Alla stessa distanza x dal vertice C sui lati CB e CD si prendono rispettivamente i punti R e S. Sapendo che il rapporto tra l'area del rettangolo ABCD e l'area del quadrilatero PQRS è 32/23 calcola la distanza x. [6cm]

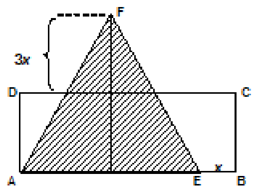
**278** Un trapezio rettangolo ha la base minore di 9cm, l'altezza i 2/9 della base maggiore e l'area di $20+9\sqrt{2}\,cm^2$. Determina la misura della base maggiore. $[3\sqrt{2}]$

**279** Da un quadrato di 32 cm di lato vengono ritagliati due triangoli rettangoli come descritti in figura dalla parte colorata. Calcola la misura di x, inferiore alla metà del lato del quadrato, in modo che l'area totale dei due triangoli evidenziati sia pari a 344 cm$^2$.




$$\left[\frac{32}{2}x+\frac{(32-x)(32-3x)}{2}=344\ \rightarrow\ x=4\text{cm}\right]$$

**280** Il rettangolo ABCD ha l'area di 240 cm2 e l'altezza AD di 12 cm.



Si vuole trasformare il rettangolo in un triangolo AEF allungando l'altezza di una quantità 3x e accorciando la base di una quantità x (vedi figura) in modo che il nuovo triangolo AEF che abbia l'area di 162 $cm^2$. [x=2; la soluzione x=14 non è accettabile]

**281** Il rettangolo AEFG ha l'area di 768 $cm^2$ e l'altezza AG di 24 cm. Si vuole allungare l'altezza di una quantità x e accorciare la base di una quantità doppia 2x in modo da ottenere un secondo rettangolo ABCD che abbia l'area di 702 $cm^2$. Determina la quantità x. [3cm]

**282** Il rettangolo ABCD ha l'area di 558 $cm^2$ e il lato DC di 18 cm. Lo si vuole trasformare in un nuovo rettangolo AEFG accorciando l'altezza di una quantità 5x e allungando la base di una quantità 4x in modo che il nuovo rettangolo AEFG che abbia l'area di 228 $cm^2$. Determina la quantità x necessaria a compiere la trasformazione richiesta. [5]

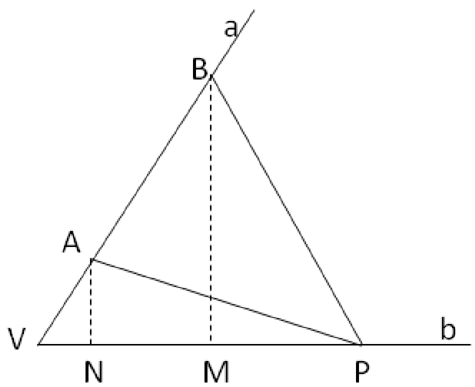
**283** La piramide di Cheope è ha base quadrata ed ha una superficie totale pari a 135700 $m^2$. Sapendo che l'apotema della piramide è pari a 180 metri, si calcoli la lunghezza del lato di base. [230 m]

**284** Un container a forma di parallelepipedo a base quadrata ha una superficie totale pari a 210 $m^2$. L'altezza è il doppio del lato di base diminuita di 2 metri. Trovare la lunghezza del lato di base. [5m]

I problemi che abbiamo proposto sono caratterizzati da dati numerici e di conseguenza le soluzioni numeriche dell'equazione risolvente sono facilmente confrontabili con le condizioni poste sull'incognita. Abbiamo anche visto che le soluzioni dell'equazione non sono sempre anche soluzioni del problema e d'altro canto può succedere che il problema abbia due soluzioni.
Affrontiamo ora un problema letterale, nel quale alcuni dati sono espressi da lettere. In questi problemi dovremo rispettare le condizioni poste sull'incognita, ma anche analizzare per quali valori della lettera il problema ammette soluzioni reali. Dovremo quindi procedere con la discussione dell'equazione parametrica risolvente per stabilire se il problema letterale ammette soluzioni.

Problema 5

*Sul lato* $a$ *dell'angolo* $a\hat{V}b=60°$ *si fissano i punti A e B tali che* $\overline{VA}=2k$ e $\overline{VB}=8k$ .
*Determina sul lato* $b$ *un punto* $P$ *in modo che il rapporto tra* $PB$ *e* $PA$ *sia 2.*

| Dati | Obiettivo | Figura |
|---|---|---|
| $a\hat{V}b=60°$<br>$\overline{VA}=2k$<br>$\overline{VB}=8k$ | $?\ P\in b$ tale che $\dfrac{PB}{PA}=2$ |  |

*Osservazione preliminare*: le misure dei segmenti *VA* e *VB* sono espresse in forma letterale, affinché il problema abbia significato deve essere $k>0$ .

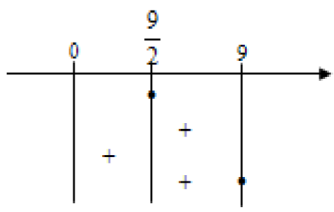
*Strategia risolutiva:*
La posizione del punto *P* sul lato *b* sarà individuata dalla distanza di *P* da *V*: poniamo quindi $\overline{VP}=x$ con $x>0$ e determiniamo $\overline{PB}$ e $\overline{PA}$ in funzione di *x* per poter sfruttare la richiesta contenuta nell'obiettivo come equazione risolvente.
Sia *M* il piede della perpendicolare da *B* al lato *b*; nel triangolo rettangolo *PMB* si ha $\overline{PB}^2=\overline{BM}^2+\overline{PM}^2$ (*) per il teorema di Pitagora. Nel triangolo *BVM*, rettangolo in *M* con l'angolo *V* di 60° si ha $\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BV}\cdot\sqrt{3}=4k\cdot\sqrt{3}$; $\overline{PM}=\overline{VP}-\overline{VM}$ e $\overline{VM}=\frac{1}{2}\overline{VB}=4k$ ; per quanto detto sul triangolo *BVM*, quindi $\overline{PM}=x-4k$ ; sostituendo in (*) si ottiene $\overline{PB}^2=48k^2+(x-4k)^2$ .
Sia *N* il piede della perpendicolare da *A* al lato *b*; nel triangolo rettangolo *PNA*. Con analogo ragionamento otteniamo: $\overline{PA}^2=\overline{AN}^2+\overline{PN}^2$ (**) per il teorema di Pitagora. Nel triangolo *AVN*, rettangolo in *N* con

l'angolo $V$ di 60° si ha $\overline{AN}=\frac{1}{2}\overline{AV}\cdot\sqrt{3}=k\cdot\sqrt{3}$ e $\overline{VN}=\frac{1}{2}\overline{AV}=k$ ; $\overline{PN}=\overline{VP}-\overline{VN}=x-k$ ; sostituendo in (**) si ottiene $\overline{PA}^2=3k^2+(x-k)^2$ .
Determiniamo l'equazione risolvente ricordando che il rapporto tra due segmenti è uguale al rapporto tra le rispettive misure ed elevando al quadrato si ha $\frac{\overline{PB}^2}{\overline{PA}^2}=4$ . Sostituendo quanto trovato si ha l'equazione $48k^2+(x-4k)^2=4\cdot\left[3k^2+(x-k)^2\right]$ da cui $x^2=16k^2$ . Si tratta di un'equazione di secondo grado pura, avente due soluzioni reali opposte essendo il secondo membro positivo, quindi $x_1=-4k \vee +4k$ e per le condizioni poste solo $x_2$ è accettabile.
Con quale punto della figura tracciata inizialmente viene a coincidere il punto P che risolve il problema?

**285** Sul prolungamento dei lati *AB*, *BC*, *CD*, *DA* del quadrato *ABCD* prendi rispettivamente i punti *Q*, *R*, *S*, *P* in modo che *QB=RC=SD=PA*. Dimostra che *PQRS* è un quadrato; nell'ipotesi che sia $\overline{AB}=3\text{m}$ determina $\overline{AP}$ in modo che l'area di *PQRS* sia *k*, con *k* reale positivo.

*Traccia dello svolgimento*
Completa dati, obiettivo e figura del problema.
Per dimostrare che PQRS è un quadrato dobbiamo
dimostrare che i lati sono ……………………
e che gli angoli sono ……….”
Ipotesi: ……………………
Tesi: …………………..

Poni $\overline{AP}=x$ con $x>0$
$Area_{PQRS}=\overline{PQ}^2=\overline{PA}^2+\overline{AQ}^2$ per il teorema di Pitagora nel triangolo ……….
Verifica che si ottiene l'equazione risolvente $2x^2+6x+(9-k)=0$ , equazione in cui il terzo coefficiente dipende da *k*. Dal momento che vogliamo soluzioni reali positive, procediamo alla discussione dell'equazione mediante il metodo di Cartesio:
calcoliamo il discriminante: $\frac{\Delta}{4}=9-18+2k$ . Affinché l'equazione ammetta soluzioni reali deve essere $k\geq\frac{9}{2}$




analizziamo ora il segno dei coefficienti: il primo e il secondo coefficiente sono indipendenti da *k* e sempre positivi; il terzo è positivo per $k<9$
Completa il grafico che riassume la situazione reciproca del segno del discriminante e dei tre coefficienti e trai le conclusioni relativamente alla soluzione del problema posto.

**286** Due numeri reali hanno come somma *a* $(a\in\mathbb{R}_0)$ ; determinare i due numeri in modo che il loro prodotto sia *k* $(k\in\mathbb{R}_0)$ . Quale condizione si deve porre sull'incognita? Per quale valore del parametro i due numeri soluzione sono uguali?

**287** In un triangolo rettangolo l'altezza *AH* relativa all'ipotenusa *BC* misura *1m* e $A\hat{B}C=60°$ . Determinare sulla semiretta *AH*, esternamente al triangolo un punto *P* in modo che sia *k* la somma dei quadrati delle distanze di *P* dai vertici del triangolo. Quale condizione va imposta al parametro *k* perché il problema abbia significato?

**288** $\overline{AB}=16a$ ; $\overline{BC}=2a\sqrt{14}$ rappresentano le misure dei lati del rettangolo *ABCD*; determinare un punto *P* del segmento *AB* tale che la somma dei quadrati delle sue distanze dai vertici *C* e *D* sia uguale al quadrato della diagonale *DB*. Posto $\overline{AP}=x$ quale delle seguenti condizioni deve rispettare la soluzione?
$A]\ x>0$ ; $B]\ 0<x<16a$ ; $C]\ x<16a$
Dopo aver risolto il problema spiegate il significato delle soluzioni ottenute.

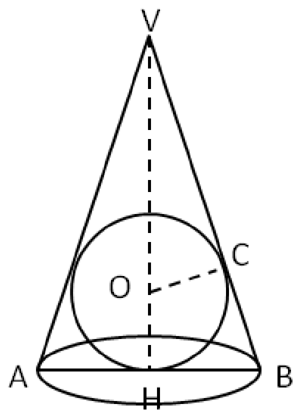
**289** Nel trapezio rettangolo ABCD di base maggiore BC, la diagonale AC è bisettrice dell'angolo $B\hat{C}D$.
Posto $\overline{AB}=1(\text{m})$, determina la base maggiore in modo che sia 2k il perimetro del trapezio.
Completa la figura, i dati e l'obiettivo del problema.
*Traccia dello svolgimento*
Ricordiamo che se due triangoli hanno gli angoli rispettivamente congruenti, allora sono simili e i lati

omologhi (opposti agli angoli congruenti) sono i termini di una proporzione.

- dalla richiesta del problema poniamo $\overline{BC}=x$ con $x\ldots\ldots\ldots$ ;
- dall'informazione "la diagonale *AC* è bisettrice dell'angolo $B\hat{C}D$ ", possiamo dimostrare che *ADC* è un triangolo isoscele sulla base AC; infatti … … … … … … … … … … … … … … … …
- l'equazione risolvente sarà determinata dalla relazione tra i lati che esprime il perimetro del trapezio: $2p=\overline{AC}+\overline{BC}+\ldots\ldots\ldots\ldots=2k$
- dobbiamo quindi esprimere $\overline{DC}$ in funzione di *x*
- Tracciamo l'altezza *DH* del triangolo isoscele *ADC* e dopo aver dimostrato la similitudine di *ABC* con *DHC*, verifica che si ottiene: $\frac{1}{2}\overline{AC}^2=\overline{DC}\cdot\overline{BC}$ da cui potete ricavare $\overline{DC}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- Per completare gli elementi nell'equazione risolvente, calcoliamo $\overline{AC}^2=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ , applicando il teorema di Pitagora al triangolo *ABC*

L'equazione parametrica risolvente ottenuta $2x^2+x\cdot(1-2k)+1=0$ con $x>0$ può essere discussa con il metodo di Cartesio.

**290** Ad una sfera di raggio *1m* è circoscritto un cono il cui volume è *k* volte il volume della sfera. Determina l'altezza del cono.

| Dati | Obiettivo | Figura |
|---|---|---|
| $\overline{OC}=1$<br>$\overline{OC}=\overline{OH}$<br>$\overline{OC}\perp\overline{VB}$<br>$\overline{BC}=\overline{BH}$<br>$\overline{AH}=\overline{HB}$<br>$\overline{VH}\perp\overline{AB}$<br>$Volume_{cono}=k\cdot Volume_{sfera}$ | $?\ \overline{VH}$ |  |



Poniamo $\overline{VO}=x$ con $x>0$ da cui $\overline{VH}=\overline{VO}+\overline{OH}=x+1$

Ricordiamo che $V_{cono}=\frac{1}{3}\pi\,\overline{HB}^2\cdot\overline{VH}$ e $V_{sfera}=\frac{4}{3}\pi\,\overline{CO}^3$ , quindi per impostare l'equazione risolvente dobbiamo cercare di esprimere $\overline{HB}^2$ in funzione di *x*.

Verifica che dalla similitudine [ricordiamo che se due triangoli hanno gli angoli rispettivamente congruenti, allora sono simili e i lati omologhi, opposti agli angoli congruenti, sono in proporzione] di *VOC* con *VHB* si deduce: $\overline{HB}:\overline{OC}=\overline{VH}:\overline{VC}$ quindi $\overline{HB}=\frac{\overline{OC}\cdot\overline{VH}}{\overline{VC}}$ ; dobbiamo ancora ricavare $\overline{VC}$ che per il teorema di Pitagora su *VCO* è $\overline{VC}=\sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$ .

Sostituendo tutti gli elementi trovati nella relazione che lega il volume del cono con il volume della sfera, verifica che si ottiene $x^2+2x(1-2k)+4k=0$ con $x>0$ , da discutere con il metodo di Cartesio.

**291** Il quadrilatero *ABCD* ha le diagonali perpendicolari ed è inscritto in una circonferenza; sapendo che $\overline{AB}=5a$ ; $\overline{AE}=3a$ ; $2p_{BCA}=\frac{5}{2}\cdot\overline{BD}$ , essendo *E* punto d'incontro delle diagonali, determinate la misura delle diagonali. [Poni $\overline{CE}=x$ , analizza la posizione del punto *E* sulla diagonale *BD*.]

**292** Il rettangolo *ABCD* ha i lati *AB* e *BC* che misurano rispettivamente *a* e *3a* (*a*>*0*). Prolunga il lato *AB* di due segmenti congruenti *BN* e *AM* e sia *V* il punto di intersezione delle retta *MD* e *CN*. Posto $\overline{BN}=x$ , determina la misura della base *MN* del triangolo *MVN* in modo che la sua area sia *k* volte l'area del rettangolo assegnato.

**293** Indica la risposta corretta

1. L'equazione $25x^2+1=0$ ha per soluzioni
[A] $x=\pm 5$ [B] $x=\pm\frac{1}{5}$ [C] x=-5 e x=0 [D] non ha soluzioni reali

2. L'equazione $16x^2+x=0$ ha per soluzioni
[A] $x=4 \vee x=1$ [B] $x=\pm\frac{1}{4}$ [C] $x=-\frac{1}{16} \vee x=0$ [D] non ha soluzioni reali

3. L'equazione $4x^2-9x=0$ ha per soluzioni
[A] $x=\pm\frac{3}{2}$ [B] $x=\pm\frac{9}{4}$ [C] $x=\frac{3}{2} \vee x=0$ [D] $x=\frac{9}{4} \vee x=0$

4. L'equazione $9x^2+6x+1=0$ ha per soluzioni
[A] $x=\pm 3$ [B] $x=\pm\frac{1}{3}$ [C] $x=-\frac{1}{3}$ doppia [D] non ha soluzioni reali

5. L'equazione $x^2-6x+36=0$ ha per soluzioni
[A] $x=\pm 6$ [B] $x=\pm\sqrt{6}$ [C] $x=6$ doppia [D] non ha soluzioni reali

6. Quale di queste equazioni ammette una soluzione doppia x=3?
[A] $x^2+6x+9=0$ [B] $9-x^2=0$ [C] $2x^2-12x+18=0$ [D] $3x^2+9x=0$

7. Le soluzioni di un'equazione di secondo grado sono $x_1=1$ e $x_2=3$. L'equazione è pertanto:
[A] $x^2+x-1=0$ [B] $x^2-4x+3=0$ [C] $x^2-4x-3=0$ [D] nessuna delle risposte precedenti

8. Il polinomio $x^2+5x+6$ può essere scomposto in:
[A] $(x+2)(x-3)$ [B] $(x+5)(x+1)$ [C] $(x-2)(x-3)$ [D] nessuna delle risposte precedenti

9. Una delle soluzioni dell'equazione $x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}=0$ è $\sqrt{2}$, quanto vale l'altra?
[A] $-\sqrt{2}$ [B] $\frac{1}{\sqrt{2}}$ [C] $\sqrt{2}+1$ [D] 1

10. Per quale valore di *k* l'equazione $(2k-1)x^2+(2k+1)x+k-2=0$ diventa di I grado?
[A] $k=\frac{1}{2}$ [B] $k=-\frac{1}{2}$ [C] $k=2$ [D] $k=0$

11. L'equazione $4m^2x^2-5mx+1=0$ con parametro *m* ha per soluzioni
[A] $x=m \vee x=4m$ [B] $x=\frac{1}{m} \vee x=\frac{1}{4m}$ [C] $x=64m \vee x=1$ [D] $x=m \vee x=\frac{1}{4}$

12. L'equazione di secondo grado $x^2+(a+1)x+a=0$ con *a* parametro reale ha come soluzioni:
[A] $x=1 \vee x=a$ [B] $x=a-1 \vee x=1$ [C] $x=-a \vee x=-1$ [D] nessuna delle risposte precedenti

13. L'equazione $x^2+(t-2)=0$ con *t* parametro reale ammette soluzioni reali
[A] per $t\leq 2$ [B] per $t\geq 2$ [C] per $t<2$ [D] nessuna delle risposte precedenti

14. Quanto vale il prodotto delle soluzioni dell'equazione $x^2-6a^2x+8a^4=0$ ?
[A] $8a^4$ [B] $8a^2$ [C] $6a^2$ [D] non esiste

15. Il polinomio $x^2+(m-2)x-2m$ con *m* parametro reale può essere scomposto in:
[A] $(x+m)(x+1)$ [B] $(x+m)(x-2)$ [C] $(x+m)(x+2)$ [D] nessuna delle risposte precedenti

16. L'equazione $x^2+(k-1)x=0$ con *k* parametro reale:
[A] non ha soluzioni reali [B] ha una soluzione uguale a zero
[C] ha due soluzioni reali coincidenti per k=0 [D] nessuna delle risposte precedenti è corretta

17. L'equazione $x^2+2x+k-2=0$ con *k* parametro reale:
[A] ha due soluzioni reali coincidenti per k=3 [B] ha due soluzioni reali coincidenti per k=1
[C] ha una soluzione nulla per k=-2 [D] nessuna delle risposte precedenti è corretta

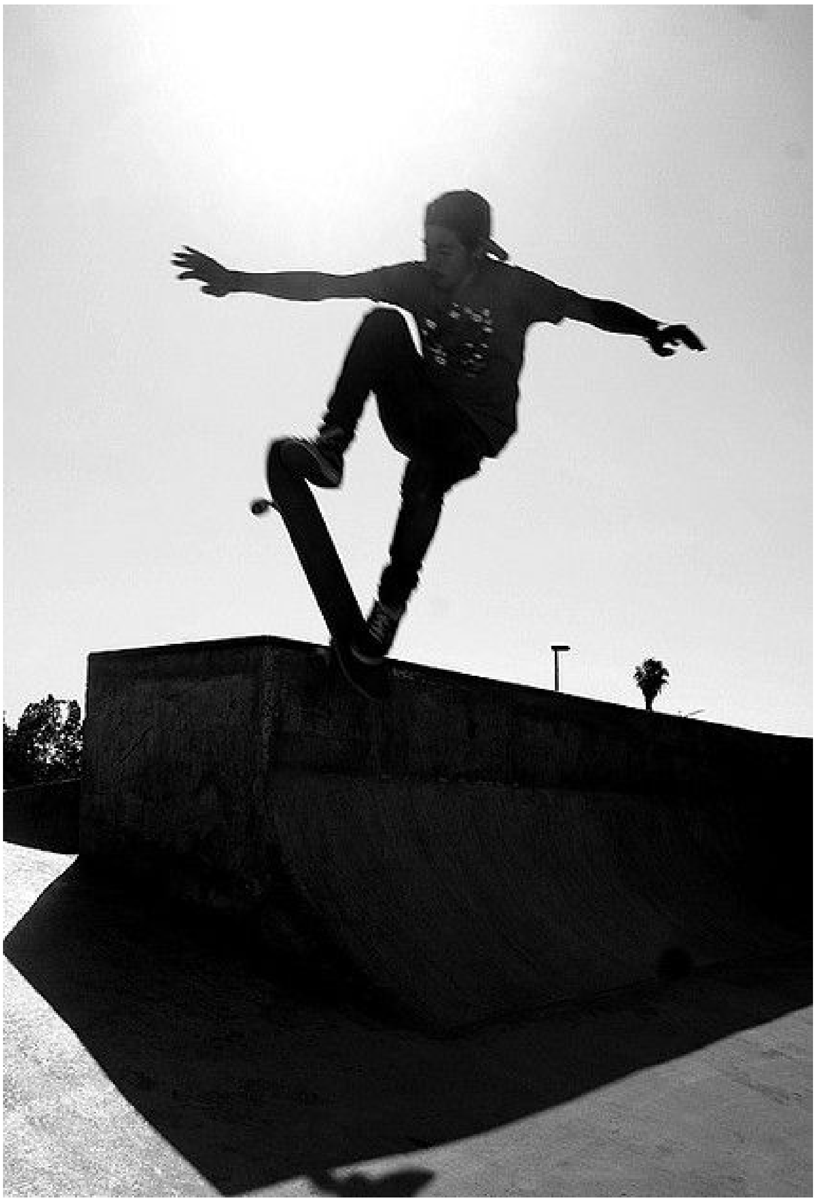
18. L'equazione $x^2+m^2+1=0$ con *m* parametro reale:
[A] ammette due soluzioni reali e opposte [B] ammette due soluzioni coincidenti
[C] non ammette soluzioni reali [D] nessuna delle risposte precedenti è corretta

19. L'equazione $2x^2+k^2=0$ con *k* parametro reale:
[A] ammette due soluzioni reali e distinte [B] ammette due soluzioni reali solo se *k* è positivo
[C] ammette soluzioni coincidenti per *k=0* [D] nessuna delle risposte precedenti è corretta

20. L'equazione $tx^2-1=0$
[A] ha come soluzioni $x_1=0$ e $x_2=1-t$ [B] ammette sempre soluzioni reali
[C] ammette soluzioni reali per t>0 [D] nessuna delle risposte precedenti è corretta

# MATEMATICA C$^3$ -ALGEBRA 2

# 3. EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO



Alvaro Tapia, *Skateboard*
http://www.flickr.com/photos/foto_saiker/3087292011/

**Indice**

## ►1. Equazioni riconducibili al prodotto di due o più fattori

Problema

*Trovare un numero il cui cubo, insieme con due suoi quadrati e dieci volte il numero stesso, dia come somma 20.*

Il problema enunciato venne posto da Giovanni Panormita, astronomo e filosofo alla corte di Federico II, a Leonardo Pisano, detto Fibonacci, che ne tentò la soluzione nella sua opera Flos.
Con il linguaggio matematico attuale il problema si formalizza nell'equazione di terzo grado $x^3+2x^2+10x=20$ ; Fibonacci pervenne al valore approssimato $x=1{,}3688$ come soluzione al problema, senza indicare la via seguita per la sua determinazione. Pur tuttavia egli riuscì a dimostrare che le soluzioni di un'equazione di terzo grado non possono mai esprimersi mediante radicali quadratici neanche se sovrapposti.
Solo nel XVI secolo, ad opera del matematico italiano Ferrari, fu scoperta la formula risolutiva dell'equazione generale di terzo grado per le equazioni che si presentano nella forma $x^3=px+q$ . A questa forma è sempre possibile ricondurre una qualsiasi equazione di terzo grado, la cui equazione canonica è $ax^3+bx^2+cx+d=0$ .

In questo capitolo ci proponiamo di determinare l'**I**nsieme **S**oluzione di equazioni algebriche di grado superiore al secondo.

DEFINIZIONE: Un'equazione algebrica si presenta nella forma $p(x)=0$ dove $p(x)$ è un polinomio nella variabile $x$ , di grado $n$ , a coefficienti reali: $a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ldots\ldots+a_2 x^2+a_1 x+a_0=0$

Esempio

Vogliamo risolvere l'equazione $x^3=15x+4$ , nota come equazione di Raffaele Bombelli, matematico bolognese del XVI secolo. Bombelli la risolse attraverso passaggi che coinvolgono radici quadrate di numeri negativi che non esistono in campo reale.

Vediamo come possiamo determinare l'I.S. con le nostre conoscenze.
Scriviamo l'equazione nella forma canonica $p(x)=0$ : $x^3-15x-4=0$ e serviamoci del teorema di Ruffini per determinarne uno zero intero. Sappiamo che gli eventuali zeri interi si trovano tra i divisori del termine noto, quindi possiamo provare con $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ .
Si ottiene $p(4)=0$ dunque $x^3-15x-4=(x-4)\cdot(\ldots\ldots)=0$ e il fattore da calcolare sarà di secondo grado e sarà determinato con la divisione di $p(x)=x^3-15x-4$ con il binomio $x-4$ .
Potete verificare che si ottiene: $x^3-15x-4=(x-4)\cdot(x^2+4x+1)=0$ da cui per la legge di annullamento del prodotto $x-4=0 \rightarrow x=4 \vee x^2+4x+1=0 \rightarrow \emptyset$ . L'ultima equazione non ha soluzioni reali essendo il discriminante negativo $(\Delta=\ldots\ldots)$
L'equazione assegnata ammette quindi una sola soluzione reale e $I.S.=\{4\}$ .

Esempio

Determinare le radici reali dell'equazione $4x^3+x^2-4x-1=0$
Scomponiamo in fattori il polinomio al primo membro mediante raccoglimento parziale:
$p(x)=4x^3+x^2-4x-1=4x\cdot(x^2-1)+(x^2-1)=(x^2-1)\cdot(4x+1)$

Per la legge dell'annullamento del prodotto si ottiene $\begin{cases} x^2-1 \rightarrow x=-1 \vee x=1 \\ 4x+1=0 \rightarrow x=-\frac{1}{4} \end{cases}$

L'equazione ha dunque tre soluzioni reali distinte e $I.S.=\left\{-1\,;1\,;-\frac{1}{4}\right\}$ .

Esempio

$\frac{2x+3}{2x+1}+\frac{x^2}{x+1}=5x+3$
L'equazione assegnata è frazionaria
1° passo: riduciamo allo stesso denominatore:

$$\frac{2x^2+5x+3+2x^3+x^2-10x^3-15x^2-5x-6x^2-9x-3}{(2x+1)\cdot(x+1)}=0$$

2° passo: poniamo le **C**ondizioni d'**E**sistenza $x\neq-\frac{1}{2} \wedge x\neq-1$

3° passo: eliminiamo il denominatore e sommiamo i monomi simili al numeratore; l'equazione in forma canonica è $8x^3+18x^2+9x=0$ di terzo grado

4° passo: scomponiamo il polinomio al primo membro $x\cdot(8x^2+18x+9)=0$

5 passo: per la legge di annullamento del prodotto otteniamo le soluzioni dell'equazione equivalente alla data $x=0 \vee x=-\frac{3}{4} \vee x=-\frac{3}{2}$

Esempio

Come ultimo esempio prendiamo in considerazione l'equazione risolvente il problema di Giovanni Panormita: $x^3+2x^2+10x=20$ . L'obiettivo è cercare la scomposizione in fattori irriducibili del polinomio al primo membro, ma i metodi di scomposizione studiati non permettono di determinare i fattori del polinomio.

Non possiamo affermare nulla circa l'esistenza o meno di soluzioni reali; in seguito, nel corso dei vostri studi, dimostrerete che un'equazione polinomiale di terzo grado ammette sempre almeno una soluzione reale, talvolta determinabile attraverso la scomposizione come abbiamo visto negli esempi, altre volte invece usando metodi di calcolo approssimato.

**Osservazione. Si dimostra che un'equazione ammette tante soluzioni, che possono essere reali e distinte, coincidenti o non reali, quante ne indica il suo grado.**

*Determinare l'I.S. delle equazioni*

**1** $x^3-3x+2=0$ R. $I.S.=\{1\}$

**2** $x^3+2x^2+2x+1=0$ R. $I.S.=\{-1\}$

**3** $x^3-6x+9=0$ R. $I.S.=\{-3\}$

**4** Verificare che $x^5+1=x\cdot(x^3+1)$ ammette due soluzioni reali opposte. R. $I.S.=\{-1;+1\}$

**5** Stabilire per quali valori reali la frazione $f(x)=\frac{x^3+2-x\cdot(2x+1)}{2x-1}$ è nulla.R. $I.S=\{-1;1;2\}$

Ricordiamo che uno **zero di un polinomio** è il valore che assegnato alla variabile rende il polinomio uguale a zero; l'obiettivo posto viene raggiunto ponendo ogni polinomio uguale a zero, come nell'esempio:

*Trovare gli zeri reali dei seguenti polinomi di terzo grado:*

**6** $p(x)=x^3-7x^2+4x+12$

*Scrivi l'equazione* $x^3-7x^2+4x+12=0$ *è come per gli esercizi precedenti scomponi in fattori e applica la legge di annullamento del prodotto.* $I.S.=\{2,-1,6\}$

**7** $p(x)=x^3+5x^2-2x-24$ $I.S.=\{-4,-3,2\}$

**8** $p(x)=6x^3+23x^2+11x-12$ $I.S.=\left\{\frac{1}{2},-3,-\frac{4}{3}\right\}$

**9** $p(x)=8x^3-40x^2+62x-30$ $I.S.=\left\{\frac{5}{2},+1,\frac{3}{2}\right\}$

**10** $p(x)=x^3+10x^2-7x-196$ $I.S.=\{4,-7\}$

**11** $p(x)=x^3+\frac{4}{3}x^2-\frac{17}{3}x-2$ $I.S.=\left\{-3,-\frac{1}{3},+2\right\}$

**12** $p(x)=x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{38}{3}x+\frac{56}{3}$ $I.S.=\left\{-4,+\frac{7}{3},+2\right\}$

**13** $p(x)=3x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{3}{2}x$ $I.S.=\left\{0,+\frac{1}{2},+1\right\}$

**14** $p(x)=3x^3-9x^2-9x-12$ $I.S.=\{+4\}$

**15** $p(x)=\frac{6}{5}x^3+\frac{42}{5}x^2+\frac{72}{5}x+12$ $I.S.=\{-5\}$

**16** $p(x)=4x^3-8x^2-11x-3$ $I.S.=\left\{3,-\frac{1}{2}\right\}$

**17** $p(x)=\frac{3}{2}x^3-4x^2-10x+8$ $I.S.=\left\{4,\frac{2}{3},-2\right\}$

**18** $p(x)=-3x^3+9x-6$ $I.S.=\{1,-2\}$

**19** $p(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+6x-4$ $I.S.=\{2\}$

**20** $p(x)=4x^3+4x^2-4x-4$ $I.S.=\{1,-1\}$

**21** $p(x)=-\frac{2}{5}x^3+\frac{8}{5}x^2+\frac{14}{5}x-4$ $I.S.=\{5,1,-2\}$

**22** $p(x)=-6x^3-30x^2+192x-216$ $I.S.=\{2,-9\}$

**23** $2x^2-2x+3(x-1)=2x(2x^2-1)$ R. $I.S.=\{-1\}$

**24** $(3x+1)^2=x(9x^2+6x+1)$ R. $I.S.=\left\{-\frac{1}{3};1\right\}$

**25** $(x+1)(x^2-1)=(x^2+x)(x^2-2x+1)$ R. $I.S.=\{-1;1;1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\}$

**26** $x^3+4x^2+4x=x^2-4$ R. $I.S.=\{-2\}$

**27** $\sqrt{3}\,x^4-\sqrt{27}\,x^2=0$ R. $I.S.=\{-\sqrt{3};0;+\sqrt{3}\}$

**28** $\sqrt{2}x^3-(1-2\sqrt{2})x^2-x=0$ R. $I.S.=\left\{0;\sqrt{2}-1;-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\right\}$

**29** $x^7-x^6+\sqrt{27}x^5=0$ R $I.S.=\{0\}$

*Risolvi le seguenti equazioni frazionarie*

**30** $\frac{3x-1}{x^2}=1-2x+\frac{1}{x}$ R. $I.S.=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

**31** $\frac{x-1}{x^2+5x+4}-\frac{2x+1}{x-1}-\frac{3}{2(x^2-1)}=0$ R. $I.S.=\left\{-\frac{3}{2};-2\right\}$

**32** $\frac{x(x-1)}{x+1}=\frac{x-1}{x^2+2x+1}$ R. $I.S.=\left\{1;\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$

**33** $\frac{1}{x^4-4}=\frac{3}{x^4-16}$ R. $I.S.=\emptyset$

## ►2. Equazioni binomie

Un'equazione binomia è un'equazione del tipo $a x^n + b = 0$ con $a \neq 0$ e con $n \in \mathbb{N}_0$ .

L'equazione così scritta è detta ***forma normale*** dell'equazione.

Dobbiamo distinguere i casi:

- $b \neq 0$
  - se $n$ è pari l'equazione ammette due sole soluzioni reali ed opposte se e solo se i due parametri a e b sono discordi: $x_1 = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$ e $x_2 = -\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$ ;
  - se $n$ è dispari l'equazione ha un'unica soluzione reale $x_1 = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$ .
- $b = 0$
  l'equazione è $a x^n = 0$ e le n soluzioni sono coincidenti nell'unica soluzione $x = 0$ . In questo caso si dice che l'unica soluzione $x = 0$ ha molteplicità $n$ .

Esempi

■ Risolvere l'equazione $3x^4 - 8 = 0$ .

L'esponente $n$ è pari, i coefficienti sono discordi: l'equazione ammette due soluzioni reali distinte: $x_1 = \sqrt[4]{\frac{8}{3}}$ e $x_2 = -\sqrt[4]{\frac{8}{3}}$ .

Osserviamo che l'equazione proposta può essere risolta col metodo della scomposizione in fattori del polinomio al primo membro che può sempre essere considerato, in campo reale, una differenza di quadrati: $3x^4 - 8 = 0 \rightarrow (\sqrt{3}x^2 + \sqrt{8}) \cdot (\sqrt{3}x^2 - \sqrt{8}) = 0$ e per la legge di annullamento del prodotto $(\sqrt{3}x^2 + \sqrt{8}) = 0 \vee (\sqrt{3}x^2 - \sqrt{8}) = 0$ la prima equazione non ha soluzioni reali, mentre per la seconda $(\sqrt{3}x^2 - \sqrt{8}) = 0 \rightarrow x^2 = \sqrt{\frac{8}{3}} \rightarrow x = \pm\sqrt{\sqrt{\frac{8}{3}}} \rightarrow x = \pm\sqrt[4]{\frac{8}{3}}$

■ Risolvere l'equazione $-6x^4 + 9 = 13$ .

Riducendo alla forma normale troviamo $-6x^4 - 4 = 0$; e moltiplicando ambo i membri per $-1$ si ottiene $6x^4 + 4 = 0$ in cui il primo membro è chiaramente una somma di numeri sempre positivi, quindi in $\mathbb{R}$ l'equazione è impossibile e $I.S. = \emptyset$

■ Determinare in $\mathbb{R}$ le soluzioni dell'equazione: $8x^3 + 3 = 4$

Riduciamo prima di tutto l'equazione alla forma normale $8x^3 + 3 = 4 \rightarrow 8x^3 - 1 = 0$ , di grado dispari, quindi si trova l'unica soluzione $x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$ .

Allo stesso risultato perveniamo se procediamo scomponendo in fattori il binomio del primo membro che risulta essere una differenza di cubi: $8x^3 - 1 = 0 \rightarrow (2x - 1) \cdot (4x^2 + 2x + 1) = 0$ e per la legge di annullamento del prodotto $2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \vee 4x^2 + 2x + 1 = 0$ che non ha soluzioni reali essendo $\Delta < 0$ . Pertanto $I.S. = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ .

■ Risolvere l'equazione $2x^7 + 3 = 2$ .

Riduciamo prima di tutto l'equazione alla forma normale: $-2x^7 + 1 = 0$ e si trova così l'unica soluzione reale $x = \sqrt[7]{\frac{1}{2}}$ .

■ Determinare le soluzioni reali dell'equazione: $3x\cdot\left(x^2+1\right)=4\cdot(1+x)-(7x+4)$

$3x^5=0 \rightarrow x^5=0 \rightarrow x=0$ una sola soluzione reale con molteplicità $5$.

■ Determinare le soluzioni reali dell'equazione: $x^3+3=0$

L'equazione binomia assegnata, per quanto detto sopra, ha l'unica soluzione reale $x=-\sqrt[3]{3}$. Vediamo con quale procedimento possiamo spiegare il risultato.

Il polinomio al primo membro può sempre essere pensato come una somma di cubi $x^3+3=(x)^3+\left(\sqrt[3]{3}\right)=0$; scomponendo in fattori si ha $(x)^3+\left(\sqrt[3]{3}\right)=0 \rightarrow \left(x+\sqrt[3]{3}\right)\cdot\left(x^2-x\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2}\right)=0$ e per la legge di annullamento del prodotto $\left(x+\sqrt[3]{3}\right)=0 \rightarrow x=-\sqrt[3]{3} \vee x^2-\sqrt[3]{3}\,x+\sqrt[3]{3^2}=0$ che non ha soluzioni reali essendo $\Delta<0$.

*Determinate le soluzioni reali delle equazioni:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| **34** | $-2x^3+16=0$ | $x^5+15=0$ | R. $I.S.=\{2\}$ ; $I.S.=\{-\sqrt[5]{15}\}$ |
| **35** | $x^4+16=0$ | $-2x^4+162=0$ | R. $I.S.=\emptyset$ ; $I.S.=\{-3;+3\}$ |
| **36** | $-3x^6+125=0$ | $81x^4-1=0$ | R. $I.S.=\left\{\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[6]{3}}\right\}$ $I.S.=\left\{\pm\frac{1}{3}\right\}$ |
| **37** | $27x^3+1=0$ | $81x^4-1=0$ | R. $I.S.=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$ ; $I.S.=\left\{-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right\}$ |
| **38** | $81x^4-1=0$ | $\frac{16}{x^4}-1=0$ | R. $I.S.=\left\{-\frac{1}{3},+\frac{1}{3}\right\}$ ; $I.S.=\{-2;+2\}$ |
| **39** | $x^6-1=0$ | $8x^3-27=0$ | R. $I.S.=\{-1;1\}$ ; $I.S.=\left\{\frac{3}{2}\right\}$ |
| **40** | $x^5-1=0$ | $x^4+81=0$ | R. $I.S.=\{1\}$ ; $I.S.=\emptyset$ |
| **41** | $x^4-4=0$ | $3x^5+96=0$ | R. $I.S.=\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$ $I.S.=\{-2\}$ |
| **42** | $49x^6-25=0$ | $\frac{1}{x^3}=27$ | R. $I.S.=\left\{-\sqrt[3]{\frac{5}{7}},\sqrt[3]{\frac{5}{7}}\right\}$ ; $I.S.=\left\{\frac{1}{3}\right\}$ |
| **43** | $x^4-10000=0$ | $100000x^5+1=0$ | |
| **44** | $x^6-64000000=0$ | $x^4+625=0$ | |
| **45** | $81x^4=1$ | $x^3-\frac{1}{27}=0$ | |
| **46** | $\frac{x^6}{64}-1=0$ | $\frac{64}{x^6}=1$ | |
| **47** | $x^6=6$ | $x^{10}+10=0$ | |
| **48** | $x^{100}=0$ | $10x^5-10=0$ | |
| **49** | $\frac{1}{81}x^4-1=0$ | $\frac{1}{x^4}-81=0$ | |
| **50** | $\sqrt[3]{2}\,x^6=\sqrt[3]{24}$ | $\frac{3}{5}x^3=\frac{25}{9}$ | R. $I.S.=\left\{\pm 2^{\frac{1}{9}}\cdot 3^{\frac{1}{18}}\right\}$ |
| **51** | $x^8-256=0$ | $x^{21}+1=0$ | |
| **52** | $\frac{1}{243}x^5+1=0$ | $x^3+3\sqrt{3}=0$ | R. $I.S.=\{-3\}$ ; $I.S.=\{\sqrt[6]{27}\}$ |
| **53** | $6x^{12}-12=0$ | $\frac{x^3}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}=0$ | |
| **54** | $\sqrt{3}\,x^3-3\sqrt[3]{3}=0$ | $\frac{x^4}{9}-\frac{9}{25}=0$ | R. $I.S.=\left\{3^{\frac{5}{18}}\right\}$ ; $I.S.=\left\{\pm 3\frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$ |

## ►3. Equazioni trinomie

Un'equazione *trinomia* è un'equazione con tre termini del tipo $x^4-5x^2+4=0$ , $x^6-4x^3+3=0$ , $x^{10}-x^5+6=0$ . In generale si presentano nella forma $ax^{2n}+bx^n+c=0$ dove $n$ è un intero positivo e dove i coefficienti $a$ e $b$ sono non nulli.

Per risolvere queste equazioni è opportuno fare un cambio di incognita: ponendo $t=x^n$ l'equazione trinomia diventa di secondo grado: $at^2+bt+c=0$ e da questa, detta per evidenti motivi *equazione risolvente*, si ricavano i valori di $t$ . Successivamente, grazie alla relazione $t=x^n$ , si ricavano i valori di $x$ .

Attraverso alcuni esempi vedremo come procedere alla ricerca dell'I.S.

A) Se **n = 2** l'equazione è detta **biquadratica** e si presenta nella forma $ax^4+bx^2+c=0$ .

Esempio

Risolvere in $\mathbb{R}$ l'equazione $x^4-5x^2+4=0$

L'equazione è biquadratica; facciamo un cambio di incognitae ponendo $x^2=t$ ; l'equazione diventa $t^2-5t+4=0$ ; essendo il discriminante $\Delta=25-16=9$ positivo si hanno due soluzioni reali distinte $t_1=1 \vee t_2=4$ . Per determinare i valori delle soluzioni dell'equazione assegnata procediamo sfruttando la sostituzione posta inizialmente, pertanto si ottiene:

$$\begin{cases} \text{da } t_1=1 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x_1=-1 \vee x_2=+1 \\ \text{da } t_2=4 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x_1=-2 \vee x_2=+2 \end{cases}$$

quindi l'equazione assegnata ha quattro soluzioni reali distinte e $I.S.=\{-1;+1-2;+2\}$ .

**55** Risolvere in R l'equazione $2x^4+3x^2-2=0$ , completando le parti mancanti.

L'equazione è biquadratica quindi ponendo $x^2=t$ diventa $2t^2+3t-2=0$ ; essendo il discriminante $\Delta=\ldots\ldots\ldots$ positivo si hanno due soluzioni reali distinte $t_1=-2 \vee t_2=\frac{1}{2}$ . Per determinare i valori delle soluzioni dell'equazione assegnata procediamo sfruttando la sostituzione posta inizialmente, pertanto si ottiene:

$$\begin{cases} \text{da } t_1=-2 \rightarrow x^2=-2 \rightarrow I.S.=\ldots\ldots\ldots \\ \text{da } t_2=\frac{1}{2} \rightarrow x^2=\frac{1}{2} \rightarrow x_1=\ldots\ldots \vee x_2=\ldots\ldots \rightarrow \text{razionalizzando } x_1=\ldots\ldots \vee x_2=\ldots\ldots \end{cases}$$

In questo caso l'equazione assegnata ha …… soluzioni reali distinte e $I.S.=\ldots\ldots\ldots$

*Determinare l'I.S. delle seguenti equazioni biquadratiche:*

**56** $x^4-13x^2+36=0$ R. $I.S:=\{-3;3;2;-2\}$

**57** $2x^4-20x^2+18=0$ R. $I.S:=\{-1;1;3;-3\}$

**58** $x^4-\frac{37}{9}x^2+\frac{4}{9}=0$ R. $I.S:=\left\{-2;2;\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right\}$

**59** $x^4-\frac{13}{3}x^2+\frac{4}{3}=0$ R. $I.S:=\left\{\pm 1;\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

**60** $-x^4+\frac{17}{4}x^2-1=0$ R. $\text{I.S.}=\left\{-2;2;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\}$

**61** $-2x^4+\frac{65}{2}x^2-8=0$ R. $I.S:=\left\{-4;4;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\}$

**62** $-2x^4+82x^2-800=0$ R. $I.S:=\{-4;4;-5;5\}$

**63** $-3x^4+\frac{85}{3}x^2-12=0$ R. $I.S:=\left\{-3;3;-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right\}$

**64** $x^4-\frac{16}{3}x^2+\frac{16}{3}=0$ R. $I.S:=\left\{-2;2;-\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$

**65** $x^4-7x^2+6=0$ R. $I.S:=\{-1;1;-\sqrt{6};\sqrt{6}\}$

**66** $x^4-10x^2+16=0$ R. $I.S:=\{-\sqrt{2};\sqrt{2};-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\}$

**67** $-3x^4+9x^2+12=0$ R. $I.S:=\{-2;2\}$

**68** $-\frac{1}{2}x^4+\frac{5}{2}x^2+18=0$ R. $I.S:=\{-3;3\}$

**69** $x^4+\frac{15}{4}x^2-1=0$ R. $I.S:=\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$

**70** $-8x^4-\frac{7}{2}x^2+\frac{9}{2}=0$ R. $I.S:=\left\{-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right\}$

**71** $-16x^4-63x^2+4=0$ R. $I.S:=\left\{-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right\}$

**72** $x^4-2x^2-15=0$ R. $I.S:=\{-\sqrt{5};\sqrt{5}\}$

**73** $x^4-2x^2-3=0$ R. $I.S:=\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$

**74** L'equazione $x^4-\frac{16}{9}x^2=0$ è biquadratica incompleta poiché manca ……………. ; si può determinare l'insieme soluzione raccogliendo $x^2$ a fattore comune e con la legge di ……………………… concludere $x^2=$……… $\vee$ $x^2=$……… da cui $I.S.=\{\ldots\ldots\}$ . È vero che una delle soluzioni ha molteplicità due? Possiamo allora dire che l'equazione assegnata ha quattro soluzioni reali di cui due coincidenti?

**75** È vero che l'equazione $4x^4-4=0$ ha quattro soluzioni reali a due a due coincidenti? R.(F)

**76** Nel procedimento risolutivo dell'equazione $x^4-8x^2+16=0$ si determina l'equazione di secondo grado $t^2=-$…………$=0$ con $\Delta=$……… quindi $t_1=$…… $\vee$ $t_2=$…… e dunque le quattro soluzioni reali ……………….... sono ………………………

**77** È vero che l'equazione $-x^4+2x^2-1=0$ ha quattro soluzioni reali a due a due coincidenti? R. (V)

**78** Perché le seguenti equazioni non hanno soluzioni reali?

A) $x^4+\frac{37}{4}x^2+\frac{9}{4}=0$ B) $x^4-x^2+3=0$ C) $-2x^4-x^2-5=0$ D) $-x^4-5x^2-4=0$

**Conclusione:** l'equazione biquadratica $ax^4+bx^2+c=0$

- ha <u>quattro soluzioni reali distinte</u> se il discriminante dell'equazione risolvente è ………………. e se risultano positivi anche i rapporti $-\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$ che indicano rispettivamente la …………………… e il ……….. delle sue soluzioni. Perché?
- ha <u>due soluzioni reali distinte</u> se il discriminante dell'equazione …………………. è …………….. e se risulta negativo il rapporto $\frac{c}{a}$ che indica il …………………… delle sue soluzioni. Perché?
- **non** ha <u>soluzioni reali</u> se il discriminante dell'equazione …………………… è ………………….. e se risulta positivo il rapporto $\frac{c}{a}$ e negativo il rapporto $-\frac{b}{a}$ che indicano rispettivamente il ………………… e la …………………… delle sue soluzioni. Perché?
- **non** ha <u>soluzioni reali</u> se il discriminante dell'equazione …………………. è ……….. Perché?

**79** Senza risolvere le seguenti equazioni, dire se ammettono soluzioni reali:

A) $2x^4+5x^2-4=0$ B) $2x^4-5x^2+4=0$ C) $x^4-5x^2+1=0$ D) $-4x^4+5x^2-1=0$

R. [si, no, si, no]

**80** Data l'equazione letterale $x^2\cdot\left(x^2-2a+1\right)=a\cdot(1-a)$ , stabilire per quali valori del parametro a si hanno quattro soluzioni reali. R. $a>1$

**81** Determinare l'I.S. dell'equazione $8x^2+\frac{6x^2+x-4}{x^2-1}=4-\frac{3+4x}{1+x}$ R. $I.S.=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};\right\}$

**82** È vero che la somma delle radici dell'equazione $ax^4+bx^2+c=0$ è nulla?

**83** Verifica le seguenti uguaglianze relative alle soluzioni (reali) dell'equazione $ax^4+bx^2+c=0$ :

A) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=-\frac{2b}{a}$ B) $x_1^2\cdot x_2^2\cdot x_3^2\cdot x_4^2=\frac{c}{a}$

**84** Ricordando la regola di Cartesio che esprime il legame tra il segno dei coefficienti di un'equazione di secondo grado e il segno delle sue soluzioni, completate lo schema sottostante ancora relativo alle soluzioni dell'equazione biquadratica:

| Equazione risolvente | Segno coefficienti | Equazione biquadratica |
|---|---|---|
| $\Delta>0$ | 2 variazioni | 4 soluzioni reali |
| | 1 permanenza- 1 variazione | ………………………… |
| | ………………………… | ………………………… |
| $\Delta=0$ | $x=-\frac{b}{2a}>0$ | ………………………… |
| | $x=-\frac{b}{2a}<0$ | ………………………… |
| $\Delta<0$ | | ………………………… |

B) Equazioni trinomie con **n > 2** vediamo come determinare l'I.S. delle equazioni trinomie attraverso alcuni esempi

Esempi

- Risolvere l'equazione $x^6-4x^3+3=0$ .

Ponendo $t=x^3$ abbiamo l'equazione risolvente $t^2-4t+3=0$ , le cui soluzioni reali sono $t_1=1$ , $t_2=3$ ; per ricavare i valori di $x$ è sufficiente risolvere le due equazioni binomie $x^3=1$ e $x^3=3$ , trovando così le soluzioni reali per l'equazione assegnata $x_1=1 \vee x_2=\sqrt[3]{3}$

- Risolvere l'equazione $x^8-x^4-2=0$ .

Ponendo $t=x^4$ arriviamo all'equazione $t^2-t-2=0$ da cui $t_1=2$ e $t_2=-1$ ; pertanto le due equazioni binomie da risolvere sono: $x^4=2$ e $x^4=-1$ , quindi

- $x^4=2 \rightarrow x^2=-\sqrt{2} \vee x^2=+\sqrt{2}$ e di queste due, solo la seconda ha soluzioni reali e precisamente $x_1=\sqrt[4]{2};\ x_2=-\sqrt[4]{2}$ .
- $x^4=-1$ che non ha soluzioni reali

concludendo: $I.S.=\left\{-\sqrt[4]{2};+\sqrt[4]{2}\right\}$

- Risolvere l'equazione $x^{12}+x^6+3=1-2x^6$ .

Riconducendo l'equazione alla forma normale, troviamo: $x^{12}+3x^6+2=0$ ; l'equazione non ha soluzioni reali: possiamo infatti osservare che per qualunque valore reale attribuito all'incognita, la somma dei tre termini a primo membro è $\geq 2$ e quindi non può essere $=0$ . Si osservi d'altra parte che, posto $t=x^6$ , si ricavano le soluzioni $t_1=-1$ e $t_2=-2$ entrambe negative e quindi le due equazioni binomie $x^6=-1$ e $x^6=-2$ risultano essere impossibili in $\mathbb{R}$ .

- Risolvere l'equazione $x^{10}-x^5+7=1$ .

Riconducendo l'equazione alla forma normale, troviamo: $x^{10}-x^5+6=0$ ; l'equazione risolvente $t^2-t+6=0$ non ha soluzioni reali essendo il discriminante negativo e quindi $I.S.=\emptyset$

*Determinare le soluzioni reali delle seguenti equazioni trinomie*

**85** $x^6+13x^3+40=0$ R. $I.S:=\{-2;-\sqrt[3]{5}\}$

**86** $x^8-4x^4+3=0$ R. $I.S:=\{1;-1;\sqrt[4]{3};-\sqrt[4]{3}\}$

**87** $-x^6+29x^3-54=0$ R. $I.S:=\{3;\sqrt[3]{2}\}$

**88** $\frac{1}{2}x^{10}-\frac{3}{2}x^5+1=0$ R. $I.S:=\{1;\sqrt[5]{2}\}$

**89** $-3x^{12}-3x^6+6=0$ R. $I.S:=\{1;-1\}$

**90** $2x^8+6x^4+4=0$ R. $\emptyset$

**91** $-x^8-6x^4+7=0$ R. $I.S:=\{1;-1\}$

**92** $-2x^6+\frac{65}{4}x^3-2=0$ R. $I.S:=\left\{2;\frac{1}{2}\right\}$

**93** $-\frac{3}{2}x^{10}+\frac{99}{2}x^5-48=0$ R. $I.S:=\{1;2\}$

**94** $-\frac{4}{3}x^{14}-\frac{8}{9}x^7+\frac{4}{9}=0$ R. $I.S:=\left\{-1;\sqrt[7]{\frac{1}{3}}\right\}$

## ►4. Equazioni che si risolvono con sostituzioni

Molte altre equazioni si possono risolvere con opportune sostituzioni.

Esempio

- $(x^2-4)^4-1=0$

Sostituendo $t=x^2-4$ l'equazione diventa $t^4-1=0$ . È un'equazione binomia che ha per soluzioni $t_1=-1;\ t_2=+1$ . Sostituendo questi valori nella relazione $t=x^2-4$ si ha

$$\begin{cases}-1=x^2-4\to x^2=3\to x=\pm\sqrt{3}\\+1=x^2-4\to x^2=5\to x=\pm\sqrt{5}\end{cases}$$

**95** $(x^3+1)^3-8=0$ R. $I.S.=\{1\}$

**96** $2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2-3\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-1=0$ sostituire $\frac{x+1}{x-1}=t$ R. $I.S.=\left\{\frac{3-\sqrt{17}}{2};\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}$

**97** $(x^2+1)^2-6(x^2+1)+8=0$ R. $I.S.=\{-\sqrt{3};-1;1;\sqrt{3}\}$

**98** $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\frac{16}{9}$ R. $I.S.=\emptyset$

**99** $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-16\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$ R. $I.S.=\{8-3\sqrt{7};8+3\sqrt{7}\}$

**100** $\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2-12\left(x^2-\frac{1}{3}\right)+27=0$ R. $I.S.=\left\{\pm\frac{2\sqrt{21}}{3};\pm\frac{\sqrt{30}}{3}\right\}$

**101** $(x+1)^3+6(x+1)^2-(x+1)-30=0$ R. $I.S.=\{-6;-4;1\}$

**102** $(x^2+1)^3-4(x^2+1)^2-19(x^2+1)-14=0$ R. $I.S.=\{-\sqrt{6};\sqrt{6}\}$

**103** $\frac{3x}{x+1}-\left(\frac{3x}{x+1}\right)^3=0$ R. $I.S.=\left\{-\frac{1}{4};0;\frac{1}{2}\right\}$

## ►5. Equazioni reciproche

Dato un polinomio ordinato, le *coppie di coefficienti equidistanti dagli estremi* sono le coppie costituite dal primo e dall'ultimo coefficiente, dal secondo e dal penultimo, dal terzo e dal terzultimo, ecc. Se il numero dei coefficienti è dispari (ciò accade se il grado del polinomio è pari), per convenzione si considera una coppia di coefficienti equidistanti il termine centrale, contato due volte.

DEFINIZIONI

Un'equazione è detta **reciproca di prima specie** se, posta nella forma canonica $p(x)=0$, il polinomio $p(x)$ ha i coefficienti dei termini estremi e quelli dei termini equidistanti dagli estremi **uguali**.

Un'equazione è detta **reciproca di seconda specie** se, posta nella forma canonica $p(x)=0$, il polinomio $p(x)$ ha i coefficienti dei termini estremi e quelli dei termini equidistanti dagli estremi **opposti**. In particolare, se $p(x)$ ha grado $2k$ (pari), il coefficiente di $x^k$ è nullo.

- L'equazione $x^3-2x^2-2x+1=0$ è un'equazione di terzo grado reciproca di prima specie.
- L'equazione $3x^4+5x^3-4x^2+5x+3=0$ è un'equazione di quarto grado reciproca di prima specie.
- L'equazione $-7x^4+5x^3-5x+7=0$ è un'equazione di quarto grado reciproca di seconda specie.
- L'equazione $3x^5+2x^4+6x^3-6x^2-2x-3=0$ è un'equazione di quinto grado reciproca di seconda specie.
- L'equazione $-2x^4+8x^3+3x^2-8x+2=0$ è un'equazione di quarto grado, ma non è reciproca di seconda specie, in quanto il coefficiente di secondo grado dovrebbe essere nullo.

Il seguente teorema mette in luce una importante proprietà di cui godono queste equazioni:

TEOREMA (delle radici reciproche). Se $\lambda$ è una radice non nulla di un'equazione reciproca di qualunque grado, allora anche $\frac{1}{\lambda}$ è radice dell'equazione.

Consideriamo l'equazione reciproca di prima specie $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots\ldots+a_1x+a_0=0$ .

- Ipotesi: $x=\lambda$ è una radice dell'equazione;
- Tesi: $x=\frac{1}{\lambda}$ è una radice dell'equazione.
- Dimostrazione:
  Sappiamo che se $x=\lambda$ è una radice allora è vera l'uguaglianza $a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots\ldots+a_1\lambda+a_0=0$ (&). Sostituiamo $\frac{1}{\lambda}$ al posto della $x$ nel polinomio al primo membro, si ha: $p\left(\frac{1}{\lambda}\right)=a_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n+a_1\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-1}+\ldots+a_1\left(\frac{1}{\lambda}\right)+a_0$ che, svolti i calcoli, diventa $p\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{a_0+a_1\lambda+\ldots+a_1\lambda^{n-1}+a_0\lambda^n}{\lambda^n}$ .
  Osservando il numeratore notiamo che è proprio quanto scritto in (&) e pertanto, essendo il denominatore diverso da zero, si ha $p\left(\frac{1}{\lambda}\right)=0$ che dimostra la tesi. C.V.D.

**104** Dimostra il teorema per le equazioni di seconda specie.

**105** Dopo aver verificato che $x=3$ è radice dell'equazione $3x^3-13x^2+13x-3=0$, verificate che l'equazione ammette come soluzione $x=\frac{1}{3}$ .

Analizziamo i metodi risolutivi per le equazioni reciproche.

### Equazioni di terzo grado reciproche di prima specie

Queste equazioni hanno la seguente struttura: $a_0 x^3+a_1 x^2+a_1 x+a_0=0$ e hanno $x=-1$ come radice: infatti sostituendo tale valore al posto della x nel polinomio al primo membro si ottiene: $p(-1)=a_0(-1)^3+a_1(-1)^2+a_1(-1)+a_0=-a_0+a_1-a_1+a_0=0$ .

Ricordiamo che secondo la regola del resto, il valore trovato (zero) ci assicura che il polinomio al primo membro è divisibile per $x+1$ ; con la divisione polinomiale o con la regola di Ruffini possiamo allora scrivere $a_0 x^3+a_1 x^2+a_1 x+a_0=(x+1)\cdot\left(a_0 x^2+(a_1-a_0)x+a_0\right)=0$ da cui con la legge di annullamento del prodotto possiamo determinare le soluzioni dell'equazione assegnata.

**106** Eseguire la divisione polinomiale tra $p(x)=a_0 x^3+a_1 x^2+a_1 x+a_0$ e il binomio $x+1$ per verificare la fattorizzazione trovata. In alternativa usare la regola di Ruffini.

Esempio

Determinare le radici dell'equazione $x^3-5x^2-5x+1=0$ .
Si tratta di un'equazione di terzo grado reciproca di prima specie. Una radice è $x=-1$ per cui possiamo fattorizzare il polinomio al primo membro eseguendo la divisione polinomiale e ottenere $(x+1)\left(x^2-6x+1\right)=0$ . Per la legge di annullamento del prodotto otteniamo la radice $x=-1$ già nota e, risolvendo l'equazione $x^2-6x+1=0$ si trovano le altre radici $x_2=3+2\sqrt{2}$ e $x_2=3-2\sqrt{2}$ e quindi $I.S.=\left\{-1\,;3+2\sqrt{2}\,;3-2\sqrt{2}\right\}$ .

**107** Dimostrare che, in accordo con il teorema delle radici reciproche, le soluzioni $3+2\sqrt{2}$ e $3-2\sqrt{2}$ sono numeri reciproci.

**108** Determinare le soluzioni reali dell'equazione $3x^3-5x^2-5x+3=0$ , completando le parti mancanti.
L'equazione assegnata è **reciproca di terzo grado e di prima specie** ammette dunque $x=-1$ come radice.
Infatti $p(-1)=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
Il polinomio al primo membro si scompone in $(x+1)\left(3x^2-\dots\dots\dots\dots\right)=0$ ; per la legge di annullamento del prodotto avremo $x+1=0 \rightarrow x=-1$ come già noto oppure
$3x^2-\dots\dots\dots=0 \rightarrow x_1=\dots\dots \vee x_2=\dots\dots \rightarrow I.S.=\{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$
"*L'equazione assegnata ha tre soluzioni reali di cui le due irrazionali sono l'una il reciproco dell'altra*". Verificare questa affermazione.

Un modo "alternativo" per determinare l'I.S. dell'equazione reciproca $a_0 x^3+a_1 x^2+a_1 x+a_0=0$ consiste nel raccogliere parzialmente i due coefficienti $a_0$ e $a_1$ : $a_0\left(x^3+1\right)+a_1\left(x^2+x\right)=0$ da cui $a_0(x+1)\left(x^2-x+1\right)+a_1 x(x+1)=0$ e raccogliendo totalmente il binomio $(x+1)$ ritroviamo la fattorizzazione precedente: $(x+1)\cdot\left(a_0 x^2+(a_1-a_0)x+a_0\right)=0$ .

**109** Applicare questo metodo "alternativo" all'equazione assegnata nell'esercizio precedente.

### Equazioni di terzo grado reciproche di seconda specie

Queste equazioni hanno la seguente struttura: ; e $a_0 x^3+a_1 x^2-a_1 x-a_0=0$ hanno $x=1$ come radice, basta verificare sostituendo tale valore al posto della x nel polinomio al primo membro: $p(1)=a_0(1)^3+a_1(1)^2-a_1(1)-a_0=a_0+a_1-a_1-a_0=0$ .
Procedendo come nel caso precedente si può ottenere la scomposizione in fattori del polinomio al primo membro: $(x-1)\cdot\left(a_0 x^2+(a_0+a_1)x+a_0\right)=0$ e quindi determinare l'I.S. dell'equazione assegnata applicando la legge di annullamento del prodotto.

Esempio

Determinare le radici dell'equazione $2x^3-7x^2+7x-2=0$ .
E' un'equazione di terzo grado reciproca di seconda specie. Una radice è $x_1=1$ e pertanto l'equazione può

essere scritta nel modo seguente: $(x-1)(2x^2-5x+2)=0$. Per la legge di annullamento del prodotto otteniamo la radice $x=1$ già nota e risolvendo $(2x^2-5x+2)=0$ si ricavano le altre due radici: $x_2=2$ e $x_3=\frac{1}{2}$ e dunque $I.S.=\left\{1;2;\frac{1}{2}\right\}$.

**110** Determinare le soluzioni reali dell'equazione $2x^3-9x^2+9x-2=0$ completando le parti mancanti.
L'equazione assegnata è **reciproca di terzo grado e di seconda specie** e dunque ammette $x=+1$ come radice.
Infatti $p(+1)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
Il polinomio al primo membro si scompone in $(x-1)(2x^2-\ldots\ldots\ldots\ldots)=0$. Per la legge di annullamento del prodotto avremo $x-1=0 \rightarrow x=1$ come già noto oppure
$2x^2-\ldots\ldots\ldots=0 \rightarrow x_1=\ldots\ldots \vee x_2=\ldots\ldots \rightarrow I.S.=\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
"*L'equazione assegnata ha tre soluzioni reali di cui le due irrazionali sono l'una il reciproco dell'altra*". Verificare questa affermazione.
Un modo "alternativo" consiste nel raccogliere parzialmente i due coefficienti $a_0$ e $a_1$: $a_0(x^3-1)+a_1(x^2-x)=0$ da cui $a_0(x-1)(x^2+x+1)+a_1x(x-1)=0$ e raccogliendo totalmente il binomio $(x-1)$ ritroviamo la fattorizzazione precedente: $(x-1)\cdot(a_0x^2+(a_1+a_0)x+a_0)=0$

**111** Applicare questo metodo alternativo all'equazione assegnata nell'esercizio precedente.

**112** Attribuisci ad ogni proposizione il valore di verità:

- l'equazione $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ammette sempre $x=-1$ come soluzione
- se nell'equazione $ax^3+bx^2+cx+d=0$ si ha $a=d$ e $b=c$ allora $x=-1$ è una soluzione
- in una equazione reciproca di terzo grado la somma dei coefficienti è nulla
- se nell'equazione $ax^3+bx^2+cx+d=0$ si ha $a+d=0$ e $b+c=0$ allora $x=1$ appartiene all'I.S.

**113** dimostrare che l'equazione reciproca di terzo grado ha sempre tre radici reali.

### Equazioni di quarto grado reciproche di prima specie

Rientrano in questa classificazione le equazioni del tipo: $a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$

Prima di proporre il metodo risolutivo per una tale equazione osserviamo che $x=0$ non può essere una radice in quanto, se lo fosse, sarebbe $a_0=0$ e il grado dell'equazione diventerebbe $\leq 3$. Questa premessa ci consente di dividere entrambi i membri dell'equazione per $x^2$ ottenendo l'equazione equivalente alla data $a_0x^2+a_1x+a_2+\frac{a_1}{x}+\frac{a_0}{x^2}=0$ da cui, raccogliendo parzialmente $a_0$ e $a_1$, troviamo $a_0\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+a_1\left(x+\frac{1}{x}\right)+a_2=0$

Ponendo ora $t=x+\frac{1}{x}$ quindi $t^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 \rightarrow t^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$ da cui $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$ e sostituendo trovato nell'equazione $a_0\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+a_1\left(x+\frac{1}{x}\right)+a_2=0$ ricaviamo la seguente equazione di secondo grado equivalente alla data: $a_0(t^2-2)+a_1t+a_2=0 \rightarrow a_0t^2+a_1t+a_2-2a_0=0$
Trovate, se esistono reali, le radici $t_1$ e $t_2$ di questa equazione, possiamo determinare le corrispondenti radici dell'equazione iniziale risolvendo le due equazioni $x+\frac{1}{x}=t_1$ e $x+\frac{1}{x}=t_2$ fratte nell'incognita $x$, rispettivamente equivalenti a $x^2-t_1x+1=0;\ ax^2-t_2x+1=0$.

***Si hanno soluzioni reali di queste ultime equazioni se e solo se*** $|t|\geq 2$ **.** Infatti, risolvendo rispetto a $x$ l'equazione $x+\frac{1}{x}=t$, troviamo: $x^2-tx+1=0$ e calcolando il discriminante $\Delta=t^2-4$ vediamo che ci sono soluzioni reali se e solo se $t^2-4\geq 0$ ovvero se e solo se $t\leq -2 \vee t\geq 2$ cioè $|t|\geq 2$.

**114** Stabilire quale condizione deve sussistere tra i coefficienti dell'equazione
$a_0(t^2-2)+a_1 t+a_2=0 \rightarrow a_0 t^2+a_1 t+a_2-2a_0=0$ affinché esistano reali i valori della nuova incognita t.

Esempio

Determinare le radici dell'equazione $x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$ .

Si tratta di un'equazione di quarto grado reciproca di prima specie. Ponendo $t=x+\frac{1}{x}$ arriviamo a risolvere l'equazione $1\cdot(t^2-2)-4t+5=0$ ovvero $t^2-4t+3=0$ da cui $t_1=1$ e $t_2=3$ . Il primo valore $t_1$ non dà soluzioni reali poiché l'equazione $x+\frac{1}{x}=1$ ha il discriminante negativo $(\Delta=\ldots\ldots)$ mentre l'equazione $x+\frac{1}{x}=3$ ha due soluzioni reali distinte $x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ . L'equazione assegnata ha $I.S.=\left\{\frac{3+\sqrt{5}}{2};\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$ .

**115** Completare il procedimento per la ricerca delle soluzioni dell'equazione reciproca
$2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0$ .

Dividiamo ambo i membri dell'equazione per $x^2$ , certamente diverso da zero e otteniamo:

$$2x^2+3x-16+3\cdot\frac{1}{x}+2\cdot\frac{1}{x^2}=0 \rightarrow 2\cdot\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\cdot(\ldots\ldots\ldots)-\ldots=0 \rightarrow 2\cdot(t^2-\ldots\ldots)+3t=0 \rightarrow$$
$$\rightarrow 2t^2+3t-20=0 \rightarrow t_1=\ldots\ldots\ldots \vee t_2=\ldots\ldots\ldots$$

Poiché i valori di t soddisfano la condizione le $|t|\geq 2$ equazioni $x+\frac{1}{x}=t_1$ e $x+\frac{1}{x}=t_2$ hanno entrambe soluzioni reali distinte ………………………………………… pertanto $I.S.=\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

### Equazioni di quarto grado reciproche di seconda specie

Fanno parte di questa classe le equazioni del tipo: $a_0x^4+a_1x^3-a_1x-a_0=0$ in cui il coefficiente di $x^2$ è nullo.

Per risolvere questa equazione, raccogliamo parzialmente $a_0$ e $a_1$ ottenendo: $a_0(x^4-1)+a_1(x^3-x)=0$ da cui $a_0(x^2-1)(x^2+1)+a_1x(x^2-1)=0$ e raccogliendo totalmente il binomio $(x^2-1)$ possiamo ottenere la fattorizzazione del polinomio al primo membro dell'equazione: $(x^2-1)(a_0(x^2+1)+a_1x)=0$ ovvero $(x-1)(x+1)(a_0x^2+a_1x+a_0)=0$

Per la legge di annullamento del prodotto si hanno quindi le due radici $x_1=1,\ x_2=-1$ e le eventuali radici reali dell'equazione $a_0x^2+a_1x+a_0=0$ .

**116** Stabilire quale condizione deve sussistere tra i coefficienti dell'equazione $a_0x^2+a_1x+a_0=0$ affinché esistano reali le sue soluzioni.

Esempio

Determinare le radici dell'equazione $x^4-8x^3+8x-1=0$ .

Si tratta di un'equazione di quarto grado reciproca di seconda specie (si osservi che il coefficiente di secondo grado è nullo); mettendo in evidenza il binomio $(x^2-1)$ abbiamo: $(x^2-1)(x^3-8x+1)$ da cui, risolvendo le equazioni $x^2-1=0$ e $x^3-8x+1=0$ , otteniamo tutte le radici:
$x_1=1 \vee x_2=-1 \vee x_3=4+\sqrt{15} \vee x_4=4-\sqrt{15}$ e quindi $I.S.=\{-1;\ 1,\ 4+\sqrt{15};\ 4-\sqrt{15}\}$

**117** Determinare per quale valore di $k$ , l'equazione $(2k-\sqrt{2})x^4+5x^3-5x-2\sqrt{2}=0$ è reciproca.
È vero che $I.S.=\{+1;-1\}$ ? R. $k=\frac{3}{2}\sqrt{2}$

### Equazioni di quinto grado reciproche di prima specie

Fanno parte di questa classe le equazioni del tipo: $a_0 x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ .
Con il raccoglimento parziale possiamo scrivere: $a_0(x^5+1)+a_1(x^4+x)+a_2(x^3+x^2)=0$ e, ricordando la formula per la scomposizione della somma di potenze, abbiamo:
$a_0(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)+a_1 x(x+1)(x^2-x+1)+a_2 x^2(x+1)=0$ da cui raccogliendo totalmente il binomio $(x+1)$ ricaviamo: $(x+1)\left(a_0(x^4-x^3+x^2-x+1)+a_1 x(x^2-x+1)+a_2 x^2\right)=0$ e quindi la fattorizzazione del polinomio al primo membro:
$(x+1)\left(a_0 x^4+(a_1-a_0)x^3+(a_2-a_1+a_0)x^2+(a_1-a_0)x+a_0\right)=0$
Infine con la legge di annullamento del prodotto si determina la soluzione reale $x=-1$ e con i metodi analizzati in precedenza le soluzioni dell'equazione di quarto grado $\left(a_0 x^4+(a_1-a_0)x^3+(a_2-a_1+a_0)x^2+(a_1-a_0)x+a_0\right)=0$ e infine l'Insieme Soluzione dell'equazione reciproca di quinto grado.
Si osservi che la stessa uguaglianza può essere ottenuta mediante la divisione polinomiale, dal momento che una radice è $x=-1$ ; la nuova equazione da risolvere è di quarto grado di prima specie: $a_0 x^4+(a_1-a_0)x^3+(a_2-a_1+a_0)x^2+(a_1-a_0)x+a_0=0$ e il suo insieme di soluzione si ottiene con i metodi esposti in precedenza.

Esempio
Determinare le radici dell'equazione $6x^5+x^4-43x^3-43x^2+x+6=0$ .

L'equazione è di quinto grado reciproca di prima specie. Una radice è $x_1=-1$ ; con la divisione polinomiale, l'equazione può essere allora riscritta nella forma seguente: $(x+1)(6x^4-5x^3-38x^2-5x+6)=0$ . Risolvendo l'equazione di quarto grado reciproca di prima specie $6x^4-5x^3-38x^2-5x+6=0$ , si trovano le altre quattro radici: $x_2=-2,\ x_3=-\frac{1}{2},\ x_4=3,$ e $x_5=\frac{1}{3}$ .
$I.S.=\left\{-1;-2;-\frac{1}{2};\ 3;\frac{1}{3}\right\}$

**118** Verificare mostrando tutti i passaggi le soluzioni dell'equazione reciproca di quarto grado dell'esempio precedente.

### Equazioni di quinto grado reciproche di seconda specie

Fanno parte di questa classe le equazioni del tipo: $a_0 x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 - a_2 x^2 - a_1 x - a_0 = 0$ .

Con il raccoglimento parziale si ottiene $a_0(x^5-1)+a_1(x^4-x)+a_2(x^3-x^2)=0$ e applicando la formula per la somma di potenze, si ha: $a_0(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)+a_1 x(x-1)(x^2+x+1)+a_2 x^2(x-1)=0$ da cui, raccogliendo il binomio $(x-1)$ si ottiene $(x-1)\left(a_0(x^4+x^3+x^2+x+1)+a_1 x(x^2+x+1)+a_2 x^2\right)=0$ e quindi $(x+1)\left(a_0 x^4+(a_1-a_0)x^3+(a_2-a_1+a_0)x^2+(a_1-a_0)x+a_0\right)=0$
Una radice è $x=1$ e le altre provengono dall'equazione di quarto grado di prima specie: $a_0 x^4+(a_1+a_0)x^3+(a_2+a_1+a_0)x^2+(a_1+a_0)x+a_0=0$ .

Esempio
Determinare le radici dell'equazione $x^5+2x^4-5x^3+5x^2-2x-1=0$ .

E' un'equazione di quinto grado reciproca di seconda specie. Una radice è $x_1=1$ ; con la divisione polinomiale, l'equazione può essere riscritta nella forma seguente: $(x-1)(x^4+3x^3-2x^2+3x+1)=0$ . Risolvendo l'equazione di quarto grado reciproca di prima specie $x^4+3x^3-2x^2+3x+1=0$ , si trovano altre due radici reali: $x_2=-2+\sqrt{3}$ e $x_3=-2-\sqrt{3}$ , pertanto $I.S.=\{+1;-2+\sqrt{3};-2-\sqrt{3}\}$

**119** Nell'equazione $(2-a)x^5-x^4+(3+a)x^3+2bx^2+x+5b=0$ determinare $a$ e $b$ in modo che l'equazione sia reciproca. R. $a=-\frac{11}{7}$; $b=\frac{5}{7}$

Vi proponiamo un esempio di equazione reciproca di sesto grado:

Esempio

Determinare le radici dell'equazione $-x^6+6x^5+6x^4-6x^2-6x+1=0$ .

Si tratta di un'equazione di sesto grado reciproca di seconda specie (si osservi che il termine di terzo grado è nullo); l'equazione ammette per radici $x_1=1$ e $x_2=-1$ , quindi possiamo dividere il polinomio per il binomio $(x^2-1)$ , ottenendo come quoziente $-x^4+6x^3+5x^2+6x-1$ ; si tratta allora di risolvere un'equazione di quarto grado reciproca di prima specie. Si trovano in questo modo altre due radici reali: $x_3=\frac{7+\sqrt{5}}{2,}$ $x_4=\frac{7-\sqrt{5}}{2}$ .

**120** Eseguire la divisione polinomiale tra il polinomio primo membro dell'equazione assegnata e il binomio $(x^2-1)$ .

**121** Eseguire tutti i passaggi per determinare le soluzioni dell'equazione reciproca di quarto grado che compare nell'esempio precedente.

**122** $x^3-3x^2-3x+1=0$ R. $I.S.=\{2-\sqrt{3};2+\sqrt{3};-1\}$

**123** $2x^3-3x^2-3x+2=0$ R. $I.S.=\left\{\frac{1}{2};2;-1\right\}$

**124** $6x^3+7x^2-7x-6=0$ R. $I.S.=\left\{-\frac{3}{2};-\frac{2}{3};1\right\}$

**125** $2x^3+5x^2+5x+2=0$ R. $I.S.=\{-1\}$

**126** $x^3-3x^2+3x-1=0$ R. $I.S.=\{1\}$

**127** $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$ R. $I.S.=\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2};1\right\}$

**128** $3x^3-4x^2+4x-3=0$ R. $I.S.=\{1\}$

**129** $2x^4-5x^3+5x-2=0$ R. $I.S.=\left\{\frac{1}{2};2;-1;1\right\}$

**130** $-5x^4+3x^3-3x+5=0$ R. $I.S.=\{-1;1\}$

**131** $2x^5-3x^4+4x^3-4x^2+3x-2=0$ R. $I.S.=\{1\}$

**132** $-2x^4+8x^3-8x+2=0$ R. $I.S.=\{2-\sqrt{3};2+\sqrt{3};-1;1\}$

**133** $2x^3-5x^2-5x+2=0$ R. $x=-1;x=\frac{7+\sqrt{33}}{4};x=\frac{7-\sqrt{33}}{4}$

**134** $3x^3-6x^2-6x+3=0$ R. $x=-1;x=\frac{3+\sqrt{5}}{2};x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

**135** $5x^3-7x^2+7x-5=0$ R. $x=1$

**136** $4x^3-20x^2+20x-4=0$ R. $x=1;x=2+\sqrt{3};x=2-\sqrt{3}$

**137** $5x^3-5x^2-5x+5=0$ R. $x=1;x=-1$

**138** $4x^3-9x^2+9x-4=0$ R. $x=1$

**139** $\frac{3}{2}x^3+\frac{7}{4}x^2-\frac{7}{4}x-\frac{3}{2}=0$ R. $x=1;x=-\frac{2}{3};x=-\frac{3}{2}$

**140** $-2x^3+10x^2+10x-2=0$ R. $x=-1;x=3+2\sqrt{2};x=3-2\sqrt{2}$

**141** $x^4-\frac{5}{6}x^3-\frac{19}{3}x^2-\frac{5}{6}x+1=0$ R. $x=3;x=\frac{1}{3};x=-2;x=-\frac{1}{2}$

**142** $x^4-\frac{9}{4}x^3-\frac{13}{2}x^2-\frac{9}{4}x+1=0$ R. $x=-1;x=4;x=\frac{1}{4}$

143 $x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0$ R. $x=1$

144 $x^4+\frac{10}{3}x^3+2x^2+\frac{10}{3}x+1=0$ R. $x=-3\,;\,x=-\frac{1}{3}$

145 $x^4-4x^3+2x^2-4x+1=0$ R. $x=2+\sqrt{3}\,;\,x=2-\sqrt{3}$

146 $x^4-x^3+x-1=0$ R. $x=1\,;\,x=-1$

147 $x^4-6x^3+6x-1=0$ R. $x=1\,;\,x=-1\,;\,x=3+2\sqrt{2}\,;\,x=3-2\sqrt{2}$

148 $x^4-3x^3+2x^2-3x+1=0$ R. $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,;\,x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

149 $x^4-5x^3-12x^2-5x+1=0$ R. $x=-1\,;\,x=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\,;\,x=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$

150 $3x^4-x^3+x-3=0$ R. $x=1\,;\,x=-1$

151 $2x^4-5x^3+4x^2-5x+2=0$ R. $x=2\,;\,x=\frac{1}{2}$

152 $2x^4-x^3+4x^2-x+2=0$ R. impossibile

153 $3x^4-7x^3+7x-3=0$ R. $x=1\,;\,x=-1\,;\,x=\frac{7+\sqrt{13}}{6}\,;\,x=\frac{7-\sqrt{13}}{6}$

154 $3x^4-6x^3+6x-3=0$ R. $x=1\,;\,x=-1$

155 $2x^4-6x^3+4x^2-6x+2=0$ R. $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,;\,x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

156 $x^4+8x^3-8x-1=0$ R. $x=1\,;\,x=-1\,;\,x=-4+\sqrt{15}\,;\,x=-4-\sqrt{15}$

157 $x^5-3x^4+2x^3+2x^2-3x+1=0$ R. $x=1\,;\,x=-1$

158 $x^5-2x^4-5x^3-5x^2-2x+1=0$ R. $x=-1\,;\,x=2+\sqrt{3}\,;\,x=2-\sqrt{3}$

159 $x^5+3x^4+x^3-x^2-3x-1=0$ R. $x=1\,;\,x=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\,;\,x=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

160 $x^5+x^4+x^3-x^2-x-1=0$ R. $x=1$

161 $x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1=0$ R. $x=1$

162 $x^5-5x^3-5x^2+1=0$ R. $x=-1\,;\,x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,;\,x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

163 $x^5+3x^4-2x^3+2x^2-3x-1=0$ R. $x=1\,;\,x=-2+\sqrt{3}\,;\,x=-2-\sqrt{3}$

164 $2x^5-2x^4+2x^3+2x^2-2x+2=0$ R. $x=-1$

165 $x^6-x^5-5x^4+5x^2+x-1=0$ R. $x=1\,;\,x=-1\,;\,x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,;\,x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

166 $x^6-x^5-x^4+2x^3-x^2-x+1=0$ R. $x=1\,;\,x=-1$

167 $x^5-2x^4+x^3+x^2-2x+1=0$ R. $x=1\,;\,x=-1$

168 $x^5-\frac{11}{4}x^4-\frac{55}{8}x^3+\frac{55}{8}x^2+\frac{11}{4}x-1=0$ R. $x=1\,;\,x=4\,;\,x=\frac{1}{4}\,;\,x=-2\,;\,x=-\frac{1}{2}$

169 $x^5-4x^4+\frac{13}{4}x^3+\frac{13}{4}x^2-4x+1=0$ R. $x=-1\,;\,x=2\,;\,x=\frac{1}{2}$

170 $x^6+\frac{13}{6}x^5+x^4-x^2-\frac{13}{6}x-1=0$ R. $x=1\,;\,x=-1\,;\,x=-\frac{3}{2}\,;\,x=-\frac{2}{3}$

171 $x^6+\frac{16}{3}x^5+\frac{23}{3}x^4-\frac{23}{3}x^2-\frac{16}{3}x-1=0$ R. $x=1\,;\,x=-1\,;\,x=-3\,;\,x=-\frac{1}{3}$

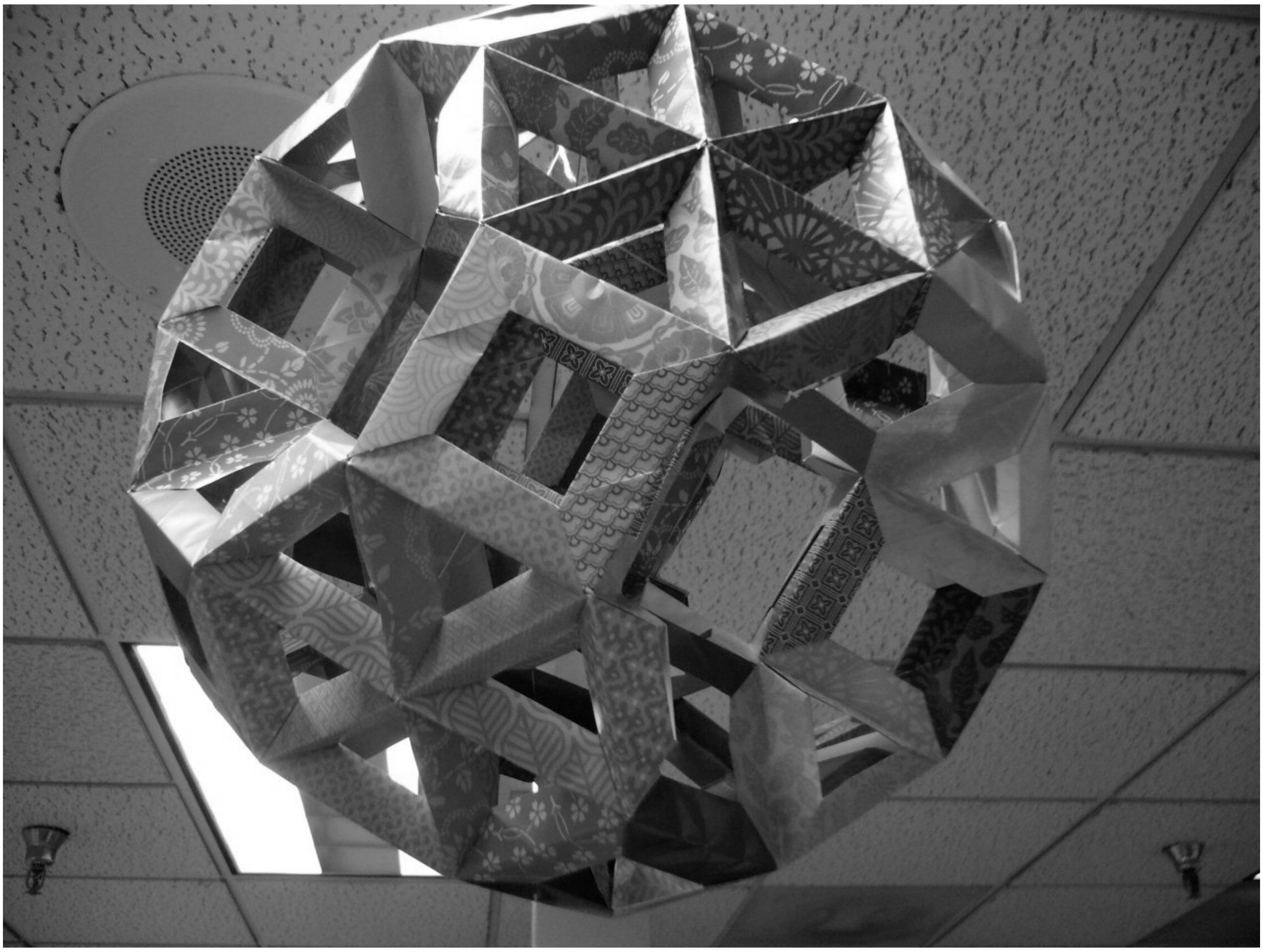
172 $x^6+x^4-x^2-1=0$ R. $x=1\,;\,x=-1$

173 $x^6-4x^5-x^4+8x^3-x^2-4x+1=0$ R. $x=1\,;\,x=-1\,;\,x=2+\sqrt{3}\,;\,x=2-\sqrt{3}$

174 $x^6+2x^4+2x^2+1=0$ R. impossibile

# MATEMATICA C$^3$ -ALGEBRA 2

# 4 DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO



Ardonik, *easy-origami-fold-a-day-calendar-great-rhombicub octahedron*
http://www.flickr.com/photos/ardonik/2833120348


## Indice generale

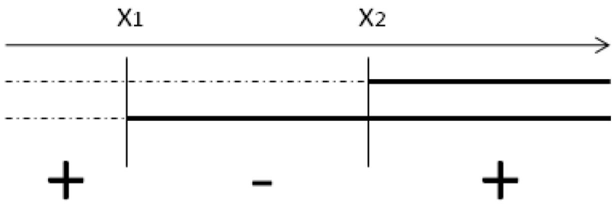
## ►1. Soluzioni della disequazione di secondo grado

Una disequazione di secondo grado si presenta in una delle seguenti forme:

$$a\,x^2+b\,x+c>0;\ a\,x^2+b\,x+c\geq 0;\ a\,x^2+b\,x+c<0;\ a\,x^2+b\,x+c\leq 0$$

Per risolverla innanzitutto supponiamo che il coeficiente di $x^2$ sia positivo. Se così non fosse, basta cambiare segno a tutti i termini e quindi il verso della disequazione; per esempio, per risolvere la disequazione $-2\,x^2+3\,x-1>0$ si può risolvere la disequazione $2\,x^2-3\,x+1<0$ .
Quindi si risolve l'equazione associata, cioè si sostiruisce il segno della disequazione con l'uguale. Si passa cioè da una disequazione del tipo $a\,x^2+b\,x+c>0$ all'equazione $a\,x^2+b\,x+c=0$ .
Possono presentarsi tre casi.

1. **L'equazione è spuria**: $a\,x^2+b\,x=0$ . Questa equazione ammette sempre due radici reali e distinte, di cui una è sempre 0. Ricordiamo che l'equazione si risolve mettendo x a fattor comune $x(ax+b)=0$ e applicando la legge di annullamento del prodotto, da cui ricaviamo $x=0\ \vee\ ax+b=0\rightarrow x=-\dfrac{b}{a}$ . Chiamiamo le due radici $x_1$ e $x_2$. Analogamente a quanto fatto nelle disequazioni di primo rgado, poniamo separatamente ogni fattore maggiore di 0 e confrontiamo i segni dei singoli fattori. Le soluzioni saranno




   I. $x<x_1\vee x>x_2$ soluzioni esterne se la disequazione è $a\,x^2+b\,x>0$ , analogamente $x\leq x_1\vee x\geq x_2$ se la disequazione è $a\,x^2+b\,x\geq 0$ .
   II. $x_1<x<x_2$ soluzioni interne se la disequazione è $a\,x^2+b\,x<0$ , analogamente $x_1\leq x\leq x_2$ se la disequazione è $a\,x^2+b\,x\leq 0$ .

Esempi

- ■ $3x^2-2x>0$ soluzioni $x<0\vee x>\dfrac{2}{3}$
- ■ $5x^2+x\leq 0$ soluzioni $-\dfrac{1}{5}\leq x\leq 0$

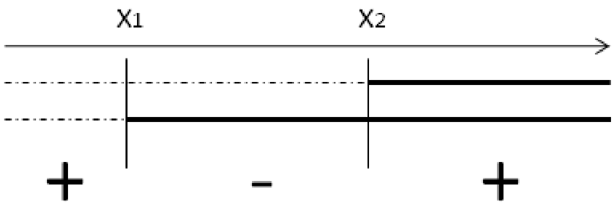
2. **L'equazione è pura**: $ax^2+c=0$ . Possono esserci due situazioni:
   I. c<0, in questo caso l'equazione ammette due radici opposte: $x_{1,2}=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$ : si torna al caso precedente e si ha $x<x_1\vee x>x_2$ se la disequazione è $ax^2+c>0$ oppure $x<x_1<x_2$ se la disequazione è $ax^2+c<0$
   II. c>0: l'equazione non ammette soluzioni reali; il binomio $ax^2+c$ è la somma di un quadrato più un numero positivo, pertanto è sempre positivo. Di conseguenza la disequazione $ax^2+c>0$ avrà soluzioni per ogni x reale, mentre $ax^2+c<0$ non avrà nessuna soluzione reale.

Esempi

- ■ $x^2-4\geq 0$ soluzioni $x\leq -2\vee x\geq 2$
- ■ $x^2-9\leq 0$ soluzioni $-3\leq x\leq 3$
- ■ $x^2+4>0$ soluzioni $\forall\, x\in\mathbb{R}$
- ■ $x^2+9\leq 0$ soluzioni nessuna valore reale.

3. **L'equazione è completa**: $ax^2+bx+c=0$ . Si calcola il valore del discriminante $\Delta=b^2-4ac$ . A seconda del suo segno possono presentarsi tre casi:

**Primo caso** $\Delta>0$ l'equazione ammette due radici reali e distinte; il trinomio si scompone in $a(x-x_1)(x-x_2)$ . Poiché abbiamo supposto *a* è positivo il segno del trinomio è dato da




Per cui la disequazione $ax^2+bx+c\geq 0$ è verificata per valori esterni alle soluzioni, cioè $x\leq x_1 \vee x\geq x_2$ ; mentre la disequazione $ax^2+bx+c\leq 0$ è verificata per valori interni alle soluzioni, cioè $x_1\leq x\leq x_2$ .

Esempi

- $x^2-3x-4>0$ ; soluzioni dell'equazione associata $x_1=-1 \vee x_2=4$ . Soluzioni della disequazione : $x<-1 \vee x>4$ .
- $x^2-3x-4<0$ , in questo caso le soluzioni della disequazione saranno $-1<x<4$ .

**Secondo caso** $\Delta=0$ in questo caso le radici dell'equazione associata sono coincidenti $x_1=x_2$ , pertanto il trinomio si scompone in $a(x-x_1)^2$ . Poiché a è positivo e il quadrato è positivo o al più nullo si possono verificare quattro casi:

i. $a(x-x_1)^2>0$ è verificata $\forall x\in\mathbb{R} \wedge x\neq x_1$ ;
ii. $a(x-x_1)^2\geq 0$ è verificata $\forall x\in\mathbb{R}$ ;
iii. $a(x-x_1)^2<0$ non è mai verificata;
iv. $a(x-x_1)^2\geq 0$ è verificata solo per $x=x_1$ ;

Esempi

- $x^2-2x+1>0 \rightarrow (x-1)^2>0$ soluzioni $\forall x\in\mathbb{R} \wedge x\neq 1$
- $4x^2-4x+1\geq 0 \rightarrow (2x-1)^2\geq 0$ soluzioni $\forall x\in\mathbb{R}$
- $x^2+2x+1<0 \rightarrow (x+1)^2<0$ nessuna soluzione
- $4x^2+4x+1\leq 0 \rightarrow (2x+1)^2\leq 0$ unica soluzione $x=-\frac{1}{2}$ .

**Terzo caso** $\Delta<0$ studiamo il segno che assume il trinomio in questo caso. Dobbiamo eseguire i seguenti passaggi: mettiamo il coefficiente *a* a fattore comune, aggiungendo e togliendo $\frac{b^2}{4a^2}$ si ha $a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)$ . Osserviamo che i primi tre termini costituiscono lo sviluppo del quadrato di un binomio, e riduciamo gli ultimi due allo stesso denominatore, si ha $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ . Studiamo ora il segno di questa espressione: a è sempre > 0, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ essendo un quadrato è sempre maggiore > 0; mentre $-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=-\frac{\Delta}{4a^2}$ è sempre positivo perché $\Delta<0$ . Concludendo il trinomio è sempre positivo. Si hanno allora le seguenti possibilità

v. $ax^2+bx+c>0$ soluzioni $\forall x\in\mathbb{R}$ ;
vi. $ax^2+bx+c\geq 0$ soluzioni $\forall x\in\mathbb{R}$ ;
vii. $ax^2+bx+c<0$ soluzioni per nessun valore reale di x;
viii. $ax^2+bx+c\leq 0$ soluzioni per nessun valore reale di x;

Esempi

- $2x^2-3x+4>0 \rightarrow \Delta=9-32=-23<0$ soluzioni $\forall x\in\mathbb{R}$
- $x^2-x+1<0 \rightarrow \Delta=1-4=-3<0$ per nessun valore reale di x

<u>Esempio</u>

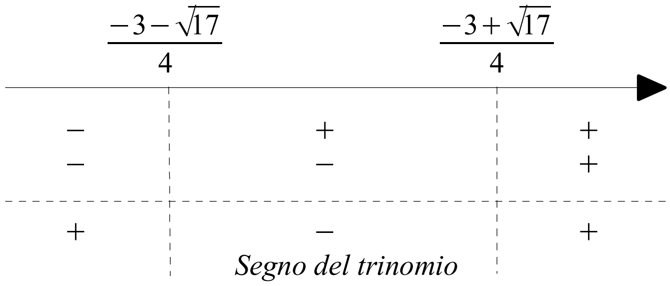
Determinare l'insieme soluzione della disequazione $2x^2+3x-1>0$

1° passo: scriviamo l'equazione associata $2x^2+3x-1=0$ calcoliamo il delta: $\Delta=9+8=17$ positivo

2° passo: calcoliamo le soluzioni: $x_1=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{4} \vee x_2=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}$

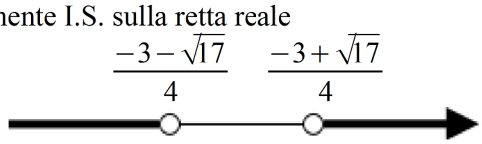
3° passo: scomponiamo in fattori il trinomio $2x^2+3x-1=2\cdot\left(x-\dfrac{-3-\sqrt{17}}{4}\right)\cdot\left(x-\dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}\right)$

4° passo: studiamo il segno dei singoli fattori e dalla tabellina dei segni deduciamo l'insieme soluzione della disequazione




5° passo: $I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x<\dfrac{-3-\sqrt{17}}{4} \vee x>\dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}\right\}$

6° passo: rappresentiamo graficamente I.S. sulla retta reale




Osserviamo che contemporaneamente sappiamo anche risolvere la disequazione $2x^2+3x-1<0$ e i casi $2x^2+3x-1\geq 0$ ; $2x^2+3x-1\leq 0$ .

<u>Esempio</u>

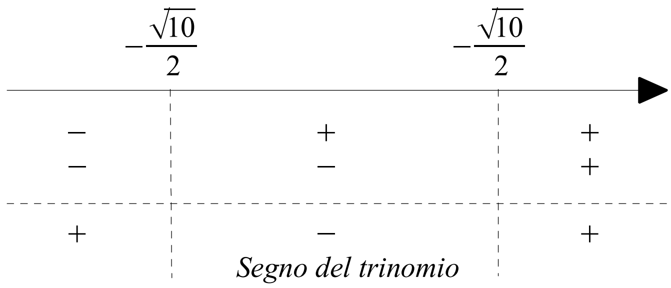
Determinare l'insieme soluzione della disequazione $2x^2-5\leq 0$

1° passo: scriviamo l'equazione associata $2x^2-5=0$ , calcoliamo il delta $\Delta=0+40=40>0$

2° passo: determiniamo le soluzioni: $x_1=-\dfrac{\sqrt{10}}{2} \vee x_2=+\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

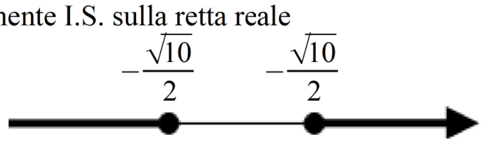
3° passo: scomponiamo in fattori il trinomio $2x^2-5=2\cdot\left(x+\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)\cdot\left(x-\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$

4° passo: studiamo il segno dei singoli fattori e dalla tabellina dei segni deduciamo l'insieme soluzione della disequazione




5° passo: $I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \mid -\dfrac{\sqrt{10}}{2}\leq x\leq +\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right\}$

6° passo: rappresentiamo graficamente I.S. sulla retta reale



Esempio

Determinate l'insieme soluzione della disequazione $-3x^2+2x>0$ equivalente a $3x^2-2x<0$

1° passo: scriviamo l'equazione associata $3x^2-2x=0$ e calcoliamo il delta: $\Delta=4+0=4>0$

2° passo: calcoliamo le soluzioni dell'equazione $x_1=0 \vee x_2=\frac{2}{3}$

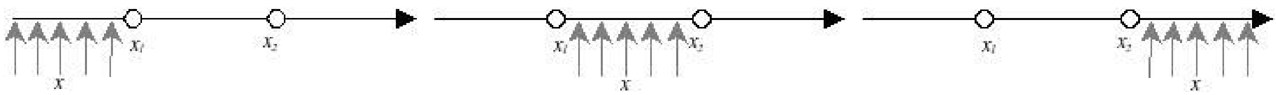
3° passo: scomponiamo in fattori il trinomio $3x^2-2x=3\cdot x\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)$

4° passo: studiamo il segno dei singoli fattori e deduciamo l'insieme soluzione della disequazione


5° passo: $I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \mid 0<x<\frac{2}{3}\right\}$

6° passo: rappresentiamo graficamente I.S. sulla retta reale


In generale, data la disequazione $ax^2+bx+c>0$ o $ax^2+bx+c<0$ dopo aver scomposto in fattori il trinomio si ha:




| | | |
|---|---|---|
| $x<x_1$ | $x_1<x<x_2$ | $x>x_2$ |
| $x-x_1<0 \wedge x-x_2<0$ | $x-x_1>0 \wedge x-x_2<0$ | $x-x_1>0 \wedge x-x_2>0$ |
| $a(x-x_1)(x-x_2)>0$ | $a(x-x_1)(x-x_2)<0$ | $a(x-x_1)(x-x_2)>0$ |
| $ax^2+bx+c>0$ | $ax^2+bx+c<0$ | $ax^2+bx+c>0$ |

Negli esercizi che seguono si tenga allora presente che un trinomio di secondo grado, con il coefficiente di $x^2$ positivo, assume segno positivo per le x appartenenti agli intervalli esterni alle radici e valore negativo per x appartenente all'intervallo interno.

**1** Determinare l'Insieme Soluzione della disequazione:

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+x\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)>x^3-\frac{x}{2}\left(x-\frac{2}{3}\right)-\frac{8}{27}$$

Svolgete i calcoli in entrambi i membri con l'obiettivo di ottenere la forma canonica della disequazione di secondo grado. Otterrete $27x^2-39x+14>0$

1° passo: calcoliamo il delta dell'equazione associata: $\Delta=9$ e le sue soluzioni $x_1=\frac{2}{3} \vee x_2=\frac{7}{9}$

2° passo: ci troviamo nel caso 3 a) dunque $I.S..=\left\{x\in R \mid x<\frac{2}{3} \vee x>\frac{7}{9}\right\}$ o $I.S.=\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{7}{9},+\infty\right)$

3° passo: rappresentiamo graficamente I.S. sulla retta reale:


**2** Determinare l'Insieme Soluzione della disequazione: $\frac{(2x-1)^3-8x}{2}-\frac{(2x+1)^2-15}{4}\le 4x(x-1)^2-6$

Svolgere i calcoli in entrambi i membri con l'obiettivo di ottenere la forma canonica della disequazione di secondo grado. Verificare che si ha: $x^2-6x+9\le 0$

1° passo: calcoliamo il delta dell'equazione associata: $\Delta=0$ e dunque le sue soluzioni sono reali coincidenti $x_1=x_2=3$

2° passo: ci troviamo nel caso 3 b) dunque $I.S.=\{3\}$

3° passo: rappresentiamo graficamente I.S. sulla retta reale:


**3** Determinate l'Insieme Soluzione della disequazione: $8x-(x-5)^2<2x\cdot(5+x)$

Dopo aver svolto i calcoli in entrambi i membri verificate che si ha: $-3x^2+8x-25<0$ equivalente a $3x^2-8x+25>0$

1° passo: calcoliamo il delta dell'equazione associata: $\Delta=64-12\cdot 25=\ldots\ldots$ negativo, dunque le sue soluzioni non sono reali

2° passo: ci troviamo nel caso 3 c) dunque $I.S.=\mathbb{R}$

3° passo: rappresentiamo graficamente I.S. sulla retta reale: 

*Risolvere le seguenti disequazioni di II grado*

| | | | |
|---|---|---|---|
| **4** | $x^2-6x\le 0$ | $5x^2>0$ | R. $0\le x\le 6$ R. $x\ne 0$ |
| **5** | $x^2-x>0$ | $x^2\le 0$ | R. $x<-1 \vee x>0$ R. $x=0$ |
| **6** | $3x^2\le -1$ | $x^2-9>0$ | R. $\emptyset$ R. $x_1<-3 \vee x>3$ |
| **7** | $2x^2-3x+1>0$ | $-x^2+3x\ge 0$ | R. $x<\frac{1}{2} \vee x>1$ R. $0\le x\le 3$ |
| **8** | $3x^2+x-2>0$ | $x^2-4>0$ | R. $x_1<-1 \vee x>\frac{2}{3}$ R. $x_1<-2 \vee x>2$ |
| **9** | $\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{3}x-1<0$ | $x^2-8\le 0$ | R. $-\frac{3}{4}<x<1$ R. $-2\sqrt{2}\le x\le 2\sqrt{2}$ |
| **10** | $x^2-5x+3\ge 0$ | $x^2-4x+9>0$ | R. $x\le\frac{5-\sqrt{13}}{2} \vee x\ge\frac{5+\sqrt{13}}{2}$ R. $\mathbb{R}$ |
| **11** | $x^2-6x+8\le 0$ | $x^2+3x-4\ge 0$ | R. $2\le x\le 4$ R. $x\le -4 \vee x\ge 1$ |
| **12** | $x^2-4x-9\le 0$ | $x^2-9x+18<0$ | R. $2-\sqrt{13}\le x\le 2+\sqrt{13}$ R. $3<x<6$ |
| **13** | $x^2-8x+15\ge 0$ | $-2x^2\ge 0$ | R. $x\le 3 \vee x\ge 5$ R. $x=0$ |
| **14** | $3x^2-\frac{2}{3}x-1\le 0$ | $x^2+5>0$ | R. $\frac{1-2\sqrt{7}}{9}\le x\le\frac{1+2\sqrt{7}}{9}$ R. $\mathbb{R}$ |
| **15** | $x^2+6x-2>0$ | $2x^2+5x+4\le 0$ | R. $[x<-3-\sqrt{11} \vee x>-3+\sqrt{11}]$ R. $\emptyset$ |
| **16** | $x^2-3x-\frac{5}{2}<0$ | $x^2+1>0$ | R. $x<\frac{3-\sqrt{19}}{2} \vee x>\frac{3+\sqrt{19}}{2}$ R. $\mathbb{R}$ |
| **17** | $-x^2+5\le 0$ | $x^2+x\ge 0$ | R. $x\le -\sqrt{5} \vee x\ge\sqrt{5}$ R. $x\le -1 \vee x\ge 0$ |
| **18** | $(x+1)^2\ge 0$ | $x^2>1$ | R. $\mathbb{R}$ R. $x<-1 \vee x>1$ |
| **19** | $2x^2-6<0$ | $-x^2-1\le 0$ | R. $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$ R. $\mathbb{R}$ |
| **20** | $9-4x^2\le 0$ | $3x-2x^2>0$ | R. $x\le -\frac{3}{2} \vee x\ge\frac{3}{2}$ R. $0<x<\frac{3}{2}$ |
| **21** | $x^2\ge 0$ | $2x^2+4>0$ | R. $\mathbb{R}$ R. $\mathbb{R}$ |
| **22** | $x^2-x-2>0$ | $x^2+11x+30\le 0$ | R. $x<-1 \vee x>2$ R. $-6\le x\le -5$ |
| **23** | $-x^2+4x+3>0$ | $x^2+4x+4<0$ | R. $2-\sqrt{7}<x<2+\sqrt{7}$ R. $\emptyset$ |

**24** $x^2-x+1<0$ $\quad x^2-\frac{1}{9}\geq 0$ R. $\emptyset$ R. $x\leq -\frac{1}{3}\vee x\geq\frac{1}{3}$

**25** $9x^2+3x-2\leq 0$ $\quad 2x^2+5<0$ R. $-\frac{2}{3}\leq x\leq\frac{1}{3}$ R. $\emptyset$

**26** $4x-x^2\geq 0$ $\quad 9x^2+10x+1\leq 0$ R. $0\leq x\leq 4$ R. $-1\leq x<-\frac{1}{9}$

**27** $0{,}01x^2-1>0$ $\quad 1{,}\overline{6}x^2-2x\leq 0$ R. $x<-10\vee x>10$ R. $0\leq x<\frac{6}{5}$

**28** $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}>0$ $\quad 4x^2+\frac{5}{3}x-1\leq 0$ R. $x<-\frac{1}{2}\vee x>\frac{1}{2}$ R. $-\frac{3}{4}\leq x\leq\frac{1}{3}$

**29** $x^2+x+\sqrt{2}>0$ $\quad x^2+2\sqrt{2}x+2>0$ R. $\mathbb{R}$ R. $\mathbb{R}-\{\sqrt{2}\}$

**30** $12x^2-3\geq 4x(2x-1)$ $\quad 2x^2-11x-6\geq 0$ R. $x\leq -\frac{3}{2}\vee x\geq\frac{1}{2}$ R. $-\frac{1}{2}\leq x\leq 6$

**31** $(3x+1)^2>(2x-1)^2$ R. $x<-2\vee x>0$

**32** $(x+1)(x-1)^2>x^3$ R. $-\frac{\sqrt{5}+1}{2}<x<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

**33** $(x+3)(x+2)<-(x+2)^2$ R. $-\frac{5}{2}<x<-2$

**34** $\frac{x+1}{2}+\frac{(x+1)(x-1)}{4}>x^2-1$ R. $-1<x<\frac{5}{3}$

**35** $(x+1)^3-(x+2)^2>\frac{2x^3-1}{2}$ R. $x<\frac{1-\sqrt{21}}{4}\vee x>\frac{1+\sqrt{21}}{4}$

**36** $(x-2)(3-2x)\geq x-2$ R. $1\leq x\leq 2$

**37** $(3x+1)\left(\frac{5}{2}+x\right)\leq 2x-1$ R. $-\frac{7}{6}\leq x\leq -1$

**38** $\frac{x^2+16}{4}+x-1<\frac{x-3}{2}$ R. $\emptyset$

**39** $\frac{3x-2}{2}<x^2-2$ R. $x\leq -\frac{1}{2}\vee x\geq 2$

**40** $\frac{x-3}{2}-\frac{x^2+2}{3}<1+x$ R. $\mathbb{R}$

**41** $(x+4)^2+8\geq\frac{x-1}{3}$ R. $\mathbb{R}$

**42** $\left(\frac{x-1}{3}-\frac{x}{6}\right)^2\leq (x+1)^2$ R. $x\leq -\frac{8}{5}\vee x\geq -\frac{4}{7}$

**43** $3x-5+(1-3x)^2>(x-2)(x+2)$ R. $x<0\vee x>\frac{3}{8}$

**44** $\frac{x-2}{3}-(3x+3)^2>x$ R. $-\frac{29}{27}<x<-1$

**45** $(x-2)^3-x^3>x^2-4$ R. $\frac{6-2\sqrt{2}}{7}<x<\frac{6+2\sqrt{2}}{7}$

**46** $(2-x)^3-(2-x)^2<\frac{3-4x^3}{4}$ R. $I.S.=\emptyset$

**47** $(x+200)^2+x+200<2$ R. $-202<x<-199$

**48** $\frac{(3-x)^2}{2}-1\geq -\frac{x^2-4}{4}$ R. $x\leq 2-\frac{\sqrt{6}}{3}\vee x\geq 2+\frac{\sqrt{6}}{3}$

**49** $(x+1)^2>(x-1)^2+(x+2)^2+4x$ R. $I.S.=\emptyset$

**50** $\frac{x^2}{4}+x<\frac{x+3}{4}+\frac{x}{2}-\frac{1-\frac{x}{2}}{2}$ R. $-1<x<1$

## ►2. Risoluzione grafica di una disequazione di secondo grado

Ricordiamo alcune definizioni.
Un polinomio in una sola variabile, solitamente indicata con x, è di secondo grado se **2 è il massimo esponente della variabile**.
Per **trinomio di secondo grado** intendiamo un polinomio di secondo grado: $a x^2+b x+c$ con $a\in\mathbb{R}_{0,}\ b\in\mathbb{R}\ ,\ c\in\mathbb{R}$
Chiamiamo **zeri del trinomio** i valori reali soluzione dell'equazione associata $a x^2+b x+c=0$ con $a\neq 0$ .

> DEFINIZIONE. Una funzione che associa ad ogni numero reale x il numero reale $y=a x^2+b x+c$ con $a\in\mathbb{R}_{0,}\ b\in\mathbb{R}\ ,\ c\in\mathbb{R}$ si chiama **funzione polinomiale di secondo grado**.

Nel riferimento cartesiano ortogonale il grafico della funzione è costituito da tutti e soli i punti le cui coordinate soddisfano l'equazione $y=a x^2+b x+c$ ; se $x_1$ e $x_2$ sono gli zeri reali del trinomio $a x^2+b x+c$ allora attribuendo tali valori alla variabile *x* si ha $y=0$ ; essi sono dunque **gli zeri della funzione**, ossia le ascisse dei punti del grafico appartenenti all'asse *x*.

<u>Esempi</u>

■ Determinate gli zeri del trinomio $x^2+x-2$ .

*Strategia risolutiva*
Risolviamo l'equazione $x^2+x-2=0$ che avendo il discriminante positivo ammette due soluzioni reali distinte $x_1=-2 \vee x_2=1$ . I due numeri 1 e –2 sono gli zeri della funzione; $y=x^2+x-2$ . Nel riferimento cartesiano ortogonale i punti $P_1(-2\,;0)$ e $P_2(1\,;0)$ sono i punti del grafico della funzione appartenenti all'asse x.

■ Determinare gli zeri del trinomio $x^2-4x+4$ .

*Strategia risolutiva*
Risolviamo l'equazione $x^2-4x+4=0$ che avendo il discriminante nullo ammette due soluzioni reali coincidenti $x_1=x_2=2$ gli zeri del trinomio sono coincidenti nel numero 2 e il grafico della funzione $y=x^2-4x+4$ ha due punti coincidenti appartenenti all'asse *x*: $P_1\equiv P_2(2\,;0)$ .

■ Determinare gli zeri del trinomio $x^2-2x+7$ .

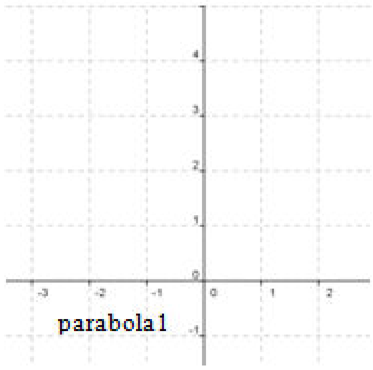
*Strategia risolutiva*
Risolviamo l'equazione $x^2-2x+7=0$ che avendo il discriminante negativo non ammette soluzioni reali; il trinomio non ha zeri reali e il grafico della funzione $y=x^2-2x+7$ non ha punti appartenenti all'asse *x*.

Questi esempi ci hanno permesso di chiarire il collegamento tra il concetto algebrico "zeri di un polinomio" e il concetto geometrico di "punti sull'asse delle ascisse" del grafico della funzione polinomiale di secondo grado. Pertanto **studiare il segno di un trinomio di secondo grado equivale a determinare quali sono le ascisse dei punti della funzione** $y=a x^2+b x+c$ (con $a\in\mathbb{R}_{0,}\ b\in\mathbb{R}\ ,\ c\in\mathbb{R}$) **che hanno ordinata > 0 oppure ordinata < 0, oppure ordinata ≥ 0, oppure ordinata ≤ 0**.
Ricordiamo che nel riferimento cartesiano ortogonale i punti ad ordinata positiva si trovano nel I e nel II quadrante (al di sopra dell'asse x), i punti ad ordinata negativa si trovano nel III e nel IV quadrante (al di sotto dell'asse x), i punti ad ordinata nulla si trovano sull'asse x.
Per studiare il segno del trinomio, dobbiamo tracciare nel riferimento cartesiano il grafico della funzione $y=a x^2+b x+c$ (con $a\in\mathbb{R}_{0,}\ b\in\mathbb{R}\ ,\ c\in\mathbb{R}$) e lo faremo riprendendo il grafico della funzione di proporzionalità quadratica esaminata nel volume di Algebra 1.

**51** Tracciate nel riferimento cartesiano ortogonale il grafico della funzione $y=2x^2$ . Sappiamo che $D\equiv R$ . Poiché il coefficiente della variabile indipendente è positivo si ha $\text{IM}=R^{+}\cup\{0\}$ e la parabola volge la concavità verso l'alto; il punto $O(0;0)$ è il suo vertice. Per la costruzione richiesta compilate la tabella:

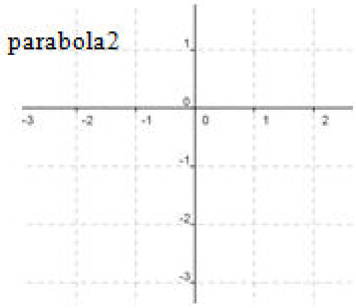
| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=2x^2$ | $x$ | $-1$ | | | 0 | | | 1,5 | | |
| | $y$ | | | | | | | | | |

e segnate i punti nel riferimento cartesiano



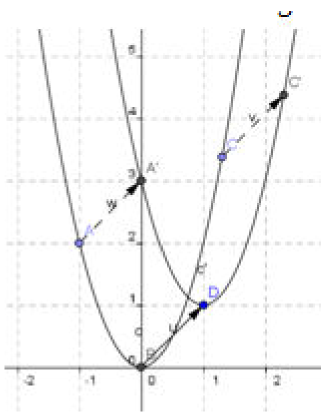

**52** Ripetete la costruzione per la funzione $y=-\frac{3}{2}x^2$ compilando l'opportuna tabella; essendo il coefficiente di $x^2$ negativo la parabola volge la concavità verso il basso; il punto $O(0;0)$ è il suo vertice. $D\equiv R$ e $\text{IM}=R^{-}\cup\{0\}$

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ……… | $x$ | $-1$ | | | 0 | | | 1,5 | | |
| | $y$ | | | | | | | | | |




**53** Applicate a tutti i punti della tabella dell'esercizio della parabola $y=2x^2$ la traslazione di vettore $\vec{v}(1;1)$ ; compilate la nuova tabella dei punti corrispondenti, riportateli nel riferimento cartesiano e tracciate la curva immagine della parabola.

Abbiamo eseguito l'esercizio con un programma di geometria dinamica e abbiamo ottenuto la seguente immagine dalla quale possiamo leggere le seguenti informazioni:



- l'immagine della parabola iniziale *c*, è ancora una parabola *c'* essendo la traslazione una isometria, l'immagine della parabola iniziale c è ancora una parabola che indichiamo c';
- la parabola $c'$ volge la concavità verso l'alto, come la parabola iniziale *c;*
- il vertice $O(0;0)$ della parabola *c* ha come immagine il vertice della parabola *c'* $D(1;1)$ , che coincide con l'estremo libero del vettore che definisce la traslazione;
- il vettore che individua la traslazione è indicato nella figura con u; v e w rappresentano lo stesso vettore applicato a due punti presi a caso sulla parabola iniziale;
- la parabola $c'$ è rappresentata dalla funzione $y=2x^2-4x+3$ che è una funzione di secondo grado avente il primo coefficiente uguale a quello della parabola *c*.

<u>Problema</u>

Come possiamo determinare l'equazione della parabola immagine di $y=2x^2$ applicando la traslazione $TR(1,1)$ ?

*Strategia risolutiva*

la traslazione è rappresentata da $TR(1;1):\begin{cases}x'=x+1\\ y'=y+1\end{cases}$ che esprime il legame algebrico tra le coordinate di un punto della parabola c e il punto corrispondente su c'.

Riscriviamo l'equazione della traslazione $\begin{cases}x=x'-1\\ y=y'-1\end{cases}$ e sostituiamo nell'equazione di *c*: $(y'-1)=2\cdot(x'-1)^2$ da cui svolgendo i calcoli ………………………………………………………….. potrete ottenere l'equazione di c' come indicato nell'esercizio precedente.

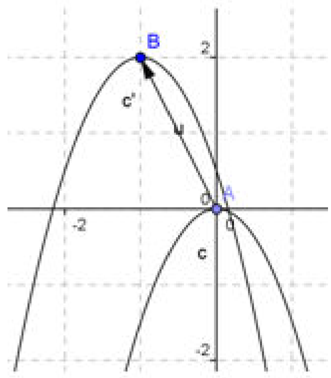
**54** Ripetere l'esercizio precedente sulla parabola $y=-\frac{3}{2}x^2$, applicando a tutti i punti della tabella della parabola la traslazione di vettore $\vec{v}(-1;2)$. Compilare la nuova tabella dei punti corrispondenti, riportarli nel riferimento cartesiano e tracciare la curva immagine della parabola. Avrete ottenuto:

Completate:

il vertice $O(0;0)$ della parabola iniziale ha come immagine il ……………….…………………………..

sia $c$ che $c'$ hanno la concavità ……………………………….

Verificate che la parabola $c'$ è rappresentata algebricamente dall'equazione $y=-\frac{3}{2}x^2-3x+\frac{1}{2}$, seguendo la strategia risolutiva proposta nel problema.




**Generalizziamo**

Applicando alla funzione di proporzionalità quadratica $y=ax^2$ con $a\neq 0$ una traslazione di vettore $\vec{v}(v_x;v_y)$ si ottiene la funzione di secondo grado $y=ax^2+bx+c$ con $a\neq 0$, i cui coefficienti $b$ e $c$ dipendono dalle coordinate del vettore $\vec{v}$.

*Strategia risolutiva*

dall'equazione della traslazione $TR(v_x;v_y):\begin{cases}x'=x+v_x\\y'=y+v_y\end{cases}$ otteniamo $\begin{cases}x=x'-v_x\\y=y'-v_y\end{cases}$ che sostituiamo nell'equazione $y=ax^2$ per ottenere l'equazione della curva immagine: $(y'-v_y)=a\cdot(x'-v_x)^2$.

Svolti i calcoli, si ottiene: $y'=a(x')^2-(2av_x)x'+a(v_x)^2+v_y$ in cui ponendo $-2av_x=b$ e $a(v_x)^2+v_y=c$ si ottiene l'equazione della parabola $c'$ immagine di quella data: $y=ax^2+bx+c$, espressa attraverso un trinomio di secondo grado.

*Determinare l'equazione dell'immagine delle seguenti parabole nella traslazione il cui vettore è segnato accanto:*

**55** $y=x^2$ con $\vec{v}=\left(\frac{1}{2};-2\right)$

**56** $y=-\frac{2}{3}x^2$ con $\vec{v}=(2;-2)$

**57** $y=-\frac{\sqrt{2}}{3}x^2$ con $\vec{v}=\left(-3;-\frac{1}{4}\right)$

**Viceversa**

Assegnata la funzione di secondo grado $y=ax^2+bx+c$ con $a\neq 0$, come possiamo rappresentarla nel riferimento cartesiano?

*Strategia risolutiva*

Sapendo che il grafico di tale curva è una parabola

- il coefficiente $a$ indica la concavità: verso l'alto se $a>0$, verso il basso se $a<0$
- dalle formule $-2av_x=b$ e $a(v_x)^2+v_y=c$ ricaviamo le coordinate del suo vertice $v_x=-\frac{b}{2a}$ e $v_y=c-a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{4ac-b^2}{4a}=-\frac{\Delta}{4a}$
- risolvendo l'equazione $ax^2+bx+c=0$ determiniamo gli eventuali punti di intersezione con l'asse x.
- assegnando alla variabile indipendente valori arbitrari, possiamo ottenere altri punti del grafico

<u>Esempio</u>

Tracciate nel riferimento cartesiano ortogonale il grafico della funzione

*f*: $y=x^2-2x-3$

*Strategia risolutiva*

Il grafico di tale curva è una parabola; essendo il coefficiente $a=1$, la concavità è verso l'alto;

essendo $b=-2$ e $c=-3$ si ha

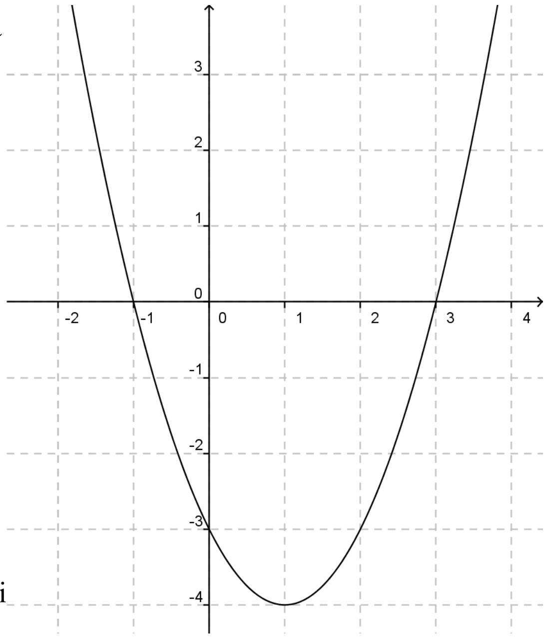
$v_x=-\frac{-2}{2}=1$ e $v_y=\frac{-12-4}{4}=-4 \rightarrow V(1;-4)$ ;

possiamo affermare che f è l'immagine di $y=x^2$ nella traslazione di vettore $\vec{v}(1;-4)$

Compilate la tabella

| $x$ | 0 | $x_1=\ldots\ldots\ \vee\ x_2=\ldots\ldots$ | 2 |
|---|---|---|---|
| $y$ | …… | 0 | ….. |

e confrontate il vostro grafico con quello qui tracciato in cui sono evidenziati il vertice $A(1;-4)$, i punti $B(3;0)$ e $C(-1;0)$ di intersezione con l'asse x.




*Rappresentare nel riferimento cartesiano ortogonale le parabole e formulate per ciascuna di esse l'osservazione " $p_1$ risulta immagine di … nella traslazione di vettore …." ecc.*

**58** $p_1$: $y=-3x^2+x$

**59** $p_2$: $y=\frac{1}{2}x-2x+\frac{3}{2}$

**60** $p_3$: $y=x^2+x-1$

**61** $p_4$: $y=x^2-x+1$

**62** $p_5$: $y=-3x^2+3$

**63** $p_6$: $y=x^2+4x+3$

**64** $p_7$: $y=x^2+\frac{3}{5}$

**65** $p_8$: $y=-\frac{2}{5}x^2+4x-\frac{1}{5}$

Ci proponiamo ora di determinare il **segno di un** qualunque **trinomio di secondo grado**, procedendo **per via grafica**.

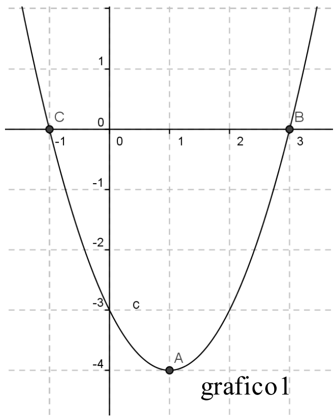


grafico1

Esempio

Studiamo il segno del trinomio $x^2-2x-3$ ; questo significa stabilire per quali valori di x esso assume un segno positivo oppure un segno negativo e per quali valori eventualmente si annulla. La richiesta è interpretabile anche come la ricerca degli insieme soluzione dell'equazione $x^2-2x-3=0$ e delle disequazioni $x^2-2x-3>0$ e $x^2-2x-3<0$ .

*Strategia risolutiva*:

Tracciamo il grafico della funzione $y=x^2-2x-3$ e leggiamo dal grafico gli insiemi richiesti:

- Le ascisse dei punti B e C costituiscono l'insieme soluzione dell'equazione $x^2-2x-3=0 \rightarrow x_1=-1 \vee x_2=3$
- I valori di x dell'insieme $H=\{x\in\mathbb{R} \mid x_C<x<x_B\}$ rendono il trinomio negativo; infatti preso un valore dell'insieme, ad esempio $x=0$ , il punto sulla parabola ha ordinata negativa $(-3)$ . Segnatelo sul grafico accanto e ripetete per $x=1,\ x=\dfrac{3}{2},\ x=2$
- I valori di x dell'insieme $K=\{x\in\mathbb{R} \mid x<x_C \vee x>x_B\}$ rendono il trinomio positivo; infatti preso un valore dell'insieme, ad esempio $x=\dfrac{7}{2}$ , il punto sulla parabola ha ordinata positiva. Segnatelo sul grafico accanto e ripetete per $x=-1,2$ .

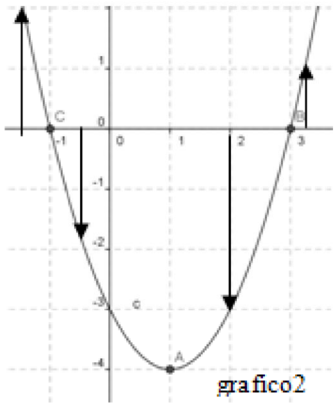
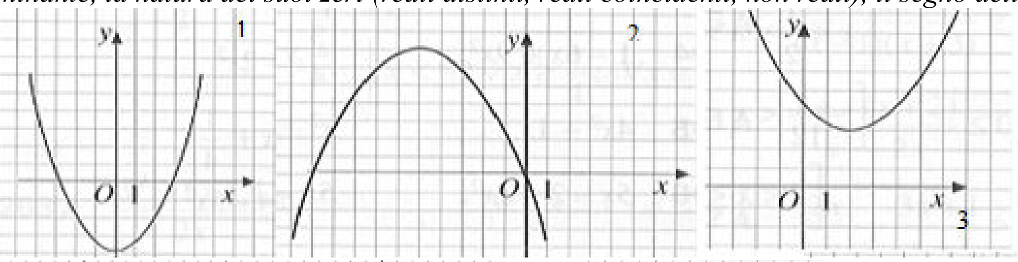
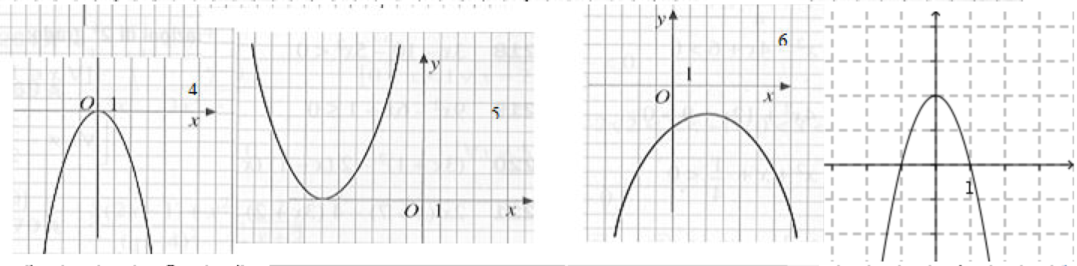


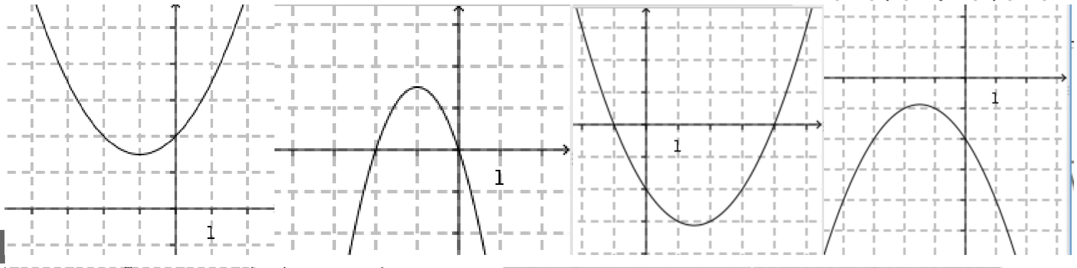
grafico2

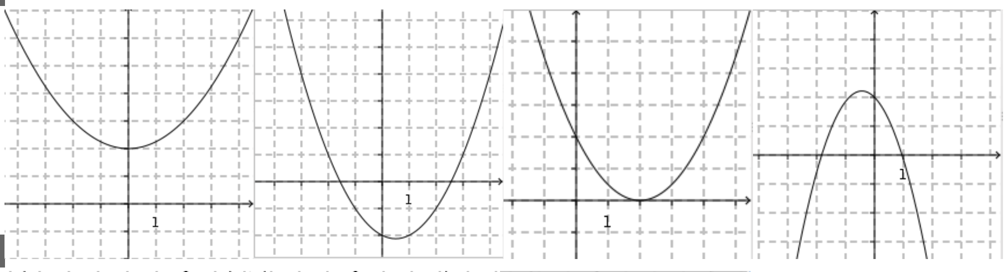
Il grafico 2 può chiarire quanto detto.

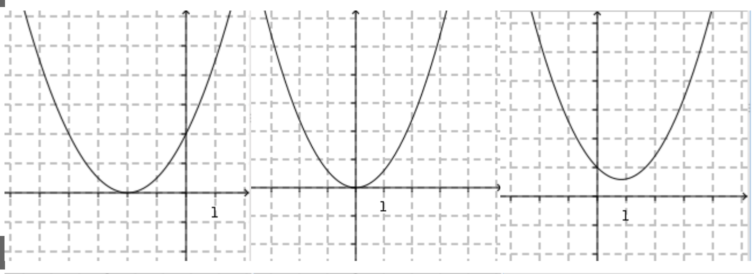
*Per ciascun grafico di parabola* $y = a\,x^2 + b\,x + c$ *indica il segno del primo coefficiente e del discriminante, la natura dei suoi zeri (reali distinti, reali coincidenti, non reali), il segno della funzione:*

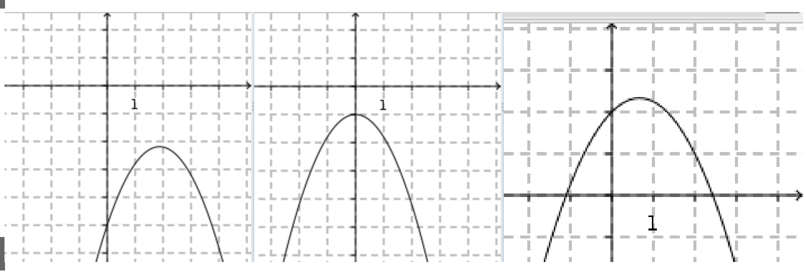
**66**



**67**


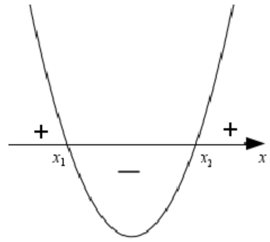
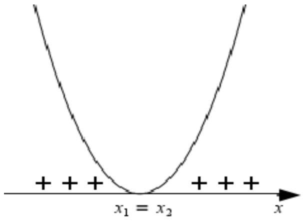
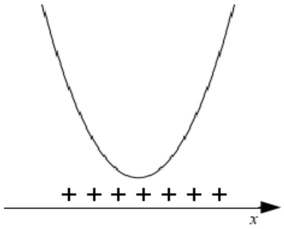
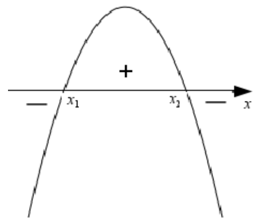
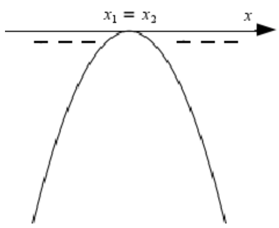
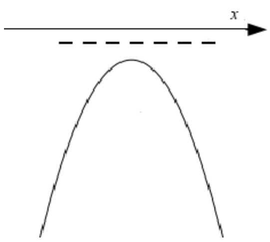

**68**


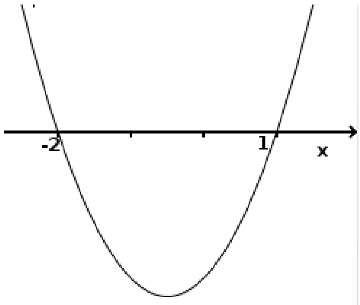

**69**



**70**



**71**



**Osservazione conclusiva**: la ricerca dell'insieme soluzione di una disequazione di secondo grado è sempre interpretabile come la ricerca del segno di un trinomio e quindi risolubile per via grafica.
In questi casi non è necessario rappresentare in modo preciso la parabola associata al trinomio, ma basta ricordare quanto detto inizialmente sugli zeri di una funzione.

| $a > 0$ | | | |
|---|---|---|---|
| $\Delta = b^2 - 4ac$ | parabola | segno | Insieme soluzione |
| $\Delta > 0$ soluzioni reali distinte |   | $ax^2+bx+c = 0$ | $x = x_1 \vee x = x_2$ — $x_1$ $x_2$ $x$ |
| | | $ax^2+bx+c > 0$ | $x_1$ $x_2$ $x$ |
| | | $ax^2+bx+c < 0$ | $x_1 < x < x_2$ — $x_1$ $x_2$ $x$ |
| $\Delta = 0$ soluzioni reali coincidenti |   | $ax^2+bx+c = 0$ | $x = x_1 = x_2$ — $x_1 = x_2$ $x$ |
| | | $ax^2+bx+c > 0$ | $x_1 = x_2$ $x$ |
| | | $ax^2+bx+c < 0$ | *nessun numero reale* — *I.S.* $= \emptyset$ $x$ |
| $\Delta < 0$ soluzioni non reali |   | $ax^2+bx+c = 0$ | *nessun numero reale* — *I.S.* $= \emptyset$ $x$ |
| | | $ax^2+bx+c > 0$ | $x \in \mathbb{R}$ — *tutti i numeri reali* |
| | | $ax^2+bx+c < 0$ | *nessun numero reale* — *I.S.* $= \emptyset$ $x$ |
| $a < 0$ | | | |
| $\Delta > 0$ soluzioni reali distinte |   | $ax^2+bx+c = 0$ | $x = x_1 \vee x = x_2$ — $x_1$ $x_2$ $x$ |
| | | $ax^2+bx+c > 0$ | $x_1 < x < x_2$ — $x_1$ $x_2$ $x$ |
| | | $ax^2+bx+c < 0$ | $x_1$ $x_2$ $x$ |
| $\Delta = 0$ soluzioni reali coincidenti |   | $ax^2+bx+c = 0$ | $x_1 = x_2$ $x$ |
| | | $ax^2+bx+c > 0$ | *nessun numero reale* — *I.S.* $= \emptyset$ $x$ |
| | | $ax^2+bx+c < 0$ | $x_1 = x_2$ $x$ |
| $\Delta < 0$ soluzioni non reali |   | $ax^2+bx+c = 0$ | *nessun numero reale* — *I.S.* $= \emptyset$ $x$ |
| | | $ax^2+bx+c > 0$ | *nessun numero reale* — *I.S.* $= \emptyset$ $x$ |
| | | $ax^2+bx+c < 0$ | $x \in \mathbb{R}$ — *tutti i numeri reali* |

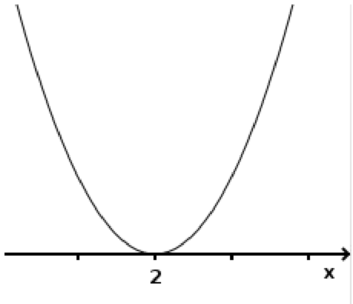



Esempio

Determinate l'insieme soluzione della disequazione: $x^2+x-2>0$

*Strategia risolutiva*:

risolviamo l'equazione $x^2+x-2=0$ che avendo il discriminante positivo ammette due soluzioni reali distinte $x_1=-2 \vee x_2=1$ . I due numeri $1$ e $-2$ sono gli zeri del trinomio e dunque gli zeri della funzione $y=x^2+x-2$ ; la parabola volge la concavità verso l'alto quindi possiamo grossolanamente rappresentare la sua posizione rispetto all'asse x e dedurre l'insieme soluzione richiesto: $I.S.=\{x \in \mathbb{R} \mid x<-2 \vee x>1\}$ o con notazione insiemistica $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

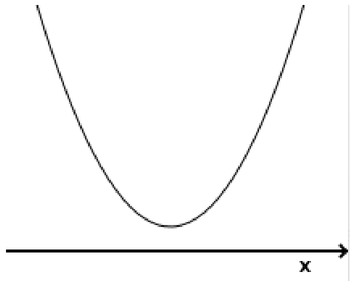



Esempio

Determinate l'insieme soluzione della disequazione $x^2-4x+4 \leq 0$ .

*Strategia risolutiva*:

risolviamo l'equazione $x^2-4x+4=0$ che avendo il discriminante nullo ammette due soluzioni reali coincidenti $x_1=x_2=2$ : gli zeri del trinomio sono coincidenti nel numero $2$ , la parabola $y=x^2-4x+4$ ha il vertice sull'asse x e volge la concavità verso l'alto quindi possiamo grossolanamente rappresentare la sua posizione e dedurre l'insieme soluzione richiesto: $I.S.=\{x \in \mathbb{R} \mid x=2\}$ nessun valore reale rende il trinomio negativo.




Esempio

Determinate l'insieme soluzione della disequazione $x^2-2x+7>0$ .

*Strategia risolutiva*:

risolviamo l'equazione $x^2-2x+7=0$ che avendo il discriminante negativo non ammette soluzioni reali; il trinomio non ha zeri reali, la parabola $y=x^2-2x+7$ volge la concavità verso l'alto e non ha punti appartenenti all'asse x quindi possiamo grossolanamente rappresentare la sua posizione e dedurre l'insieme soluzione richiesto: $I.S.=\mathbb{R}$

*Risolvete le disequazioni di secondo grado, collocando le rispettive parabole grossolanamente rispetto all'asse x, come fatto negli esempi:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| **72** | $2x^2+3x-1<0$ | $x^2-5x+6 \leq 0$ | $x^2-3x-4>0$ |
| **73** | $x^2-6x+5 \geq 0$ | $6x^2+x-2>0$ | $15x^2+x-6 \leq 0$ |
| **74** | $-x^2+1 \geq 0$ | $x^2-\frac{1}{4}>0$ | $x^2-\frac{1}{4}x \leq 0$ |
| **75** | $x^2+2x \leq 0$ | $x^2+2x+1 \leq 0$ | $x^2+x+1<0$ |

Esempio

Determinare l'insieme soluzione della disequazione $\left(\frac{x}{2}+1\right)^2-2x>\frac{5}{4}\left(\frac{x}{2}-1\right)$

- 1° passo: risolviamo i calcoli ai due membri della disequazione ……………………………
- 2° passo: riconoscendola di secondo grado portiamola nella forma canonica; verificate che si ottiene $2x^2-13x+18>0$
- 3° passo: consideriamo la parabola $y=2x^2-13x+18$ e determiniamo i suoi zeri. Essendo il discriminante positivo $\Delta=\ldots\ldots\ldots$ si ottengono due zeri reali distinti $x_1=\ldots\ldots \vee x_2=\ldots\ldots$
- 4° passo: disegniamo grossolanamente la parabola rispetto all'asse x:
- 5° passo: concludiamo: $I.S.=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

asse x

*Scegliete la risposta esatta tra quelle proposte*

**76** Il monomio $16\,x^2$ risulta positivo per:

[A] $x>16$ [B] $x>\frac{1}{16}$ [C] $x<-4 \vee x>16$ [D] $x\in\mathbb{R}$ [E] $x\in\mathbb{R}_0$

**77** Il binomio $16+x^2$ risulta positivo per:

[A] $x>-16$ [B] $-4<x<4$ [C] $x\in\mathbb{R}-\{-4,4\}$ [D] $x\in\mathbb{R}$ [E] $x<-4 \vee x>4$

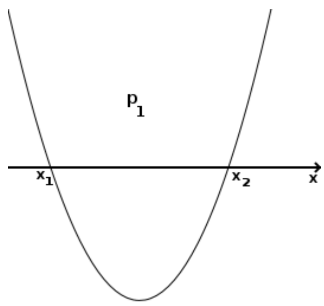
**78** Scegliete la risposta esatta tra quelle proposte: il binomio $16-x^2$ risulta positivo per:

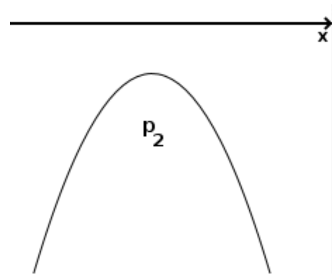
[A] $x<-16$ [B] $-4<x<4$ [C] $x\in\mathbb{R}-\{-4,4\}$ [D] $x\in\mathbb{R}$ [E] $x<-4 \vee x>4$

**79** Spiegate sfruttando il metodo grafico la verità della proposizione: "nessun valore della variabile *a* rende il polinomio $(3+a)^2-(2a+1)\cdot(2a-1)-(a^2+2a+35)$ positivo".

**80** Sono assegnate le due parabole $p_1$ e $p_2$; indicate le caratteristiche del trinomio $ax^2+bx+c$ (primo coefficiente, discriminante) che compone l'equazione cartesiana di ciascuna. Completa quanto proposto dando chiare motivazioni:

$p_1$: $a$ ………; $\Delta=$……… $p_2$: $a$ ………; $\Delta=$………




## ►3. Segno del trinomio a coefficienti letterali

Consideriamo il trinomio $t=k\,x^2+3\,x-7$ di secondo grado avente il primo coefficiente dipendente dal parametro *k*. Come possiamo stabilire il segno di questo trinomio, al variare di *k*?
Sappiamo che stabilire il segno di un trinomio significa determinare i valori reali che attribuiti alla variabile indipendente x rendono il trinomio positivo, nullo o negativo. Evidentemente per ogni valore reale di k avremo una diversa disequazione da risolvere; dobbiamo dunque cercare di analizzare come varia il trinomio a seconda dei valori di *k* e in seguito studiare il segno del trinomio ottenuto. Questa analisi di situazioni diverse è la **discussione del trinomio a coefficienti parametrici**.

<u>Esempio</u>

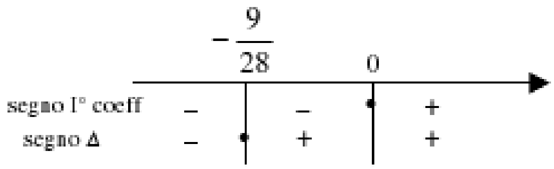
Stabilire il segno di $t=k\,x^2+3\,x-7$ al variare di *k*.

*Strategia risolutiva*

- 1° passo: prendiamo in considerazione il primo coefficiente e il discriminante dell'equazione associata $k\,x^2+3\,x-7=0$ e stabiliamo il loro segno:

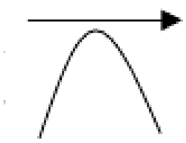
I° coefficiente ≥ 0 per k ≥ 0

$\Delta=9+28k\geq 0$ per $k\geq-\frac{9}{28}$ e rappresentiamo la loro reciproca situazione:

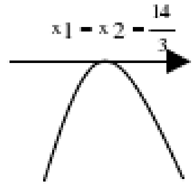



- 2° passo: analizziamo i valori del parametro nei vari intervalli determinati:

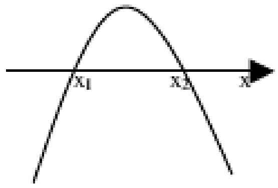
$k<-\frac{9}{28}$ : Il primo coefficiente è negativo così come il $\Delta$, la parabola volge la concavità verso il basso e non ha zeri reali: **il trinomio è negativo per qualunque valore reale di x.**



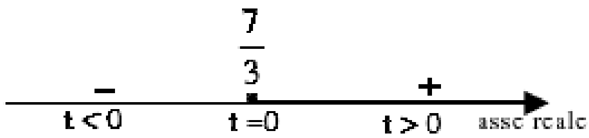
$k=-\frac{9}{28}$ Il primo coefficiente è negativo e $\Delta=0$ .La parabola volge la concavità verso il basso e ha due zeri reali coincidenti $x_1=x_2=\frac{14}{3}$ : **il trinomio si annulla per** $x=\frac{14}{3}$ **mentre per qualunque altro valore di x è negativo.**



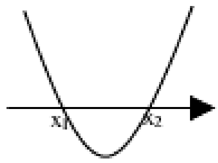

$-\frac{9}{28}<k<0$ Il primo coefficiente è negativo e Δ positivo. La parabola volge la concavità verso il basso e ha due zeri reali distinti: **il trinomio si annulla per** $x=x_1 \vee x=x_2$ **; è positivo per** $x_1<x<x_2$ **; è negativo per** $x<x_1 \vee x>x_2$




$k=0$ il trinomio diventa un binomio di primo grado: $t=3x-7$ e quindi $t>0$ per $x>\frac{7}{3}$ , $t<0$ per $x<\frac{7}{3}$ , $t=0$ per $x=\frac{7}{3}$ .




$k>0$ Il primo coefficiente è positivo così come il $\Delta$ . La parabola volge la concavità verso l'alto e ha due zeri reali distinti: **il trinomio si annulla per** $x=x_1 \vee x=x_2$ **; è negativo per** $x_1<x<x_2$ **; è positivo per** $x<x_1 \vee x>x_2$



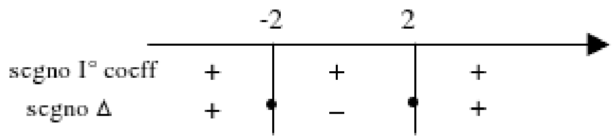

<u>Esempio</u>

Stabilite al variare del parametro *k* l'*I.S.* della disequazione $x^2+kx+1<0$

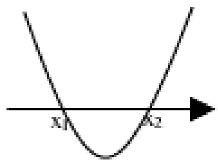
*Strategia risolutiva*

Prendiamo in considerazione il primo coefficiente e il discriminante dell'equazione associata $x^2+kx+1=0$ e stabiliamo il loro segno:

I° coefficiente: indipendente dal parametro e sempre positivo.
$\Delta=k^2-4\geq 0$ per $k\leq -2 \vee k\geq 2$ e rappresentiamo la loro reciproca situazione:




- $k<-2 \vee k>2$ primo coefficiente. positivo e $\Delta$ positivo. La parabola volge la concavità verso l'alto e ha due zeri reali distinti: $x=x_1 \vee x=x_2$ **;** il trinomio è negativo per $x_1<x<x_2$ .
- $-2<k<2$ primo coefficiente positivo, Δ negativo. La parabola volge la concavità verso l'alto e non ha zeri reali: il trinomio è positivo per ogni valore reale di x.
- $k=-2 \vee k=2$ Primo coefficiente positivo e Δ =0. La parabola volge la concavità verso l'alto e ha un unico zero reale: il trinomio si annulla per $x=x_1$ ; è positivo $\forall x\in\mathbb{R}-\{x_1\}$ .



*Risolvi e discuti le seguenti disequazioni*

**81** $x^2-2kx+k^2-1>0$ R. $x<k-1 \vee x>k+1$

**82** $3x^2-5ax-2a^2<0$ R. $\begin{cases} a=0 \rightarrow impos. \\ a>0 \rightarrow -\frac{1}{3}a<x<2a \\ a<0 \rightarrow 2a<x<-\frac{1}{3}a \end{cases}$

**83** $4x^2-4x+1-9m^2<0$ R. $\begin{cases} m=0 \rightarrow impos. \\ m>0 \rightarrow \frac{1-3m}{2}<x<\frac{1+3m}{2} \\ m<0 \rightarrow \frac{1+3m}{2}<x<\frac{1-3m}{2} \end{cases}$

**84** $2x^2-3ax<0$ R. $\begin{cases} a=0 \rightarrow I.S.=\emptyset \\ a>0 \rightarrow 0<x<\frac{3}{2}a \\ a<0 \rightarrow \frac{3}{2}a<x<0 \end{cases}$

**85** $x^2-2tx-8t^2>0$ R. $\begin{cases} t=0 \rightarrow x\neq 0 \\ t>0 \rightarrow -2t<x<4t \\ t<0 \rightarrow 4t<x<-2t \end{cases}$

**86** $(1-s)x^2+9>0$ R. $\begin{cases} s\leq 1 \rightarrow I.S.=\mathbb{R} \\ s>1 \rightarrow \frac{-3}{\sqrt{k-1}}<x<\frac{3}{\sqrt{k-1}} \end{cases}$

**87** $(m-1)x^2-mx>0$ R. $\begin{cases} m=0 \rightarrow I.S.=\emptyset \\ m=1 \rightarrow x<0 \\ 0<m<1 \rightarrow \frac{m}{m-1}<x<0 \\ m<0 \rightarrow 0<x<\frac{m}{m-1} \\ m>1 \rightarrow x<0 \vee x>\frac{m}{m-1} \end{cases}$

**88** $kx^2-(k+1)x-3\geq 0$

**89** Determinare al variare del parametro m il segno del trinomio $t=(1-m)x^2-2mx-m+3$ .

## ►4. Disequazioni polinomiali di grado superiore al secondo

Una disequazione polinomiale si presenta in una delle seguenti forme:
$p(x)\leq 0$ oppure $p(x)<0$ oppure $p(x)\geq 0$ oppure $p(x)>0$ , dove $p(x)$ è un polinomio nella sola variabile *x*.

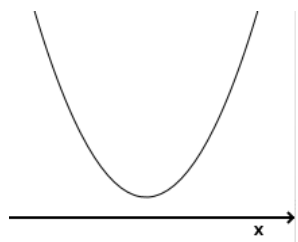
<u>Problema</u>

*Un numero è tale che sottraendo al suo cubo il suo triplo si ottiene un numero maggiore del triplo del suo quadrato aumentato di 4. Determinare l'Insieme Soluzioni del problema.*

La richiesta del problema implica la ricerca dell'**I**nsieme **S**oluzione della disequazione $x^3-3x>3x^2+4$ , di terzo grado nella variabile *x*.

*Strategia risolutiva*:

- scriviamo la disequazione in forma canonica, applicando i principi di equivalenza: $x^3-3x^2-3x-4>0$ ; si tratta di una disequazione polinomiale di terzo grado.
- procediamo nella ricerca della scomposizione in fattori del polinomio $p(x)=x^3-3x^2-3x-4$
  Mediante la regola di Ruffini possiamo determinare un suo zero $x=4$ e dunque ottenere $p(x)=x^3-3x^2-3x-4=(x-4)(x^2+x+1)$
- determiniamo il segno dei singoli fattori:
  - primo fattore $f_1>0 \rightarrow x>4$
  - secondo fattore $f_2>0 \rightarrow x^2+x+1>0$ disequazione di secondo grado, I° coefficiente positivo e $\Delta=1-4=-3$ negativo; la parabola è del tipo rappresentato in figura e dunque il secondo fattore è positivo per qualunque valore reale di x



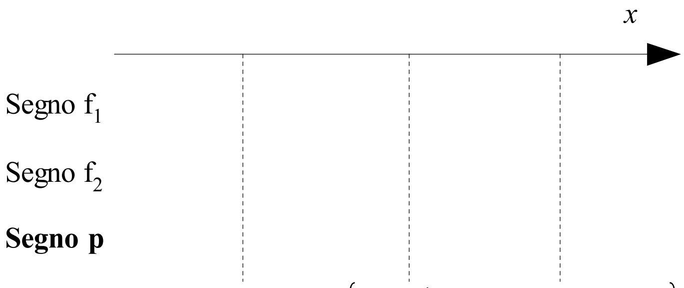

| | | 4 | $x$ |
|---|---|---|---|
| Segno $f_1$ | − | | + |
| Segno $f_2$ | + | | + |
| **Segno p** | − | | + |

- costruiamo la tabella dei segni:
- determiniamo l'*I.S.*: $I.S.=\{x\in\mathbb{R}\mid x>4\}=(4;+\infty)$ ; il problema ha dunque infinite soluzioni.

**90** Determinate l'*I.S.* della disequazione $-2x(3-2x)-3x^2\left(2-\frac{5}{2}x\right)\geq 5\left(2x^2-\frac{3}{10}x\right)$

Osserviamo che la disequazione proposta è polinomiale e di grado 3; eseguiamo i calcoli per portarla alla forma $p(x)\geq 0$

- eseguendo i calcoli e applicando i principi di equivalenza verificare che si ottiene $3x^3-8x^2-3x\geq 0$
- scomporre in fattori il polinomio $p(x)=3x^3-8x^2-3x=x\cdot(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$
- determinare il segno dei singoli fattori:
  - primo fattore $f_1\geq 0 \rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots$
  - secondo fattore $f_2\geq 0 \rightarrow 3x^2-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\geq 0$ disequazione di secondo grado con 1° coefficiente ……………. e $\Delta=\ldots\ldots\ldots\ldots$ ; la parabola è del tipo ……………… dunque $x_1=\ldots\ldots \vee x_2=\ldots\ldots$ e il secondo fattore è positivo per …………………………..
- costruire la tabella dei segni:




- verificare che si ottiene $I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,-\frac{1}{3}\le x\le 0 \vee x\ge 3\right\}$

**91** Verificare che nessun numero naturale appartiene all'Insieme Soluzione della disequazione: $(x^2-x)\cdot(2x^2+13x+20)<0$ ; c'è qualche numero intero nell'*I.S.*? È vero che l'*I.S.* è formato dall'unione di due intervalli aperti di numeri reali?

**92** Dopo aver scomposto in fattori il polinomio $p(x)=2x^4-5x^3+5x-2$ determinare il suo segno.
*Strategia risolutiva*:
- *primo modo*: uno zero intero del polinomio è $x=1$ quindi si procede alla scomposizione mediante la regola di Ruffini … … ...
- *secondo modo*: si procede iniziando con un raccoglimento parziale $p(x)=2x^4-5x^3+5x-2 = 2\cdot(x^4-1)-5x\cdot(x^2-1) = 2\cdot(x^2+1)\cdot(x^2-1)-5x\cdot(x^2-1)$ e poi con il raccoglimento a fattor comune $p(x)=(x^2-1)\cdot(2x^2-5x+2)$
- Potete ora procedere autonomamente allo studio del segno dei singoli fattori ottenuti … … … ...


- completare le proposizioni:
  $p(x)>0$ per ……………………………
  $p(x)=0$ per ……………………………
  $p(x)<0$ per ……………………………

**93** Stabilire se esiste almeno un numero naturale che renda negativo il trinomio $p(x)=9x^2+x^4-10$ .

**94** Nell'insieme dei valori reali che rendono positivo il trinomio $p(x)=2x^5-12x^3-14x$ , vi sono solo due numeri interi negativi?

**95** $x\in(-1;+\infty) \rightarrow p(x)=x^5-2x^2-x+2>0$ Vero o falso?

**96** Determinate *I.S.* della disequazione: $(x^4-4x^2-45)\cdot(4x^2-4x+1)>0$

**97** All'insieme dei valori reali che rendono negativo il polinomio $p(x)=(2x-1)^3-(3-6x)^2$ appartiene un valore razionale che lo annulla. Vero o falso?

*Risolvi le seguenti disequazioni riconducibili a disequazioni di primo e secondo grado*

**98** $(1-x)(2-x)(3-x)>0$ R. $x<1 \vee 2<x<3$

**99** $(2x-1)(3x-2)(4x-3)\le 0$ R: $\frac{2}{3}\le x\le\frac{3}{4} \vee x\le\frac{1}{2}$

**100** $-2x(x-1)(x+2)>0$ R: $x<-2 \vee 0<x<1$

**101** $3x(x-2)(x+3)(2x-1)\le 0$ R: $\frac{1}{2}\le x\le 2 \vee -3\le x\le 0$

**102** $(x^2+1)(x-1)(x+2)>0$ R: $x<-2 \vee x>1$

**103** $(1-9x^2)(9x^2-3x)2x>0$ R: $x<-\frac{1}{3}$

**104** $(16x^2-1)(x^2-x-12)>0$ R: $-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{4} \vee x<-3 \vee x>4$

**105** $-x(x^2-3x-10)(x^2-9x+18)\le 0$ R: $3\le x\le 5 \vee -2\le x\le 0 \vee x\ge 6$

**106** $x^2(x-1)(2x^2-x)(x^2-3x+3)>0$ R: $0<x<\frac{1}{2} \vee x>1$

**107** $(x^2-1)(x^2-2)(x^2-3x)>0$ R: $x<-\sqrt{2} \vee 1<x<\sqrt{2} \vee -1<x<0 \vee x>3$

**108** $x^3-x^2+x-1>0$ R: $x>1$

**109** $x^3-5x^2+6<0$ R: $3-\sqrt{3}<x<3+\sqrt{3} \vee x<-1$

**110** $(5x^3-2x^2)(3x^2-5x)\ge 0$ R: $0\le x\le\frac{2}{5} \vee x\ge\frac{5}{3}$

**111** $x^4-2x^3-x+2>0$ R: $x<1 \vee x>2$

**112** $x^4+x^2-9x^2-9\le 0$ R: $-3\le x\le 3$

**113** $25x^4-9>0$ R: $x<-\frac{\sqrt{15}}{5} \vee x>\frac{\sqrt{15}}{5}$

**114** $x^3-1\ge 2x(x-1)$ R: $x\ge 1$

**115** $x^4-1>x^2+1$ R: $x<-\sqrt{2} \vee x>\sqrt{2}$

**116** $(x^2+x)^2+2(x+1)^2\ge 0$ R: $\mathbb{R}$

**117** $(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)<0$ R. $-1<x<\frac{1}{2} \vee x<-2$

**118** $(x^2-4)(x-2)\ge 0$ R. $x\ge -2$

**119** $(x-7)(x^2-7x+10)<0$ R. $5<x<7 \vee x<2$

**120** $(x^2-4)(x^2-9)\ge 0$ R. $x\le -3 \vee -2\le x\le 2 \vee x\ge 3$

**121** $(x^4+4x^3-12x^2)(x+3)\ge 0$ R. $x=0 \vee -6\le x\le -3 \vee x\ge 2$

**122** $(x-4)^3-(x-4)^2-2x+10>2$ R. $3<x<4 \vee x>6$

**123** $x^3-1\ge 0$ R. $x\ge 1$

**124** $(x^2+6x-27)(2x^2+13x+6)<0$ R. $-9<x<-6 \vee -\frac{1}{2}<x<3$

**125** $(x+3)(x+4)(x+5)(5-x)(4-x)(3-x)>0$ R. $-5<x<-4 \vee -3<x<3 \vee 4<x<5$

## ►5. Disequazioni fratte

Ricordiamo la

DEFINIZIONE. Una disequazione è **frazionaria** o **fratta** quando il suo denominatore contiene l'incognita.

Conosciamo la procedura per determinare IS di una disequazione fratta in quanto l'abbiamo applicata alle disequazioni fratte con termini di primo grado.

**Procedura per determinare I.S. (**Insieme **S**oluzione**) di una disequazione frazionaria (fratta)**

- 1° passo: applicando il primo principio si trasportano tutti i termini al primo membro;
- 2° passo: si calcola l'espressione al primo membro conducendo la disequazione alla forma $\frac{N(x)}{D(x)}\geq 0$ oppure $\frac{N(x)}{D(x)}\leq 0$ oppure $\frac{N(x)}{D(x)}<0$ oppure $\frac{N(x)}{D(x)}>0$ ;
- 3° passo: si studia il segno del numeratore e del denominatore, ponendo N(x)>0 oppure N(x)≥ 0 (a secondo della richiesta) con D(x)>0;
- 4° passo: si costruisce la tabella dei segni, segnando con un punto ingrossato gli zeri della frazione, se richiesti;
- 5° passo: si individuano gli intervalli in cui la frazione assume il segno richiesto.

Vediamo attraverso alcuni esempi come procedere con le conoscenze raggiunte nello studio delle disequazioni di secondo grado.

Problema

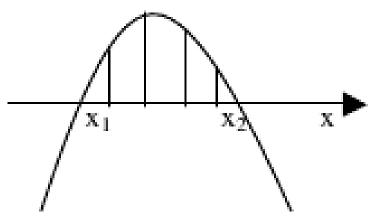
*Determinare, al variare di x in R, il segno dell'espressione* $E=\frac{4}{4x^2-1}+\frac{1}{2x+1}+\frac{x}{1-2x}$

Osservazioni preliminari:

- l'espressione assegnata è frazionaria, quindi lo studio del segno deve essere circoscritto ai valori di x del Dominio dell'espressione stessa.
- studiare il segno di una espressione letterale significa stabilire in quale insieme si trovano i valori della variabile che la rendono positiva, negativa, nulla.
- ogni espressione contenente operazioni tra frazioni algebriche ha in generale come risultato una frazione algebrica.

Strategia risolutiva:

- 1° passo: determiniamo il risultato dell'operazione assegnata: $E=\frac{-2x^2+x+3}{(2x+1)\cdot(2x-1)}$
- 2° passo: determiniamo il **D**ominio di **E**: C.E. $2x+1\neq 0 \wedge 2x-1\neq 0 \rightarrow D=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$
- 3°passo: per studiare il segno impostiamo la disequazione: $\frac{-2x^2+x+3}{(2x+1)\cdot(2x-1)}\geq 0$ che ci permetterà di rispondere al quesito posto dal problema
- 4° passo: studiamo il segno del numeratore e del denominatore:
  **segno N**: $-2x^2+x+3\geq 0$ disequazione di secondo grado, quindi dall'equazione associata $-2x^2+x+3=0$ , calcoliamo il discriminante: $\Delta=1+24=25$ , positivo per cui si hanno due soluzioni reali distinte; la parabola rappresentativa $y=-2x^2+x+3$ è del tipo in figura per cui essendo $x_1=-1$ e $x_2=\frac{3}{2}$ si ha $N\geq 0$ per $-1\leq x\leq\frac{3}{2}$



**segno D**: il denominatore è composto da due fattori di primo grado, quindi $d_1 > 0$ per $x > -\frac{1}{2}$, $d_2 > 0$ per $x > \frac{1}{2}$

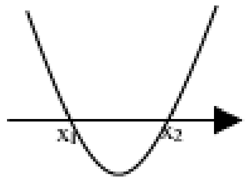
- 5° passo: Costruiamo la tabella dei segni:

| | | $-1$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $+\frac{1}{2}$ | | $\frac{3}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| segno N | − | • | + | | + | | + | • | − |
| segno $d_1$ | − | | − | | + | | + | | + |
| segno $d_2$ | − | | − | | − | | + | | + |
| segno E | − | | + | | − | | + | | − |

Dalla tabella dei segni possiamo ottenere la risposta al problema posto:

- l'espressione E si annulla per $x = -1 \vee x = \frac{3}{2}$
- l'espressione E è positiva per $x \in I = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| -1 < x < -\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \right\}$
- l'espressione E è negativa per $x \in I = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| x < -1 \vee -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \vee x > \frac{3}{2} \right\}$

Osserviamo che **il segno del denominatore** si può determinare riconoscendolo come polinomio di secondo grado con due zeri reali e dunque rappresentabile con una parabola del tipo in figura per cui possiamo affermare $D > 0$ per $x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{1}{2}$ in cui sono rispettate le C.E.

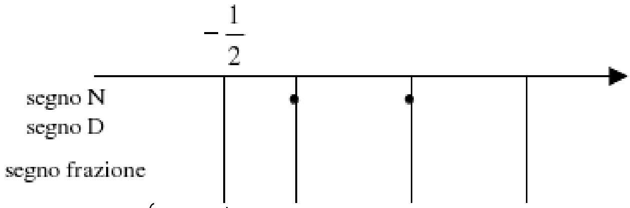



Con questo procedimento la tabella dei segni sarebbe modificata nel modo seguente lasciando inalterato il risultato.

| | | $-1$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $+\frac{1}{2}$ | | $\frac{3}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| segno N | − | • | + | | + | | + | • | − |
| segno D | + | | + | | − | | + | | + |
| segno E | − | | + | | − | | + | | − |

**126** Determinare l'Insieme Soluzione della disequazione fratta: $3 - \frac{1}{2x+1} \geq \frac{1}{1-x}$ .

- 1° passo: trasportiamo al primo membro la frazione del secondo membro, applicando il primo principio delle disequazioni: $3 - \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{1-x} \geq 0$
- 2° passo: eseguite i calcoli; verificate che si ottiene: $\frac{-6x^2+2x+1}{(2x+1)\cdot(1-x)} \geq 0$
- 3° passo: studiate il segno del numeratore e del denominatore:
  **segno N**: $-6x^2+2x+1 \geq 0$ disequazione di secondo grado, quindi dall'equazione associata $-6x^2+2x+1=0$ , calcoliamo il discriminante: $\frac{\Delta}{4}=7$ , positivo per cui si hanno due soluzioni ………………… ; la parabola rappresentativa $y=-6x^2+2x+1$ è del tipo …………………… per cui essendo $x_1=\ldots\ldots\ldots$ e $x_2=\ldots\ldots\ldots$ si ha $N \geq 0$ per $\ldots\ldots\ldots \leq x \leq \ldots\ldots\ldots$
  **segno D**: $(2x+1)\cdot(1-x) > 0$ disequazione di secondo grado; il denominatore ha due zeri reali $x=-\frac{1}{2}$ e $x_2=1$ e la parabola rappresentativa volge la concavità verso il basso; pertanto si ha $D > 0$ per ……………… che rispetta le C.E.: $x_1 \neq -\frac{1}{2} \wedge x_2 \neq 1$
- 4° passo: completate la tabella dei segni:




- 5° passo: controllate che $I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \middle| x<-\frac{1}{2} \vee \frac{1-\sqrt{7}}{6}\le x\le\frac{1+\sqrt{7}}{6} \vee x>1\right\}$

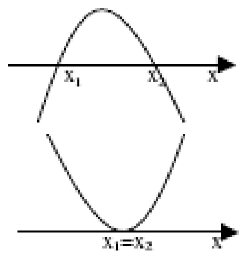
**127** Determinate per quali valori reali la frazione $f=\frac{(x+1)^2}{4x^2-12x+9}$ risulta **non superiore** a 1.

Osserviamo che il problema chiede di determinare l'I.S. della disequazione fratta $\frac{(x+1)^2}{4x^2-12x+9}\le 1$

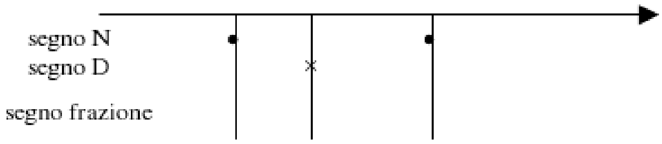
equivalente a $\frac{(x+1)^2}{4x^2-12x+9}-1\le 0$

- 1° passo: eseguite i calcoli per condurre la disequazione alla forma $f\le 0$ : ……………………..
- 2° passo: verificato che si ottiene $\frac{-3x^2+14x-8}{(2x-3)^2}\le 0$ , procedete nella ricerca del

  **segno N**: $-3x^2+14x-8\ge 0$ disequazione di secondo grado, quindi dall'equazione associata ……………, essendo il discriminante $\Delta=$……… positivo, si hanno due soluzioni ………………………; la parabola rappresentativa è del tipo in figura per cui $N\ge 0$ per ………$\le x\le$………
  **segno D**: il polinomio al denominatore è un quadrato di binomio; l'equazione associata ha due zeri reali coincidenti $x_1=x_2=$……….. e la parabola rappresentativa è del tipo, quindi $D>0$ per $x\ne$……




- 3° passo: costruite la tabella dei segni




- 4° passo: *I.S.* = ……………………………………………

**128** Attribuite il valore di verità alla proposizione: "Per qualunque valore reale la frazione algebrica $f=\frac{2x^2+7x+8}{2x^2-4x+2}$ assume segno positivo."

Osserviamo che per rispondere alla richiesta del problema dobbiamo determinare il segno della frazione assegnata e dunque risolvere la disequazione: $\frac{2x^2+7x+8}{2x^2-4x+2}>0$ .

Determinate il
**segno N**: $2x^2+7x+8>0$ disequazione di secondo grado dunque $\Delta=$……… e parabola del tipo ………………………….. per cui $N>0$ per ……………………….
**segno D**: $2x^2-4x+2>0 \rightarrow 2(x-1)^2>0$ disequazione di secondo grado dunque $\Delta=$……… e parabola del tipo ……………………………… per cui $D>0$ per ………………….
Dai risultati ottenuti e dall'analisi della tabella dei segni si deduce $f>0$ per ………….. , quindi la proposizione è ……………

**129** Date chiare e sintetiche motivazioni alla verità della seguente proposizione: "il segno della frazione $f=\frac{9-x^2+3x}{2+x^2}$ non è mai positivo e la frazione non ha zeri reali".

**130** Stabilite se basta la condizione $x\neq 1 \wedge x\neq -1$ per rendere positiva la frazione $f=\frac{x^3-1}{x^4-2x^2+1}$

**131** Assegnate le due funzioni $f_1=\frac{x^2+1}{2x-x^2}$ e $f_2=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}$ stabilite per quali valori della variabile indipendente si ha $f_1\geq f_2$ . R. $-1-\sqrt{2}\leq x<0 \vee -1+\sqrt{2}\leq x<2$

**132** La disequazione $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}<\frac{2x+1}{x^2-1}$ è verificata per

[A] $-\sqrt{2}<x<-1 \vee 1<x<2$

[B] $x<-\sqrt{2} \vee -1<x\leq 0 \vee 1<x<\sqrt{2}$

[C] $x<-\sqrt{2} \vee -1<x<0 \vee 1<x<\sqrt{2}$

[D] $x\leq -\sqrt{2} \vee -1<x<\sqrt{2}$

**133** Spiegate perché l'espressione letterale $E=\frac{1-\frac{x^2}{x^2-1}}{2+\frac{3x-1}{1-x}}$ nel suo Dominio è sempre positiva.

**134** Determinate i valori di x per cui la funzione $y=\frac{(x-1)\cdot x-2}{5x^2-x-4}$ è maggiore o uguale a 1.

R. $-\frac{3}{2}\leq x<-\frac{4}{5}$

**135** x, x+2, x+4 sono tre numeri naturali. Determinate **in N** il più piccolo numero che rende vera la proposizione: "il doppio del primo aumentato del prodotto degli altri due è maggiore della differenza tra il doppio del terzo e il quadrato del secondo" R. 5

*Determinare l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni fratte*

**136** $\frac{x+2}{x-1}>0$ $\qquad I.S.=(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$

**137** $\frac{x+3}{4-x}>0$ $\qquad I.S.=(-3,4)$

**138** $\frac{x+5}{x-7}>0$ $\qquad I.S.=(-\infty;-5)\cup(7;+\infty)$

**139** $\frac{2-4x}{3x+1}\geq 0$ $\qquad I.S.=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$

**140** $\frac{x^2-4x+3}{4-7x}\geq 0$ $\qquad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x<\frac{4}{7}\vee 1\leq x\leq 3\right\}$

**141** $\frac{x^2-x-2}{-3x^2+3x+18}\leq 0$ $\qquad I.S.=\{x\in\mathbb{R}\mid x<-2\vee -1\leq x\leq 2\vee x>3\}$

**142** $\frac{x^2-1}{x-2}>0$ $\qquad I.S.=\{x\in\mathbb{R}\mid -1<x<1\vee x>2\}$

**143** $\frac{x^2-4x+3}{x+5}<0$ $\qquad I.S.=\{x\in\mathbb{R}\mid x<-5\vee 1<x<3\}$

**144** $\frac{-x^2+4x-3}{x+5}>0$ $\qquad I.S.=(-\infty;-5)\cup(1;3)$

**145** $\frac{x^2-8x+15}{x^2+3x+2}>0$ $\qquad I.S.=(-\infty;-2)\cup(-1;3)\cup(5;+\infty)$

**146** $\frac{x^2+1}{x^2-2x}>0$ $\qquad I.S.=\{x\in\mathbb{R}\mid x<0\vee x>2\}$

**147** $\frac{4-x^2+3x}{x^2-x}>0$ $\qquad I.S.=\{x\in\mathbb{R}\mid -1<x<0\vee 1<x<4\}$

**148** $\frac{4-x^2+3x}{x^2-x}>0$ $\qquad I.S.=(-2;2)$

**149** $\frac{x+5}{x^2-25}>0$ $\qquad I.S.=(5;+\infty)$

**150** $\frac{x^2-2x}{5-x^2}>0$ $\qquad I.S.=\{x\in\mathbb{R}\mid -\sqrt{5}<x<0\vee 2<x<\sqrt{5}\}$

**151** $\frac{4x+7}{3x^2-x-2}>0$ $\qquad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,-\frac{7}{4}<x<-\frac{2}{3}\vee x>1\right\}$

**152** $\frac{9-x^2}{2x^2-x-15}>0$ $\qquad I.S.=\left(-3;-\frac{5}{2}\right)$

**153** $\frac{-x^2-4x-3}{6x-x^2}>0$ $\qquad I.S.=(-\infty;-3)\cup(-1;0)\cup(6;+\infty)$

**154** $\frac{x^2-7x}{-x^2-8}>0$ $\qquad I.S.=\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x<7\}$

**155** $\frac{1}{x^2+2x+1}>0$ $\qquad I.S.=\{x\in\mathbb{R}-\{-1\}\}$

**156** $\frac{-3}{-x^2-4x-8}>0$ $\qquad I.S.=\{x\in\mathbb{R}\}$

**157** $\frac{x^2+2x+3}{-x^2-4}>0$ $\qquad I.S.=\emptyset$

**158** $\frac{3x-12}{x^2-9}>0$ $\qquad I.S.=(-3;3)\cup(4;+\infty)$

**159** $\frac{5-x}{x^2-4}>0$ $\quad I.S.=(-\infty;-2)\cup(2;5)$

**160** $\frac{3x-x^2-2}{2x^2+5x+3}>0$ $\quad I.S.=\left(-\frac{3}{2};-1\right)\cup(1;2)$

**161** $\frac{4-2x}{x^2-2x-8}>0$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x<-2 \vee 2<x<4\}$

**162** $\frac{5x+x^2+4}{6x^2-6x}>0$ $\quad I.S.=(-\infty;-4)\cup(-1;0)\cup(1;+\infty)$

**163** $\frac{x^2-4x+3}{5-10x}>0$ $\quad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, x<\frac{1}{2} \vee 1<x<3\right\}$

**164** $\frac{x^2+4x+3}{3x-6}>0$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid -3<x<-1 \vee x>2\}$

**165** $\frac{x^2+3x+10}{4-x^2}>0$ $\quad I.S.=(-2;2)$

**166** $\frac{x^2-3x+2}{4x-x^2-5}>0$ $\quad I.S.=(1;2)$

**167** $\frac{x^2-9}{x^2-5x}>0$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x<-3 \vee 0<x<3 \vee x>5\}$

**168** $\frac{2x+8}{x^2+4x-12}>0$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid -6<x<-4 \vee x>2\}$

**169** $\frac{x^2+2}{25-x^2}>0$ $\quad I.S.=(-5;5)$

**170** $\frac{3x^2-2x-1}{4-2x}>0$ $\quad I.S.=\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup(1;2)$

**171** $\frac{x^2-2x-63}{4x+5-x^2}>0$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid -7<x<-1 \vee 5<x<9\}$

**172** $\frac{x+2}{x^2+4x+4}>0$ $\quad I.S.=(2:+\infty)$

**173** $\frac{5-x}{x^2-4x+3}>0$ $\quad I.S.=(-\infty;1)\cup(3;5)$

**174** $\frac{3+4x}{-x^2+5x-4}>0$ $\quad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, x<-\frac{3}{4} \vee 1<x<4\right\}$

**175** $\frac{x^2-5x+6}{-3x+7}<0$ $\quad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, 2<x<\frac{7}{3} \vee x>3\right\}$

**176** $\frac{-x^2+2x+8}{-x-1}<0$ $\quad I.S.=(-\infty;-2)\cup(-1;4)$

**177** $\frac{x^2+3x+2}{25-x^2}>0$ $\quad I.S.=(-5;-2)\cup(-1;5)$

**178** $\frac{x^2-x-2}{x-x^2+6}>0$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid -2<x<-1 \vee 2<x<3\}$

**179** $\frac{9-x^2}{x^2+5x+6}<0$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x<-3 \vee -3<x<-2 \vee x>3\}$

**180** $\frac{6x-2x^2}{4-x^2}>0$ $\quad I.S.=(-\infty;-2)\cup(0;2)\cup(3,+\infty)$

**181** $\frac{2x-4x^2}{x^2+x-12}<0$ $\quad I.S.=(-\infty;-4)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup(3,+\infty)$

**182** $\frac{16-x^2}{5x-x^2}>0$ $\qquad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x<-4 \vee 0<x<4 \vee x>5\}$

**183** $\frac{1-x^2}{x^2+2x+3}<0$ $\qquad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x<-1 \vee x>1\}$

**184** $\frac{x^2-2x}{x^2+1}>0$ $\qquad I.S.=(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$

**185** $\frac{8-2x^2}{3x-x^2+4}<0$ $\qquad I.S:=(-2;-1)\cup(2;4)$

**186** $\frac{6x^2-6}{100x^2+100x}<0$ $\qquad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid 0<x<1\}$

**187** $\frac{1+x^2}{3x^2+x}<0$ $\qquad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{1}{3}<x<0\right\}$

**188** $\frac{x^2+3x+3}{4x^2+3}>0$ $\qquad I.S.=\mathbb{R}$

**189** $\frac{125+4x^2}{128+2x^2}<0$ $\qquad I.S.=\emptyset$

**190** $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4x+3}>0$ $\qquad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x<-2 \vee -2<x<1 \vee x>3\}$

**191** $\frac{x^2-5x+8}{x^2-2x+1}>0$ $\qquad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x<1 \vee x>1\}$

**192** $\frac{4x-3}{x+6}>0$ $\qquad I.S.=(-\infty;-6)\cup\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$

**193** $\frac{-2x+1}{3x-x^2}>0$ $\qquad I.S.=\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup(3;+\infty)$

**194** $\frac{4x^2-3x}{x^2-2x-8}<0$ $\qquad I.S.=(-2;0)\cup\left(\frac{3}{4};4\right)$

**195** $\frac{4x-x^2+5}{x^2-9x+20}<0$ $\qquad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x<-1 \vee 4<x<5 \vee x>5\}$

**196** $\frac{5+2x}{-2x^2+14x+16}<0$ $\qquad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{5}{2}<x<-1 \vee x>8\right\}$

**197** $\frac{5x-2x^2-10}{x^2+3x-28}>0$ $\qquad I.S:=(-7;4)$

**198** $\frac{x^2-6x+9}{8x-7x^2}>0$ $\qquad I.S:=\left(0;\frac{8}{7}\right)$

**199** $\frac{3x^2+2x-8}{6x^2+19x+15}<0$ $\qquad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, -2<x<-\frac{5}{3} \vee -\frac{3}{2}<x<\frac{4}{3}\right\}$

**200** $\frac{3x^2-5x-2}{4x^2+8x-5}>0$ $\qquad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, x<-\frac{5}{2} \vee -\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2} \vee x>2\right\}$

**201** $\frac{4x-4}{2x^2-3x+2}<0$ $\qquad I.S.=(-\infty;1)$

**202** $\frac{2x-4}{2x^2-3x-14}>0$ $\qquad I.S.=(-2;2)\cup\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$

**203** $\frac{-7x+6}{x^2+10x+25}<0$ $\qquad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, x>\frac{6}{7}\right\}$

**204** $\frac{-3+3x}{x^3-4x^2}>0$ $\qquad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x<0 \vee 0<x<1 \vee x>4\}$

## ►6. Sistemi di disequazioni

Problema

*Nell'equazione* $x^2-(k-3)x+k^2-3k+1=0$ *, determinare per quali valori del parametro k si ottengono soluzioni reali e concordi.*

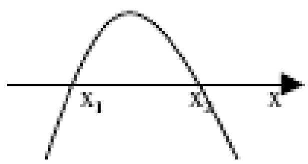
Abbiamo già affrontato un problema di questo tipo discutendo le equazioni parametriche di secondo grado e dunque sappiamo che la richiesta del problema esige che il discriminante $(\Delta)$ sia non negativo affinché le soluzioni siano reali e che il prodotto delle stesse sia positivo. Pertanto il problema è formalizzato con un **sistema di disequazioni:** $\begin{cases}\Delta\geq 0\\ \dfrac{c}{a}>0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}k^2-6k+9-4k^2+12k-4\geq 0\\ k^2-3k+1>0\end{cases}$

| |
|---|
| **Risolvere il sistema** significa trovare l'insieme dei numeri reali che sono le soluzioni comuni alle disequazioni che lo compongono. |

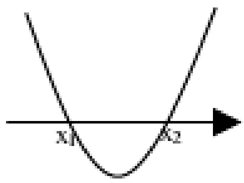
Risolviamo separatamente le due disequazioni del sistema; indicati con I.S.$_1$ e I.S.$_2$ rispettivamente gli insiemi soluzione della prima e della seconda disequazione, l'insieme soluzione del sistema è dato da

***I.S. = I.S.***$_1 \cap$ ***I.S.***$_2$ (insieme intersezione degli insiemi soluzione delle due disequazioni).

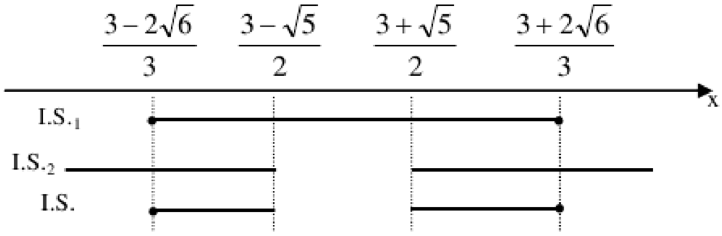
- $d_1: -3k^2+6k+5\geq 0$ disequazione di secondo grado avente I° coefficiente negativo e $\dfrac{\Delta}{4}=24$ positivo; la parabola rappresentativa è del tipo rappresentata in figura con
  $x_1=\dfrac{3-2\sqrt{6}}{3} \vee x_2=\dfrac{3+2\sqrt{6}}{3}$ quindi
  $I.S._1=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, \dfrac{3-2\sqrt{6}}{3}\leq x\leq\dfrac{3+2\sqrt{6}}{3}\right\}$




- $d_2: k^2-3k+1>0$ disequazione di secondo grado avente I° coefficiente positivo e $\Delta=5$ positivo; la parabola rappresentativa è è del tipo rappresentata in figura con
  $x_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ quindi
  $I.S._1=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, x<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\vee x>\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$




Per determinare l'**I**nsieme **S**oluzione del sistema rappresentiamo in un grafico gli insiemi soluzioni delle disequazioni risolte e visualizziamo l'insieme formato dai valori che soddisfano contemporaneamente sia l'una che l'altra: sull'asse reale depositiamo i valori numerici trovati e rappresentiamo su righe distinte i due insiemi soluzione: gli intervalli in cui cadono soluzioni della prima e della seconda disequazione rappresentano l'Insieme Soluzione del sistema.




$$I.S._1=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, \frac{3-2\sqrt{6}}{3}\leq x<\frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee \frac{3+\sqrt{5}}{2}<x\leq\frac{3+2\sqrt{6}}{3}\right\}=\left[\frac{3-2\sqrt{6}}{3};\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};\frac{3+2\sqrt{6}}{3}\right]$$

Problema

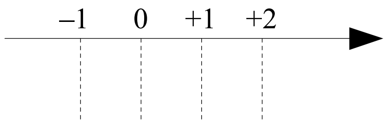
*Esiste qualche valore reale per cui le due funzioni* $f_1=x^4-x^3+x-1$ *;* $f_2=x^4-8x$ *assumono* *contemporaneamente valore positivo?*

Il problema è formalizzato nel **sistema di disequazioni**: $\begin{cases} x^4 - x^3 + x - 1 > 0 \\ x^4 - 8x > 0 \end{cases}$

Essendo le disequazioni polinomiali passiamo attraverso la scomposizione in fattori per determinarne la soluzione

- $d_1:\ x^4 - x^3 + x - 1 = x^3(\ldots\ldots\ldots) + (x-1) = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(\ldots\ldots\ldots) > 0$ completate applicando il procedimento che preferite ……………………………………… ……………………………………………………………………………………………. e verificate che risulta $I.S._1 = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$
- $d_2:\ x^4 - 8x = x\cdot(\ldots\ldots - 8) = x\cdot(\ldots\ldots\ldots)\cdot(\ldots\ldots\ldots) > 0$ completate applicando il procedimento che preferite ……………………………………………………………………………… ……………………………………………………………………………………………. e verificate che risulta $I.S._1 = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$

Completate lo schema per determinare l'insieme soluzione del problema.

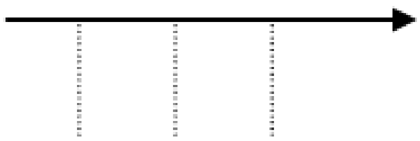



$I.S. = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ . Attribuite il valore di verità alla proposizione:" 3 è il primo numero naturale che rende positive entrambe le funzioni assegnate".
Dallo schema ottenuto potete anche ricavare l'insieme dei valori reali che rendono entrambe le funzioni negative? Se la risposta è sì, datene la rappresentazione come intervallo numerico. ………………………….

**205** Determinate l'insieme soluzione del sistema: $\begin{cases} 2x^3 - 9x^2 + 10x - 3 \le 0 \\ \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 - x} \ge 0 \\ 3 - 4x < 0 \end{cases}$

Il sistema è formato da tre disequazioni; risolviamo separatamente ciascuna disequazione:

- $2x^3 - 9x^2 + 10x - 3 \le 0$ di terzo grado, quindi procediamo alla scomposizione in fattori del polinomio al primo membro. Applicando la regola del resto si determina $x = 1$ come zero intero del polinomio; con la regola di Ruffini procedete alla scomposizione e verificate che risulta: $d_1:\ (x-1)\cdot(2x^2 - 7x + 3) \le 0$ studiate il segno dei singoli fattori:
  - $f_1:\ x - 1 \ge 0\ \rightarrow\ \ldots\ldots\ldots\ldots$
  - $f_2:\ 2x^2 - 7x + 3 \ge 0$ di secondo grado con il I° coefficiente …… . e $\Delta = \ldots\ldots\ldots$ positivo, quindi $x_1 = \ldots\ldots\ldots \vee x_2 = \ldots\ldots\ldots$ e $f_2 \ge 0$ per ……………… .
  - costruite la tabellina dei segni e determinate $I.S._1$



- $d_2:\ \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 - x} \ge 0$ disequazione fratta, quindi determiniamo il segno del numeratore e quello del denominatore
  - $N:\ x^2 + x + 1 \ge 0$ di secondo grado col I° coefficiente …………e $\Delta = \ldots\ldots\ldots$ negativo, quindi la parabola rappresentativa è …………………………..e dunque N > 0 per qualunque x reale, mai uguale a zero.
  - $D:\ x^3 - x = x\cdot(x^2 - 1) > 0\ \rightarrow\ x\cdot(x+1)\cdot(x-1) > 0$ e studiando il segno dei singoli fattori

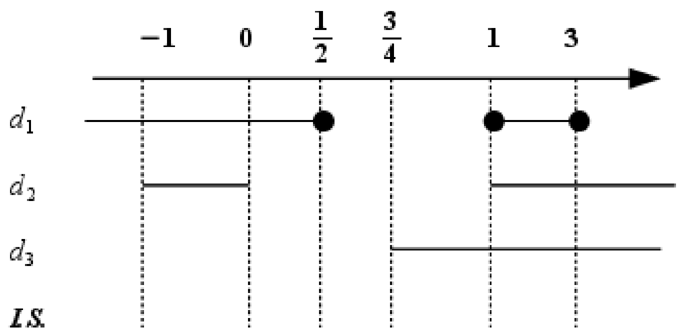
$f_1:\ x>0$
$f_2:\ x+1>0 \rightarrow x\ldots\ldots\ldots$
$f_3:\ x-1>0 \rightarrow x\ldots\ldots\ldots$

e completando la tabella dei segni otteniamo $D>0$ per $-1<x<0 \vee x>1$

completiamo con la ricerca dell' $I.S._2$ : essendo il numeratore positivo per qualunque valore reale, la frazione è positiva quando è positivo il denominatore, quindi $I.S._2=\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

- Infine risolviamo $d_3:\ 3-4x<0$ di primo grado per cui $x>\frac{3}{4}$

Ricordiamo che la ricerca dell'Insieme Soluzione del sistema si effettua determinando l'insieme $I.S._1 \cap I.S._2 \cap I.S._3$ individuabile attraverso il grafico:




Scegli la risposta corretta:

[A] $1\le x<3$ [B] $1<x<3$ [C] $1<x<3$ [D] $1\le x\le 3$

**206** Verificate che l'insieme soluzione del sistema: $\begin{cases}\frac{1}{x}>\frac{1}{x-3}\\ 3x-1-2x^2<0\\ \frac{x^2-6x+5}{2-x}>0\end{cases}$ è $I.S.=\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(2,3)$

**207** Determinate l'insieme dei valori reali che rendono vera la proposizione composta

*p:* " $x^3-5x^2-14x\ge 0 \wedge \frac{2x+1}{2x}>\frac{3}{x+1}$ " $I.S.=[-2;-1)\cup[7;+\infty)$

**208** Determinate l'Insieme Soluzione del sistema: $\begin{cases}x^4-8\ge 1\\ \frac{5-x}{x}<\frac{1}{2}\\ x^3-1<0\end{cases}$ $I.S.=(-\infty;-\sqrt{3}]$

**209** Per determinare qualche soluzione del sistema $\begin{cases}x(x-3)>3\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\\ 2+x\cdot\frac{3x-7}{3}\ge 5-\frac{1}{3}x\end{cases}$ basta l'insieme N dei naturali? Se la risposta è affermativa, esprimi per elencazione gli elementi dell'Insieme Soluzione. $I.S.=\{3,4,5\}$

**210** $\begin{cases}x^2-4>0\\ x-5\leqslant 0\end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R}\mid x<-2 \vee 2<x\leqslant 5\}$

**211** $\begin{cases}x^2-4x+3\leqslant 0\\ x-2x^2<-10\end{cases}$ $I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\ \middle|\ \frac{5}{2}<x\leqslant 3\right\}$

**212** $\begin{cases}4x-x^2>0\\ 3x^2(x-3)>0\end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R}\mid 3<x<4\}$

**213** $\begin{cases} x^2+5x+6\leqslant 0 \\ 2x+5\leqslant 0 \end{cases}$ $\quad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\ \middle|\ -3\leq x\leq -\frac{5}{2}\right\}$

**214** $\begin{cases} 3x-x^2-2\leqslant 0 \\ x^2>49 \end{cases}$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x<-7 \vee x>7\}$

**215** $\begin{cases} 3x-2>0 \\ x^2-1>0 \\ 2x-x^2<0 \end{cases}$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x>2\}$

**216** $\begin{cases} x^2-4x+4\geqslant 0 \\ x<6 \end{cases}$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x<6\}$

**217** $\begin{cases} x^2-4x+4>0 \\ x\leqslant 6 \\ 1-x^2\leqslant 0 \end{cases}$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq -1 \vee 1\leq x<2 \vee 2<x\leq 6\}$

**218** $\begin{cases} x^2+6x+9<0 \\ x<2 \\ x^2+1>0 \end{cases}$ $\quad I.S.=\emptyset$

**219** $\begin{cases} x^2+6x+9\leqslant 0 \\ x<2 \end{cases}$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x=-3\}$

**220** $\begin{cases} 4x-x^2-3<0 \\ 3x\geqslant 2 \end{cases}$ $\quad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\ \middle|\ \frac{2}{3}\leq x<1 \vee x>3\right\}$

**221** $\begin{cases} 2x^2<8 \\ -x^2+5x>-6 \\ x^2(9-x^2)\leqslant 0 \end{cases}$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x=0\}$

**222** $\begin{cases} (x^2-4x+3)(2x-4)>0 \\ 2x-x^2\leqslant 1 \end{cases}$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid 1<x<2 \vee x>3\}$

**223** $\begin{cases} (3-x)(x^2-4)(x^2-2x-8)<0 \\ x^2-64\leqslant 0 \end{cases}$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid 2<x<3 \vee 4<x\leq 8\}$

**224** $\begin{cases} 2x^2-x-1\leqslant 0 \\ 3x+7>0 \\ x^2-10x+9\leqslant 0 \end{cases}$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x=1\}$

**225** $\begin{cases} 2x^2-x-1<0 \\ 3x+7>0 \\ x^2-10x+9\leqslant 0 \end{cases}$ $\quad I.S.=\emptyset$

**226** $\begin{cases} x^2-10x+25>0 \\ x<7 \end{cases}$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x<5 \vee 5<x<7\}$

**227** $\begin{cases} x^2-10x+25\geqslant 0 \\ x<7 \end{cases}$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x<7\}$

**228** $\begin{cases} x^2-4x+3\leq 0 \\ x^2-4>0 \\ x^2+1>0 \\ x-1>0 \end{cases}$ $\quad I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid 2<x\leq 3\}$

**229** $\begin{cases} x^2-5x+6\leq 0 \\ x^2-1>0 \\ x^2+1<0 \\ x-1>0 \end{cases}$ $\quad I.S.=\emptyset$

**230** $\begin{cases} x^2-2x+1\geq 0 \\ x^2+5x\geq 0 \\ x^2+1>0 \\ x^2-2x+7>0 \end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq -5 \vee x\geq 0\}$

**231** $\begin{cases} x^2-2x+1>0 \\ x^2+5x\geq 0 \\ x^2+x+23>0 \\ x^2-2x+7>0 \end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq -5 \vee 0\leq x<1 \vee x>1\}$

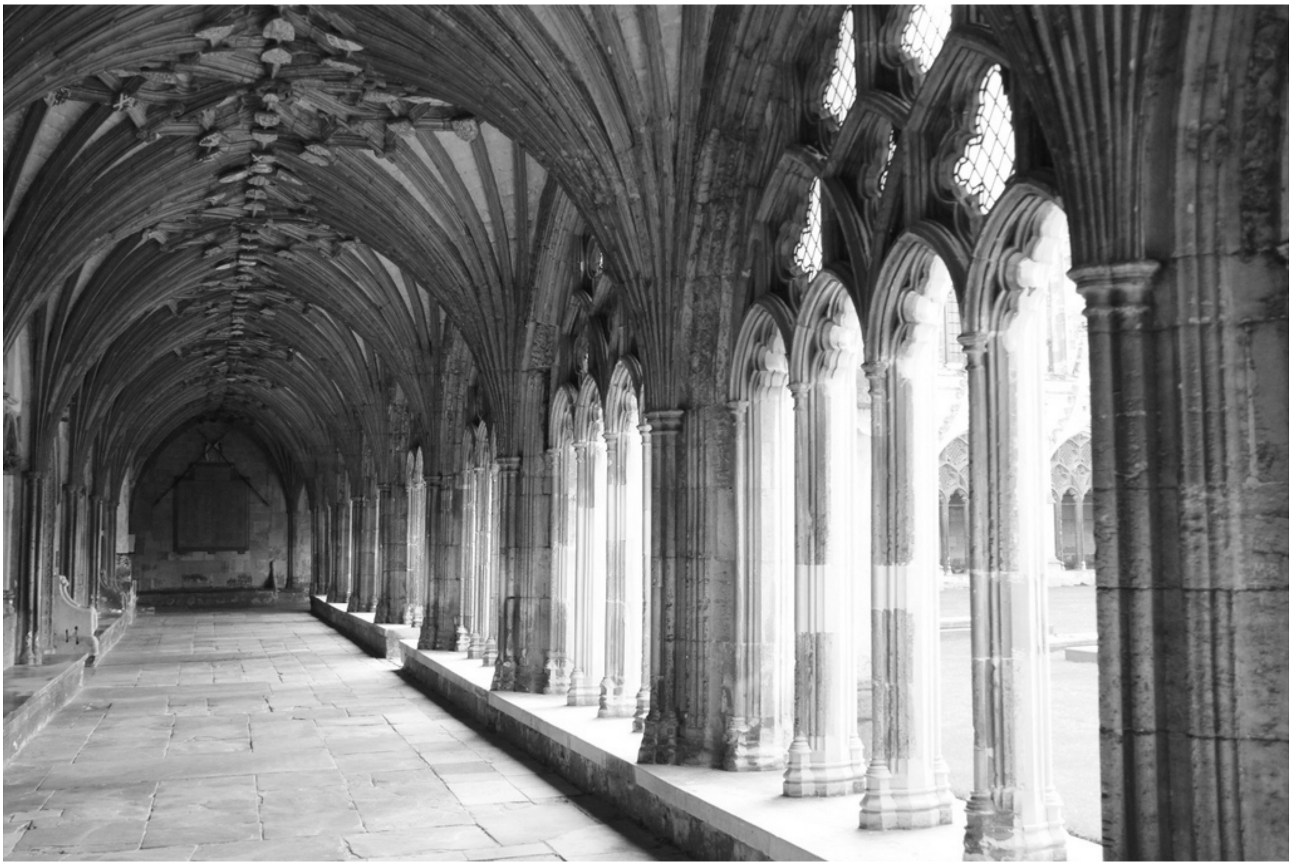
**232** $\begin{cases} x^2-3x+2>0 \\ x^2-3x+2<0 \\ 2x^2-x-1>0 \\ x^2-2x>0 \end{cases}$ $I.S.=\emptyset$

**233** $\begin{cases} x^2-3x+2\leq 0 \\ x^2-4x+4\leq 0 \\ x^2-x+10>0 \\ x^2-2x\leq 0 \end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x=2\}$

**234** $\begin{cases} x^2-3x+2\leq 0 \\ x^2-4x+4\leq 0 \\ x^2-3x+2\geq 0 \\ x^2-4x+4\geq 0 \end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x=2\}$

# MATEMATICA C$^3$ -ALGEBRA 2

# 5. SISTEMI NON LINEARI



*Canterbury Cathedral* by Bortescristian
http://www.flickr.com/photos/bortescristian/5083747705
Licenza Attribution, Share Alike 2.0

## Indice generale

## ►1. Sistemi di secondo grado

Un sistema di equazioni non è altro che l'insieme di più equazioni con le stesse incognite. L'insieme delle soluzioni è dato dall'intersezione degli insiemi delle soluzioni delle singole equazioni.

Diamo la seguente definizione

DEFINIZIONE. Il **grado di un sistema di equazioni**, se le equazioni che formano il sistema sono costituite da polinomi, è dato dal prodotto dei gradi delle equazioni che lo compongono.

Esempio

Determinare il grado dei seguenti sistemi di equazioni

A) $\begin{cases} -2x+3y=4 \\ 3x+5y-2=0 \end{cases}$
La prima equazione e la seconda equazione sono di primo grado.
Il sistema è di primo grado

B) $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x^2+6y^2-9=0 \end{cases}$
La prima equazione è di primo grado, la seconda equazione di secondo grado.
Il sistema è di secondo grado.

C) $\begin{cases} x^2+y^2=0 \\ y=3x^2-2x+6=0 \end{cases}$
La prima equazione è di secondo grado, come la seconda.
Il sistema è di quarto grado.

I sistemi di secondo grado sono dunque composti da una equazione di secondo grado e da una equazione di primo grado.

### Sistemi di secondo grado numerici

Esempio

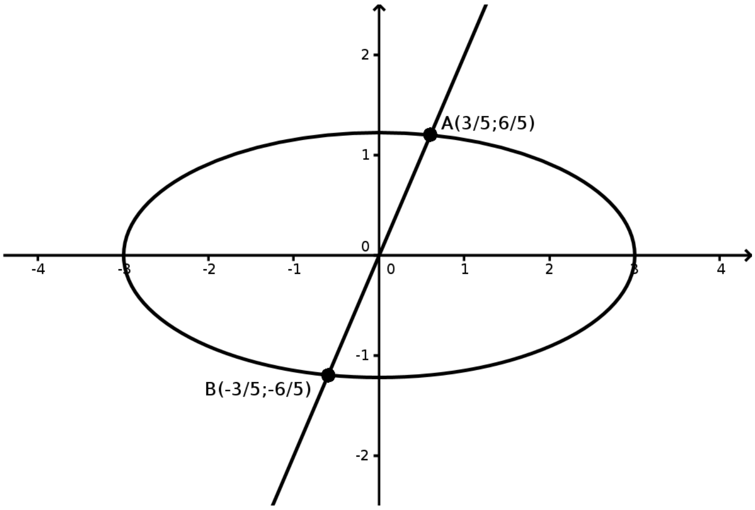
■ $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x^2+6y^2-9=0 \end{cases}$

Utilizziamo il metodo di sostituzione che abbiamo già visto per i sistemi di primo grado.

- Isoliamo una delle due incognite nell'equazione di primo grado e sostituiamo l'espressione a destra dell'uguale nella equazione di secondo grado a ogni occorrenza dell'incognita isolata. $\begin{cases} y=2x \\ x^2+6\cdot(2x)^2-9=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2x \\ x^2+24x^2-9=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2x \\ 25x^2-9=0 \end{cases}$
- Risolvere l'equazione di secondo grado in una sola incognita. Questa equazione è detta **equazione risolvente del sistema**. $25x^2-9=0 \rightarrow x_1=-\frac{3}{5} \vee x_2=\frac{3}{5}$
- Si sostituiscono i valori trovati per la x nella equazione di primo grado per trovare i valori corrispondenti della y. Le coppie $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$ se ci sono, si dicono soluzioni del sistema.

$$\begin{cases} y=2x \\ 25x^2-9=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1=-\frac{3}{5} \\ y_1=2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{6}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x_2=+\frac{3}{5} \\ y_2=2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)=+\frac{6}{5} \end{cases} \end{cases} \rightarrow \left(-\frac{3}{5};-\frac{6}{5}\right) \vee \left(\frac{3}{5};\frac{6}{5}\right)$$

Nel corso degli studi vedremo come le soluzioni del sistema $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x^2+6y^2-9=0 \end{cases}$ possono essere interpretate geometricamente come i punti di incontro tra la retta rappresentata dall'equazione $y=2x$ e l'ellisse rappresentata dall'equazione $x^2+6y^2=9$. Con un software matematico come Geogebra inseriamo le due equazioni e otteniamo la seguente figura.




I punti A e B, intersezione tra la retta e l'ellisse corrispondono alle soluzioni del sistema.

**1** Determinare l'insieme soluzione del sistema di secondo grado $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x^2+5y^2=6 \end{cases}$.

- Ricaviamo $y$ dalla prima equazione e sostituiamo la sua espressione nella seconda equazione:. $\begin{cases} y=\ldots\ldots\ldots \\ x^2+5y^2=6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=\ldots\ldots \\ x^2+5(\ldots\ldots)^2=6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=\ldots\ldots \\ 21x^2\ldots\ldots\ldots\ldots=0 \end{cases}$
- Risolvere l'equazione risolvente di secondo grado le soluzioni sono $x_1=1 \vee x_2=-\frac{1}{21}$
- Si sostituiscono i valori trovati per la $x$ nella equazione di primo grado per trovare i valori corrispondenti della $y$. $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=\ldots\ldots \end{cases} ; \begin{cases} x_2=-\frac{1}{21} \\ y_2=\ldots\ldots\ldots \end{cases} \rightarrow (1;\ldots) \vee \left(-\frac{1}{21};\ldots\ldots\right)$

**2** Determinare l'insieme soluzione del sistema di secondo grado $\begin{cases} x+2y=-1 \\ x+5y^2=23 \end{cases}$.

- Ricaviamo x dalla prima equazione e sostituiamo la sua espressione nella seconda equazione: $\begin{cases} x=\ldots\ldots\ldots \\ x+5y^2=23 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\ldots\ldots\ldots \\ (\ldots\ldots\ldots)+5y^2=23 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-2y-1 \\ 5y^2\ldots\ldots\ldots\ldots=0 \end{cases}$
- Risolvere l'equazione risolvente di secondo grado le soluzioni sono $y_1=-2 \vee y_2=\frac{12}{5}$
- Si sostituiscono i valori trovati per la $y$ nella equazione di primo grado per trovare i valori corrispondenti della $x$. $\begin{cases} x_1=\ldots\ldots \\ y_1=-2 \end{cases} ; \begin{cases} x_2=\ldots\ldots \\ y_2=\frac{12}{5} \end{cases} \rightarrow (\ldots;-2) \vee \left(\ldots\ldots;-\frac{12}{5}\right)$

**3** Determinare l'insieme soluzione del sistema di secondo grado $\begin{cases} x-5y=2 \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$.

- Ricaviamo x dalla prima equazione e sostituiamo la sua espressione nella seconda equazione:. $\begin{cases} x=\ldots\ldots\ldots \\ x^2+2y^2=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\ldots\ldots\ldots \\ (\ldots\ldots\ldots)^2+2y^2=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=5y+2 \\ \ldots\ldots+20y=0 \end{cases}$
- Risolvere l'equazione risolvente di secondo grado le soluzioni sono $y_1=0 \vee y_2=-\frac{20}{27}$
- Si sostituiscono i valori trovati per la $y$ nella equazione di primo grado per trovare i valori corrispondenti della x. $\begin{cases} x_1=\ldots\ldots \\ y_1=0 \end{cases} ; \begin{cases} x_2=\ldots\ldots \\ y_2=-\frac{20}{27} \end{cases} \rightarrow (\ldots;0) \vee \left(\ldots\ldots;-\frac{20}{27}\right)$

Esempio

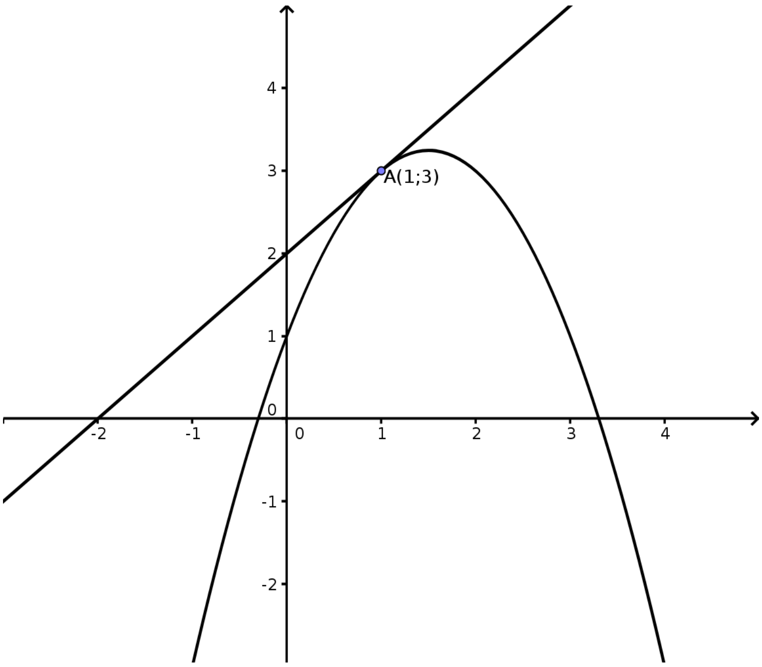
- $\begin{cases} x-y=-2 \\ x^2+y-3x-1=0 \end{cases}$

• Isoliamo una delle due incognite nell'equazione di primo grado, e sostituiamo l'espressione a destra dell'uguale nella equazione di secondo grado a ogni occorrenza dell'incognita isolata. $\begin{cases} y=x+2 \\ x^2+(x+2)-3x-1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=x+2 \\ x^2-2x+1=0 \end{cases}$

• Risolvere l'equazione di secondo grado in una sola incognita. L' **equazione risolvente del sistema**. $x^2-2x+1=0$ ha il discriminante uguale a zero e due soluzioni reali coincidenti: $x_1=x_2=1$ .

• Il sistema ha due soluzioni reali coincidenti, $\begin{cases} y=x+2 \\ x^2-2x+1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1+2=3 \end{cases} \rightarrow (1;3)$

La soluzione del sistema $\begin{cases} x-y=-2 \\ x^2+y-3x-1=0 \end{cases}$ possono essere interpretate geometricamente come i punti di incontro tra la retta rappresentata dall'equazione $y=x+2$ e la parabola rappresentata dall'equazione $y=-x^2+3x+1$ . La soluzioni saranno due punti reali coincidenti. Questo punto è detto punto di tangenza tra retta e parabola. Ecco come appare la rappresentazione grafica ottenuta con Geogebra.




**4** Determinare l'insieme soluzione del sistema di secondo grado $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x^2-3y^2=1 \end{cases}$

• Ricaviamoci $x$ dalla prima equazione e sostituiamo la sua espressione nella seconda equazione:. $\begin{cases} x=\dfrac{1+3y}{2} \\ x^2-3y^2=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1+3y}{2} \\ \left(\dfrac{1+3y}{2}\right)^2-3y^2-1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1+3y}{2} \\ -\dfrac{3}{4}y^2+\dfrac{3}{2}y-\dfrac{3}{4}=0 \end{cases}$

• Risolvere l'equazione risolvente che ha il discriminante uguale a 0. Ci sono due soluzioni reali coincidenti: $y_1=y_2=1$

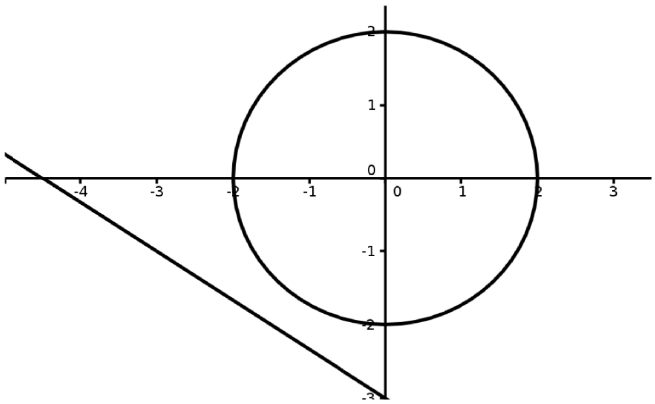
• Si sostituisce il valore trovati per la $y$ nella equazione di primo grado per trovare il valore corrispondente della $x$ . $\begin{cases} x_1=x_2=2 \\ y_1=y_2=1 \end{cases} \rightarrow (2;1)$

<u>Esempio</u>

Determinare l'insieme soluzione del sistema di secondo grado $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ 2x+3y=-9 \end{cases}$

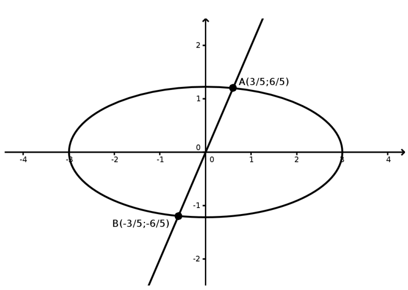
- Isoliamo una delle due incognite nell'equazione di primo grado,e sostituiamo l'espressione a destra dell'uguale nella equazione di secondo grado a ogni occorrenza dell'incognita isolata. $\begin{cases} y=-\frac{2}{3}x-3 \\ x^2+\left(-\frac{2}{3}x-3\right)^2-4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-\frac{2}{3}x-3 \\ x^2+\frac{4}{9}x^2+4x+9-4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-\frac{2}{3}x-3 \\ \frac{13}{9}x^2+4x+5=0 \end{cases}$
- Risolvere l'equazione di secondo grado in una sola incognita. Questa equazione è detta **equazione risolvente del sistema**. $\frac{13}{9}x^2+4x+5=0$ . Il discriminante dell'equazione è negativo: $\Delta=16-\frac{260}{9}<0$ , quindi l'equazione non ha soluzioni reali e $I:S=\emptyset$ .
- Il sistema non ha soluzioni reali e il sistema si dice **impossibile**.

Le soluzioni del sistema $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ 2x+3y=-9 \end{cases}$ possono essere interpretate geometricamente come i punti di incontro tra la retta rappresentata dall'equazione $y=-\frac{2}{3}x-3$ e la circonferenza rappresentata dall'equazione $x^2+y^2=4$ . La seguente figura è quella che otteniamo se inseriamo le due equazioni in geogebra. Notiamo che le figure geometriche ottenute non hanno punti d'incontro.

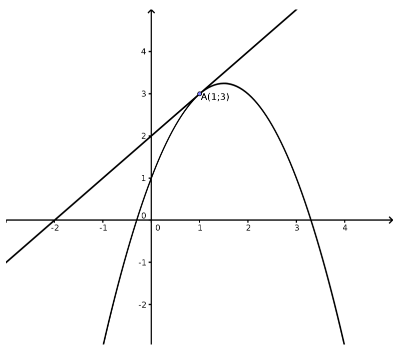


<u>Osservazione</u>: Un sistema di secondo grado, con equazione risolvente di secondo grado, rappresenta sempre l'intersezione tra una retta e una curva di secondo grado (circonferenza , parabola, ellisse o iperbole).
Le soluzioni del sistema rappresentano i punti di incontro tra retta e curva.
In base al segno del discriminante dell'equazione risolvente abbiamo:

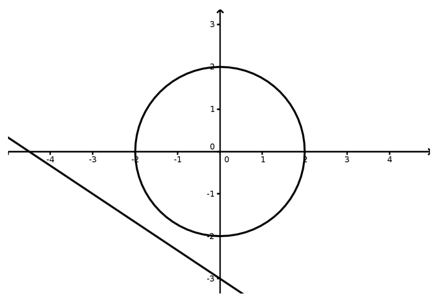
- $\Delta>0$ le soluzioni del sistema sono le coordinate di due punti distinti.
- $\Delta=0$ le soluzioni del sistema sono le coordinate di due punti coincidenti
- $\Delta<0$ il sistema non ha soluzioni reali. Retta e curva non hanno punti in comune.




$\Delta>0$




$\Delta=0$



$\Delta<0$

**5** Determinare l'insieme soluzione del sistema di secondo grado $\begin{cases} 5x-2y=3 \\ x^2-y^2=1 \end{cases}$

- Ricaviamoci $y$ dalla prima equazione e sostituiamo la sua espressione nella seconda equazione:. $\begin{cases} y=\dfrac{5x-3}{2} \\ x^2-y^2=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{5x-3}{2} \\ x^2-\left(\dfrac{5x-3}{2}\right)^2=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{5x-3}{2} \\ -\dfrac{21}{4}x^2+\dfrac{15}{2}x-\dfrac{13}{4}=0 \end{cases}$
- Risolviamo l'equazione associata. In questo caso il discriminante dell'equazione è negativo. Non ci sono soluzioni reali
- Il sistema è impossibile.

Esempio

■ $\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ x+y=0 \end{cases}$

- Isoliamo una delle due incognite nell'equazione di primo grado,e sostituiamo l'espressione a destra dell'uguale nella equazione di secondo grado a ogni occorrenza dell'incognita isolata. $\begin{cases} y=-x \\ x^2-(-x)^2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-x \\ x^2-x^2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-x \\ 0=0 \end{cases}$
- L' **equazione risolvente del sistema** in questo caso è una **identità** (uguaglianza vera) e tutte le coppie formate da numeri opposti (la prima equazione ci vincola ad avere $y=-x$ ) sono soluzioni del sistema: $\forall k\in\mathbb{R} \rightarrow I.S.=(k;-k)$ .
- Il sistema ha infinite coppie di numeri reali che lo soddisfano e si dice **indeterminato**.

Esempio

■ $\begin{cases} x^2-y^2=9 \\ x+y=0 \end{cases}$

- Isoliamo una delle due incognite nell'equazione di primo grado,e sostituiamo l'espressione a destra dell'uguale nella equazione di secondo grado a ogni occorrenza dell'incognita isolata. $\begin{cases} y=-x \\ x^2-(-x)^2=9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-x \\ x^2-x^2=9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-x \\ 0=9 \end{cases}$
- L' equazione risolvente del sistema in questo caso è una **contraddizione** (uguaglianza falsa).
- Il sistema è **impossibile**.

Esempio

■ $\begin{cases} x^2-y^2=4 \\ -x+y=-1 \end{cases}$

- Isoliamo una delle due incognite nell'equazione di primo grado,e sostituiamo l'espressione a destra dell'uguale nella equazione di secondo grado a ogni occorrenza dell'incognita isolata. $\begin{cases} y=x-1 \\ x^2-(x-1)^2-4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=x-1 \\ x^2-x^2+2x-1-4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=x-1 \\ 2x=5 \end{cases}$
- L' **equazione risolvente del sistema** in questo caso è l'equazione di primo grado $2x+5=0$ , la cui soluzione è $x=\dfrac{5}{2}$ .
- Si sostituisce il valore trovato nell'altra equazione e troviamo la soluzione del sistema che in questo caso è unica: $\begin{cases} y=x-1 \\ 2x=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=\dfrac{5}{2}-1=\dfrac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \left(\dfrac{5}{2};\dfrac{3}{2}\right)$

**Conclusione**

- Se l'equazione risolvente è di **secondo grado,** in base al discriminante abbiamo:
  - $\Delta < 0$ : l'equazione risolvente è impossibile: in questo caso anche il sistema risulta essere impossibile.
  - $\Delta = 0$ : l'equazione risolvente ha due soluzioni coincidenti: in questo caso il sistema si completa sostituendo il valore trovato nell'equazione di primo grado. Il sistema ha due soluzioni coincidenti. La soluzione è una coppia ordinata di numeri reali.
  - $\Delta > 0$ : l'equazione risolvente ha due soluzioni distinte: si sostituisce allora ciascuno dei due valori trovati nell'equazione di primo grado. Le due coppie ordinate di numeri reali trovate sono entrambe soluzioni del sistema.

- Se l'equazione risolvente risulta essere una equazione di **primo grado** o una **uguaglianza** vera o falsa:
  - se si ottiene una uguaglianza vera, il sistema è indeterminato;
  - se si ottiene una uguaglianza falsa il sistema è impossibile;
  - se l'equazione risolvente è di primo grado determinata, da essa si ricava il valore dell'incognita e si sostituisce tale valore nell'altra equazione. Il sistema ha una sola soluzione (in questo caso non si parla di due soluzioni coincidenti, come nel caso di $\Delta = 0$ ).

*Risolvere i seguenti sistemi di secondo grado*

**6** $\begin{cases} x^2+2y^2=3 \\ x+y=2 \end{cases}$ R. $(1;1)\vee\left(\frac{5}{3};\frac{1}{3}\right)$ $\begin{cases} 3x^2-4y^2-x=0 \\ x-2y=1 \end{cases}$ R. $(-1;-1)\vee\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$

**7** $\begin{cases} 4x^2+2y^2-6=0 \\ x=y \end{cases}$ R. $(1;1)\vee(-1;-1)$ $\begin{cases} 2x^2-6xy=x \\ 3x+5y=-2 \end{cases}$ R. $\left(0;-\frac{2}{5}\right)\vee\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{4}\right)$

**8** $\begin{cases} y^2-3y=2xy \\ y=x-3 \end{cases}$ R. $(3;0)\vee(-6;-9)$ $\begin{cases} xy-x^2+2y^2=y-2x \\ x+y=0 \end{cases}$ R. $(0;0)$

**9** $\begin{cases} 5x^2-y^2+4y-2x+2=0 \\ x-y=1 \end{cases}$ R. $\left(-\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right)\vee\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

**10** $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ 4x-3y+7=0 \end{cases}$ R. $(-4;-3)\vee\left(\frac{44}{25};\frac{117}{25}\right)$

**11** $\begin{cases} x+2y=3 \\ x^2-4xy+2y^2+x+y-1=0 \end{cases}$ R. $(1;1)\vee\left(\frac{10}{7};\frac{11}{14}\right)$

**12** $\begin{cases} 3x-y=2 \\ x^2+2xy+y^2=0 \end{cases}$ R. $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

**13** $\begin{cases} x^2-4xy+4y^2-1=0 \\ x=y+2 \end{cases}$ R. $(3;1)\vee(5;3)$

**14** $\begin{cases} x^2-4xy+4y^2-1=0 \\ x=y+2 \end{cases}$ R. $\left(2;-\frac{3}{2}\right)\vee\left(\frac{22}{25};-\frac{89}{50}\right)$

**15** $\begin{cases} 2x^2+xy-7x-2y=-6 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ R. $y=-2x+3 \rightarrow \forall(x,y)\in\mathbb{R}$

**16** $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2-3x+2y=3 \end{cases}$ R. $(0;1)\vee\left(\frac{7}{2};-\frac{5}{2}\right)$

**17** $\begin{cases} x-2y-7=0 \\ x^2-xy=4 \end{cases}$ R. $(1;-3)\vee\left(-8;-\frac{15}{2}\right)$

**18** $\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+y^2-x-10=0 \end{cases}$ R. $(-2;2)\vee\left(\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)$

**19** $\begin{cases} x^2+2y^2-3xy-x+2y-4=0 \\ 2x-3y+4=0 \end{cases}$ R. $(4;4)\vee(-5;-2)$

**20** $\begin{cases} x^2-4y^2=0 \\ 4x-7y=2 \end{cases}$ R. $(4;2)\vee\left(\frac{4}{15};-\frac{2}{15}\right)$

**21** $\begin{cases} x-2y=1 \\ x^2+y^2-2x=1 \end{cases}$ R. $\left(1+\frac{2\sqrt{10}}{5};\frac{\sqrt{10}}{5}\right)\vee\left(1-\frac{2\sqrt{10}}{5};-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$

**22** $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2-2xy-2y-2=0 \end{cases}$ R. $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{4};\frac{3-\sqrt{13}}{4}\right)\vee\left(\frac{1-\sqrt{13}}{4};\frac{3-\sqrt{13}}{4}\right)$

**23** $\begin{cases} 9x^2-12xy+4y^2-2x+6y=8 \\ x-2y=2 \end{cases}$ R. $\left(\frac{-9+\sqrt{241}}{8};\frac{-25+\sqrt{241}}{16}\right)\vee\left(\frac{9+\sqrt{241}}{8};\frac{25+\sqrt{241}}{16}\right)$

**24** $\begin{cases} 3x+y=4 \\ x^2-y^2=1 \end{cases}$ R. $\left(\frac{6-\sqrt{2}}{4};\frac{-2+3\sqrt{2}}{4}\right)\vee\left(\frac{6+\sqrt{2}}{4};\frac{2+3\sqrt{2}}{4}\right)$

**25** $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+3y=10 \end{cases}$ R. $\emptyset$

**26** $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x+y=2 \end{cases}$ R. $(1;1)$

**27** $\begin{cases} 3x+y=2 \\ x^2-y^2=1 \end{cases}$ R. $\emptyset$

### Sistemi di secondo grado letterali

Esempio

Determinare le soluzioni del seguente sistema si secondo grado letterale $\begin{cases} y-k\,x=-2 \\ y-x^2=2 \end{cases}$

L'equazione si risolve come nel caso precedente. Bisognerà nell'equazione risolvente discutere per quali valore del parametro si otterranno soluzioni reali.

- Ricaviamo la y dalla prima equazione e sostituiamo la sua espressione nella seconda equazione: $\begin{cases} y=k\,x-2 \\ k\,x-2-x^2=2 \end{cases} \to \begin{cases} y=k\,x-2 \\ -x^2+k\,x-4=0 \end{cases}$
- Risolviamo l'equazione di secondo grado $-x^2+k\,x-4=0$ equivalente a $x^2-k\,x+4=0$ , con la discussione del parametro k sulla base del segno del discriminante.
$$\Delta=k^2-16 \to \begin{array}{l} \Delta>0 \to k<-4 \vee k>4 \to x_1=\dfrac{k-\sqrt{k^2-16}}{2} \vee x_2=\dfrac{k+\sqrt{k^2-16}}{2} \\ \Delta=0 \to k=-4 \vee k=4 \to x_1=x_2=\dfrac{k}{2} \\ \Delta<0 \to -4<k<4 \end{array}$$
- Sostituiamo i valori della x trovati per i valori del parametro k che ammettono soluzioni reali distinte o coincidenti nell'equazione di primo grado trovando così le soluzioni del sistema. l'equazione di secondo grado trovata nel sistema e operiamo come al solito per trovare la soluzioni:
$$\begin{cases} y-k\,x=-2 \\ y-x^2=2 \end{cases} \text{ se } k\le-4 \vee k\ge4 \to \begin{cases} x_1=\dfrac{k-\sqrt{k^2-16}}{2} \\ y_1=\dfrac{k^2-4-k\sqrt{k^2-16}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\dfrac{k+\sqrt{k^2-16}}{2} \\ y_2=\dfrac{k^2-4+k\sqrt{k^2-16}}{2} \end{cases}$$

*Risolvere i seguenti sistemi, dopo aver eseguito la discussione sul parametro*

**28** $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+y^2=k \end{cases}$ R. se $k \geq \frac{9}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{3-\sqrt{2k-9}}{2} \\ y_1=\frac{3+\sqrt{2k-9}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{3+\sqrt{2k-9}}{2} \\ y_2=\frac{3-\sqrt{2k-9}}{2} \end{cases}$

**29** $\begin{cases} ky+2x=4 \\ xy=2 \end{cases}$ R. se $k \leq 1 \rightarrow \begin{cases} x_1=1-\sqrt{1-k} \\ y_1=-\frac{2}{\sqrt{1-k}-1} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=1+\sqrt{1-k} \\ y_2=\frac{2}{\sqrt{1-k}+1} \end{cases}$

**30** $\begin{cases} y=kx-1 \\ y^2-kx^2+1=0 \end{cases}$ R. se $0<k<1 \vee 1<k \leq 2 \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{k-\sqrt{2\mathrm{k}-k^2}}{k^2-k} \\ y_1=\frac{1-\sqrt{2\mathrm{k}-k^2}}{k-1} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{k+\sqrt{2\mathrm{k}-k^2}}{k^2-k} \\ y_2=\frac{1+\sqrt{2\mathrm{k}-k^2}}{k-1} \end{cases}$

**31** $\begin{cases} y=kx-2k \\ x^2-2y-x=2 \end{cases}$ R. $\forall k \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ y_1=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=2k-1 \\ y_2=2k^2-3k \end{cases}$

**32** $\begin{cases} y-x-2=0 \\ 4ky+4x^2+9=0 \end{cases}$

R. se $k \leq -1 \vee k \geq 9 \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-k-\sqrt{k^2-8k-9}}{2} \\ y_1=\frac{-k+4-\sqrt{k^2-8k-9}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{-k+\sqrt{k^2-8k-9}}{2} \\ y_2=\frac{-k+4+\sqrt{k^2-8k-9}}{2} \end{cases}$

**33** $\begin{cases} y=x+k \\ y=3x^2+2x \end{cases}$ R. se $k \geq -\frac{1}{12} \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-1-\sqrt{12\mathrm{k}+1}}{6} \\ y_1=\frac{6k-1-\sqrt{12\mathrm{k}+1}}{6} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{-1+\sqrt{12\mathrm{k}+1}}{6} \\ y_1=\frac{6k-1+\sqrt{12\mathrm{k}+1}}{6} \end{cases}$

**34** $\begin{cases} y=-x+k \\ x^2-y^2-1=0 \end{cases}$ R. se $-\sqrt{2} \leq k \leq \sqrt{2} \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{k-\sqrt{2-k^2}}{2} \\ y_1=\frac{k+\sqrt{2-k^2}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{k+\sqrt{2-k^2}}{2} \\ y_2=\frac{k-\sqrt{2-k^2}}{2} \end{cases}$

**35** $\begin{cases} y=x+2 \\ y+x^2-k=0 \end{cases}$ R. se $k \geq \frac{7}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-1-\sqrt{4k-7}}{2} \\ y_1=\frac{3-\sqrt{4k-7}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{-1+\sqrt{4k-7}}{2} \\ y_2=\frac{3+\sqrt{4k-7}}{2} \end{cases}$

**36** $\begin{cases} y+x-k=0 \\ xy+2kx-3\mathrm{ky}-6k^2=0 \end{cases}$ R. $\forall k \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} x_1=x_2=3k \\ y_1=y_2=-2k \end{cases}$

**37** $\begin{cases} y-x+k=0 \\ y-x^2+4x-3=0 \end{cases}$ R. se $k \leq \frac{13}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{5-\sqrt{13-4k}}{2} \\ y_1=\frac{5-2k-\sqrt{13-4k}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{5+\sqrt{13-4k}}{2} \\ y_1=\frac{5-2k+\sqrt{13-4k}}{2} \end{cases}$

### Sistemi di secondo grado frazionari

Esempio

Determinare le soluzioni del seguente sistema frazionario: $\begin{cases} 2x-y=2 \\ \dfrac{x}{y+2}=\dfrac{x}{2y+5} \end{cases}$ .

Il sistema dà origine a un'equazione di secondo grado. Nel caso dei sistemi frazionari occorre procedere alla definizione del campo di esistenza dell'equazione frazionaria, discutendo i denominatori della equazione.

- Determiniamo le condizioni di esistenza dell'equazione frazionaria: $C.E.\ y\neq -2 \wedge y\neq -\dfrac{5}{2}$
- Trasformiamo l'equazione frazionaria nella sua forma canonica di equazione intera
  $\dfrac{x}{y+2}=\dfrac{x}{2y+5} \rightarrow x\cdot(2y+5)-x\cdot(y+2)=0 \rightarrow 2xy+5x-xy-2x=0 \rightarrow xy+3x=0$
- Sostituiamo l'equazione di secondo grado trovata nel sistema e operiamo come al solito per trovare la soluzioni: $\begin{cases} y=2x-2 \\ xy+3x=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2x-2 \\ x(2x-2)+3x=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2x-2 \\ 2x^2+x=0 \end{cases}$

  $2x^2+x=0$ è l'equazione risolvente del sistema con soluzioni $x_1=0 \vee x_2=\dfrac{1}{2}$

  sostituiamo le soluzioni trovate nell'equazione di primo grado ottenendo le soluzioni del sistema

  $\begin{cases} y=2x-2 \\ 2x^2+x=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ y_1=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\dfrac{1}{2} \text{¿} \\ y_2=-1 \end{cases} \rightarrow (0;-2) \vee \left(\dfrac{1}{2};-1\right)$
- La soluzione $(0;-2)$ non soddisfa le C.E. . Il sistema ha soluzione $\left(\dfrac{1}{2};-1\right)$ .

*Trova le soluzioni dei seguenti sistemi frazionari*

**38** $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ \dfrac{x+2y}{x-1}=2 \end{cases}$ R. $\left[C.E.\ x\neq 1 \rightarrow (2;0)\vee\left(-\dfrac{6}{5};-\dfrac{8}{5}\right)\right]$

**39** $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{x-y}=4 \\ x^2+y^2+3x-2y=1 \end{cases}$ R. $\left[C.E.\ x\neq y \rightarrow \left(\dfrac{2}{5};\dfrac{1}{5}\right)\vee(-2;-1)\right]$

**40** $\begin{cases} \dfrac{2x+y}{x+2y}=3 \\ xy+3y=1 \end{cases}$ R. $[C.E.\ x\neq -2y \rightarrow \emptyset]$

**41** $\begin{cases} \dfrac{3x-2y}{x}=\dfrac{1-x}{y-1} \\ 2x-y=1 \end{cases}$ R. $[C.E.\ x\neq 0 \wedge y\neq 1 \rightarrow (4;7)]$

**42** $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-2}=y+\dfrac{1}{3} \\ y=2x+2 \end{cases}$ R. $\left[C.E.\ x\neq 2 \rightarrow (-1;0)\vee\left(\dfrac{10}{3};\dfrac{26}{3}\right)\right]$

**43** $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{y-2}=\dfrac{y-1}{x+1} \\ 2x+2y=3 \end{cases}$ R. $\left[C.E.\ x\neq -1 \wedge y\neq 2 \rightarrow \left(-\dfrac{5}{2};4\right)\right]$

**44** $\begin{cases} \dfrac{y-1}{x+y}=x \\ x-y=0 \end{cases}$ R. $[C.E.\ x\neq -y \rightarrow \emptyset]$

**45** $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2y-1}=y \\ 2y-x=-4 \end{cases}$ R. $\left[C.E.\ y\neq \dfrac{1}{2} \rightarrow (2;-1)\vee\left(9;\dfrac{5}{2}\right)\right]$

### Sistemi di secondo grado in tre incognite

Quanto detto si può estendere ai sistemi di secondo grado di tre o più equazioni con altrettante incognite. Per risolvere uno di tali sistemi si cercherà, operando successive sostituzioni ricavabili dalle equazioni di primo grado, di eliminare dall'equazione di secondo grado tutte le incognite tranne una. Si otterrà così, in genere, un'equazione di secondo grado (equazione risolvente del sistema).

A partire dalle eventuali soluzioni di tale equazione, si determineranno poi le soluzioni del sistema.

Esempio

Determinare l'insieme soluzione del sistema di secondo grado $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ 3x+4y-2z=1 \\ xy-y^2+z-5y=0 \end{cases}$

- Isoliamo una delle due incognite nell'equazione di primo grado, e sostituiamo l'espressione a destra dell'uguale nelle altre equazioni a ogni occorrenza dell'incognita isolata.
$$\begin{cases} z=2x+y \\ 3x+4y-2(2x+y)=1 \\ xy-y^2+(2x+y)-5y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=2x+y \\ 3x+4y-4x-2y-1=0 \\ xy-y^2+2x-4y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=2x+y \\ -x+2y-1=0 \\ xy-y^2+2x-4y=0 \end{cases}$$
- Ricaviamo x dalla seconda equazione e la sostituiamo nelle altre
$$\begin{cases} z=2(2y-1)+y \\ x=2y-1 \\ 2y^2-y-y^2+4y-2-4y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=5y-2 \\ x=2y-1 \\ y^2-y-2=0 \end{cases}$$
- L'equazione $y^2-y-2=0$ è l'equazione risolvente del sistema le cui soluzioni sono $y_1=2 \vee y_2=-1$
- Si sostituiscono i valori trovati per la y nelle altre equazioni per trovare i valori corrispondenti della x e della z.
$$\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ 3x+4y-2z=1 \\ xy-y^2+z-5y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \begin{cases} z=5(2)-2=8 \\ x=2(2)-1=3 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} z=5(-1)-2=-7 \\ x=2(-1)-1=-3 \\ y=-1 \end{cases} \end{matrix} \rightarrow (x_1;y_1;z_1)\vee(x_2;y_2;z_2) \rightarrow (3;2;8)\vee(-3;-1;-7)$$

*Risolvere i seguenti sistemi di secondo grado in tre incognite*

**46** $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+3z=9 \\ x^2-y+z=12 \end{cases}$ R. $\left(-4;\frac{25}{2};\frac{17}{2}\right)\vee\left(3;-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$

**47** $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y+z=0 \\ x^2+xy-z=0 \end{cases}$ R. $(-1;-2;3)\vee\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0\right)$

**48** $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y+3z=9 \\ x^2-y+z^2=1 \end{cases}$ R. $\emptyset$

**49** $\begin{cases} x-3y-z=-4 \\ 3x+2y+z=6 \\ 4x^2+2xz+y^2=6 \end{cases}$ R. $(1;2;-1)$

**50** $\begin{cases} x-y-z=-1 \\ x+y+z=1 \\ x+y^2+z^2=32 \end{cases}$ R. $\left(0;\frac{3\sqrt{7}+1}{2};-\frac{3\sqrt{7}-1}{2}\right)\vee\left(0;-\frac{3\sqrt{7}-1}{2};\frac{3\sqrt{7}+1}{2}\right)$

**51** $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x-y+z=0 \\ x^2-y+z=3 \end{cases}$ infinite soluzioni

**52** $\begin{cases} x-y+2z=3 \\ 2x-2y+z=1 \\ x^2-y^2+z=12 \end{cases}$ R. $\left(-\frac{47}{3};-\frac{46}{3};\frac{5}{3}\right)$

**53** $\begin{cases} 2x-3y=-3 \\ 5y+2z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$ R. $\emptyset$

**54** $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ x+2y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=29 \end{cases}$ R. $(5;0;-2)\vee(-2;0;5)$

## ►2. Sistemi simmetrici

Un sistema di due equazioni in due incognite è detto ***simmetrico*** se rimane invariato scambiando le incognite.

Esempio: consideriamo il sistema di secondo grado: $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2+3xy+5=0 \end{cases}$. Se scambiamo la $x$ con la $y$ otteniamo $\begin{cases} y+x=1 \\ y^2+x^2+3yx+5=0 \end{cases}$ che per la proprietà commutativa della addizione e del prodotto è identico al precedente. In questo caso le soluzioni del sistema sono $\begin{cases} x_1=-2 \\ y_1=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=3 \\ y_2=-2 \end{cases}$ e come si può notare la $x$ e la $y$ vengono scambiate nella soluzione.

Osservazione: Se il sistema è simmetrico trovata una soluzione del sistema otteniamo la simmetrica assegnando il valore trovato per la x alla y e viceversa.

### Sistemi simmetrici di secondo grado

Consideriamo il sistema $\begin{cases} x+y=s \\ x\,y=p \end{cases}$

Per risolvere questo sistema è sufficiente ricordare che, nell'equazione di secondo grado con coefficiente direttivo uguale a 1 del tipo $x^2+bx+c=0$, *la somma delle radici è uguale all'opposto del coefficiente di primo grado, mentre il prodotto è uguale al termine noto*; in sostanza, basta risolvere la seguente equazione, detta ***equazione risolvente:*** $\boldsymbol{t^2-st+p=0}$. In base al segno del discriminante abbiamo:

- $\Delta>0$ se $t_1$ e $t_2$ sono le soluzioni dell'equazione risolvente, il sistema iniziale ammette le soluzioni: $\begin{cases} x_1=t_1 \\ y_1=t_2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=t_2 \\ y_2=t_1 \end{cases}$
- $\Delta=0$ l'equazione risolvente ha due radici reali coincidenti $t_1=t_2$. Anche le soluzioni del sistema saranno due soluzioni coincidenti $\begin{cases} x_1=t_1 \\ y_1=t_1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=t_1 \\ y_2=t_1 \end{cases}$
- $\Delta<0$ l'equazione non ammette soluzioni reali. Il sistema è impossibile.

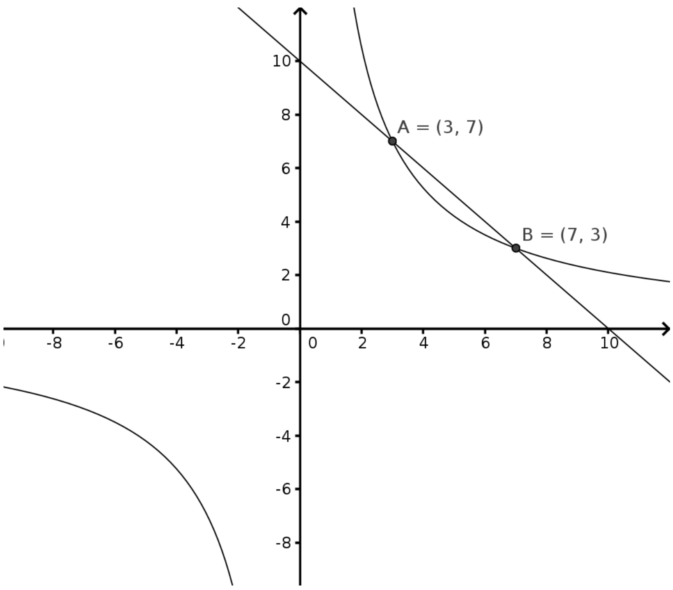
Il sistema $\begin{cases} x+y=s \\ x\,y=p \end{cases}$ è detto **sistema simmetrico fondamentale**.

Esempio

■ $\begin{cases} x+y=10 \\ x\,y=21 \end{cases}$

- Otteniamo l'equazione risolvente $t^2-10t+21=0$
- Troviamo le soluzioni dell'equazione risolvente: $t_1=3 \vee t_2=7$
- Le soluzioni del sistema sono le seguenti: $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=7 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=7 \\ y_2=3 \end{cases}$.

Possiamo interpretare i risultati ottenuti nel piano cartesiano: la retta di equazione $x+y=10$ interseca l'iperbole equilatera $xy=21$ nei due punti $A(7;3)$ e $B(3;7)$.

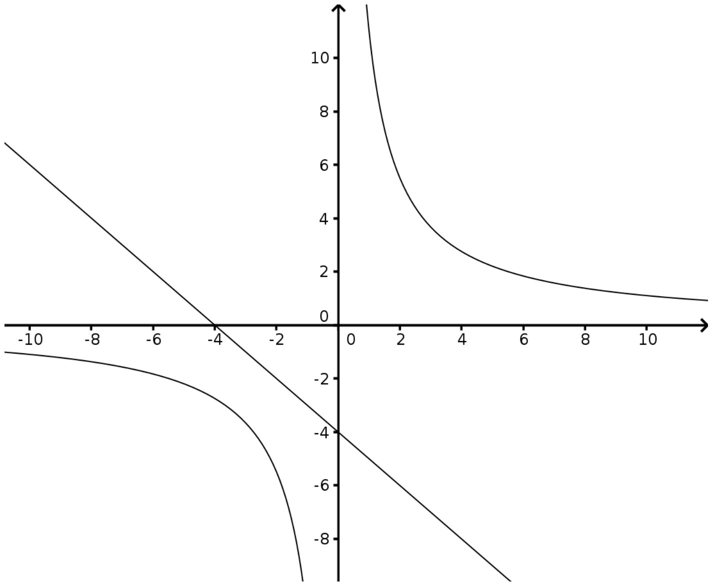


Esempio

■ $\begin{cases} x+y=-4 \\ x\,y=11 \end{cases}$

- Otteniamo l'equazione risolvente $t^2+4t+11=0$
- L'equazione risolvente ha discriminante negativo e non ha soluzioni reali
- Il sistema è impossibile

Interpretando la situazione nel piano cartesiano, possiamo osservare che la retta $x+y=-4$ non interseca l'iperbole equilatera $xy=11$.




*Risolvere i seguenti sistemi simmetrici*

**55** $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$

**56** $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=7 \end{cases}$ R. $\emptyset$

**57** $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

**58** $\begin{cases} x+y=-5 \\ xy=-6 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-6 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-6 \\ y=1 \end{cases}$

**59** $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=-4 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases}$

**60** $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

**61** $\begin{cases} x+y=-4 \\ xy=4 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$

**62** $\begin{cases} x+y=6 \\ xy=9 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$

**63** $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=10 \end{cases}$ R. $\emptyset$

**64** $\begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$

**65** $\begin{cases} x+y=12 \\ xy=-13 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=13 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=13 \end{cases}$

**66** $\begin{cases} x+y=-5 \\ xy=-14 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=-7 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-7 \\ y=2 \end{cases}$

**67** $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=-14 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=7 \\ y=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=7 \end{cases}$

**68** $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=2 \end{cases}$ R. $\emptyset$

**69** $\begin{cases} x+y=\frac{1}{4} \\ xy=-\frac{3}{8} \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\frac{3}{4} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{3}{4} \end{cases}$

**70** $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$

**71** $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-10 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1+\sqrt{11} \\ y=1-\sqrt{11} \end{cases} \vee \begin{cases} x=1-\sqrt{11} \\ y=1+\sqrt{11} \end{cases}$

**72** $\begin{cases} x+y=-5 \\ xy=2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\frac{-5+\sqrt{17}}{2} \\ y=\frac{-5-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{-5-\sqrt{17}}{2} \\ y=\frac{-5+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$

**73** $\begin{cases} x+y=\frac{4}{3} \\ xy=-\frac{1}{2} \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\frac{4+\sqrt{34}}{6} \\ y=\frac{4-\sqrt{34}}{6} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{4-\sqrt{34}}{6} \\ y=\frac{4+\sqrt{34}}{6} \end{cases}$

**74** $\begin{cases} x+y=\frac{5}{2} \\ xy=-\frac{7}{2} \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\frac{7}{2} \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{7}{2} \end{cases}$

**75** $\begin{cases} x+y=\frac{5}{2} \\ xy=-\frac{9}{2} \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\frac{5+\sqrt{97}}{4} \\ y=\frac{5-\sqrt{97}}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{5-\sqrt{97}}{4} \\ y=\frac{5+\sqrt{97}}{4} \end{cases}$

**76** $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-\frac{1}{3} \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1+\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y=1-\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x=1-\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y=1+\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

**77** $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-3 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ y=\frac{1-\sqrt{13}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{1-\sqrt{13}}{2} \\ y=\frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$

**78** $\begin{cases} x+y=\frac{6}{5} \\ xy=\frac{9}{25} \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\frac{3}{5} \\ y=\frac{3}{5} \end{cases}$

**79** $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=-50 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2+3\sqrt{6} \\ y=2-3\sqrt{6} \end{cases} \vee \begin{cases} x=2-3\sqrt{6} \\ y=2+3\sqrt{6} \end{cases}$

**80** $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=50 \end{cases}$ R. $\emptyset$

### Sistemi simmetrici riconducibili al sistema simmetrico fondamentale

In questa categoria rientrano i sistemi simmetrici che, mediante artifici algebrici, possono essere trasformati, in modo equivalente, in sistemi simmetrici del tipo precedente.

Esempio

Verificare che il sistema $\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2+bx+by=c \end{cases}$ è equivalente al sistema $\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$

È possibile trasformare il sistema appena scritto in un sistema simmetrico fondamentale: vediamo ora come.

- Ricordando l'identità $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$, il sistema può essere riscritto così:
$\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2+bx+by=c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=a \\ (x+y)^2-2xy+b(x+y)=c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=a \\ a^2-2xy+ba=c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=a \\ xy=\dfrac{a^2+ab-c}{2} \end{cases}$
- Posto $a=s$ e $p=\dfrac{a^2+ab-c}{2}$ i sistemi $\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2+bx+by=c \end{cases}$ e $\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$ risultano equivalenti.

Di seguito vengono presentati vari esempi di sistemi simmetrici che possono essere risolti con questi metodi.

Esempio

■ $\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

- Ricordando l'identità $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$, il sistema può essere riscritto così:
$\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ (x+y)^2-2xy=25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ (7)^2-2xy=25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ -2xy=25-49 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases}$
- I sistemi $\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ e $\begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases}$ sono equivalenti, risolviamo il sistema simmetrico fondamentale.
- Otteniamo l'equazione risolvente $t^2-7t+12=0$
- Troviamo le soluzioni dell'equazione risolvente: $t_1=3 \vee t_2=4$
- Le soluzioni del sistema sono le seguenti: $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=4 \\ y_2=3 \end{cases}$

**81** Determinare le soluzioni del seguente sistema: $\begin{cases} x+y=-12 \\ x^2+y^2=72 \end{cases}$

- Ricordando l'identità $x^2+y^2=\ldots\ldots\ldots\ldots$, il sistema può essere riscritto così:
$\begin{cases} x+y=-12 \\ x^2+y^2=72 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=-12 \\ (\ldots\ldots)^2-2xy=\ldots\ldots \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=-12 \\ -2xy=\ldots\ldots-\ldots\ldots \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=-12 \\ xy=\ldots\ldots \end{cases}$
- I sistemi $\begin{cases} x+y=-12 \\ x^2+y^2=72 \end{cases}$ e $\begin{cases} x+y=-12 \\ xy=36 \end{cases}$ sono equivalenti e a questo punto possiamo risolvere l'ultimo sistema scritto, che risulta essere simmetrico.
- Otteniamo l'equazione risolvente $\ldots\ldots\ldots\ldots$
- Troviamo le soluzioni dell'equazione risolvente: $t_1=t_2=\ldots\ldots$
- Le soluzioni del sistema sono le seguenti: $\begin{cases} x_1=\ldots\ldots \\ y_1=\ldots\ldots \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\ldots\ldots \\ y_2=\ldots\ldots \end{cases}$

Esempio

■ $\begin{cases} -3x-3y=-5 \\ 2x^2+2y^2=10 \end{cases}$

- Dividendo per(−3) la prima equazione, per 2 la seconda e ricordando l'identità $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ otteniamo:

$$\begin{cases}-3x-3y=-5\\ 2x^2+2y^2=10\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x+y=\dfrac{5}{3}\\ x^2+y^2=5\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x+y=\dfrac{5}{3}\\ (x+y)^2-2xy=5\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x+y=\dfrac{5}{3}\\ \left(\dfrac{5}{3}\right)^2-2xy=5\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x+y=\dfrac{5}{3}\\ xy=-\dfrac{10}{9}\end{cases}$$

- I sistemi $\begin{cases}-3x-3y=-5\\ 2x^2+2y^2=10\end{cases}$ e $\begin{cases}x+y=\dfrac{5}{3}\\ xy=-\dfrac{10}{9}\end{cases}$ sono equivalenti e a questo punto possiamo risolvere l'ultimo sistema scritto.
- Otteniamo l'equazione risolvente $t^2-\frac{5}{3}t-\frac{10}{9}=0$
- Troviamo le soluzioni dell'equazione risolvente: $t_1=\frac{5-\sqrt{65}}{6} \vee t_2=\frac{5+\sqrt{65}}{6}$
- Le soluzioni del sistema sono le seguenti: $\begin{cases}x_1=\dfrac{5-\sqrt{65}}{6}\\ y_1=\dfrac{5+\sqrt{65}}{6}\end{cases} \vee \begin{cases}x_2=\dfrac{5+\sqrt{65}}{6}\\ y_2=\dfrac{5-\sqrt{65}}{6}\end{cases}$

*Risolvere i seguenti sistemi riconducibili al sistema simmetrico fondamentale*

**82** $\begin{cases}x+y=1\\ x^2+y^2=1\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases} \vee \begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$

**83** $\begin{cases}x+y=2\\ x^2+y^2=2\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$

**84** $\begin{cases}x+y=3\\ x^2+y^2=5\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases} \vee \begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$

**85** $\begin{cases}x+y=2\\ x^2+y^2+x+y=1\end{cases}$ R. $\emptyset$

**86** $\begin{cases}2x+2y=-2\\ (y-x)^2-xy=101\end{cases}$ R. $\begin{cases}x_1=-5\\ y_1=4\end{cases} \vee \begin{cases}x_2=4\\ y_2=-5\end{cases}$

**87** $\begin{cases}-4x-4y=-44\\ 2x^2+2y^2-3xy=74\end{cases}$. R. $\begin{cases}x_1=8\\ y_1=3\end{cases} \vee \begin{cases}x_2=3\\ y_2=8\end{cases}$

**88** $\begin{cases}x+y=3\\ x^2+y^2-4x-4y=5\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=4\\ y=-1\end{cases} \vee \begin{cases}x=-1\\ y=4\end{cases}$

**89** $\begin{cases}x+y=4\\ x^2+y^2=8\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}$

**90** $\begin{cases}x+y=7\\ x^2+y^2=29\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=2\\ y=5\end{cases} \vee \begin{cases}x=5\\ y=2\end{cases}$

**91** $\begin{cases}2x+2y=-2\\ 4x^2+4y^2=52\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=2\\ y=-3\end{cases} \vee \begin{cases}x=-3\\ y=2\end{cases}$

**92** $\begin{cases}\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{3}{4}\\ 3x^2+3y^2=\dfrac{15}{4}\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=1\\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases} \vee \begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ y=1\end{cases}$

**93** $\begin{cases}x+y=2\\ x^2+y^2-3xy=4\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=0\\ y=2\end{cases} \vee \begin{cases}x=2\\ y=0\end{cases}$

**94** $\begin{cases}x+y=-3\\ x^2+y^2-5xy=37\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=1\\ y=-4\end{cases} \vee \begin{cases}x=-4\\ y=1\end{cases}$

**95** $\begin{cases} x+y=-6 \\ x^2+y^2-xy=84 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=-8 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-8 \\ y=2 \end{cases}$

**96** $\begin{cases} x+y=-5 \\ x^2+y^2-4xy+5x+5y=36 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-6 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-6 \\ y=1 \end{cases}$

**97** $\begin{cases} x+y=-7 \\ x^2+y^2-6xy-3x-3y=44 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{13}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\frac{13}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$

**98** $\begin{cases} x^2+y^2=-1 \\ x+y=6 \end{cases}$ R. $\emptyset$

**99** $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y=-7 \end{cases}$ R. $\emptyset$

**100** $\begin{cases} x^2+y^2=18 \\ x+y=6 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$

**101** $\begin{cases} x^2+y^2-4xy-6x-6y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ y=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ y=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

**102** $\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ x+y=3 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\frac{3+\sqrt{7}}{2} \\ y=\frac{3-\sqrt{7}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{3-\sqrt{7}}{2} \\ y=\frac{3+\sqrt{7}}{2} \end{cases}$

### Sistemi non simmetrici riconducibili a sistemi simmetrici

Rientrano in questa classe i sistemi che, pur non essendo simmetrici, possono essere trasformati, mediante opportune sostituzioni, in sistemi simmetrici. Naturalmente questi sistemi si possono risolvere anche con la procedura solita di sostituzione per i sistemi di secondo grado.

<u>Esempio</u>

Determinare le soluzioni del sistema: $\begin{cases} x-y=8 \\ xy=-15 \end{cases}$

- I° passo: mediante la sostituzione $y'=-y$ otteniamo $\begin{cases} x+y'=8 \\ xy'=15 \end{cases}$ che è un sistema simmetrico fondamentale
- II° passo: risolviamo il sistema simmetrico $\begin{cases} x+y'=8 \\ xy'=15 \end{cases}$ con la procedura nota.. Le soluzione sono le seguenti: $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1'=5 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=5 \\ y_2'=3 \end{cases}$
- III° passo: dall'uguaglianza $y'=-y \rightarrow y=-y'$ otteniamo le soluzioni del sistema iniziale $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=-5 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=5 \\ y_2=-3 \end{cases}$.

<u>Esempio</u>

Determinare le soluzioni del sistema cercando di trasformalo in un sistema simmetrico e con la procedura di sostituzione per i sistemi di secondo grado: $\begin{cases} 2x-3y=8 \\ xy=2 \end{cases}$

| Riduzione a un sistema simmetrico | Procedura di sostituzione |
|---|---|
| • Mediante la sostituzione $x'=2x$ e $y'=-3y \rightarrow x=\frac{x'}{2}$ e $y=-\frac{y'}{3}$ otteniamo $\begin{cases} x'+y'=8 \\ \frac{x'}{2}\cdot\left(-\frac{y'}{3}\right)=2 \end{cases}$ equivalente a $\begin{cases} x'+y'=8 \\ x'y'=-12 \end{cases}$ che è un sistema simmetrico fondamentale. | • Isoliamo una delle due incognite nell'equazione di primo grado e la sostituiamo nell'altra equazione $\begin{cases} y=\frac{2x-8}{3} \\ xy=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=\frac{2x-8}{3} \\ x\left(\frac{2x-8}{3}\right)=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=\frac{2x-8}{3} \\ 2x^2-8x-6=0 \end{cases}$ |
| • Risolviamo il sistema simmetrico $\begin{cases} x'+y'=8 \\ x'y'=-12 \end{cases}$ con la procedura nota.. Le soluzione sono le seguenti: $\begin{cases} x_1'=4-2\sqrt{7} \\ y_1'=4+2\sqrt{7} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2'=4+2\sqrt{7} \\ y_2'=4-2\sqrt{7} \end{cases}$ | • Risolvere l'equazione di secondo grado in una sola incognita: $2x^2-8x-6=0$ equivalente a $x^2-4x-3=0$ . Applicando la formula ridotta otteniamo: $x_1=2-\sqrt{7} \vee x_2=2+\sqrt{7}$ |
| • Dalle uguaglianza $x=\frac{x'}{2}$ e $y=-\frac{y'}{3}$ otteniamo le soluzioni del sistema iniziale $\begin{cases} x_1=\frac{4-2\sqrt{7}}{2}=2-\sqrt{7} \\ y_1=\frac{-4-2\sqrt{7}}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{4+2\sqrt{7}}{2}=2+\sqrt{7} \\ y_2=\frac{-4+2\sqrt{7}}{3} \end{cases}$ | • Si sostituiscono i valori trovati per la $x$ nella equazione di primo grado per trovare i valori corrispondenti della $y$ $\begin{cases} x_1=2-\sqrt{7} \\ y_1=\frac{-4-2\sqrt{7}}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=2+\sqrt{7} \\ y_2=\frac{-4+2\sqrt{7}}{3} \end{cases}$ |

**103** $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ R. (-1; -2), (2;1)

**104** $\begin{cases} -2x+y=3 \\ xy=1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=\frac{-3-\sqrt{17}}{4} \\ y_1=\frac{3-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{-3+\sqrt{17}}{4} \\ y_2=\frac{3+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$

### Sistemi simmetrici di grado superiore al secondo

Introduciamo le seguenti trasformazioni di formule dette di Waring, dal nome del matematico che le ha formulate per primo, che potranno essere utili per risolvere i sistemi simmetrici. Con tali formule, si possono trasformare le potenze di un binomio in relazioni tra somme e prodotti delle due variabili che lo compongono.

Indicate come $s$ somma delle variabili e $p$ il loro prodotto queste sono le prime formule fino alla potenza quinta.

- $\boldsymbol{a^2+b^2}=(a+b)^2-2ab=\boldsymbol{s^2-2p}$
- $\boldsymbol{a^3+b^3}=(a+b)^3-3a^2b-3ab^2=(a+b)^3-3ab(a+b)=\boldsymbol{s^3-3ps}$
- $\boldsymbol{a^4+b^4}=(a+b)^4-4a^3b-6a^2b^2-4ab^3=(a+b)^4-6a^2b^2-4ab(a^2+b^2)=$
  $=s^4-6\mathrm{p}^2-4\mathrm{p}(s^2-2p)=\boldsymbol{s^4-4ps^2+2p^2}$
- $\boldsymbol{a^5+b^5}=(a+b)^5-5a^4b-10a^3b^2-10a^2b^3-5ab^4=(a+b)^5-5ab(a^3+b^3)-10a^2b^2(a+b)=$
  $=s^5-5\mathrm{p}(s^3-3ps)-10sp^2=\boldsymbol{s^5-5ps^3+5p^2s}$

<u>Esempio</u>

- ■ Risolvere il seguente sistema simmetrico di **terzo grado** $\begin{cases} x+y=1 \\ x^3+y^3-2xy=3 \end{cases}$
- Ricordando l'identità $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ , il sistema può essere riscritto così:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ (x+y)^3-3xy(x+y)-2xy=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ (1)^3-3xy(1)-2xy=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ 1-5xy=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=-\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

- I sistemi $\begin{cases} x+y=1 \\ x^3+y^3-2xy=3 \end{cases}$ e $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-\dfrac{2}{5} \end{cases}$ sono equivalenti, risolviamo il sistema simmetrico fondamentale.
- Otteniamo l'equazione risolvente $t^2-t-\dfrac{2}{5}=0 \rightarrow 5t^2-5t-2=0$
- Troviamo le soluzioni dell'equazione risolvente: $t_1=\dfrac{5-\sqrt{65}}{10} \vee t_2=\dfrac{5+\sqrt{65}}{10}$
- Le soluzioni del sistema sono le seguenti: $\begin{cases} x_1=\dfrac{5-\sqrt{65}}{10} \\ y_1=\dfrac{5+\sqrt{65}}{10} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\dfrac{5+\sqrt{65}}{10} \\ y_2=\dfrac{5-\sqrt{65}}{10} \end{cases}$

*Risolvere i seguenti sistemi simmetrici di terzo grado*

**105** $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^3+y^3=-1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=0 \end{cases}$

**106** $\begin{cases} x+y=-2 \\ x^3+y^3-xy=-5 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=\dfrac{-5-\sqrt{10}}{5} \\ y_1=\dfrac{-5+\sqrt{10}}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\dfrac{-5+\sqrt{10}}{5} \\ y_2=\dfrac{-5-\sqrt{10}}{5} \end{cases}$

**107** $\begin{cases} x+y=-6 \\ x^3+y^3=-342 \end{cases}$ R. (1;-7), (-7;1)

**108** $\begin{cases} x+y=8 \\ x^3+y^3=152 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=5 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=5 \\ y_2=3 \end{cases}$

<u>Esempio</u>

- Risolvere il seguente sistema simmetrico di **quarto grado** $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^4+y^4=\dfrac{7}{2} \end{cases}$
- Ricordando l'identità $x^4+y^4=(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2$ , il sistema può essere riscritto così:
$$\begin{cases} x+y=-1 \\ (x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2=\dfrac{7}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ (-1)^4-4xy(-1)^2+2x^2y^2=\dfrac{7}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ 2x^2y^2-4xy-\dfrac{5}{2}=0 \end{cases}$$
- I sistemi $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^4+y^4=\dfrac{7}{2} \end{cases}$ e $\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x^2y^2-4xy-\dfrac{5}{2}=0 \end{cases}$ sono equivalenti, ma quello trasformato non corrisponde al sistema simmetrico fondamentale. Introduciamo l'incognita ausiliaria $u=xy$ . L'equazione $2x^2y^2-4xy-\dfrac{5}{2}=0$ diventa $2u^2-4u-\dfrac{5}{2}=0$ che ha come soluzioni $u_1=-\dfrac{1}{2} \vee u_2=\dfrac{5}{2} \rightarrow xy=-\dfrac{1}{2} \vee xy=\dfrac{5}{2}$ .
- Il sistema di partenza è equivalente all'unione dei due sistemi simmetrici fondamentali $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x+y=-1 \\ xy=\dfrac{5}{2} \end{cases}$

- Troviamo le soluzioni del sistema $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-\frac{1}{2} \end{cases}$ con equazione risolvente $t^2+t-\frac{1}{2}=0$ :

  $t_1=\frac{-1-\sqrt{3}}{2} \vee t_2=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ con soluzioni $\begin{cases} x_1=\frac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ y_1=\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ y_2=\frac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

- Troviamo le soluzioni del sistema $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=\frac{5}{2} \end{cases}$ con equazione risolvente $t^2+t+\frac{5}{2}=0$

  L'equazione ha $\Delta<0$ e l'insieme soluzione è vuoto. Anche il sistema non ha soluzioni reali.

- Le soluzione del sistema $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^4+y^4=\frac{7}{2} \end{cases}$ sono $\begin{cases} x_1=\frac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ y_1=\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ y_2=\frac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

*Risolvere i seguenti sistemi di quarto grado*

**109** $\begin{cases} x+y=3 \\ x^4+y^4=17 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=1 \end{cases}$

**110** $\begin{cases} x+y=-1 \\ 8x^4+8y^4=41 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=-\frac{3}{2} \\ y_1=\frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{1}{2} \\ y_2=-\frac{3}{2} \end{cases}$

**111** $\begin{cases} x+y=3 \\ x^4+y^4=2 \end{cases}$ R $\emptyset$

**112** $\begin{cases} x+y=5 \\ x^4+y^4=257 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=4 \\ y_2=1 \end{cases}$

<u>Esempio</u>

■ Risolvere il seguente sistema simmetrico di **quarto grado** $\begin{cases} xy=-2 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$

- Ricordando l'identità $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ , il sistema può essere riscritto così:

  $\begin{cases} xy=-2 \\ (x+y)^2-2xy=13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xy=-2 \\ (x+y)^2-2(-2)=13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xy=-2 \\ (x+y)^2=9 \end{cases}$

- Il sistema $\begin{cases} xy=-2 \\ (x+y)^2=9 \end{cases}$ equivalente al sistema di partenza è equivalente all'unione dei due sistemi fondamentali $\begin{cases} xy=-2 \\ x+y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} xy=-2 \\ x+y=-3 \end{cases}$ .

- Risolviamo il sistema $\begin{cases} xy=-2 \\ x+y=3 \end{cases}$ con equazione risolvente $t^2-3t-2=0$ :

  $t_1=\frac{3-\sqrt{17}}{2} \vee t_2=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ con soluzioni $\begin{cases} x_1=\frac{3-\sqrt{17}}{2} \\ y_1=\frac{3+\sqrt{17}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{3+\sqrt{17}}{2} \\ y_2=\frac{3-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$

- Risolviamo il sistema $\begin{cases} xy=-2 \\ x+y=-3 \end{cases}$ con equazione risolvente $t^2+3t-2=0$

con soluzioni $t_1=\frac{-3-\sqrt{17}}{2} \vee t_2=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ $\begin{cases} x_1=\frac{-3-\sqrt{17}}{2} \\ y_2=\frac{-3+\sqrt{17}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{-3+\sqrt{17}}{2} \\ y_2=\frac{-3-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$

- Le soluzioni del sistema $\begin{cases} xy=-2 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$ sono

$$\begin{cases} x_1=\frac{3-\sqrt{17}}{2} \\ y_1=\frac{3+\sqrt{17}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{3+\sqrt{17}}{2} \\ y_2=\frac{3-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_3=\frac{-3-\sqrt{17}}{2} \\ y_3=\frac{-3+\sqrt{17}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_4=\frac{-3+\sqrt{17}}{2} \\ y_4=\frac{-3-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

*Risolvere i seguenti sistemi simmetrici di quarto grado*

**113** $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x\,y=2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$

**114** $\begin{cases} x^2+y^2=34 \\ x\,y=15 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases} \vee \begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=-5 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-5 \\ y=-3 \end{cases}$

**115** $\begin{cases} x\,y=1 \\ x^2+y^2+3\,x\,y=5 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

**116** $\begin{cases} x\,y=12 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \end{cases}$

**117** $\begin{cases} x\,y=1 \\ x^2+y^2-4\,x\,y=-2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

**118** $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x\,y=3 \end{cases}$ R. $\emptyset$

**119** $\begin{cases} x^2+y^2=18 \\ x\,y=9 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \end{cases}$

**120** $\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ x\,y=-3 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{14}+\sqrt{2}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2} \\ y=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{\sqrt{14}+\sqrt{2}}{2} \\ y=-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2} \end{cases}$

**121** $\begin{cases} x^2+y^2+3\,x\,y=10 \\ x\,y=6 \end{cases}$ R. $\emptyset$

**122** $\begin{cases} x^2+y^2+5\,x\,y-2\,x-2\,y=3 \\ x\,y=1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

**123** $\begin{cases} x^2+y^2-6\,x\,y+3\,x+3\,y=2 \\ x\,y=2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3+\sqrt{7} \\ y=-3-\sqrt{7} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3-\sqrt{7} \\ y=-3+\sqrt{7} \end{cases}$

**124** $\begin{cases} x^2+y^2+5\,x\,y+x+y=-6 \\ x\,y=-2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$

**125** $\begin{cases} x^2+y^2+5\,x\,y+x+y=-\frac{25}{4} \\ x\,y=-2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\frac{-1+\sqrt{33}}{4} \\ y=-\frac{1+\sqrt{33}}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\frac{1+\sqrt{33}}{4} \\ y=\frac{-1+\sqrt{33}}{4} \end{cases}$

<u>Esempio</u>

- ■ Risolvere il seguente sistema simmetrico di **quinto grado** $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^5+y^5=-211 \end{cases}$
- Ricordando l'identità $x^5+y^5=(x+y)^5-5\,xy(x+y)^3+5\,x^2\,y^2(x+y)$ , il sistema può essere

riscritto in questo modo:
$\begin{cases} x+y=-1 \\ (x+y)^5-5xy(x+y)^3+5x^2y^2(x+y)=-211 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ (-1)^5-5xy(-1)^3+5x^2y^2(-1)=-211 \end{cases} \rightarrow$
$\rightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ -5x^2y^2+5xy+210=0 \end{cases}$

- I sistemi $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^5+y^5=-211 \end{cases}$ e $\begin{cases} x+y=-1 \\ -5x^2y^2+5xy+210=0 \end{cases}$ sono equivalenti, ma quello trasformato non corrisponde al sistema simmetrico fondamentale. Introduciamo l'incognita ausiliaria $u=xy$ . L'equazione $-5x^2y^2+5xy+210=0$ diventa $-5u^2+5u+210=0$ che ha come soluzioni $u_1=-6 \vee u_2=7 \rightarrow xy=-6 \vee xy=7$ .
- Il sistema di partenza è equivalente all'unione dei due sistemi simmetrici fondamentali $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-6 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y=-1 \\ xy=7 \end{cases}$
- Troviamo le soluzioni del sistema $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-6 \end{cases}$ con equazione risolvente $t^2+t-6=0$ :
  $t_1=-3 \vee t_2=2$ con soluzioni $\begin{cases} x_1=-3 \\ y_1=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=-3 \end{cases}$
- Troviamo le soluzioni del sistema $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=7 \end{cases}$ con equazione risolvente $t^2+t+7=0$
  .L'equazione ha $\Delta<0$ e l'insieme soluzione è vuoto. Anche il sistema non ha soluzioni reali.
- Le soluzione del sistema $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^5+y^5=-211 \end{cases}$ sono $\begin{cases} x_1=-3 \\ y_1=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=-3 \end{cases}$

*Risolvere i seguenti sistemi simmetrici di quinto grado*

**126** $\begin{cases} x+y=-\dfrac{1}{3} \\ x^5+y^5=-\dfrac{31}{243} \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=-\dfrac{2}{3} \\ y_1=\dfrac{1}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\dfrac{1}{3} \\ y_2=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$

**127** $\begin{cases} x+y=1 \\ x^5+y^5=-2 \end{cases}$ R $\emptyset$

**128** $\begin{cases} x+y=1 \\ x^5+y^5+7xy=17 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=-1 \\ y_1=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=-1 \end{cases}$

<u>Esempio</u>

Determinare le soluzioni del seguente sistema di <u>sesto grado</u> riconducibile a un sistema simmetrico: $\begin{cases} x^3-y^3=351 \\ xy=-14 \end{cases}$

- Se eleviamo al cubo la seconda equazione otteniamo il sistema equivalente $\begin{cases} x^3-y^3=351 \\ x^3y^3=-2744 \end{cases}$
- Mediante le sostituzioni $u=x^3$ e $v=-y^3$ otteniamo $\begin{cases} u+v=351 \\ u\cdot v=2744 \end{cases}$ che è un sistema simmetrico fondamentale
- Risolviamo il sistema simmetrico $\begin{cases} u+v=351 \\ u\cdot v=2744 \end{cases}$ con la procedura nota.. Le soluzioni sono le seguenti: $\begin{cases} u_1=8 \\ v_1=343 \end{cases} \vee \begin{cases} u_2=343 \\ v_2=8 \end{cases}$
- Dalle uguaglianze $u=x^3 \rightarrow x=\sqrt[3]{v}$ e $v=-y^3 \rightarrow y=-\sqrt[3]{v}$ otteniamo le soluzioni del sistema iniziale $\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=-7 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=7 \\ y_2=-2 \end{cases}$ .

*Risolvi i seguenti sistemi di grado superiore al secondo*

**129** $\begin{cases}x^3+y^3=9\\x+y=3\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\vee\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

**130** $\begin{cases}x^3+y^3=-342\\x+y=-6\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=1\\y=-7\end{cases}\vee\begin{cases}x=-7\\y=1\end{cases}$

**131** $\begin{cases}x^3+y^3=35\\x+y=5\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}\vee\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$

**132** $\begin{cases}x^4+y^4=2\\x+y=0\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}\vee\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$

**133** $\begin{cases}x^4+y^4=17\\x+y=-3\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}\vee\begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}$

**134** $\begin{cases}x^3+y^3=-35\\x\,y=6\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=-2\\y=-3\end{cases}\vee\begin{cases}x=-3\\y=-2\end{cases}$

**135** $\begin{cases}x^3+y^3=-26\\x\,y=-3\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=1\\y=-3\end{cases}\vee\begin{cases}x=-3\\y=1\end{cases}$

**136** $\begin{cases}x^4+y^4=2\\x\,y=1\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}\vee\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

**137** $\begin{cases}x^4+y^4=17\\x\,y=-2\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}\vee\begin{cases}x=-2\\y=1\end{cases}\vee\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}\vee\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$

**138** $\begin{cases}x^5+y^5=64\\x+y=4\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$

**139** $\begin{cases}x^5+y^5=-2882\\x+y=-2\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=3\\y=-5\end{cases}\vee\begin{cases}x=-5\\y=3\end{cases}$

**140** $\begin{cases}x^5+y^5=2\\x+y=0\end{cases}$ R. $\emptyset$

**141** $\begin{cases}x^5+y^5=31\\x\,y=-2\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}\vee\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$

**142** $\begin{cases}x^4+y^4=337\\x\,y=12\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}\vee\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}\vee\begin{cases}x=-3\\y=-4\end{cases}\vee\begin{cases}x=-4\\y=-3\end{cases}$

**143** $\begin{cases}x^3+y^3=\dfrac{511}{8}\\x\,y=-2\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=4\\y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\vee\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\y=4\end{cases}$

## ►3. Sistemi omogenei di secondo grado

Un sistema si dice omogeneo se le equazioni, con l'eccezione dei termini noti, hanno, hanno tutti i termini con lo stesso grado. I sistemi omogenei di secondo grado sono quindi della forma:

$$\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=d \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=d' \end{cases}$$

**Primo caso se d=0 e d' =0**

Il sistema si presenta nella forma $\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=0 \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=0 \end{cases}$

Un sistema di questo tipo ha sempe almeno la soluzione nulla (0; 0).

Per trovare le soluzioni del sistema poniamo $y=tx$

$\begin{cases} ax^2+btx^2+ct^2x^2=0 \\ a'x^2+b'tx^2+c't^2x^2=0 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} x^2(a+bt+ct^2)=0 \\ x^2(a'+b't+c't^2)=0 \end{cases}$

Supponendo $x\neq 0$ possiamo dividere le due equazioni per $x^2$, otteniamo due equazioni nell'incognita t che possiamo risolvere: se le due equazioni ammettono qualche soluzione comune allora il sistema ammette soluzione. Le soluzioni sono del tipo x=k e y=kt, dove t è la soluzione comune di cui si è detto prima.

Va poi analizzato a parte il caso x=0.

<u>Esempio</u>

■ $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ -x^2+5xy-6y^2=0 \end{cases}$

Applichiamo la sostituzione $y=tx$, il sistema diventa $\begin{cases} x^2-3tx^2+2t^2x^2=0 \\ -x^2+5tx^2-6t^2x^2=0 \end{cases}$.

Dividendo per $x^2$ otteniamo $\begin{cases} 1-3t+2t^2=0 \\ 1-5t+6t^2=0 \end{cases}$.

La prima equazione è risolta per $t_1=1\vee t_2=\frac{1}{2}$. La seconda equazione è risolta per $t_1'=\frac{1}{2}\vee t_2'=\frac{1}{3}$

Le due equazioni hanno una radice in comune $t=\frac{1}{2}$. Pertanto oltre alla soluzione (0;0) il sistema ammette infinite soluzioni che possono essere scritte come $\begin{cases} x=k \\ y=\frac{1}{2}k \end{cases}$.

<u>Esempio</u>

■ $\begin{cases} x^2-6xy+8y^2=0 \\ x^2+4xy-5y^2=0 \end{cases}$

Per mezzo della sostituzione y=tx il sistema diventa $\begin{cases} x^2-6tx^2+8t^2x^2=0 \\ x^2+4tx^2-5t^2x^2=0 \end{cases}$

Dividendo per $x^2$ il sistema diventa $\begin{cases} 1-6t+8t^2=0 \\ 1+4t-5t^2=0 \end{cases}$. Risolvendo le due equazioni si trova che non hanno alcuna soluzione in comune, pertanto il sistema ha solo la soluzione nulla (0; 0).

<u>Esempio</u>

■ $\begin{cases} -4x^2-7xy+2y^2=0 \\ 12x^2+21xy-6y^2=0 \end{cases}$

Sostituendo y=tx e dividendo per $x^2$ il sistema diventa $\begin{cases} -4-7t+2t^2=0 \\ 12+21t-6t^2=0 \end{cases}$. Le due equazioni hanno le stesse soluzioni, che sono $t_1=4\,;t_2=-\frac{1}{2}$, infatti puoi osservare che la seeconda equazione si ottiene dalla prima moltiplicandola per -3. Il sistema ammette quindi infinite soluzioni che sono date da

$\begin{cases} x=k \\ y=4k \end{cases}; \begin{cases} x=k' \\ y=-\dfrac{1}{2}k' \end{cases}$. Al variare di k e k' si ottengono tutte le soluzioni del sistema.

**Secondo caso se** $d=0 \wedge d' \neq 0$

Il sistema si presenta nella forma $\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=0 \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=d' \end{cases}$

Ponendo y=tx si ha $\begin{cases} ax^2+btx^2+ct^2x^2=0 \\ a'x^2+b'tx^2+c't^2x^2=d' \end{cases}$.

Dividiamo per $x^2$ la prima equazione si ha $\begin{cases} a+bt+ct^2=0 \\ x^2(a'+b't+c't^2)=d' \end{cases}$

Si risolve la prima equazione nell'incognita t; si sostituiscono i valori trovati nella seconda equazione e si ricavano i valori di x, infine si possono ricavare anche i valori di y.

<u>Esempio</u>

■ $\begin{cases} x^2-xy-6y^2=0 \\ -x^2+2xy-3y^2=-6 \end{cases}$

Sostituendo y=tx il sistema diventa $\begin{cases} 1-t-6t^2=0 \\ x^2(-1+2t-3t^2)=-6 \end{cases}$

La prima equazione ha per soluzioni $t_1=\dfrac{1}{3}$ e $t_2=-\dfrac{1}{2}$.

Sostituendo $t=\dfrac{1}{3}$ nella seconda equazione si ha $x=\pm 3$ da cui $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=1 \end{cases}; \begin{cases} x_2=-3 \\ y_2=-1 \end{cases}$

Sostituendo $t=-\dfrac{1}{2}$ si ottengono le soluzioni $x_1=\dfrac{2\sqrt{66}}{11}$ e $x_2=\dfrac{-2\sqrt{66}}{11}$.

Le soluzioni del sistema sono $\begin{cases} x_3=2\dfrac{\sqrt{66}}{11} \\ y_3=-\dfrac{\sqrt{66}}{11} \end{cases}; \begin{cases} x_4=-2\dfrac{\sqrt{66}}{11} \\ y_4=\dfrac{\sqrt{66}}{11} \end{cases}$

**Terzo caso se** $d \neq 0 \wedge d' \neq 0$

Il sistema si presenta nella forma $\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=d \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=d' \end{cases}$

Ponendo y=tx si ha $\begin{cases} x^2(a+bt+ct^2)=d \\ x^2(a'+b't+c't^2)=d' \end{cases}$

Dividendo membro a membro le due equazioni, otteniamo $\dfrac{a+bt+ct^2}{a'+b't+c't^2}=\dfrac{d}{d'}$

da cui $d'(a+bt+ct^2)=d(a'+b't+c't^2)$ da cui $(cd'-c'd)t^2+(bd'-b'd)t+ad'-a'd=0$
che è una equazione di secondo grado nell'incognita t. Trovate le soluzioni $t_1$ e $t_2$ dobbiamo poi risolvere i sistemi $\begin{cases} y=t_1x \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=d' \end{cases}; \begin{cases} y=t_2x \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=d' \end{cases}$

<u>Esempio</u>

■ $\begin{cases} x^2+3xy-y^2=-68 \\ -2x^2+xy+3y^2=88 \end{cases}$

Sostituendo y=tx il sistema diventa $\begin{cases} x^2(1+3t-t^2)=-68 \\ x^2(-2+t+3t^2)=88 \end{cases}$ da cui $\dfrac{1+3t-t^2}{-2+t+3t^2}=-\dfrac{68}{88}$, da cui l'equazione $29t^2+83t-12=0$. Le soluzioni di quest'ultima equazione sono $t_1=\dfrac{4}{29}; t_2=-3$.

A questo punto dobbiamo risolvere i due sistemi: $\begin{cases} y=\frac{4}{29}x \\ -2x^2+xy+3y^2=88 \end{cases}$ ; $\begin{cases} y=-3x \\ -2x^2+xy+3y^2=88 \end{cases}$

Il primo sistema è impossibile, il secondo ha soluzioni $\begin{cases} x_1=-2 \\ y_1=6 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x_2=2 \\ y_2=-6 \end{cases}$ .

Queste sono le uniche soluzioni del sistema.

*Risolvi i seguenti sistemi simmetrici*

**144** $\begin{cases} x^2-2xy+y^2=0 \\ x^2+3xy-2y^2=0 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

**145** $\begin{cases} 3x^2-2xy-y^2=0 \\ 2x^2+xy-3y^2=0 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases}$

**146** $\begin{cases} 2x^2+xy-y^2=0 \\ 4x^2-2xy-6y^2=0 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=t \\ y=-t \end{cases}$

**147** $\begin{cases} x^2-5xy+6y^2=0 \\ x^2-4xy+4y^2=0 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=2t \\ y=t \end{cases}$

**148** $\begin{cases} x^2-5xy+6y^2=0 \\ x^2+2xy-8y^2=0 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=2t \\ y=t \end{cases}$

**149** $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 \\ x^2+5xy+6y^2=0 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=-2t \\ y=t \end{cases}$

**150** $\begin{cases} x^2+7xy+12y^2=0 \\ 2x^2+xy+6y^2=0 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

**151** $\begin{cases} x^2+6xy+8y^2=0 \\ 2x^2+12xy+16y^2=0 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=-4t \\ y=t \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-2t \\ y=t \end{cases}$

**152** $\begin{cases} x^2+2xy+y^2=0 \\ x^2+3xy+2y^2=0 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=-t \\ y=t \end{cases}$

**153** $\begin{cases} x^2+4xy=0 \\ x^2+2xy-4y^2-4=0 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$

**154** $\begin{cases} x^2-8xy+15y^2=0 \\ x^2-2xy+y^2=1 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-\frac{5}{4} \\ y=-\frac{1}{4} \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=\frac{5}{4} \\ y=\frac{1}{4} \end{cases}$

**155** $\begin{cases} 4x^2-y^2=0 \\ x^2-y^2=-3 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$

**156** $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=0 \\ x^2-3xy-y^2=3 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y=\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

**157** $\begin{cases} x^2-4xy+4y^2=0 \\ 2x^2-y^2=-1 \end{cases}$ sol impossibile

**158** $\begin{cases} 6x^2+5xy+y^2=12 \\ x^2+4xy+y^2=6 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=\sqrt{6} \\ y=-4\sqrt{6} \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-\sqrt{6} \\ y=4\sqrt{6} \end{cases}$

**159** $\begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 \\ x^2-4xy+y^2=6 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

**160** $\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=0 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=0 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=0 \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

**161** $\begin{cases} x^2-3xy+5y^2=1 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ y=\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-\frac{\sqrt{3}}{3} \\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

**162** $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-3xy+y^2=11 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

**163** $\begin{cases} x^2+5xy+4y^2=10 \\ x^2-2xy-3y^2=-11 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$

**164** $\begin{cases} 4x^2-xy-y^2=-\frac{1}{2} \\ x^2+2xy-y^2=\frac{1}{4} \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=1 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-1 \end{cases}$

**165** $\begin{cases} x^2-xy-8y^2=-8 \\ x^2-2y^2-xy=16 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-6 \\ y=-2 \end{cases}$

**166** $\begin{cases} x^2-6xy-y^2=10 \\ x^2+xy=-2 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$

**167** $\begin{cases} 4x^2-3xy+y^2=32 \\ x^2+3y^2-9xy=85 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=1 \\ y=7 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-1 \\ y=-7 \end{cases}$

**168** $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=8 \\ 3x^2-y^2+xy=-4 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=\frac{10}{3} \\ y=-\frac{14}{3} \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-\frac{10}{3} \\ y=\frac{14}{3} \end{cases}$

**169** $\begin{cases} x^2+5xy-7y^2=-121 \\ 3xy-3x^2-y^2=-7 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-2 \\ y=-5 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-\frac{18}{7} \\ y=-\frac{37}{7} \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=\frac{18}{7} \\ y=\frac{37}{7} \end{cases}$

**170** $\begin{cases} x^2-5xy-3y^2=27 \\ -2x^2-2y^2+4xy=-50 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=\frac{34}{7} \\ y=-\frac{1}{7} \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-\frac{34}{7} \\ y=\frac{1}{7} \end{cases}$

**171** $\begin{cases} 9x^2+5y^2=-3 \\ x^2+4xy-3y^2=8 \end{cases}$ sol impossbile

**172** $\begin{cases} 2x^2-4xy-3y^2=18 \\ xy-2x^2+3y^2=-18 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases}$

**173** $\begin{cases} x^2+2xy=-\frac{7}{4} \\ x^2-4xy+4y^2=\frac{81}{4} \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=\frac{7}{4} \\ y=-\frac{11}{8} \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-\frac{7}{4} \\ y=\frac{11}{8} \end{cases}$

**174** $\begin{cases} x^2+4xy+4y^2-16=0 \\ x^2-xy+4y^2-6=0 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

**175** $\begin{cases} x^2-2xy+y^2-1=0 \\ x^2-2xy-y^2=1 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$

*Risolvi i seguenti sistemi particolari*

**176** $\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ R. $(1;1),(3;-3)$

**177** $\begin{cases} (x-2y)(x+y-2)=0 \\ 3x+6y=3 \end{cases}$ R. $(3;-1),\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$

**178** $\begin{cases} (x+y-1)(x-y+1)=0 \\ x-2y=1 \end{cases}$ R. $(1;0),(-3;-2)$

**179** $\begin{cases} (x-3y)(x+5y-2)=0 \\ (x-2)(x-y+4)=0 \end{cases}$ R. $(2;0),\left(2;\frac{2}{3}\right);(-6;-2);(-3;1)$

**180** $\begin{cases} (x^2-3x+2)(x+y)=0 \\ x-y=2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ doppia; $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$

**181** $\begin{cases} (x-y)(x+y+1)(2x-y-1)=0 \\ (x-3y-3)(x+y-2)=0 \end{cases}$ R. $(0;-1)$ doppia $;\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right);(1;1)$ doppia

**182** $\begin{cases} (4x^2-9y^2)(x^2-2xy+y^2-9)=0 \\ 2x-y=2 \end{cases}$ R. $(5;8);\left(\frac{3}{2};1\right);(-1;-4);\left(\frac{3}{4};-\frac{1}{2}\right)$

**183** $\begin{cases} x^2+6xy+9y^2-4=0 \\ (x^2-y^2)(2x-y-4)=0 \end{cases}$ R. $(1;-1),(2;0),(-1;1),\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right);\left(\frac{10}{7};-\frac{8}{7}\right)$

**184** $\begin{cases} x^2-2xy-8y^2=0 \\ (x+y)(x-3)=0 \end{cases}$ R. $(0;0)$ doppia $,\left(3;-\frac{3}{2}\right);(3;\frac{3}{4})$

**185** $\begin{cases} (2x^2-3xy+y^2)(x-y-1)=0 \\ (x^2-4xy+3y^2)(12x^2-xy-y^2)=0 \end{cases}$ R. $(t;t),\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{5};-\frac{4}{5}\right),\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$

**186** $\begin{cases} (x-2y-2)(x^2-9y^2)=0 \\ (4x^2-4xy+y^2)(y+2)(x-y)=0 \end{cases}$ $(0;0)$ tripla $,(-2;-2)$ doppia $,\left(-\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right)$ doppia $,(6;-2),(-6;-2)$

**187** $\begin{cases} x^4-y^4=0 \\ x^2-(y^2-6y+9)=0 \end{cases}$ R. $\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right),\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$

**188** $\begin{cases} (y^2-4y+3)(x^2+2x-15)=0 \\ (x^2-3xy+2y^2)(9x^2-6xy+y^2)=0 \end{cases}$

R. $(1;1),(2;1)(3;3)$ doppia $,(6;3),\left(\frac{1}{3};1\right),(1;3),(-5;-5),\left(-5;-\frac{5}{2}\right),\left(3;\frac{3}{2}\right),(-5;-15),(3;9)$

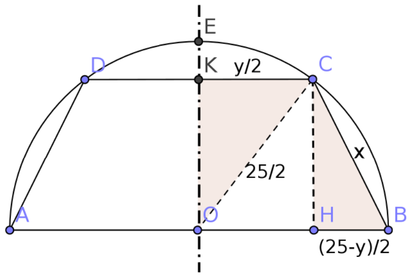
**189** $\begin{cases} (x-y)(x+4y-4)(x+y-1)(3x-5y-2)=0 \\ (3x+y-3)(x^2-4y^2)=0 \end{cases}$

R. $(0;0)$ doppia $,\left(\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right),(1;0),\left(\frac{8}{11},\frac{9}{11}\right),\left(\frac{17}{18};\frac{1}{6}\right),\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right),(-4;2)(2;-1),\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right),\left(\frac{4}{11};-\frac{2}{11}\right),(4;2)$

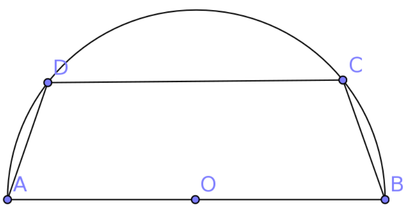
## ►4. Problemi che si risolvono con sistemi di grado superiore al primo

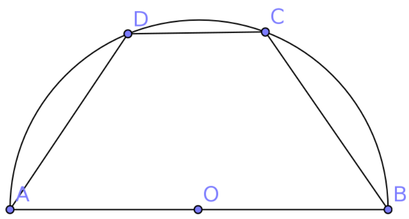
Riprendiamo un problema già trattato nel capitolo secondo di questo volume, per notare come questo problema, come altri nella loro formalizzazione sono risolvibili con sistemi di secondo grado.
Considerare più variabili ci permette di facilitare il processo di traduzione in linguaggio matematico delle relazioni che coinvolgono i dati del problema. Utilizzeremo per questo problema anche un'altra strategia risolutiva, per evidenziare che non esiste un solo modo per risolvere un problema..

Problema
Il trapezio isoscele $ABCD$ è inscritto in una semicirconferenza di diametro $AB$ di misura $25(cm)$; determinare le misure dei lati del trapezio sapendo che il perimetro è $62(cm)$.

| Dati | Vincoli | Relazioni tra dati e incognite | |
|---|---|---|---|
| $\overline{AB}=25$<br>$2p=62$<br>$\overline{AB}\parallel\overline{DC}$<br>$\overline{AD}\equiv\overline{CB}$<br><br>Obiettivo<br>$?\ \overline{CB}$<br>$?\ \overline{DC}$<br><br>Incognite<br>$\overline{CB}=x$<br>$\overline{DC}=y$ | $\begin{cases}0<x<\frac{25}{2}\sqrt{2}\\0<y<25\end{cases}$<br><br>Altre Informazioni<br>$\overline{KO}=\overline{CH}$<br>$\overline{CO}=\frac{25}{2}$<br>$\overline{KC}=\frac{\overline{DC}}{2}$<br>$\overline{HB}=\frac{25-y}{2}$<br>$\widehat{CKO}=90°$<br>$\widehat{CHB}=90°$ | $\begin{cases}y+2x+25=62\\\left(\frac{25}{2}\right)^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2=x^2-\left(\frac{25-y}{2}\right)^2\end{cases}$<br>$\begin{cases}y=-2x+37\\x^2-25x+150=0\end{cases}$<br><br>Soluzioni<br>$\begin{cases}x_1=15\\y_1=7\end{cases}\vee\begin{cases}x_2=10\\y_2=17\end{cases}$<br><br>Verifica<br>Entrambe le soluzioni sono accettabili |  |

La risoluzione del problema si basa oltre che sulla equazione di primo grado $y+2x+25=62$ che definisce il perimetro e sulla congruenza dei segmenti $\overline{KO}$ e $\overline{CH}$ facilmente dimostrabile in quanto stessa distanza tra due rette parallele insieme all'applicazione del teorema di Pitagora ai triangoli $CKB$ e $CHB$ rettangoli per costruzione. Naturalmente tutte le informazioni ausiliare vanno dimostrate, ma data la loro facilità la lasciamo al lettore.
Importante è impostare le condizioni sulle incognite che devono essere maggiori di 0 ma anche per la $x<\frac{25}{2}\sqrt{2}$ perché il trapezio non diventi un triangolo e per la $y<25$ perché la base minore sia realmente minore.
L'ultimo passo consiste nella verifica delle soluzione, che nel nostro caso sono entrambe accettabili.
Si hanno dunque due trapezi inscritti in quella semicirconferenza che avranno il perimetro di 62(cm), come rappresentato in figura.



Problema

L'azienda Profit intende fare una ristrutturazione riducendo il numero degli operai. Oggi spende per gli operai (tutti con lo stesso stipendio) 800 € al giorno. Se si licenziassero 5 dipendenti e si riducesse lo stipendio di 2 € al giorno si avrebbe un risparmio giornaliero di 200 €. Quanti sono gli operai attualmente occupati nell'azienda?

Dati

- Spesa per salari al giorno= 800 €
- Riduzione salario giornaliero= 2 €
- Riduzione numero operai= 5 *unità*
- Risparmio a seguito del licenziamento e della riduzione di stipendio= 200 €

Obiettivo

- Numero operai occupati prima della ristrutturazione

Incognite

- $x$ = numero operai prima della ristrutturazione
- $y$ = salario percepito prima della ristrutturazione

Vincoli

- $\begin{cases} x\in\mathbb{N} \\ y\in\mathbb{R}^+ \end{cases}$

Altre Informazioni

- Numero operai dopo la ristrutturazione= $x-5$
- Salario dopo la ristrutturazione= $y-2$
- Spesa per stipendi dopo la ristrutturazione= $800-200=600$ €

Relazioni tra dati e incognite

$$\begin{cases} xy=800 \\ (x-5)(y-2)=600 \end{cases}$$
$$\begin{cases} xy=800 \\ xy-2x-5y+10=600 \end{cases}$$
$$\begin{cases} xy=800 \\ 2x+5y=210 \end{cases}$$

Soluzioni

$$\begin{cases} x_1=25 \\ y_1=32 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=80 \\ y_2=10 \end{cases}$$

Verifica

Entrambe le soluzioni sono accettabili

Naturalmente c'è una grande differenza tra percepire 32 €/giorno di salario al giorno o 10 €/giorno, come avere impiegati 25 o 80 operai. Il problema va meglio definito. Basterebbe per questo un vincolo che ci dice qual'è la paga minima giornaliera di un operaio.

Problema

Un numero $k\in\mathbb{N}$ è composto da tre cifre. Il prodotto delle tre cifre è 42. Se si scambia la cifra delle decine con quella delle centinaia si ottiene un numero che supera $k$ di 360. Se si scambia la cifra della unità con quella delle centinaia si ottiene un numero minore di 99 rispetto al numero $k$. Trovare $k$.

Dati

- Il numero $k$ è composto da tre cifre
- Prodotto delle tre cifre = 42
- Scambiando la cifra delle decine con quella delle centinaia, il numero $l$ che si ottiene è uguale a $k+360$
- Scambiando la cifra delle unità con quella delle centinaia, il numero $m$ che si ottiene è uguale a $k-99$

Obiettivo

- Trovare il numero $k$

Incognite

- $x$ = cifra che rappresenta il numero delle centinaia
- $y$ = cifra che rappresenta il numero delle decine
- $z$ = cifra che rappresenta il numero delle unità

Vincoli

$$\begin{cases} x\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \\ y, z\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \end{cases}$$

Altre Informazioni

- $k=100x+10y+z$
- $l=100y+10x+z$
- $m=100z+10y+x$

Relazioni tra dati e incognite

$$\begin{cases} x\cdot y\cdot z=42 \\ 100y+10x+z=100x+10y+z+360 \\ 100z+10y+x=100x+10y+z-99 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x\cdot y\cdot z=42 \\ x-y=-4 \\ x-z=1 \end{cases}$$

Soluzioni

$$\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=7 \\ z_1=2 \end{cases}$$

Verifica

La soluzione soddisfa le condizioni il numero cercato è 372

**190** In un rettangolo la differenza tra i due lati è uguale a $2\,cm$. Se si diminuiscono entrambi i lati di 1 cm si ottiene un'area di $0{,}1224\,m^2$. Calcolare il perimetro del rettangolo. R. $[2p=144\,cm]$

**191** Trova due numeri sapendo che la somma tra i loro quadrati è 100 e il loro rapporto $\frac{3}{4}$.
R. $[(-6;-8)\vee(6,8)]$

**192** La differenza tra due numeri è $\frac{11}{4}$ e il loro prodotto $\frac{21}{8}$. Trova i due numeri.
R. $\left[\left(-\frac{3}{4};-\frac{7}{2}\right)\vee\left(\frac{7}{2},\frac{3}{4}\right)\right]$

**193** Trovare due numeri positivi sapendo che la metà del primo supera di 1 il secondo e che il quadrato del secondo supera di 1 la sesta parte del quadrato del primo. R. $[(12;5)]$

**194** Data una proporzione tra numeri naturali conosciamo i due medi che sono 5 e 16. Sappiamo anche che il rapporto tra il prodotto degli estremi e la loro somma è uguale a $\frac{10}{3}$. Trovare i due estremi.
R. $[(4;20)\vee(20,4)]$

**195** La differenza tra un numero di due cifre con quello che si ottiene scambiando le cifre è uguale a 36. La differenza tra il prodotto delle cifre e la loro somma è uguale a 11. Trovare il numero. R. $[73]$

**196** Oggi la differenza delle età tra un padre e una figlia è 26 anni, mentre due anni fa il prodotto delle loro età era 56. Determina l'età del padre e della figlia. R. $[30;4]$

**197** La somma delle età di due fratelli oggi è 46 anni, mentre fra due anni la somma dei quadrati delle loro età sarà 1250. Trova l'età dei due fratelli.
R. $[23;23]$

**198** Ho comprato due tipi di vino. In tutto 30 bottiglie. Per il primo tipo ho speso 54 € e per il secondo 36€. Il prezzo di una bottiglia del secondo tipo costa 2,5 € in meno di una bottiglia del primo tipo. Trova il numero delle b ottiglie di ciascun tipo che ho acquistato e il loro prezzo unitario.
R. $[I\ tipo=12\ bottiglie\ ;\ II\ tipo=18\ bottiglie]$

**199** In un triangolo rettangolo di area $630\,m^2$, l'ipotenusa misura $53\,m$. Determinare il perimetro $[2p=126\,m]$.

**200** Un segmento di $35\,cm$ viene diviso in due parti. La somma dei quadrati costruiti su ciascuna delle due parti è $625\,cm^2$. Quanto misura ciascuna parte? R. $[15\,cm\text{ e }20\,cm]$.

**201** Se in un rettangolo il perimetro misura 16,8 m. e l'area 17,28 mq, quanto misura la sua diagonale?
R. $[Diagonale=6\,m]$

**202** In un triangolo rettangolo la somma dei cateti misura 10,5 cm, mentre l'ipotenusa è 7,5 cm. Trovare l'area. R. $[Area=13{,}5\,cm^2]$

**203** Quanto misura un segmento diviso in due parti, tali che una parte è $\frac{3}{4}$ dell'altra, sapendo che la somma dei quadrati costruiti su ognuna delle due parti è uguale a $121\,cm^2$? R. $[15{,}4\,cm]$

**204** Un trapezio rettangolo con area di $81\,m^2$ la somma della base minore e dell'altezza è $12\,cm$ mentre la base minore è $\frac{1}{5}$ della base maggiore. Trovare il perimetro del rettangolo.
R. $2p_1=42\vee 2p_2=57+3\sqrt{145}$

**205** La differenza tra le diagonali di un rombo è $8\,cm$, mentre la sua area è $24\,cm^2$. Determinare il lato del rombo. R. $[2\sqrt{10}]$

**206** Sappiamo che in un trapezio rettangolo con area di $40\,cm^2$ la base minore è $7\,cm$, mentre la somma della base maggiore e dell'altezza è $17\,cm$. Trovare il perimetro del rettangolo.
R. $[2p=24+2\sqrt{13}]$

**207** Nella produzione di un oggetto la macchina A impiega 5 minuti in più rispetto alla macchina B. Determinare il numero di oggetti che produce ciascuna macchina in 8 ore se in questo periodo la macchina A ha prodotto 16 oggetti in meno rispetto alla macchina B. $[A=32\ oggetti\ ,\ B=48\ oggetti]$

**208** Un rettangolo ha l'area equivalente a quella di un quadrato. L'altezza del rettangolo è $16\,cm$, mentre la sua base è di $5\,cm$ maggiore del lato del quadrato. Determinare il lato del quadrato.
R. $[20\,cm]$

**209** La differenza tra cateto maggiore e cateto minore di un triangolo rettangolo è $7\,k$, mentre la sua area è $60\,k^2$. Calcola il perimetro. (k>0)
R. $[2p=40\,k]$

**210** L'area di un rettangolo che ha come lati le diagonali di due quadrati misura $90\,k^2$. La somma dei lati dei due quadrati misura $14\,k$. Determinare i lati dei due quadrati. (k>0) R. $[5\,k\,,9\,k]$

**211** Nel rettangolo ABCD la differenza tra altezza e base è $4\,k$. Se prolunghiamo la base ab, dalla parte di B di $2\,k$ fissiamo il punto E. L'area del trapezio AECD che si ottiene congiungendo E con C è $28\,k^2$. Trovare il perimetro del trapezio. (k>0)
R. $[15+k\sqrt{53}]$

# MATEMATICA C$^3$ -ALGEBRA 2

# 6. EQUAZIONI CON MODULI E IRRAZIONALI

*Sails* by Cseward
http://www.flickr.com/photos/cseward/2823465045


## Indice generale

# 1. EQUAZIONI CON VALORI ASSOLUTI

## ►1. Valore assoluto

Il valore assoluto o modulo di un numero $a$ , indicato con $|a|$ , è lo stesso numero se a è maggiore o uguale a zero, il suo opposto, cioè $-a$ , se $a$ è minore di zero.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Così per esempio $|+7| = 7;\ |-3| = -(-3) = 3$

Nello stesso modo possiamo definire il valore assoluto di una espressione algebrica.

Il valore assoluto o modulo dell'espressione algebrica $A = x^2 - 3x$ , indicato con $|x^2 - 3x|$ , è una funzione definita per casi, cioè definita da espressioni diverse su sottoinsiemi diversi del dominio, precisamente: $f(x) = |x^2 - 3x| = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{se } x^2 - 3x \geq 0 \\ -(x^2 - 3x) & \text{se } x^2 - 3x < 0 \end{cases}$ ;

risolvendo la disequazione $x^2 - 3x \geq 0$ si determinano i due sottoinsiemi in cui sono definite le due espressioni algebriche. Otteniamo dunque

$$f(x) = |x^2 - 3x| = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{se } x \leq 0 \vee x \geq 3 \\ -(x^2 - 3x) & \text{se } 0 < x < 3 \end{cases}$$

In generale la funzione valore assoluto di un'espressione algebrica, detta **argomento del valore assoluto**, viene esplicitata nei due casi generati dallo studio del segno dell'argomento:

$$|g(x)| = \begin{cases} g(x) & \text{se } g(x) \geq 0 \\ -g(x) & \text{se } g(x) < 0 \end{cases}$$

**1** Per la funzione $f(x) = |\sqrt{3} + 3x|$ trovate le espressioni algebriche che descrivono i due casi, ciascuno con il suo dominio.

- Strategia risolutiva. Per la definizione si ha:

$$f(x) = |\sqrt{3} + 3x| = \begin{cases} \sqrt{3} + 3x & \text{se } \ldots\ldots\ldots \to x \geq \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{se } \sqrt{3} + 3x < 0 \to x < \ldots\ldots \end{cases}$$

*Scrivi l'espressione algebrica che descrive i due casi della funzione, ciascuno con il suo dominio*

| | | |
|---|---|---|
| **2** | $f(x) = |-2x + 5|$ | $f(x) = |x - 1|$ |
| **3** | $f(x) = |-x^2 + 4|$ | $f(x) = |x^2 + 1|$ |
| **4** | $f(x) = |x^2 - 3x + 1|$ | $f(x) = |3x - 4|$ |
| **5** | $f(x) = |x^3 - x|$ | $f(x) = |x^2 + x + 1|$ |
| **6** | $f(a) = |2a - 2|$ | $f(p) = \left|3p^2 - \frac{1}{2}\right|$ |
| **7** | $f(x) = |-x|$ | $f(a) = |-2a^2 - 1|$ |
| **8** | $f(x) = \left|\frac{1}{x}\right|$ | $f(x) = \left|\frac{1}{x^2}\right|$ |
| **9** | $f(x) = \left|\frac{2x}{x - 2}\right|$ | $f(x) = \left|\frac{x + 1}{2x - 1}\right|$ |

## ►2. Equazioni in una incognita in valore assoluto

### Equazioni con valore assoluto del tipo $|f(x)|=k$ con $k\in\mathbb{R}\wedge k\geq 0$

L'incognita è presente solo all'interno del modulo.

Esempi

■ $|x^2-7|=3$

Impostiamo la ricerca delle soluzioni con il metodo generale.

$\begin{cases}x^2-7\geq 0\\x^2-7=3\end{cases}\cup\begin{cases}x^2-7<0\\-x^2+7=3\end{cases}$ Se moltiplichiamo per -1 l'equazione del secondo sistema otteniamo:

$\begin{cases}x^2-7\geq 0\\x^2-7=3\end{cases}\cup\begin{cases}x^2-7<0\\x^2-7=-3\end{cases}$ in cui le condizioni definite dalle disequazioni vengono in entrambi i casi soddisfatte, possiamo quindi non effettuare la verifica delle soluzioni.

*Conclusione*

L'equazione $|x^2-7|=3$ si risolve unendo l'Insieme Soluzione delle equazioni $(x^2-7=3)\vee(x^2-7=-3)$ .

$x^2-7=3 \rightarrow x^2=10 \rightarrow x_1=-\sqrt{10}\vee x_2=\sqrt{10}$

$x^2-7=-3 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x_3=-2\vee x_4=2$

Per cui l'Insieme Soluzione di $|x^2-7|=3$ è $\{-\sqrt{10},\sqrt{10},-2,+2\}$

■ $|x^2-x|=1$

L'equazione $|x^2-x|=1$ si risolve unendo gli insiemi soluzione delle equazioni $x^2-x=1$ e $x^2-x=-1$ senza effettuare la verifica delle soluzioni.

$x^2-x=1 \rightarrow x^2-x-1=0 \rightarrow x_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\vee x_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$x^2-x=-1 \rightarrow x^2-x+1=0 \rightarrow \Delta<0 \rightarrow \emptyset$

Per cui l'Insieme Soluzione di $|x^2-x|=1$ è $\left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

**Procedura risolutiva**

**Per risolvere un'equazione del tipo $|f(x)|=k$ con $k\in\mathbb{R}\wedge k\geq 0$ è sufficiente risolvere la doppia equazione $|f(x)|=\pm k$ .**

Esempio

■ $|x^2-7|=3$

$x^2-7=\pm 3$ si trasforma in due equazioni $x^2-7=+3\vee x^2-7=-3$

La prima equazione $x^2-7=+3 \rightarrow x^2=10 \rightarrow x=\pm\sqrt{10}$

La seconda equazione $x^2-7=-3 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x=\pm 2$

Le soluzioni dell'equazione sono $x_1=-\sqrt{10};\ x_2=-2;\ x_3=+2;\ x_4=+\sqrt{10}$

### Equazioni con valore assoluto del tipo $|f(x)|=k$ con $k\in\mathbb{R}\wedge k<0$

Se $k<0$ allora l'equazione è impossibile. In questo caso $|f(x)|=k$ è una contraddizione, in quanto un valore assoluto di una espressione dà un valore sempre positivo. Questo si può evidenziare anche con il metodo generale di risoluzione.

■ $|x-7|=-1$

Impostiamo la ricerca delle soluzioni con il metodo generale.

$\begin{cases}x-7\geq 0\\x-7=-1\end{cases}\cup\begin{cases}x-7<0\\x-7=1\end{cases}$ Entrambi i sistemi non hanno soluzioni reali. L'equazione è dunque impossibile.

*Risolvi le seguenti equazioni che hanno l'incognita solo nel valore assoluto*

**10** $|x-2x^2|=1$ R. $x_1=1\,;\,x_2=-\frac{1}{2}$

**11** $|-x^2-4|=9$ R. $x_1=\sqrt{5}\,;\,x_2=-\sqrt{5}$

**12** $|x^2-x|=-3$ R. $\emptyset$

**13** $|x^2+1|=0$ R. $\emptyset$

**14** $|2x+1|=2$ $|x^2-3x+1|=1$

**15** $|x^2+1|=3$ $|x^2-1|=3$

## Equazioni nelle quali l'incognita si trova anche fuori dal modulo

Esempi

- $|-1+3x|=7x+4$ .

Osserviamo che il primo membro dell'equazione è un valore assoluto che cambia espressione a secondo del segno del suo argomento.

1°. esplicito i due casi dell'argomento $|-1+3x|=\begin{cases}-1+3x & \text{se } -1+3x\geq 0 \rightarrow x\geq\frac{1}{3}\\ 1-3x & \text{se } -1+3x<0 \rightarrow x<\frac{1}{3}\end{cases}$

2°. modifichiamo l'equazione assegnata tenendo conto dei casi: si generano così i due sistemi $A]\begin{cases}x\geq\frac{1}{3}\\ -1+3x=7x+4\end{cases}$ $B]\begin{cases}x<\frac{1}{3}\\ 1-3x=7x+4\end{cases}$

3°. risolviamo ciascun sistema $A]\begin{cases}x\geq\frac{1}{3}\\ 4x=-5 \rightarrow x=-\frac{5}{4}\end{cases}$ $B]\begin{cases}x<\frac{1}{3}\\ 10x=3 \rightarrow x=\frac{3}{10}\end{cases}$

4°. indichiamo l'I.S. di ciascun sistema $I.S._A=\emptyset\,;\; I.S._B=\left\{\frac{3}{10}\right\}$ e infine

5°. l'insieme soluzione dell'equazione assegnata $I.S._A \cup I.S._B=\emptyset\cup\left\{\frac{3}{10}\right\}=\left\{\frac{3}{10}\right\} \rightarrow x=\frac{3}{10}$

- $|-2x+5|=x-3$

1°. esplicito i due casi dell'argomento $|-2x+5|=\begin{cases}-2x+5 & \text{se } -2x+5\geq 0 \rightarrow x\leq\frac{5}{2}\\ 2x-5 & \text{se } -2x+5<0 \rightarrow x>\frac{5}{2}\end{cases}$

2°. modifico l'equazione assegnata tenendo conto dei casi: si generano così i due sistemi $A]\begin{cases}x\leq\frac{5}{2}\\ -2x+5=x-3\end{cases}$ $B]\begin{cases}x>\frac{5}{2}\\ 2x-5=x-3\end{cases}$

3°. risolviamo ciascun sistema $A]\begin{cases}x\leq\frac{5}{2}\\ -3x=-8 \rightarrow x=\frac{8}{3}\end{cases}$ $B]\begin{cases}x>\frac{5}{2}\\ x=2\end{cases}$

4°. indichiamo l'I.S. di ciascun sistema $I.S._A=\emptyset\,;\; I.S._B=\emptyset$ e infine

5°. l'insieme soluzione dell'equazione assegnata $I.S._A \cup I.S._B=\emptyset\cup\emptyset=\emptyset$ : equazione impossibile.

- $|2x^2-3x|=-x$

1°. esplicito i due casi dell'argomento

$$|2x^2-3x|=\begin{cases}2x^2-3x \ \text{ se } 2x^2-3x\geq 0 \ \rightarrow \ x\leq 0 \vee x\geq \frac{3}{2}\\ -2x^2+3x \ \text{ se } 2x^2-3x<0 \ \rightarrow \ 0<x<\frac{3}{2}\end{cases}$$

2°. modifico l'equazione assegnata tenendo conto dei casi: si generano così i due sistemi

$$A]\begin{cases}x\leq 0\vee x\geq \frac{3}{2}\\ 2x^2-3x=-x\end{cases} \quad B]\begin{cases}0<x<\frac{3}{2}\\ -2x^2+3x=-x\end{cases}$$

3°. risolviamo ciascun sistema

$$A]\begin{cases}x\leq 0\vee x\geq \frac{3}{2}\\ 2x^2-2x=0 \ \rightarrow \ x_1=0\vee x_2=1\end{cases} \qquad B]\begin{cases}0<x<\frac{3}{2}\\ -2x^2+4x=0 \ \rightarrow \ x_1=0\vee x_2=2\end{cases}$$

4°. indichiamo l'I.S. di ciascun sistema e $I.S._A=\{0\};\ I.S._B=\emptyset$ infine

5°. l'insieme soluzione dell'equazione assegnata $I.S._A \cup I.S._B=\{0\}\cup\emptyset=\{0\} \rightarrow x=0$

- $4|x^2-x|=1$

1°. esplicito i due casi dell'argomento

$$4|x^2-x|=\begin{cases}x^2-x \ \text{ se } \ x^2-x\geq 0 \ \rightarrow \ x\leq 0\vee x\geq 1\\ -x^2+x \ \text{ se } \ x^2-x<0 \ \rightarrow \ 0<x<1\end{cases}$$

2°. modifichiamo l'equazione assegnata tenendo conto dei casi: si generano così i due sistemi

$$A]\begin{cases}x\leq 0\vee x\geq 1\\ 4(x^2-x)=1\end{cases} \quad B]\begin{cases}0<x<1\\ 4(-x^2+x)=1\end{cases}$$

3°. risolviamo ciascun sistema

$$A]\begin{cases}x\leq 0\vee x\geq 1\\ 4x^2-4x-1=0 \ \rightarrow \ x_1=\frac{1-\sqrt{2}}{2}\vee x_2=\frac{1+\sqrt{2}}{2}\end{cases} \quad B]\begin{cases}0<x<1\\ -4x^2+4x-1=0 \ \rightarrow \ x_1=x_2=\frac{1}{2}\end{cases}$$

4°. indichiamo l'I.S. di ciascun sistema e $I.S._A=\left\{\frac{1-\sqrt{2}}{2};\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right\};\ I.S._B=\left\{\frac{1}{2}\right\}$ infine

5°. l'insieme soluzione dell'equazione assegnata

$$I.S._A\cup I.S._B=\left\{\frac{1-\sqrt{2}}{2};\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right\}\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}=\left\{\frac{1-\sqrt{2}}{2};\frac{1+\sqrt{2}}{2};\frac{1}{2}\right\} \rightarrow x_1=\frac{1-\sqrt{2}}{2};\ x_2=\frac{1+\sqrt{2}}{2};\ x_3=\frac{1}{2}$$

**Procedura risolutiva**

**Per risolvere un'equazione in cui l'incognita compare sia nel modulo sia fuori dal modulo, si pongono le condizioni iniziali sull'espressione che è all'interno del modulo e si vanno a risovlere due sistemi uniti dal connettivo logico "o" :**
**nel primo sistema vi sarà la condizione $f(x)\geq 0$ e la seconda equazione si otterrà da quella data togliendo le barrette del modulo;**
**nel secondo sistema vi sarà la condizione $f(x)<0$ e la seconda equazione si otterrà da quella data togliendo le barrette del modulo e cambiando il segno a tutto ciò che vi era all'interno**

Esempio

- $|2\mathrm{x}-1|=x+2$

L'equazione si trasforma nell'unione dei due sistemi $\begin{cases}2\mathrm{x}-1\geq 0\\ 2\mathrm{x}-1=x+2\end{cases}\cup\begin{cases}2\mathrm{x}-1<0\\ -2\mathrm{x}+1=x+2\end{cases}$

da cui $\begin{cases}x\geq\frac{1}{2}\\ x=3\end{cases}\cup\begin{cases}x<\frac{1}{2}\\ x=-\frac{1}{2}\end{cases}$ le soluzioni sono $x=3\vee x=-\frac{1}{2}$ .

*Determina l'insieme delle soluzioni delle seguenti equazioni con valore assoluto definite in* $\mathbb{R}$

**16** $|x-1|=x$ R. $x=\frac{1}{2}$

**17** $|x^2-4|=3x-1$ R. $x_1=\frac{3+\sqrt{21}}{2};x_2=\frac{-3+\sqrt{29}}{2}$

**18** $|2-x|=4-x^2$ R. $x_1=2;x_2=-1$

**19** $|x^2+2|=1-x^2$ R. $\emptyset$

**20** $|-x^2+2x-3|=x+1$ R. $x_1=2;x_2=1$

**21** $|-x^2+4x-7|=3-2x$ R. $\emptyset$

**22** $|2-4x|=4(x-1)(x+2)$ R. $x_1=\frac{\sqrt{6}}{2};x_2=-\frac{2+\sqrt{14}}{2}$

**23** $|x^2-4x+3|=4x-6$ R. $x_1=\sqrt{3};x_2=4+\sqrt{7}$

**24** $|1-2x|=5x-7$ R. $x=2$

**25** $|x^3-x^2|=x-1$ R. $x=1$

**26** $|x^2-3x+2|=x+1$ R. $x_1=2+\sqrt{3};x_2=2-\sqrt{3}$

**27** $|x^2+1|=3+x$ R. $x_1=2;x_2=-1$

**28** $|-x^2-4x-8|=3x-2-x^2$ R. $\emptyset$

**29** $|x^3-4x^2|=1-4x$ R. $x_1=-1;x_2=\frac{5-\sqrt{21}}{2}$

**30** $|x^4-3x^2|=x^2-2$ R. $x_1=\sqrt{2+\sqrt{2}};x_2=-\sqrt{2+\sqrt{2}};x_3=\sqrt{1+\sqrt{3}};x_5=-\sqrt{1+\sqrt{3}}$

**31** $|x^4-5x^2|=5-x^2$ R. $x_1=1;x_2=-1;x_3=\sqrt{5};x_4=-\sqrt{5}$

**32** $|9-x^2|=x^2-3x+4$ R. $x_1=-1;x_2=\frac{13}{3};x_3=\frac{5}{2}$

**33** $|x^2-2x-5|=4-\frac{1}{4}x^2$ R. $x_1=\frac{18}{5};x_2=-2;x_3=\frac{4+2\sqrt{7}}{3};x_4=\frac{4-2\sqrt{7}}{3}$

**34** $|x^2-3x+2|=2x-4$ R. $[x_1=2;\ x_2=3]$

**35** $|x+5|=x^2-1$ R. $[x_1=-2;\ x_2=3]$

**36** $|2x-6|=7-2x^2$ R. $\left[x_1=\frac{1-\sqrt{3}}{2};\ x_2=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$

**37** $|x^2-4|=x+8$ R. $[x_1=-3;\ x_2=4]$

**38** $|x^2+1|=5-x$ R. $\left[x_1=\frac{-1-\sqrt{17}}{2};\ x_2=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right]$

**39** $|x^4-x^2|=x^2+8$ R. $[x_1=-2;\ x_2=2]$

**40** $|x^4-9|=x^2$ R. $\left[x_1=\frac{\sqrt{2+2\sqrt{37}}}{2};\ x_2=\frac{-\sqrt{2+2\sqrt{37}}}{2}\ x_3=\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{37}}}{2};\ x_4=\frac{-\sqrt{-2+2\sqrt{37}}}{2}\right]$

**41** $|1-x^2|=4x^2+x$ R. $\left[x_1=\frac{-1-\sqrt{21}}{10};\ x_2=\frac{-1+\sqrt{21}}{10}\right]$

**42** $|x^2-3x+2|=2x-4$ R. $[\emptyset]$

**43** $|x^2-3x+2|=2x-4$ R. $[x_1=2;\ x_2=3]$

## ►3. Equazioni con più espressioni in valore assoluto

<u>Esempi</u>

- $|2x-3|-|1-2x|=4$

L'equazione presenta due espressioni in valore assoluto; ciascuna di esse sarà sviluppata in due modi diversi dipendenti dal segno assunto dai rispettivi argomenti. Si presenteranno 4 casi e l'insieme soluzione dell'equazione sarà ottenuto dall'unione delle soluzioni dei singoli casi. Per semplificare il procedimento possiamo procedere studiando il segno di ciascun argomento e confrontarli servendoci del seguente schema:

| | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{3}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| segno di $2x-3$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| segno di $1-2x$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ |

I casi che si presentano possono essere esaminati nei tre sistemi:

$$A.\begin{cases} x\le\frac{1}{2}\\ -(2x-3)-(1-2x)+x=4\end{cases}\qquad B.\begin{cases} \frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}\\ -(2x-3)+(1-2x)+x=4\end{cases}\qquad C.\begin{cases} x\ge\frac{3}{2}\\ (2x-3)+(1-2x)+x=4\end{cases}$$

dove la prima condizione è la disequazione che vincola il segno degli argomenti e la seconda è l'equazione che risulta in base al segno definito. Risolviamo

$$A.\begin{cases} x\le\frac{1}{2}\\ -(2x-3)-(1-2x)+x=4\ \rightarrow\ x=2\end{cases}\ \rightarrow\ I.S._A=\emptyset\ \left(2\text{ non è minore di }\frac{1}{2}\right)$$

$$B.\begin{cases} \frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}\\ -(2x-3)+(1-2x)+x=4\ \rightarrow\ x=0\end{cases}\ \rightarrow\ I.S._B=\emptyset\ \text{(0 non appartiene all'intervallo considerato)}$$

$$C.\begin{cases} x>\frac{3}{2}\\ (2x-3)+(1-2x)+x=4\ \rightarrow\ x=6\end{cases}\ \rightarrow\ I.S._C=\{6\}\ \text{soluzione accettabile}$$

Conclusione: $I.S.=I.S._A\cup I.S._B\cup I.S._C=\{6\}$

- $|x^2-4|-3x=|x-1|$

Confrontiamo il segno di ciascun argomento servendoci dello schema:

| | | $-2$ | | $1$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| segno di $x^2-4$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| segno di $x-1$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |

In questo caso dobbiamo esaminare 4 casi che si esplicitano nei sistemi:

$$A.\begin{cases} x\le-2\\ x^2-4-3x=-x+1\ \rightarrow\ x^2-2x-5=0\ \rightarrow\ x_1=1-\sqrt{6}\vee x_2=1+\sqrt{6}\end{cases}\ \rightarrow\ I.S._A=\emptyset$$

$$B.\begin{cases} -2<x<1\\ -x^2+4-3x=-x+1\ \rightarrow\ x^2+2x-3=0\ \rightarrow\ x_1=-3\vee x_2=1\end{cases}\ \rightarrow\ I.S._B=\emptyset$$

$$C.\begin{cases} 1\le x<2\\ -x^2+4-3x=x-1\ \rightarrow\ x^2+4x-5=0\ \rightarrow\ x_1=-5\vee x_2=1\end{cases}\ \rightarrow\ I.S._C=\{1\}$$

$D.\begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-4-3x=x-1 \to x^2-4x-3=0 \to x_1=2-\sqrt{7} \vee x_2=2+\sqrt{7} \end{cases} \to I.S._D=\{2+\sqrt{7}\}$

Conclusione: $i.S.=I.S._A \cup I.S._B \cup I.S._C \cup I.S._D=\{1;\ 2+\sqrt{7}\}$

**Procedura per risolvere una equazione con la presenza di uno o più valori assoluti**

**Si possono verificare tre casi:**

1. **L'incognita è presente solo nell'argomento del modulo: $|f(x)|=k$ , l'equazione si risolve ponendo: $f(x)=\pm k$**
   - **Se $k<0$ l'equazione è impossibile**
2. **L'incognita si trova anche al di fuori del modulo; in questo caso si analizza il segno dell'argomento del modulo e si risolvono i due sistemi dove la prima condizione è la disequazione che vincola il segno dell'argomento e la seconda è l'equazione che risulta in base al segno definito. L'insieme soluzione dell'equazione è dato dall'unione dell'Insieme Soluzione dei due sistemi.**
3. **Se è presente più di un modulo, si studia il segno di ogni argomento e dallo schema che ne segue si costruiscono e quindi risolvono i sistemi in cui la prima condizione è la disequazione che vincola il segno degli argomenti e la seconda è l'equazione in base al segno definito. Anche in questo caso l'Insieme Soluzione dell'equazione è dato dall'unione dell'Insieme Soluzione di ogni sistema.**

*Risolvi le seguenti equazioni con due valori assoluti*

**44** $|x-2|+|5-2x|=x-1$ R. $x_1=2\,;x_2=3$

**45** $|x^2-4x+3|=1-2|4-x^2|$ R. $x=2$

**46** $|x-1|=x^2-x+|3-x^2|$ R. $\emptyset$

**47** $|3-3x|+x=8-2|16-4x^2|$ R. $x_1=\frac{-1+\sqrt{87}}{4}\,;x_2=\frac{1+\sqrt{43}}{4}\,;x_3=\frac{1-3\sqrt{33}}{8}\,;x_4=\frac{-1-\sqrt{217}}{8}$

**48** $2|4-x^2|=|x^2-2x+3|$ R. $x_1=-1\,;x_2=\frac{5}{3}\,;x_3=-1+2\sqrt{3}\,;x_4=-1-2\sqrt{3}$

**49** $|3x-2|=x^2-|x^2-x|+3$ R. $x_1=\frac{5}{2}\,;x_2=-\frac{1}{4}$

**50** $|x|=3x-|x^2-1|$ R. $x_1=\sqrt{2}-1\,;x_2=\sqrt{2}+1$

**51** $|x^2-4x|=|2x^2-3|$ R. $x_1=-2-\sqrt{7}\,;x_2=-2+\sqrt{7}\,;x_3=\frac{2+\sqrt{13}}{3}\,;x_4=\frac{2-\sqrt{13}}{3}$

**52** $|3x-x^2-2|=\frac{1}{2}+x^2-x-2|1-x^2|$ R. $x_1=\frac{9}{8}\,;x_2=\sqrt{2}-\frac{1}{2}$

**53** $|9-4x^2|=x^2+2|x-3|$ R. $x_1=1\,;x=-\frac{3}{5}\,;x_2=\frac{-1+\sqrt{46}}{3}\,;x_3=\frac{-1-\sqrt{46}}{3}$

**54** $|5x-x^2|=3+2x-|x|$ R. $x_1=1\,;x_2=3\,;x_3=2\sqrt{3}+3\,;x_4=4-\sqrt{19}$

**55** $|2x-5|+|x^2-1|=x-2$ R. $\emptyset$

**56** $|3x-6|+|4x-x^2|=x+3$ R. $x_1=3\,;x_2=\sqrt{3}\,;x_3=1+\sqrt{10}$

**57** $x+|x^2+x-6|=\frac{1}{4}(x^2+10x+25)$ R. $x_1=\frac{-5-2\sqrt{5}}{5}\,;x_2=\frac{-5+2\sqrt{5}}{5}\,;x_3=\frac{1+2\sqrt{37}}{3}\,;x_4=\frac{1-2\sqrt{37}}{3}$

**58** $x+2|-x-1|=x^2-|x|$ R. $x_1=1-\sqrt{3}\,;x_2=2+\sqrt{6}$

**59** $|x^3-4x|=|x|$ R. $x_1=\sqrt{5}\,;x_2=-\sqrt{5}\,;x_3=\sqrt{3}\,;x_4=-\sqrt{3}\,;x=0$

**60** $|x-2|=|x^2-4|-4$ R. $x_1=3\,;x_2=-\frac{1+\sqrt{41}}{2}$

**61** $|x-2|=|x^2-4|-\frac{9}{4}$ R. $x_1=\frac{1}{2}\,;x_2=\frac{1+3\sqrt{2}}{2}\,;x_3=-\frac{1+\sqrt{34}}{2}$

**62** $|x-2|=|x^2-4|-2$ R. $x_1=0\,;x_2=1\,;x_3=\frac{1+\sqrt{17}}{2}\,;x_4=-\frac{1+\sqrt{33}}{2}$

**63** $|x-2|=|x^2-4|$ R. $x_1=-3\,;x_2=-1\,;x_3=2$

**64** $|x-2|=|x^2-4|+1$ R. $x_1=-\frac{1+\sqrt{21}}{2}; x_2=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$

**65** $|x-2|=|x^2-4|+4$ R. $x=-2$

**66** $|x-2|=|x^2-4|+5$ R. $\emptyset$

**67** $|x^2-3x|=x|x|$ R. $x_1=0; x_2=\frac{3}{2}$

**68** $|x-1|(x+1)=|2x-4|$ R. $x=\sqrt{6}-1$

**69** $|x^2-5x+6|=(3-x)|x^2+x-2|$ R. $x_1=0; x_2=3; x_3=-1+\sqrt{5}; x_4=-1-\sqrt{5}$

**70** $|4x-x^2|-2x=2|x^2-9|$ R. $x_1=-3-3\sqrt{3}; x_2=1-\sqrt{7}$

**71** $(x-1)^2|x|=x^2-1$ R. $x_1=1; x_2=1+\sqrt{2}$

**72** $|x|^2-|x|=2$ R. $x_1=2; x_2=-2$

**73** $|x|^2+3|x|+2=0$ R. $\emptyset$

**74** $|x|^2-5|x|+6=0$ R. $x_1=2; x_2=-2; x_3=3; x_4=-3$

**75** $|x-1|^2-|x^2-1|=1$ R. $x=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

**76** $(|x-1|-|3x-6|)^2=0$ R. $x_1=\frac{5}{2}; x_2=\frac{7}{4}$

**77** $(|x-1|-|3x-3|)^2=0$ R. $x=1$

**78** $(|x|-2|17-x^2|)^3=8$ R. $x_1=4; x_2=-4; x_3=\frac{1+\sqrt{257}}{4}; x_4=-\frac{1+\sqrt{257}}{4}$

**79** $(|2x-1|-1)(6-2|x^2-9|)=0$ R. $x_1=0; x_2=1; x_3=\sqrt{6}; x_4=-\sqrt{6}; x_5=2\sqrt{3}; x_6=-2\sqrt{3}$

**80** $|x-2|(1-|x-1|)=\frac{1}{4}$ R. $x_1=\frac{3}{2}; x_2=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

**81** $\frac{|x-1|+3|4x+x^2+3|}{2}=2$ R. $x_1=-3; x_2=-\frac{4}{3}; x_3=-\frac{2}{3}$

**82** $|x-1|-|x+1|=1$ R. $x=-\frac{1}{2}$

**83** $|4x^2-4|-2|x+1|=0$ R. $x_1=-1; x_2=\frac{1}{2}; x_3=\frac{3}{2}$

**84** $|x-4|=|(x-1)^2-1|$ R. $x_1=\frac{1-\sqrt{17}}{2}; x_2=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$

**85** $\left|3x^2-\frac{1}{2}\right|-x=|x-1|$ R. $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}; x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

**86** $(x-1)|4-2x|=x^2-2$ R. $x_1=3+\sqrt{3}; x_2=\frac{3+\sqrt{3}}{3}; x_3=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$

**87** $(x-1)|4-2x|=x^2-1$ R. $x_1=1; x_2=5$

**88** $(x-1)|4-2x|=x^2+1$ R. $x=3+\sqrt{6}$

**89** $x^2|2x+2|=4|x|$ R. $x_1=-2; x_2=0; x_3=1$

**90** $|x-2|-|1-x|=(x-1)^2$ R. $x_1=0; x_2=\sqrt{2}$

**91** $2|x^2-9|+6|4x+12|=0$ R. $x=-3$

**92** $|x-2|+|x|=1-x^2$ R. $\emptyset$

**93** $|x-2|+|x|=1+x^2$ R. $x_1=1; x_2=-1-\sqrt{2}$

# 2. EQUAZIONI IRRAZIONALI

## ►1. Equazioni con un solo radicale

DEFINIZIONE. Una equazione si dice irrazionale quando l'incognita compare sotto il segno di radice.

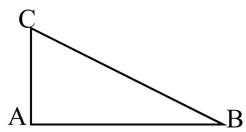
Analizziamo le seguenti equazioni: $[A]\sqrt{3}\cdot x = x^2 - x + 2, \ \ [B]\sqrt{2x} = x^2 - x$ .

Notiamo che l'equazione [A] è di secondo grado, intera con un coefficiente irrazionale (sotto il segno di radice), ma non è un'equazione irrazionale perché l'incognita non compare sotto la radice.

Nell'equazione [B] il monomio 2x, contenente l'incognita, compare sotto il segno di radice pertanto essa è un'equazione irrazionale.

Problema

*Determinate l'area di un triangolo rettangolo ABC retto in A avente perimetro di 24cm e i cateti che differiscono di 2cm.*




Dati: $2p = 24$ ; $\overline{AB} - \overline{AC} = 2$ Obiettivo: ? Area

*Strategia risolutiva*: $Area = \dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{2}$ ; dobbiamo quindi determinare i cateti.

Poniamo $\overline{AC} = x$ con $x > 0 \rightarrow \overline{AB} = 2 + x$ e sfruttiamo l'informazione relativa al perimetro per determinare l'equazione risolvente $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 24$ . Applicando il teorema di Pitagora si ha $\overline{BC} = \sqrt{x^2 + (2+x)^2} = \sqrt{2x^2 + 4x + 4}$ e dunque otteniamo l'equazione risolvente $2x + 2 + \sqrt{2x^2 + 4x + 4} = 24$ in cui l'incognita compare sotto il segno di radice.

### Caso dell'indice della radice pari

Ricordiamo che l'espressione irrazionale $E = \sqrt[n]{f(x)}$ con n pari non nullo ha significato per tutti i valori di x che rendono non negativo il radicando, pertanto l'Insieme Soluzione di un'equazione irrazionale in cui compare uno o più radicali di indice pari sarà un sottoinsieme del Dominio o Insieme di Definizione del radicale (condizione di realtà del radicale).

Esempio

Riprendendo l'equazione $\sqrt{2x} = x^2 - x$ si avrà $D = I.D. = R^+ \cup \{0\} \rightarrow I.S. \subseteq D$ ; nessun numero negativo potrà essere soluzione dell'equazione.

L'espressione irrazionale $E = \sqrt[n]{f(x)}$ nel suo I.D. è positiva o nulla (per definizione), pertanto l'equazione $\sqrt{2x} = x^2 - x$ potrà verificarsi solo se il secondo membro sarà non negativo (condizione di concordanza del segno).

Quando abbiamo un'equazione nella qual el'incognita compare sotto una radice di indice n pari possiamo elevare alla potenza n entrambi i membri dell'equazione e la radice va via. Tuttavia, l'equazione ottenuta non sempre è equivalente a quella data, ossia non sempre ha le stesse soluzioni dell'equazione data.

Esempio

■ $\sqrt{x+2} = x$

*1° metodo*

Elevando al quadrato di ha $x + 2 = x^2$ da cui $x^2 - x - 2 = 0$ . Risolvendo questa equazione di secondo grado otteniamo le soluzioni $x_1 = -1$ ; $x_2 = 2$ . Tuttavia, sostituendo questi valori di x nell'equazione irrazionale di partenza si ha:

per $x = -1 \rightarrow \sqrt{-1+2} = -1 \rightarrow \sqrt{1} = -1$ che è falsa, pertanto x=-1 non può essere soluzione;

per $x = 2 \rightarrow \sqrt{2+2} = 2 \rightarrow \sqrt{4} = 2$ che è vera, pertanto x=2 è l'unica soluzione.

**Per risolvere un'equazione irrazione con indice pari possiamo allora elevare alla potenza pari della radice i due membri dell'equazione, risolvere l'equazione che si ottiene e verificare se le soluzioni sono accettabili.**

Possiamo però procedere in un altro modo.
2° metodo

**L'Insieme Soluzione dell'equazione irrazionale $\sqrt[n]{f(x)}=g(x)$ con n pari non nullo sarà un sottoinsieme dell'insieme, chiamiamolo H, in cui sono contemporaneamente vere le condizioni $f(x)\geq 0 \wedge g(x)\geq 0$ ossia l'insieme H soluzione del sistema $\begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)\geq 0\end{cases}$. In simboli: $I.S.\subseteq H$.**

Esempi

- $\sqrt{x+2}=x$

La soluzione si ottiene risolvendo $\begin{cases} x+2\geq 0 \\ x\geq 0 \\ x+2=x^2\end{cases}$ le disequazioni danno come condizione $x\geq 0$, delle due soluzioni $x_1=-1\,;\; x_2=2$ l'unica da accettare è x=2.

- $\sqrt{5-2x}=x-1$

Elevo ambo i membri al quadrato, ottengo $5-2x=x^2-2x+1 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x_{1,2}=\pm 2$
Sostituisco x=-2 ottengo $\sqrt{5-2\cdot(-2)}=-2-1 \rightarrow \sqrt{9}=-3$ falso, quindi x=-2 non è una soluzione accettabile.
Sostituisco x=+2 ottengo $\sqrt{5-2\cdot 2}=2-1 \rightarrow \sqrt{1}=1$ vero, quindi x=+2 è una soluzione.
Ponendo le condizioni $\begin{cases} 5-2x\geq 0 \\ x\geq 1\end{cases}$ si ha $\begin{cases} x\leq\frac{5}{2} \\ x\geq 1\end{cases} \rightarrow 1\leq x\leq\frac{5}{2}$ Pertanto la soluzione x=-2 non è accettabile in quando non è compresa tra 1 e 5/2, la soluzione x=+2 è invece accettabile.

## Caso dell'indice della radice dispari

L'espressione irrazionale $E=\sqrt[n]{f(x)}$ con n dispari è definita per tutti i valori reali per cui è definito il radicando, quindi l'equazione irrazionale $\sqrt[n]{f(x)}=g(x)$ si risolve elevando ad n entrambi i menbri dell'equazione: $f(x)=g^n(x)$

Esempi

- $\sqrt[3]{x-2}=\frac{1}{2}$

Elevando al cubo si ha $x-2=\frac{1}{8} \rightarrow x=2+\frac{1}{8} \rightarrow x=\frac{17}{8}$

- $\sqrt[3]{-3x^2+3x+1}=x$

Elevando al cubo si ha $-3x^2+3x+1=x^3 \rightarrow (x-1)^3=0 \rightarrow x-1=0 \rightarrow x=1$

- Per l'equazione $\sqrt[3]{\frac{x}{2x+3}}=\frac{2-5x}{4}$ il dominio del radicando è l'insieme $H=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x\neq-\frac{3}{2}\right\}$ e dunque ***I.S.*** $\subseteq$ ***H*** .
- Per l'equazione $\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=\frac{4x+x^2}{3-x}$ ***I.S.*** $\subseteq$ ***H*** dove H è $H=\{x\in\mathbb{R}\,|x\neq 0\wedge x\neq 3\}$ in cui esistono reali entrambi i membri dell'equazione.

*Determinate l'insieme* H *in cui si possono individuare le soluzioni delle seguenti equazioni:*

**94** $\sqrt{3x+10}=1-\frac{3}{2}x$

**95** $\sqrt[3]{3x+10}=1-\frac{3}{2}x$

**96** $\frac{4x+1}{2x}=\sqrt{\frac{2}{x+1}}$

**97** $\frac{4x+1}{2x}=\sqrt[3]{\frac{2}{x+1}}$

**Procedura per determinare l'Insieme Soluzione di un'equazione irrazionale**

L'equazione contiene un solo radicale: la forma canonica è $\sqrt[n]{f(x)}=g(x)$

Esempi

- Determiniamo I.S. dell'equazione $\sqrt{2x}=x^2-x$
  1°. portiamo l'equazione in forma canonica
  2°. determiniamo l'insieme H in cui si possono determinare le soluzioni dell'equazione; abbiamo già visto in precedenza che $I.S.\subseteq H$ con $H=\begin{cases}2x\geq 0\\ x^2-x\geq 0\end{cases}\rightarrow H=\{x\in\mathbb{R}\mid x=0\vee x\geq 1\}$
  3°. rendiamo razionale l'equazione elevando ambo i membri all'esponente uguale all'indice della radice, quindi otteniamo $\left(\sqrt{2x}\right)^2=\left(x^2-x\right)^2\rightarrow 2x=x^4-2x^3+x^2$
  4°. risolviamo l'equazione ottenuta
  $x^4-2x^3+x^2-2x=0\rightarrow x\cdot\left(x^2+1\right)\cdot(x-2)=0\rightarrow x=0\vee x=2$
  5°. confrontiamo le soluzioni con H e in questo caso possiamo affermare che l'insieme soluzione dell'equazione razionale è anche l'Insieme Soluzione dell'equazione irrazionale assegnata $I.S.=\{0;2\}$

- Determiniamo I.S. dell'equazione $\sqrt[3]{\dfrac{2x^2-1}{x}}-x=0$
  1°. l'equazione in forma canonica è $\sqrt[3]{\dfrac{2x^2-1}{x}}=x$
  2°. l'insieme H in cui si possono determinare le soluzioni dell'equazione è $H=\mathbb{R}_0$, infatti basta $x\neq 0$ affinché sia reale il radicale
  3°. eleviamo alla terza potenza ambo i membri dell'equazione e otteniamo l'equazione razionale $\dfrac{2x^2-1}{x}=x^3$
  4°. risolviamo l'equazione ottenuta
  $\dfrac{2x^2-1}{x}=x^3\rightarrow 2x^2-1=x^4\rightarrow x^4-2x^2+1=0\rightarrow\left(x^2-1\right)^2\rightarrow x_1=x_2=1\vee x_3=x_4=-1$
  5°. confrontiamo le soluzioni con H e possiamo dire $I.S.=\{+1;-1\}$

- Riprendiamo l'equazione risolvente del problema posto all'inizio del paragrafo: $2x+2+\sqrt{2x^2+4x+4}=24$ e determiniamone l'I.S. e quindi la risposta all'obiettivo del problema stesso.

Isoliamo il radicale e determiniamo l'insieme H:
$\sqrt{2x^2+4x+4}=22-2x\rightarrow H=\begin{cases}2x^2+4x+4\geq 0\\ 22-2x\geq 0\end{cases}\rightarrow H=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq 11\}$ e per la condizione iniziale sull'incognita il problema avrà soluzione se $0<x\leq 11$ (*).
Trasformiamo l'equazione in razionale elevando al quadrato ambo i membri: $x^2-46x+240=0$ le cui soluzioni sono $x_1=6\vee x_2=40$. Solamente $x=6$ soddisfa la condizione (*), quindi $\overline{AC}=6;\ \overline{AB}=8\rightarrow Area=24\,(cm^2)$.

*Determinare I.S. delle seguenti equazioni:*

98 $\sqrt[4]{2x+1}=2$ $\qquad$ $\sqrt[3]{2x+1}=-2$

99 $\sqrt{2x+1}=7$ $\qquad$ $\sqrt{4-x^2}=1$

100 $\sqrt{5x-2}=-4$ $\qquad$ $\sqrt{2-x^2+x}=6$

101 $\sqrt{2x^2+9}=2$ $\qquad$ $\sqrt[3]{16x-64}=x-4$

102 $\sqrt{3x+10}=1-\frac{3}{2}x$ $\qquad$ $\sqrt[3]{3x+10}=1$

103 $-3=\sqrt{\frac{2}{x+1}}$ $\qquad$ $x-\sqrt{x+2}=0$

104 $\sqrt[3]{3x+1-3x^2}=x$ $\qquad$ $\sqrt{25-x^2}+x=7$

105 $\sqrt{x^2+1}-3+x^2=(x-2)^2$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}=\frac{1}{x-3}$

106 $\sqrt{\frac{2+3x}{x}}=\frac{1}{x}+1$ $\qquad$ $\sqrt{3x+10}=1-\frac{3}{2}x$

107 $\sqrt[3]{3x+10}=1$ $\qquad$ $-3=\sqrt{\frac{2}{x+1}}$

108 $x-\sqrt{x+2}=0$ $\qquad$ $\sqrt[3]{3x+1-3x^2}=x$

109 $\sqrt{25-x^2}+x=7$ $\qquad$ $\sqrt{x^2+1}-3+x^2=(x-2)^2$

110 $\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}=\frac{1}{x-3}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{2+3x}{x}}=\frac{1}{x}+1$

111 $\sqrt{x+2}=x-1$ $\qquad$ $2\sqrt{x^2-4x-33}-x=15$

112 $3-x-\sqrt{x-2x^2+5}=0$ $\qquad$ $x+\sqrt{25-x^2}=7$

113 $\sqrt{5x^2+4x-8}+3x=2$ $\qquad$ $4-3x+\sqrt{8x^2-21x+34}=0$

114 Basta la condizione $x\geq 0$ per determinare l'insieme H in cui si possono ricercare le soluzioni di ciascuna delle equazioni $a]\ \sqrt{x}=\frac{1}{x+1}$ e $b]\ \sqrt[4]{x}=\frac{1}{4-x^2}$ ?

115 Verificate che per l'equazione $3+\sqrt{7-3x}-x=0$ l'insieme H è vuoto.

116 Perché l'equazione $\sqrt{x^2-1}=-3$ è impossibile?

## ►2. Equazioni con due radicali

Non potendo stabilire una forma canonica, procederemo mediante esempi al fine di acquisire un metodo risolutivo a seconda dei casi che si possono presentare.

Esempi

- $\sqrt{2-\frac{1}{x}}=\sqrt{x}$ .

Osserviamo subito che i due membri, nell'insieme in cui entrambi hanno significato, sono positivi.

Determiniamo quindi l'insieme H di definizione per entrambi: $H=\begin{cases}2-\frac{1}{x}\geq 0\\ x\geq 0\end{cases}$ e risolvendo le due disequazioni otteniamo $\begin{cases}x<0\vee x\geq\frac{1}{2}\\ x\geq 0\end{cases}$ da cui $H=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x\geq\frac{1}{2}\right\}$ ; eleviamo al quadrato entrambi i membri ottenendo l'equazione razionale fratta $2-\frac{1}{x}=x$ da cui $x_1=x_2=1$ poiché tale valore appartiene all'insieme H si ha $I.S.=\{1\}$ .

- $\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{2x^2+6x}=0$

Separiamo i due radicali applicando il primo principio delle equazioni $\sqrt{x+3}=\sqrt[3]{2x^2+6x}$ .
Affinché i due membri dell'equazione siano positivi dobbiamo porre la condizione di positività anche al radicando del radicale cubico:
$H=\begin{cases}x+3\geq 0\\ 2x^2+6x\geq 0\end{cases}$ da cui $H=\{x\in\mathbb{R}\,|x=-3\vee x\geq 0\}$ . Per trasformare l'equazione in una razionale, essendo 6 il minimo comune indice, possiamo trasformare in $\sqrt[6]{(x+3)^3}=\sqrt[6]{(2x^2+6x)^2}$ e poi, elevando alla sesta potenza, si ha $(x+3)^3=(2x^2+6x)^2 \rightarrow (x+3)^3-(2x^2+6x)^2=0$ ora con il raccoglimento a fattor comune otteniamo $(x+3)^2\cdot(-4x^2+x+3)=0$ . Per la legge di annullamento del prodotto si ha
$(x+3)^2=0 \rightarrow x+3=0 \rightarrow x=-3$
$-4x^2+x+3=0 \rightarrow x_1=-\frac{3}{4}\vee x_2=1$ ; confrontiamo ora con gli elementi di H per ottenere l'insieme soluzione dell'equazione assegnata $I.S.=\{-3\,;1\}$ .

- $\sqrt{x}+\sqrt{x^3+2x-1}=0$ .

Separiamo i due radicali applicando il primo principio delle equazioni; si ottiene $\sqrt{x}=-\sqrt{x^3+2x-1}=0$ ; osserviamo che i due membri nell'insieme in cui sono definiti sono di segno opposto e dunque l'uguaglianza sarà vera solo nel caso in cui entrambi si annullino.
Il primo membro si annulla solo per $x=0$ che non annulla il secondo membro pertanto l'equazione è impossibile.

- $-\sqrt{x^2+3\text{x}}+\sqrt{2\text{x}+2}=0$ .

Portiamo la radice con il segno meno a secondo membro, in modo da avere due radici positive
$\sqrt{2\text{x}+2}=0\sqrt{x^2+3\text{x}}$

Poniamo le condizione sull'accettabilità della soluzione $\begin{cases}2\text{x}+2\geq 0\\ x^2+3\text{x}\geq 0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x\geq -1\\ x\leq -3\vee x\geq 0\end{cases} \rightarrow x\geq -1$

Risolvo ora l'equazione $2\text{x}+2=x^2+3\text{x} \rightarrow x^2+x-2=0$ le soluzioni sono $x_1=-2;\ x_2=1$ . Di queste due soluzioni solo la seconda soddisfa le condizioni di accettabilità.

- $\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}=2$

In questo esempio ci sono altri termini oltre i due radicali. Spostiamo dopo l'uguale il radicale negativo in modo che sia a destra sia a sinistra i termini siano positivi:
$\sqrt{x+7}=\sqrt{x-1}+2$

C.E. $\begin{cases} x+7\geq 0 \\ x-1\geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\geq -7 \\ x\geq 1 \end{cases} \rightarrow x\geq 1$

Torniamo all'equazione, eleviamo al quadrato $x+7=4+4\sqrt{x-1}+x-1 \rightarrow 4\sqrt{x-1}=4 \rightarrow \sqrt{x-1}=1$

Eleviamo nuovamente al quadrato $x-1=1 \rightarrow x=2$

Poiché 2>1 la soluzione è accettabile.

■ $\sqrt{x+12}-1=\sqrt{1-x}$

Portiamo -1 al secondo membro in modo da avere tutti termini positivi:

$\sqrt{x+12}=\sqrt{1-x}+1$

C.E. $\begin{cases} x+12\geq 0 \\ 1-x\geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\geq -12 \\ x\leq 1 \end{cases} \rightarrow -12\leq x\leq 1$

Torniamo all'equazione ed eleviamo al quadrato ambo i membri $x+12=1-x+2\sqrt{1-x}+1$ semplificando $x+5=\sqrt{1-x}$ . Scriviamo le condizioni per quest'altra equazione irrazionale

$\begin{cases} x+5\geq 0 \\ -12\leq x\leq 1 \end{cases} \rightarrow -5\leq x\leq 1$

Eleviamo al quadrato l'ultima equazione ottenuta $x^2+10\text{x}+25=1-x \rightarrow x^2+11\text{x}+24=0$

Le soluzioni sono x=-8 non accettabile, x=-3 accettabile.

■ $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-4\text{x}}=x$

Trasporto a destra il radicale che ha il segno meno, in modoc he diventi positivo

$\sqrt{x^2+1}=\sqrt{1-4\text{x}}+x$

In questo caso risulta problematico risolvere il sistema con tutte le condizioni di accettabilità, perché bisognerebbe risolvere anche la disequazione irrazionale $\sqrt{1-4\text{x}}+x\geq 0$ . Ci limitremo allora a risolvere l'equazione e poi verificare le soluzioni.

Elevo al quadrato ambo i membri $x^2+1=1-4\text{x}+x^2+2\text{x}\sqrt{1-4\text{x}}$

Semplificando si ha $4\text{x}=2\text{x}\sqrt{1-4\text{x}} \rightarrow 2\text{x}=x\sqrt{1-4\text{x}} \rightarrow 2\text{x}-x\sqrt{1-4\text{x}}=0 \rightarrow x(2-\sqrt{1-4\text{x}})=0$

Una soluzione è x=0, la seconda si ottiene da $2-\sqrt{1-4\text{x}}=0 \rightarrow 2=\sqrt{1-4\text{x}}$ elevando al quadrato si ha $4=1-4\text{x} \rightarrow x=-\frac{3}{4}$ .

Verifichiamo ora le soluzioni

Per x=0 si ha $\sqrt{0^2+1}-\sqrt{1-4\cdot 0}=0 \rightarrow 1-1=0$ soluzione accettabile.

Per $x=-\frac{3}{4}$ si ha $\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2+1}-\sqrt{1-4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}=-\frac{3}{4}$ sviluppando i calcoli si ha $\frac{5}{4}=\frac{5}{4}$ soluzione accettabile.

*Risolvi le seguenti equazioni con due radicali*

**117** Assegna il valore di verità alla seguente proposizione: "L'I.S. dell'equazione $\sqrt{3x-5}=\sqrt{1-x}$ è l'insieme vuoto."

**118** $\sqrt{3x-2}=\sqrt{2x-3}$ R. impossibile

**119** $\sqrt{x-2}=1-\sqrt{3-x}$ R. $x=2\,;\,x=3$

**120** $\sqrt{6-3x}=2+\sqrt{x+1}$ R. $x=\dfrac{3-2\sqrt{6}}{4}$

**121** $\sqrt{4-3x}=\sqrt{x^2-x-1}$ R. $x=-1-\sqrt{6}$

**122** $\sqrt{3-2x}=-\sqrt{x^2+3}$ R. $\emptyset$

**123** $\sqrt{3-x}=\sqrt{x+1}-1$ R. $x=\dfrac{2+\sqrt{7}}{2}$

**124** $2\sqrt{x-1}=\sqrt{1+2x}+1$ R. $x=4+2\sqrt{2}$

**125** $3\sqrt{x-x^2}=2\sqrt{x-1}$ R. $x=1$

**126** $\sqrt{x+1}=3\sqrt{4-x}$ R. $x=\dfrac{7}{2}$

**127** $\sqrt{x^2-x-3}=2\sqrt{x+5}$ R. $x_1=\dfrac{5+3\sqrt{13}}{2}\,;\,x_2=\dfrac{5-3\sqrt{13}}{2}$

**128** $1+2\sqrt{1-\dfrac{2}{3}x}=\sqrt{2x+1}$ R. $x=\dfrac{60}{49}$

**129** $4-\sqrt{x-2}=\sqrt{x-1}+3$ R. $x=2$

**130** $2-2\sqrt{2-x}=4\sqrt{1-x}$ R. $x=1$

**131** $\sqrt{x^3-2x^2}=3\sqrt{x^2-2x}$ R. $x_1=0\,;\,x_2=2\,;\,x_3=9$

**132** $3\sqrt{x^4-x^3}=4\sqrt{x^4+2x^3}$ R. $x_1=0\,;\,x_2=-\dfrac{41}{7}$

**133** $\sqrt{2x^2-4x-3}=\sqrt{x^2-1}$ R. $x=2+\sqrt{6}$

**134** $\sqrt{x^2+8}=\sqrt{4-x^2}$ R. $\emptyset$

**135** $\sqrt{x^2-2x+3}=\sqrt{1-x^2+2x}$ R. $x=1$

**136** $\sqrt{4x-7}+\sqrt{7x-4x^2}=0$

**137** $\sqrt{x^2+6x+9}+2\cdot\sqrt{1-x}=0$

## ►3. Equazioni che contengono due radicali e altri termini

Esempio

- $\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}=2$ .

1°. applicando il primo principio, separiamo i due radicali avendo cura di lasciare a sinistra dell'uguale il radicale col segno positivo $\sqrt{x+7}=2+\sqrt{x-1}$ .

2°. determiniamo l'insieme H per la realtà dei radicali $H=\begin{cases}x+7\geq 0\\ x-1\geq 0\end{cases} \rightarrow H=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq 1\}$

3°. analizziamo il secondo membro che dovrà essere positivo per permettere di costruire l'equazione razionale da risolvere $2+\sqrt{x-1}\geq 0$ che in H è certamente positivo essendo somma di termini positivi.

4°. eleviamo ambo i membri al quadrato $\left(\sqrt{x+7}\right)^2=\left(2+\sqrt{x-1}\right)^2$ facendo attenzione al secondo membro che si presenta come quadrato di binomio $x+7=4+4\cdot\sqrt{x-1}+(x-1) \rightarrow 4\cdot\sqrt{x-1}=4$

5°. ci troviamo di fronte un'altra equazione irrazionale, ma per le condizioni poste possiamo procedere elevando al quadrato ambo i membri $x-1=1 \rightarrow x=2$

6°. confrontiamo con l'insieme H , essendo 2 un elemento di H possiamo concludere $I.S.=\{2\}$ .

- $\sqrt{x+12}-1=\sqrt{1-x}$ .

Determiniamo l'insieme H per la realtà dei radicali, $H=\begin{cases}x+12\geq 0\\ 1-x\geq 0\end{cases} \rightarrow H=\{x\in\mathbb{R} \mid -12\leq x\leq 1\}$

Notiamo che i due radicali sono già separati; ci conviene comunque trasportare il termine noto a destra dell'uguale ottenendo $\sqrt{x+12}=1+\sqrt{1-x}$ perché in H il secondo membro risulti positivo.
L'equazione razionale che si ottiene elevando al quadrato è $\sqrt{x-1}=5+x$ e prima di renderla razionale dobbiamo porre la condizione di positività sul secondo membro. L'insieme $H_1$ in cui si verificano le condizioni per elevare al quadrato si ottiene dal sistema $H_1=\begin{cases}5+x\geq 0\\ -12\leq x\leq 1\end{cases}$ pertanto $H_1=\{x\in\mathbb{R} \mid -5\leq x\leq 1\}$ . Possiamo elevare al quadrato ottenendo l'equazione $x^2+11x+24=0$ le cui soluzioni sono $x_1=-8\vee x_2=-3$ |; confrontando con l'insieme $H_1$ possiamo concludere che $I.S.=\{-3\}$ .

- $\sqrt{2x-5}=3-\sqrt{x+1}$

Determiniamo l'insieme H ponendo per entrambi i radicali la condizione di realtà: $H=\begin{cases}2x-5\geq 0\\ x+1\geq 0\end{cases} \rightarrow H=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, x\geq\frac{5}{2}\right\}$

Prima di procedere con l'elevamento a potenza, dobbiamo porre la condizione di concordanza del segno: applicando il primo principio, trasportiamo al primo membro il radicale di destra e nell'equazione trovata $\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+1}=3$ è assicurata la concordanza del segno.
Eleviamo al quadrato $\left(\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+1}\right)^2=3^2 \rightarrow (2x-5)+(x+1)+2\sqrt{(2x-5)\cdot(x+1)}=9$ e otteniamo l'equazione irrazionale $2\sqrt{(2x-5)\cdot(x+1)}=13-13x$ contenente un solo radicando. Nell'insieme H è garantita la realtà del radicale, ma dobbiamo imporre che il secondo membro sia non negativo; otteniamo $H_1=\begin{cases}x\geq\frac{5}{2}\\ 13-3x\geq 0\end{cases} \rightarrow H_1=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, \frac{5}{2}\leq x\leq\frac{13}{2}\right\}$ in cui cerchiamo le soluzioni dell'equazione assegnata.
Procedendo elevando al quadrato si ha l'equazione razionale $x^2-66x+189=0 \rightarrow x_1=3\vee x_2=63$ e confrontando con $H_1$ si conclude $I.S.=\{3\}$ .

- $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-4x}=x$

Determiniamo l'insieme **H** ponendo per entrambi i radicali la condizione di realtà: $H=\begin{cases}1-4x\geq 0\\ x^2+1\geq 0\end{cases} \rightarrow H=\left\{x\in\mathbb{R} \middle| x\leq\frac{1}{4}\right\}$

Trasportiamo al secondo membro il radicale preceduto dal segno negativo: $\sqrt{x^2+1}=x+\sqrt{1-4x}$ .

Prima di elevare al quadrato dovremmo porre le condizioni per la concordanza del segno e quindi risolvere $x+\sqrt{1-4x}\geq 0$ che è una disequazione irrazionale, argomento che sarà oggetto di studi superiori. Usiamo allora il metodo della verifica finale: si risolve l'equazione elevando al quadrato e giunti alle soluzioni si vanno a sostituire, una alla volta, nell'equazione iniziale individuando quale dei risultati rende vera l'uguaglianza

$\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2=\left(x+\sqrt{1-4x}\right)^2 \rightarrow x^2+1=x^2+(1-4x)+2x\cdot\sqrt{1-4x} \rightarrow 2x\cdot\sqrt{1-4x}=4x$ ·

Quest'ultima equazione presenta un solo radicale reale in H e ha i due membri concordi. Possiamo procedere elevando al quadrato oppure raccogliendo $2x$ a fattor comune e poi applicare la legge di annullamento del prodotto:

$2x\sqrt{1-4x}-2=0 \rightarrow x=0\vee\sqrt{1-4x}=2$ e da questa si ottiene $x=-\frac{3}{4}$ .

*Verifica:*

1. sostituiamo $x=0$ nell'equazione iniziale (%) e otteniamo $1-1=0$ vero
2. sostituiamo $x=-\frac{3}{4}$ nell'equazione iniziale (%) e otteniamo $\frac{5}{4}-2=-\frac{3}{4} \rightarrow -\frac{3}{4}=-\frac{3}{4}$ vero.

*Conclusione:* $I.S.=\left\{0;-\frac{3}{4}\right\}$

**138** Assegnate il valore di verità alla proposizione: " Nell'insieme $H=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 2\}$ l'equazione $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-2}+4=0$ è impossibile".

*Risolvi le seguenti equazioni irrazionali:*

**139** $\sqrt{x^2-4}=3+2\sqrt{1-x^2}$ R. $\emptyset$

**140** $\sqrt{4+x^2}=1+\sqrt{x^2-1}$ R. $x_1=\sqrt{5};x_2=-\sqrt{5}$

**141** $\sqrt{2x+1}=3+2\sqrt{x-6}$ R. $x=26-6\sqrt{11}$

# MATEMATICA C$^3$ -ALGEBRA 2

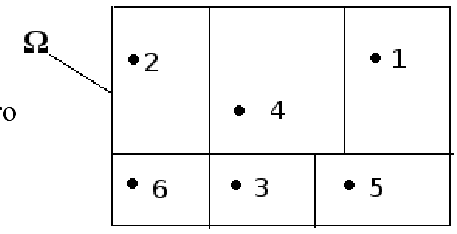
# 7. LA PROBABILITA'

*Dice* foto di Matsuyuki
http://www.flickr.com/photos/matsuyuki/201651074/

**Indice generale**

## ►1. Gli eventi

L’esito del lancio di una moneta o di un dado, l’esito della prossima estrazione del lotto, il sesso di un nascituro, la durata di una lampadina o di un computer sono esempi di fenomeni la cui realizzazione non è certa a priori e vengono per questo detti eventi aleatori (dal latino alea, dado).
Spesso è necessario prendere decisioni in condizioni di incertezza: in quale università proseguire gli studi, decidere se fare il vaccino contro l'influenza, scommettere sulla vincita della mia squadra nel prossimo campionato di serie A.
E’ quindi fondamentale nei confronti di un fenomeno dall’esito incerto, poter identificare quali sono gli eventi che si possono verificare ed inoltre riuscire ad esprimere il proprio grado di fiducia nel verificarsi di tali eventi.
Quali sono gli eventi possibili per un dato fenomeno aleatorio?
Supponiamo di lanciare un dado e di essere interessati alla faccia che si presenta dopo aver effettuato il lancio.
Il lancio del dado rappresenta il **fenomeno** oggetto del nostro studio, l’uscita del numero 4 o l’uscita di un numero dispari sono detti **eventi aleatori o casuali**, in quanto sappiamo che si presenterà una delle facce, ma non si può dire a priori quale.
DEFINIZIONE: Si chiama **evento casuale** o **aleatorio** un risultato o un fatto qualunque di cui si possa dire se l'evento si è verificato o meno.
Se si considera la proposizione “Oggi farà bel tempo” è evidente che non è chiaro cosa si intende per bel tempo (senza pioggia? senza nuvole? con il sole?) né il luogo a cui ci si riferisce. Sarebbe meglio affermare per esempio “stamani a Milano ci sarà il sole”. E' necessario quindi specificare con precisione l'evento che si considera in modo da essere sicuri se l'evento si è verificato o meno.
Nel lancio di un dado sono da considerare possibili sei risultati, espressi dai numeri da 1 a 6 e uno solo di questi eseguita la prova deve realizzarsi.




Chiamiamo questi sei risultati **eventi elementari** e indichiamo il loro insieme con Ω.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

DEFINIZIONE. Si chiama **spazio degli eventi**, l’insieme di tutti gli esiti possibili del fenomeno considerato. Tale insieme viene indicato con Ω .

L'insieme Ω non esaurisce la totalità degli eventi collegati al lancio del dado; non comprende per esempio l'evento P = {Numero pari} o l'evento M = {Numero minore di 3}. Tuttavia Ω permette di rappresentare qualsiasi evento come particolare sottoinsieme di Ω.
DEFINIZIONE. Si chiama **evento elementare** ogni elemento dell’insieme Ω, mentre **evento composto** un sottoinsieme qualsiasi di Ω.

Esempio

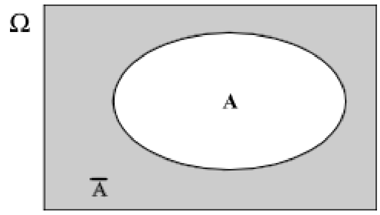
Estraiamo una carta da un mazzo di 52 e consideriamo i seguenti eventi: uscita di un asso di cuori, uscita di un re. Qual è la differenza fra questi due eventi?
Il primo dei due è un *evento elementare*, mentre l’altro è un evento formato da 4 eventi elementari (tutti i possibili re presenti nel mazzo) e viene detto *evento composto*.
Sono altri esempi di eventi composti l’uscita di un numero dispari nel lancio di un dado o l’estrazione di due palline rosse da un’urna contenente 3 palline rosse e 7 nere.
Consideriamo ora due eventi che rivestono una particolare importanza: l’uscita del 7 nel lancio di un dado e l’uscita di una qualunque delle 6 facce del dado.
E' evidente che l'uscita del 7 nel lancio del dado non si verificherà mai, mentre l'uscita di una qualunque delle sei facce sarà sempre vera.

DEFINIZIONE: Chiameremo **evento impossibile**, e lo indicheremo Ø un evento che non può verificarsi in alcun caso, un evento per il quale è conseguenza dei fatti che sia **falso**.

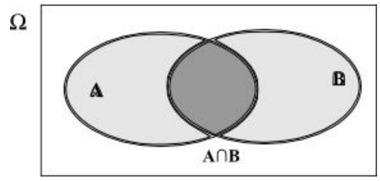
Chiameremo invece **evento certo** l'insieme Ω costituito dagli eventi elementari e quindi da tutti gli esiti possibili del fenomeno considerato.

Gli eventi elementari di un insieme A e gli eventi composti che si possono ottenere con gli eventi elementari di A formano lo spazio degli eventi che viene indicato con $\wp(A)$ o insieme delle parti di A
Gli eventi sono gli oggetti dello studio della probabilità e si indicano con le lettere maiuscole A, B, … mentre per le operazioni e le relazioni tra eventi si usano i corrispondenti simboli che si sono utilizzati per le operazioni e relazioni tra insiemi. Molto utile è anche la rappresentazione con i diagrammi di Venn.

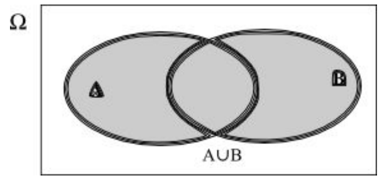
1. La **negazione** di un evento A indicata con $\overline{A}$ indica che $\overline{A}$ *non si verifica* quando A *si verifica* e viceversa.



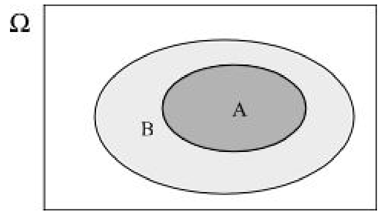

2. L'**intersezione** tra gli eventi A e B sarà indicata con $C = A \cap B$ e sarà *verificata* se gli eventi A e B si verificheranno insieme.



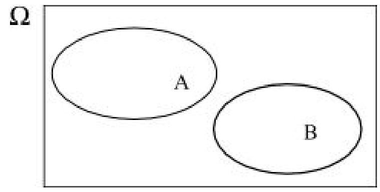

3. L'**unione** tra gli eventi A e B si indicherà con $C = A \cup B$ e sarà verificata se almeno uno dei due eventi sarà verificato.



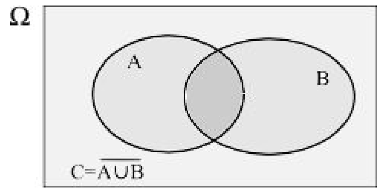

4. L'evento A **implica** l'evento B e si indicherà con $A \subseteq B$ se ogni volta che A è verificato anche B lo sarà.



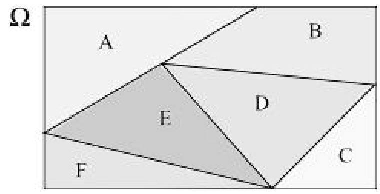

5. Due o più eventi si diranno **incompatibili**, se il verificarsi dell'uno escluderà il verificarsi di tutti gli altri. Gli eventi A e B sono incompatibili.




6. Due o più eventi si diranno **esaustivi** se è necessario che almeno un evento dell'insieme si verifichi. Nell'esempio qui a fianco A, B e C sono eventi esaustivi.




7. Un insieme di eventi che goda delle proprietà 5 e 6, con eventi che sono incompatibili ed esaustivi, genera una partizione nello spazio degli eventi possibili. L'unione è identificabile con l'evento certo $\Omega$ . Gli eventi che costituiscono la partizione di $\Omega$ sono detti **eventi elementari** o **costituenti**.



DEFINIZIONE. Se n eventi A, B, …, F, sono esaustivi (A∪ B∪ … F = Ω ) e a due a due incompatibili (A∩B = A∩C … = B∩C … =C∩D … = D∩E … =E∩F = Ø) diremo che essi formano una **partizione dello spazio degli eventi**. Tutti gli eventi, identificabili da tutti i possibili sottoinsiemi di Ω, sono dati dall'**insieme delle parti** di Ω indicato con $\wp(\Omega)$.

Ricordiamo che la cardinalità dell'insieme delle parti cioè il numero degli eventi che si possono formare con gli elementi di Ω è dato da $card(\wp(\Omega))=2^n$ , dove n rappresenta il numero degli eventi elementari.
Così nel lancio del dado abbiamo $2^6=64$ possibili eventi. Naturalmente sono considerati anche l'insieme vuoto $\emptyset$ che rappresenta l'evento impossibile e l'insieme $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ che rappresenta l'evento certo.

**1** Quali dei seguenti eventi sono certi, probabili, impossibili

a) il giorno di pasquetta pioverà; C P I
b) comprando un biglietto della lotteria vincerò il primo premio; C P I
c) quest'anno sarò promosso; C P I
d) il 30 febbraio sarà domenica. C P I

**2** Aprendo a caso un libro di 200 pagine indica se gli eventi seguenti sono impossibili, certi o casuali e in questo ultimo caso indica se sono elementari.

Si prenda la pagina 156 …..........................
Si prenda la pagina 201 …..........................
Si prenda una pagina minore o uguale a 200 …..........................
Si prenda una pagina multipla di 10 …..........................

Esempio

| Lanciando una moneta ottengo croce | | |
|---|---|---|
| Insiemi che identificano l'evento | Spazio degli eventi | Numero di tutti gli eventi |
| $E=\{croce\}$ | $\Omega=\{testa, croce\}$ | 4 |
| Lanciando un dato ottengo 1 o 6 | | |
| $E=\{1,6\}$ | $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ | 64 |
| Estraendo una pallina da un'urna contenente 15 palline numerate da 1 a 15, si presenta una pallina con un numero primo | | |
| $E=\{2,3,5,7,11,13\}$ | $\Omega=\{x\in\mathbb{N} \mid 1\leq x\leq 15\}$ | $2^{15}$ |
| Estraendo una carta da un mazzo di 40 carte, si presenta il 7 di denari | | |
| $E=\{7\ denari\}$ | $\Omega=\{x\in A \mid A=\{Mazzo\ da\ 40\ carte\}\}$ | $2^{40}$ |

**3** Completa la tabella

| “Lanciando due monete ottengo facce diverse” | | |
|---|---|---|
| Insiemi che identificano l'evento | Spazio degli eventi | Numero di tutti gli eventi |
| ………….. | ………….. | ……… |
| “Lanciando un dato ottengo un numero pari” | | |
| ………….. | ………….. | ……… |
| “Estraendo una pallina da un'urna contenente 15 palline numerate da 1 a 15, si presenta una pallina con un numero multiplo di 3” | | |
| ………….. | ………….. | ……… |
| “Estraendo una carta da un mazzo di 40 carte, si presenta un asso” | | |
| ………….. | ………….. | ……… |

**4** Si lanci 3 volte una moneta e si osservino le sequenze di teste (T) e croci (C) che si presentano.

Lo spazio degli eventi è $S=\{CCC, CCT, \ldots, \ldots, \ldots, \ldots, \ldots, \ldots\}$
Siano A l'evento "tutti i lanci siano teste o croci" e B l'evento "2 o 3 croci si presentino consecutivamente"
$A=\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
$B=\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

Allora: $A\cup B=\{\ldots\ldots\ldots\}$ rappresenta l'evento ..........................................
$A\cap B=\{\ldots\ldots\ldots\}$ rappresenta l'evento ..........................................
$B-A=\{\ldots\ldots\ldots\}$ rappresenta l'evento ..........................................
$\overline{B}=\{\ldots\ldots\ldots\}$ rappresenta l'evento ..........................................

**5** Si lanci 2 volte una moneta e si osservino le sequenze di teste (T) e croci (C) che si presentano.
Sia $A=\{TC, TT\}$ , $B=\{TC, CT, CC\}$ individua le relazioni corrette:

$A\cup B=\{TC, CT, CC\}$ V F
$A\cap B=\{TC\}$ V F
$\overline{A}=B$ V F
A e B sono incompatibili V F
$\overline{B}=\{TT\}$ V F
$A-B=\overline{B}$ V F
$A\cup B=\{TT, TC, CC\}$ V F

**6** Estraendo una carta da un mazzo di 40 carte napoletane, individua fra le seguenti le coppie di eventi incompatibili:

a) La carta estratta è un re.
b) La carta estratta è di spade.
c) La carta estratta è un 5.
d) La carta estratta è una figura.
e) La carta estratta è di denari.
f) La carta estratta è un multiplo di 3.
g) La carta estratta non è una figura.

Quali sono i 2 eventi la cui unione genera un evento certo?

**7** Considerando la distribuzione dei sessi in famiglie con due figli in cui lo spazio degli eventi $\Omega=\{MM, MF, FM, FF\}$ quali sono l'intersezione e l'unione degli eventi $E_1$ ="Il primo figlio è maschio" e $E_2$ = "Il secondo figlio è maschio"

**8** In un intervallo di cinque minuti un cucù può essere sentito da 1 a 20 volte. Sia $E=\{x\in\mathbb{N} \mid x\leq 3\}$ da cosa è rappresentato $\overline{E}$ .

## ►2. Definizioni di probabilità

Nel linguaggio comune l'uso del termine probabilità è abbastanza chiaro e uniforme. Si dice che un certo "fatto" o "evento" è più o meno probabile a seconda che ci si aspetti che si verifichi più o meno facilmente.
La probabilità è dunque una misura delle aspettative nel verificarsi di un evento. Il valore della probabilità è la misura (un numero) che esprime l'opinione del soggetto (decisore) in merito al verificarsi di un ben determinato evento A, ovvero esprime il suo grado di fiducia nel verificarsi dell'evento che dipende dalle informazioni che si hanno a disposizione al momento di effettuare la valutazione.
Se diciamo che oggi pioverà con probabilità $0,20=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$ intendiamo che siamo disposti a scommettere 20 centesimi per avere 1 euro nel caso che piova e a perdere i 20 centesimi della posta nel caso che non piova.
Diamo dunque una definizione di probabilità:

DEFINIZIONE. La probabilità dell'evento A è quel valore P(A) che si ottiene dalla quota q che l'individuo che procede alla valutazione è disposto a pagare per ricevere una vincita S nel caso si verifichi l'evento. Quindi $P(A)=\frac{q}{S}$ .

Per ottenere una valutazione coerente, per valutare quanto siamo disposti a perdere/vincere nella scommessa, dobbiamo immedesimarci nei due ruoli, quello dello scommettitore e quello del banco. Inoltre le somme che scommettiamo devono essere sigmificative per chi procede alla valutazione.
Nessun individuo coerente scommetterebbe su un evento impossibile una quota maggiore di 0 qualunque sia la vincita e nessun individuo come banco pagherebbe una vincita S maggiore di una quota q per un evento certo.
Da queste considerazioni deduciamo che la misura della probabilità appartiene all'intervallo [0,1], essendo 0 il valore che corrisponde all'evento impossibile e 1 quello che corrisponde all'evento certo.
Occorre inoltre che non ci siano scommesse olandesi. Una scommessa olandese è una scommessa che prevede una vincita o una perdita certa. Se per esempio si accettasse di scommettere 15 per la vittoria di A, 10 per la vittoria di B e 30 per la vittoria di A o di B, qualsiasi individuo potrebbe guadagnare 5 qualunque sia l'evento che si verifica, agendo come scommettitore per A e per B e come banco per A∪B. Analizziamo tutti i casi possibili:

| Evento: vince | Scommessa su A | Scommessa su B | Banco per A o B | Saldo |
|---|---|---|---|---|
| A: | $+85$ | $-10$ | $-70$ | $+5$ |
| B | $-15$ | $+90$ | $-70$ | $+5$ |
| né A né B | $-15$ | $-10$ | $+30$ | $+5$ |

Per eliminare la scommessa olandese, se due eventi sono incompatibili cioè disgiunti, occorre che $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ .

### Regole per la probabilità

Prima di entrare nella valutazione della probabilità sintetizziamo le regole che abbiamo appena introdotto .
La probabilità è un numero reale non negativo p associato ad ogni evento E: in simboli: $p=P(E),$ tale che:
1. Se l'evento E è certo $P(E)=1,$ se l'evento E è impossibile $P(E)=0$ ;
2. Se gli eventi A e B sono incompatibili $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
3 Se l'evento $E$ è un evento aleatorio e $\overline{E}$ l'evento complementare, dato che i due eventi E e $\overline{E}$ sono incompatibili e esaustivi dalle due regole precedenti deriva: $P(E)+P(\overline{E})=1$ e $P(\overline{E})=1-P(E)$ .
Può essere utile pensare alla misura della probabilità **p** di un evento come la parte di una massa unitaria che dobbiamo "spalmare" sull'evento.
Abbiano dato le regole della probabilità, ma come si procede alla sua valutazione? Come si fa a spalmare la quantità che ci sembra giusta di massa sull'evento?

### Lo schema classico

La valutazione della probabilità a volte si riconduce a semplici giudizi di equiprobabilità: cioè ogni evento elementare dello spazio degli eventi ha la stessa probabilità. Così nel lancio di un dado, nel gioco della tombola, nel gioco delle carte tutti gli eventi elementari hanno la stessa probabilità. Quindi se $n$ sono gli eventi elementari la probabilità di ciascuno di essi è $\frac{1}{n}$.

La probabilità di un evento E è data dal rapporto tra il numero f dei casi favorevoli al verificarsi di E e il numero n di tutti i casi possibili, purché ugualmente possibili. In simboli:

$$\boxed{P(E)=\frac{f}{n}}$$

Mentre nei giochi di sorte si realizzano le condizioni per calcolare tale probabilità (conoscenza a priori dei casi possibili, di quelli favorevoli e condizione di equiprobabilità) esistono altri eventi casuali per i quali è difficile o impossibile calcolare tale probabilità.

Esempi

- *Calcoliamo la probabilità che lanciando un dado regolare esca*
  *A. un numero dispari,* *B. il numero 1,* *C. il numero 6,* *D. un multiplo di 3.*

Dato che l'uscita di ogni faccia del dado si presuppone abbia la stessa probabilità possiamo applicare lo schema classico.

Lo spazio degli eventi elementari contiene 6 elementi $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, cioè $n=6$ sono i casi possibili; l'evento A "esca un numero dispari" è $A=\{1,3,5\}$ che contiene 3 elementi, $f=3$, i casi favorevoli sono 3. Dunque si ha: $P(A)=\frac{f}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0{,}5=50\%$

$P(B)=\frac{1}{6}$ c'è un solo caso favorevole (il numero 1) e 6 casi possibili (le 6 facce del dado).

$P(C)=\frac{1}{6}$ come per il caso precedente c'è un solo caso favorevole su 6 possibili.

$P(D)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ i casi favorevoli sono 2 (i multipli di 3 sono il 3 e il 6), i casi possibili sempre 6.

- *Se in un sacchetto ho 3 palline rosse e 2 palline gialle qual è la probabilità che estraendo a caso un pallina questa sia rossa?*

La probabilità che si estragga una pallina rossa è $p=\frac{3}{5}=0{,}6=60\%$, infatti i casi favorevoli al verificarsi dell'evento "estrarre una pallina rossa" sono 3, tante quante sono le palline rosse, i casi possibili, tutti ugualmente possibili, sono 5, tante quante palline ci sono nel sacchetto.

- *Da un mazzo di 40 carte napoletane estraiamo una carta. Calcoliamo la probabilità degli eventi:*
  *A) esce una carta di spade.*
  *B) esce una carta con il numero 12.*
  *C) esce una carta con un numero o una figura.*
  *D) esce il sette di denari*
  *E) esce un asso*

I casi possibili sono 40, dato che il mazzo è formato da 40 carte. Anche qui siamo in presenza di eventi elementari equiprobabili, applichiamo ancora lo schema di valutazione classico

L'evento A è casuale, infatti i casi favorevoli sono 10, dato che il mazzo ha 10 carte di spade:

$P(A)=\frac{10}{40}=\frac{1}{4};\quad P(B)=0 \;\; e \;\; P(C)=1$

L'evento B è impossibile dato che non esiste una carta col numero 12.

L'evento C è certo, infatti i casi favorevoli sono 40, dato che il mazzo ha 12 figure e 28 carte con un numero.

$P(D)=\frac{1}{40}$ c'è un solo sette di denari su 40 carte.

$P(E)=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}=0{,}1=10\%$ nel mazzo di 40 carte ci sono 4 assi.

## Lo schema frequentista

Se si considera una successione di eventi dello stesso tipo e che avvengono in condizioni simili come l'uscita di una determinata faccia in un dado truccato, si indica come frequenza relativa $F(E)$ il rapporto tra il numero $v$ dei casi in cui si è verificato l'evento e il numero totale delle prove $n$, cioè $F(E)=\frac{v}{n}$.

In una serie di prove ripetute nelle stesse condizioni, la frequenza relativa di un evento tende a stabilizzarsi intorno a un valore ben preciso al crescere del numero delle prove effettuate.

Si assume come probabilità dell'evento $E$ il valore intorno al quale tende a stabilizzarsi la frequenza relativa dello stesso evento, all'aumentare del numero delle prove ripetute alle stesse condizioni:

$$P(E)\approx F(E)=\frac{v}{n}$$

L'errore che si commette diventa sempre più piccolo al crescere di n. La valutazione della probabilità così definita si chiama valutazione statistica, a posteriori o frequentista.

Anche l'ambito di applicazione di tale valutazione è limitato in quanto l'ipotesi che sta alla base della definizione è che l'evento a cui si vuole assegnare la probabilità sia pensabile come uno dei possibili risultati di una determinata prova e che tale prova sia ripetibile infinite volte nelle stesse condizioni.

Si fa molto uso di questo schema di valutazione per stime della probabilità in campo economico e sanitario.

Esempi

- *In un'azienda alimentare si producono vasetti di marmellata. In uno studio di controllo sono stati evidenziati su 2500 vasetti analizzati 13 con imperfezioni e non idonei al commercio. Si valuti la probabilità dell'evento E="confezioni non idonee al commercio".*

Se si considera il campione dei vasetti analizzati significativo rispetto alla produzione complessiva delle confezioni prodotte possiamo considerare la frequenza relativa dell'evento E come misura della probabilità.

Quindi $P(E)=F(E)=\frac{13}{2500}=0{,}0052$.

- *Qual è la probabilità che un certo guidatore faccia un incidente con la macchina? Quanto deve pagare, come premio, a una compagnia di assicurazioni in modo che, se fa un incidente, la compagnia paghi per intero il danno?* Per rispondere a queste domande le compagnie di assicurazioni sono in grado di stimare, sulla base dei numerosissimi incidenti stradali che si verificano ogni anno, qual è la probabilità che un guidatore provochi un incidente d'auto.
- Un sacchetto contiene 10 palline, alcune bianche, altre nere. S estrae a caso, senza guardare nel sacchetto un pallina, si guarda il colore e si rimette il sacchetto nella pallina. Dopo 100 estrazioni abbiamo contato 78 volte la pallina bianche e 22 la pallina nera. Possiamo allora ipotizzare che nel sacchetto ci siano 8 palline bianche e 2 palline nere.

## Lo schema generale

E' la definizione di probabilità che abbiamo dato all'inizio di questo paragrafo: la probabilità dell'evento A è quel valore p che l'individuo che procede alla valutazione è disposto a a pagare per ricevere una vincita unitaria.

Se un individuo valuta pari $\frac{1}{4}=25\%$ la probabilità di un certo evento E vuol dire che è disposto a pagare 25 euro a un ipotetico banco per riceverne 100 nel caso che E si verifichi. Naturalmente la scommessa va accettata anche come banco che deve essere disposto a scommettere il $75\%=1-p$ sul fatto che E non si verifichi: $P(E)=\frac{q}{S};\ dove\ q=25\ e\ S=100$.

## Le scommesse

Lo schema generale si applica anche alle scommesse. Supponiamo di scommettere sul verificarsi di un evento $E$ a cui attribuiamo probabilità $p$. Stabiliamo inoltre di giocare e quindi perdere $q$ euro nel caso l'evento non si verifichi e di guadagnare $g$ euro nel caso l'evento si verifichi. In genere le scommesse si indicano in questo modo: si mette in rapporto la perdita con il guadagno $\frac{q}{g}$ o anche $q:g$ che si legge $q\ a\ g$. In questo caso $q$ e $g$ si chiamano le **poste** o le **messe** del gioco.

Che relazione c'è tra questo rapporto e la probabilità?

Se in un grande numero di scommesse così congegnate vincessimo la somma $g$ una frazione $p$ di volte e perdessimo la somma $q$ una frazione $1-p$, affinché il gioco risulti equo dovremmo avere $p \cdot g - q \cdot (1-p) = 0$. Isoliamo $p$ nell'uguaglianza.

$$p \cdot g - q \cdot (1-p) = 0 \rightarrow p \cdot g - q + q \cdot p = 0 \rightarrow p \cdot (g+q) = q \rightarrow p = \frac{q}{g+q}$$

La relazione è dunque questa: la probabilità di una scommessa $q:g$ è data dalla perdita q al numeratore e al denominatore la somma complessiva che si incassa data dal guadagno più quello che si è scommesso.

Esempio

- *Supponiamo che la vincita ai mondiali di calcio dell'Italia sia data* $5\,a\,12$ *o* $5:12$ *o* $\frac{5}{12}$ *dai bookmaker inglesi. Qual è la probabilità che gli allibratori inglesi assegnano alla vincita dell'Italia?*

$$P(E) = \frac{5}{5+12} = \frac{5}{17} = 0{,}294$$

- *Leggo sul sito del Corriere della Sera, che per la partita Real Madrid-Barcellona, che si giocherà questa sera, la vittoria del Real Madrid viene data 1 a 2,60.* Significa che scommettendo 1 euro possiamo vincerne 2,60: la vittoria del Real Madrid è stata quindi stimata dal giornale $p = \frac{1}{2{,}60} = \frac{100}{260} = 0{,}38...$ circa 38%.

Altri esempi sul calcolo delle probabilità

Esempio

- *Lanciando in aria 3 monete, quale dei seguenti eventi è più probabile?*

a) Ottenere su 3 monete testa,

b) ottenere su 1 moneta testa e su 2 monete croce.

Per rispondere alla domanda occorre calcolare le probabilità dei due eventi. Applichiamo la definizione classica. Dobbiamo calcolare tutti gli eventi possibili e tutti gli eventi favorevoli. Aiutiamoci con una tabella per elencare tutti i casi.

| prima moneta | seconda moneta | terza moneta |
|---|---|---|
| T | T | T |
| C | T | T |
| T | C | T |
| T | T | C |
| C | C | T |
| C | T | C |
| T | C | C |
| C | C | C |

I casi possibili sono 8.

I casi favorevoli all'evento “3 volte testa” sono 1. La probabilità di questo evento è quindi $p = \frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5$ .

I casi favorevoli all'evento “1 moneta testa e 2 monete croce” sono CCT, CTC, TCC, quindi 3, allora $p = \frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5$ .

Possiamo concludere che l'evento più probabile è ottenere 1 testa e 2 croci.

- Calcolare la probabilità che lanciando 2 dadi la somma dei numeri ottenuti sia

  *A. Il numero 1,*

  *B. il numero 12,*

  *C. il numero 6.*

Valutiamo prima di tutto il numero dei casi possibili. Elenchiamo tutti gli esiti che si possono avere lanciando due dadi:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 1 | 1 2 | 1 3 | 1 4 | 1 5 | 1 6 |
| 2 1 | 2 2 | 2 3 | 2 4 | 2 5 | 2 6 |
| 3 1 | 3 2 | … | … | … | 3 6 |
| 4 1 | … | … | … | … | 4 6 |
| 5 1 | … | … | … | … | 5 6 |
| 6 1 | … | … | … | … | 6 6 |

I casi possibili sono quindi 6x6 = 36.

A. Non è possibile ottenere il numero 1 lanciando due dadi, il numero minimo ottenibile è 2, perciò $p(A)=\frac{0}{36}=0$ , l'evento si dice impossibile.

B. Il numero 12 si può ottenere in un solo caso quando esce su emtrambi i dadi il 6, quindi

C. Il numero 6 s $p(B)=\frac{1}{36}\approx 2{,}8\%$ i può ottenere nei seguenti modi: 1+5; 2+4; 3+3; 4+2; 5+1, perciò $p(C)=\frac{5}{36}\approx 13{,}9\%$

**9** Quali tra i seguenti numeri possono essere misure di probabilità?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1,5 | 0,5 | 25% | 100% | -0,1 |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{4}{3}$ | 0 | 120% | $0,\overline{3}$ |

**10** Elenca i casi favorevoli all'evento: "lanciando tre dadi la somma delle facce è 5".

**11** Per uno studente è indifferente ricevere 350 € senza condizioni, oppure un motorino del valore 1500 € solo se sarà promosso. Qual è la probabilità che lo studente attribuisce alla sua promozione? $P(E)=0{,}23$

**12** Uno studente è disposto a puntare 10 € per riceverne 60 solo se sarà interrogato in matematica. Quale probabilità lo studente attribuisce all'eventualità di essere interrogato in matematica? $P(E)=0{,}17$

**13** Tre amici si sfidano ad una gara di scacchi. Giudico che due di essi si equivalgano, mentre ritengo che il terzo abbia probabilità doppia di ciascuno degli altri due sfidanti. Quale probabilità attribuisco a ciascuno dei tre giocatori?
$P(A)=P(B)=0{,}25$ , $P(C)=0{,}50$

**14** Un'urna contiene 3 palline bianche, 5 rosse e 7 verdi tutte uguali e distinguibili solo per il colore. Calcolare la probabilità che estraendo a caso una pallina dall'urna si verificano i seguenti eventi.

A) Si estrae una pallina rossa.
B) Si estrae una pallina bianca.
C) Si estrae una pallina bianca o verde. R. $P(A)=\frac{1}{3}$ $P(B)=\frac{1}{5}$ $P(C)=\frac{2}{3}$

**15** Si lanciano 3 monete equilibrate (testa e croce sono egualmente possibili); calcolare la probabilità di ottenere 2 croci e 1 testa.

Svolgimento:
L'insieme dei casi possibili è $S=\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$ I casi possibili sono dunque …
I casi favorevoli sono … cioè l'insieme $E=\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
Quindi $P(E)=\ldots\ldots$

**16** Calcolare la probabilità che lanciando 2 dadi regolari la somma dei numeri che si presentano sia 6.

R. $P(E)=\frac{5}{36}$

**17** Un'urna contiene 100 palline identiche, numerate da 1 a 100. Calcolare la probabilità che estraendo a caso una pallina dall'urna, essa sia un multiplo di 10. R. $P(E)=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$

**18** Un'urna contiene 15 palline identiche, numerate da 1 a 15. Calcolare la probabilità che estraendo a caso due palline dall'urna, la loro somma sia 10. R. $P(E)=\frac{8}{210}=\frac{4}{105}$

**19** Calcola la probabilità che lanciando 4 volte una moneta equilibrata escano solo 2 teste.

R. $P(E)=\frac{3}{8}$

**20** Pago alla mia compagnia di assicurazione un premio di 450 € l'anno per avere assicurato contro il furto la mia auto che ho pagato 12000 €. Quale probabilità viene attribuita dalla compagnia al furto dell'auto?

R. $P(E)=0{,}0375$

**21** E' più facile vincere un premio acquistando un biglietto nella lotteria A che prevede 10 premi di ugual valore su un totale di 5000 biglietti venduti o nella lotteria B che prevede 7 premi su 3000 biglietti venduti? Se ogni premio per entrambe le lotteria ammonta a 1000 euro, quale dovrebbe essere un prezzo equo per la lotteria A? Quale il prezzo equo per la lotteria B?

R. [Conviene comprare un biglietto nella lotteria B; Prezzo equo A=2€; Prezzo equo B=2,23€]

**22** In Italia nel 2005 sono stati denunciati dalla polizia 2.579.124 crimini penali, nello stesso periodo in Danimarca sono stati denunciati 432.704 crimini. Sulla base di questi dati ritieni che sia più sicuro vivere in Danimarca?

**23** In un mazzo di 40 carte napoletane calcola la probabilità che estraendo a caso una carta essa sia

a) un re;
b) una carta a denari;
c) una carta minore di 8;
d) una carta con punteggio pari.

**24** Un mazzo di carte francesi è composto da 54 carte, 13 per seme e due jolly, i semi sono cuori e quadri di colore rosso, picche e fiori di colore nero. Calcolare la probabilità che estraendo a caso una carta

a) sia un jolly,
b) sia un re,
c) sia l'asso di picche,
d) sia una carta di colore rosso.

**25** Da un mazzo di 40 carte napoletane vengolo tolte tutte le figure, calcola la probabilità di estrarre una carta a denari.

**26** In un sacchetto vengono inserite 21 tessere, su ciscuna delle quali è stampata una lettera dell'alfabeto italiano. Calcola la probabilità che estraendo a caso una tessera essa sia:

a) una consonante
b) una vocale
c) una lettera della parola MATEMATICA.

**27** Nelle estrazioni del Lotto si estraggono dei numeri a caso compresi tra 1 e 90. Calcola la probabilità che il primo numero estratto si

a) il 90
b) un numero pari
c) un multiplo di 3
d) contenga la cifra 1.

**28** In un ipermercato si sono venduti in un anno 1286 cellulari di tipo A e 780 cellulari di tipo B. Mentre erano ancora in garanzia sono stati restuiti 12 cellulari di tipo A e 11 cellulari di tipo B perché malfunzionanti. Comprando un cellulare di tipo A, qual è la probabilità che sia malfunzionante? Qual è la probabilità che sia malfunzionante un cellulare di tipo B?

**29** Quando vado al lavoro parcheggio l'auto nei parcheggi a pagamento ma non sempre compro il biglietto del parcheggio. Precisamente lo compro il lunedì e il giovedì, non lo compro il martedì e il mercoledì, il venerdì vado sempre con l'auto di un collega, il sabato e la domenica non lavoro. Quando vado al lavoro, che probabilità ho di prendere la multa per non aver pagato il parcheggio?

**30** Un semaforo mostra il rosso per 120”, il verde per 60”, il giallo per 10”. Qual è la probabilità di incontrare il semaforo quando è verde?

**31** La seguente parte di tabella tratta da una pubblicazione di Eurostat (la struttura dell'Unione Europea per le statistiche) indica il totale dei cittadini residenti di alcuni paesi europei distinguendo se sono indigeni, se appartengono a paesi dell'Unione Europea, oppure se non vi appartengono.

| | Popolazione per cittadinanza (in milioni al 1.1.2006) | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Indigeni | Non Indigeni | | |
| | Totale | Totale | ... appartenenti a paesi EU-27 | ... appartenenti a paesi non EU-27 |
| EA-13 | 294 994 | 21 697 | 7 734 | 13 963 |
| BE | 9 611 | 900 | 620 | 280 |
| BG | 7 693 | 26 | 4 | 22 |
| CZ | 9 993 | 258 | 94 | 164 |
| DK | 5 157 | 270 | 74 | 196 |
| DE (2) | 75 149 | 7289 | 2 257 | 5 032 |
| EE (3) | 1 103 | 242 | 5 | 237 |
| IE | 3 895 | 314 | 215 | 99 |
| EL | 10 241 | 884 | 157 | 727 |
| ES | 39 756 | 4003 | 1 326 | 2 677 |
| FR | 59 489 | 3510 | 1 314 | 2 196 |
| IT | 56 081 | 2671 | 539 | 2 132 |

Le sigle dei paesi indicate nella tabella sono le seguenti:
BE: Belgio
BG: Bulgaria
CZ: Repubblica Ceca
DK: Danimarca
DE: Germania
EE: Estonia
IE: Irlanda
EL: Grecia
ES Spagna
FR Francia
IT Italia
EU-27 sono i 27 paesi appartenenti all'unione Europea dal 1 gennaio 2007
EA-13 sono i 13 paesi appartenenti all'euro dal 1 gennaio 2007

Valuta le probabilità che estratto un cittadino in Italia e in Francia questi siano non appartenenti all'Europa dei 27.

## ►3. Probabilità dell'evento complementare

Abbiamo visto nelle regole della probabilità l'importante relazione $P(\overline{E})=1-P(E)$, cioè che la probabilità dell'evento complementare è uguale a uno meno la probabilità dell'evento.
Consideriamo la probabilità che in un lancio di due dadi si abbia un punteggio uguale a 5. Considerando equiprobabili l'uscita di una qualsiasi faccia del dado, i casi possibili sono 36 (ogni faccia del primo dado si può associare con ognuna delle 6 facce del secondo dado), mentre i casi favorevoli all'evento sono 4, precisamente (1,4), (4,1), (2,3) e (3,2). Quindi $P(E)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.
Se vogliamo conoscere la probabilità dell'evento complementare cioè la probabilità che la somma delle due facce del dado non sia uguale a 5, risulterebbe piuttosto laborioso trovare tutti i casi in cui la somma delle due facce sia uguale a 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12, si può invece applicare la regola $P(\overline{E})=1-P(E)$ cioè nel nostro caso $P(\overline{E})=1-P(E)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$.
Dalla formula sulla probabilità dell'evento complementare ricaviamo anche che $P(E)=1-P(\overline{E})$ che risulta molto utile nel risolvere alcuni problemi. A volte è più facile o indispensabile calcolare la probabilità dell'evento complementare che calcolare direttamente la probabilità dell'evento.

**32** La seguente tabella è tratta dalla tavola di mortalità dei maschi al 2002 relativa a una popolazione di 100000 individui:

| Fascia di età | $0\le x<20$ | $20\le x<40$ | $40\le x<60$ | $60\le x<80$ | $80\le x<100$ | $x\ge 100$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| N. Decessi | 997 | 1909 | 7227 | 39791 | 49433 | 643 |

Calcola la probabilità per un individuo dell'età di 20 anni di vivere almeno per altri 40 anni.
R. $P(E)=0{,}91$

**33** Calcola la probabilità di vincita dell'Italia ai campionati mondiali di calcio se i bookmaker scommettono su una sua vincita 12 a 5.
R. $P(E)=0{,}71$

**34** In un incontro di boxe il pugile Cacine viene dato a 1:7 contro il detentore del titolo Pickdur.
A) Secondo gli allibratori, quale la probabilità ha Cacine di conquistare il titolo?
B) Quali le poste per Pickdur?
R.[ $P(A)=\frac{1}{8}=0{,}125$ ,poste per Pickdur 7:1]

**35** Quanto devo puntare su Celestino, che viene dato vincente 4:21 per riscuotere 500 €? R.[80€]

**36** Un cubo di legno viene verniciato e successivamente segato parallelamente alle facce in modo da ottenere 1000 cubetti. Quanti tagli sono necessari? Qual è la probabilità che, una volta mescolati i cubetti, si estragga:
A) un cubetto con una sola faccia verniciata,
B) un cubetto con due facce verniciate,
C) un cubetto con nessuna faccia verniciata.
R. [Tagli necessari =27 $P(A)=0{,}384$ $P(B)=0{,}096$ $P(C)=0{,}512$ ]

**37** In un circolo vi sono 100 soci. Di essi si sa che 44 sanno giocare a dama, 39 a scacchi, 8 sanno giocare sia a dama che a scacchi. Estraendo a sorte uno dei 100 soci, qual è la probabilità che sia una persona che non sappia giocare ad alcun gioco. R. $P(E)=0{,}25$

**38** Da un mazzo di 40 carte si estrae 1 carta. Calcola la probabilità dei seguenti eventi:
A) La carta non è di spade;
B) La carta non è una figura;
C) La carta non è un 2. R. $P(A)=\frac{3}{4}$; $P(B)=\frac{7}{10}$; $P(C)=\frac{9}{10}$

**39** Calcola la probabilità che lanciano 4 volte una moneta equilibrata esca almeno una testa.
R. $P(E)=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

## ►4. Probabilità dell'unione di due eventi

La misura della probabilità si può applicare a tutti gli eventi individuati dall'insieme delle parti degli eventi elementari $\wp(\Omega)$ . Qualsiasi evento si può definire come sottoinsieme dell'insieme elementare (elencando gli eventi elementari che ne fanno parte) oppure enunciando una proposizione vera nel caso in cui l'evento si verifichi. Possiamo quindi poter esprimere la probabilità su eventi composti da due o più eventi di $\wp(\Omega)$ attraverso le operazioni di unione e intersezione tra insiemi che corrispondono alle operazioni di disgiunzione inclusiva e di congiunzione nelle proposizioni.
Per la probabilità dell'evento unione di due eventi occorre distinguere tra eventi tra loro incompatibili e eventi tra loro compatibili.

### Unione di due eventi tra loro incompatibili

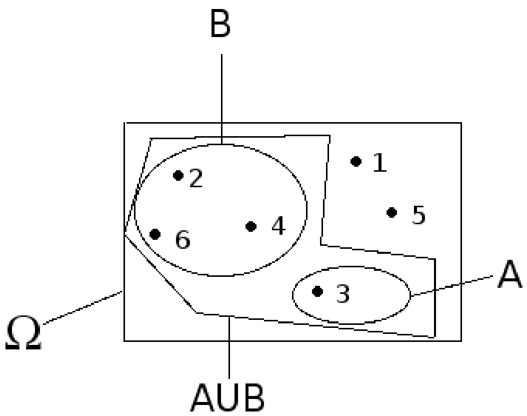
Abbiamo già visto questo caso quando abbiamo definito la probabilità. Due eventi si dicono incompatibili, quando non si possono verificare contemporaneamente: cioè quando $A\cap B=\emptyset$ . In questo caso la probabilità dell'evento unione è dato dalla uguaglianza:

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)}$$

Esempio

- *Nel lancio di un dado regolare calcolare la probabilità dell'uscita del numero 3 o di un numero pari.*

A) Uscita del numero 3
B) Uscita di un numero pari



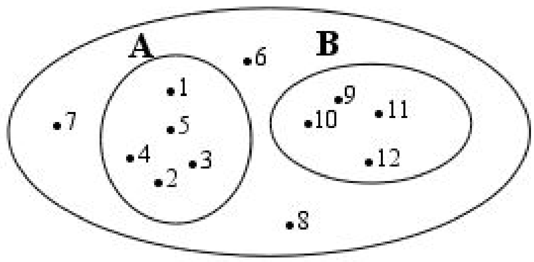

Calcoliamo la probabilità dell'unione dei due eventi. Dato che i due eventi sono incompatibili, cioè: $A\cap B=\emptyset$ : abbiamo $P(A\cup B)=\frac{1}{6}+\frac{3}{6}=\frac{4}{6}$

Esempio

- *Da un'urna che contiene 12 palline identiche numerate da 1 a 12 se ne estrae una. Calcolare la probabilità che la pallina presenti un numero minore di 6 o un numero maggiore di 8.*

I due eventi sono:
A) Si presenta una pallina con il numero minore di 6.
B) Si presenta una pallina con il numero maggiore di 8.

Calcoliamo la probabilità dell'unione dei due eventi.




I due eventi sono incompatibili quindi:

$$A\cap B = \emptyset \quad \rightarrow \quad P(A\cup B)= P(A) + P(B) = \frac{5}{12} + \frac{4}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

## Unione di due eventi tra loro compatibili

Se $A \cap B \neq \emptyset$ i due eventi si possono verificare congiuntamente. In questo caso la probabilità dell'unione dei due eventi sarà data da

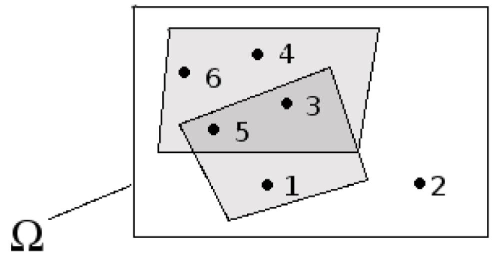
$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Può essere utile per avere un'idea intuitiva di questa regola pensare alla probabilità come una massa unitaria distribuita sugli eventi. Se voglio la probabilità di $A \cup B$, considero la massa presente su A che addiziono a quella presente su B a cui devo togliere la massa presente su $A \cap B$ che è stata contata due volte.

Esempio

- *Consideriamo il lancio di un dado regolare, vogliamo trovare la probabilità dell'uscita del numero maggiore di 2 o di un numero dispari.*

I due eventi sono:
A) Uscita di un numero maggiore di 2
B) Uscita di un numero dispari
I due eventi sono compatibili

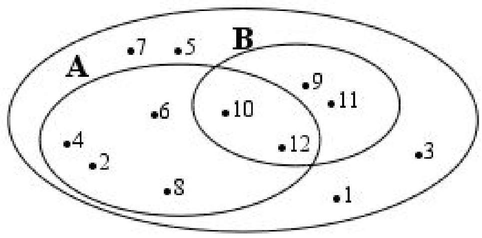



$$A \cap B = \{5,3\} \quad \rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

Esempio

- *Da un'urna che contiene 12 palline numerate da 1 a 12 se ne estrae una. Calcolare la probabilità che la pallina presenti un numero pari o un numero maggiore di 8.*

I due eventi sono:
A) Si presenta una pallina con il numero pari.
B) Si presenta una pallina con il numero maggiore di 8.
Calcoliamo la probabilità dell'unione dei due eventi.
I due eventi sono compatibili quindi**:**




$$A \cap B = \{10,12\} \quad \rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} - \frac{2}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \quad .$$

- *Calcolare la probabilità che scegliendo a caso una carta da un mazzo di carte francesi di 54 carte si prenda una carta di picche o un re.*

Gli eventi sono compatibili in quanto è possibile estrarre una carta che verifichi entrambi le condizioni: un re di picche. Pertanto:

evento P = "estrarre una carta di picche" $p(P)=\frac{13}{54}$ le carte francesi sono 54, contengono 13 carte per ognuno dei 4 semi e 2 jolly.

Evento R = "estrarre un re" $p(R)=\frac{4}{54}$ , i re sono 4, uno per ciascun seme.

Evento $P \cap R$ "estrarre una carta di picche che sia re" $p(P \cap R)=\frac{1}{54}$

Evento $P \cup R$ "estrarre una carta di picche o un re"

$$p(P \cup R)=p(P)+p(R)-p(P \cap R)=\frac{13}{54}+\frac{4}{54}-\frac{1}{54}=\frac{13+4-1}{54}=\frac{16}{54}\approx 29{,}6\,\%$$

- *Calcolare la probabilità che estraendo a caso un numero della tombola esso contenga la cifra 5 oppure sia multiplo di 5.*

La prima domanda da farsi è se i due eventi sono compatibili o incompatibili. Poiché esistono numeri della tombola che contengono la cifra 5 e che sono anche multipli di 5 (per esempio 15, 50...) i due eventi sono compatibili. Di conseguenza bisogna applicare la regola $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

A = "estrarre un numero che contiene la cifra 5" questi numeri sono: 5, 15, 25, 35, 45, 50, 51, 52, …, 59, 65, 75, 85, in tutto 18 ne segue che $p(A)=\frac{18}{90}$ ;

B = "estrarre n multiplo di 5" i multipli di 5 sono 5, 10, 15, 20, … due per ogni decini, quindi 18 in tutto, ne segue che $p(B)=\frac{18}{90}$ ;

$A\cap B$ = "estrarre un cifra che contiene 5 ed è multiplo di 5" questi numeri sono 5, 15, 25, 35, 45, 50, 55, 65, 75, 85 in tutto sono 10 $p(A\cap B)=\frac{10}{90}$ ;

$A\cup B$ = "estrarre un numero che contenga la cifra 5 oppure sia multiplo di 5"

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{18}{90}+\frac{18}{90}-\frac{10}{90}=\frac{26}{90}\approx 0{,}29\approx 29\%$ .

**40** Lanciando un dado regolare, si calcoli la probabilità che esca un numero dispari o minore di 4.

*R.* $P(E)=\frac{2}{3}$

**41** Lanciando un dado regolare, si calcoli la probabilità che esca un numero pari o minore di 2.

R. $P(E)=\frac{2}{3}$

**42** Estraendo una carta da un mazzo di 40 carte, calcolare la probabilità che sia un 3 o una carta di spade

R. $P(E)=\frac{13}{40}$

**43** Da un'urna che contiene 5 palline rosse, 8 palline blu, 12 palline bianche, 15 palline gialle, se ne estrae una. Calcolare la probabilità che la pallina sia rossa o blu o gialla. R. $P(E)=\frac{7}{10}$

**44** Da un'urna che contiene 30 palline identiche numerate da 1 a 30, se ne estrae una. Calcolare la probabilità che il numero della pallina sia minore di 20 o multiplo di 4. R. $P(E)=\frac{11}{15}$

**45** Per un mazzo di 40 carte napoletane calcola la probabilità che estrare
- a) un asso o un re,
- b) un sette o una carta a bastoni,
- c) una figura o una carta a denari.

**46** Calcola la probabilità che lanciando un dado a sei facce esca un numero pari o un multiplo di 3.

**47** Nel gioco della tombola si estrae una pallina numerata da un sacchetto contenente 90 palline numerate da 1 a 90. Calcola la probabilità che estraendo la prima pallina essa riporti
- a) un multiplo di 5 o un multiplo di 10,
- b) un numero pari o un multiplo di 5,
- c) un numero che contenga la cifra 5 o la cifra 2.

## ►5. La probabilità dell'evento intersezione di due eventi

Dati due eventi $A, B \in \wp(\Omega)$ ci proponiamo di calcolare la probabilità dell'evento intersezione cioè $P(A \cap B)$ partendo dalla probabilità degli eventi componenti *P(A)* e *P(B)*. Si tratta quindi di stimare con quale probabilità i due eventi avvengono congiuntamente. Occorre innanzitutto verificare che i due eventi non siano incompatibili in quanto in questo caso l'evento intersezione è impossibile.
Per la probabilità dell'intersezione di due eventi occorre distinguere tra eventi tra loro **indipendenti** e eventi tra loro **dipendenti**.

### Intersezione di due eventi tra loro indipendenti

La nozione di indipendenza tra eventi sarà meglio precisata in seguito: per ora ci bastano considerazioni intuitive. Dato che gli eventi A e B devono essere considerati congiuntamente, si diranno indipendenti se il verificarsi di A non cambia la probabilità del verificarsi di B.

Esempio

- *Calcoliamo la probabilità che lanciando una moneta e un dado regolari esca testa e un numero maggiore di 4.*

Evento A = "Uscita di Testa nel lancio di una moneta" $P(A)=\frac{1}{2}$

Evento B = "Uscita di un numero maggiore di 4 nel lancio di un dado" $P(B)=\frac{2}{6}$

Evento $(A \cap B)$ = "Uscita di testa e di un numero maggiore di 4 nel lancio di una moneta e di un dado" $P(A \cap B)=?$

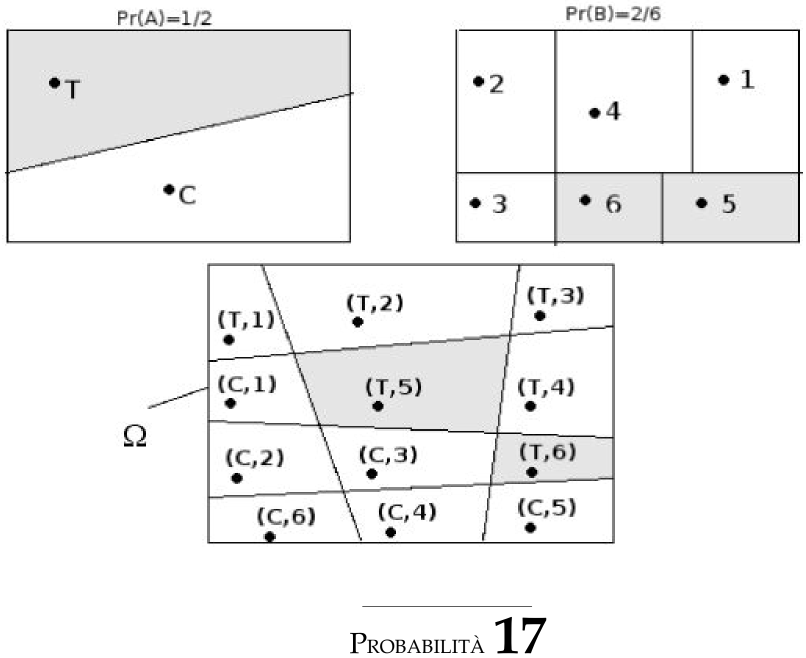
Notiamo subito una situazione diversa rispetto a quella precedente dell'unione di due eventi. Nel caso precedente, lo spazio degli eventi era lo stesso per l'evento A per l'evento B e per l'evento unione $(A \cup B)$. Ora invece per l'evento A l'insieme degli eventi elementari è $\Omega_1=\{T, C\}$, per l'evento B invece, l'insieme degli eventi elementari è $\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$. L'evento $(A \cap B)$ ha il seguente insieme degli eventi elementari: $\Omega=\{(T,1);(T,2);(T,3);(T,4);(T,5);(T,6);(C,1);(C,2);(C,3);(C,4);(C,5);(C,6)\}$.
Lo spazio degli eventi elementari dell'intersezione è dato dal prodotto cartesiano della spazio elementare di A moltiplicato per quello di B.
Si può calcolare la probabilità in due modi:

1° modo

Indicare i casi favorevoli e i casi possibili rispetto all'evento intersezione:

- i casi favorevoli all'evento $(A \cap B)=\{(T,5);(T,6)\} \rightarrow card(A \cap B)=2$
- i casi possibili
$\Omega=\{(T,1);(T,2);(T,3);(T,4);(T,5);(T,6);(C,1);(C,2);(C,3);(C,4);(C,5);(C,6)\} \rightarrow card\,\Omega=12$
- $P(A \cap B)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

2° modo



Dato che i due eventi non si influenzano, supponiamo di procedere con due scelte successive: prima il lancio della moneta con probabilità pari a $\frac{1}{2}$ e poi il lancio del dado con probabilità pari a $\frac{2}{6}$ .

Passando dalla prima scelta alla seconda scelta i casi possibili diventano 12 in quanto i due casi possibili del lancio della moneta si compongono con i sei casi possibili del lancio del dado. I casi favorevoli sono due, uno per il lancio della moneta che si compone con i due casi favorevoli nel lancio del dado. Quindi si tratta di moltiplicare le probabilità dei singoli eventi.

- Evento $A$ = *Uscita di Testa nel lancio di una moneta* $P(A)=\frac{1}{2}$
- Evento $B$ = *Uscita di un numero maggiore di 4 nel lancio di un dado* $P(B)=\frac{2}{6}$
- Evento $(A\cap B)$ = *Uscita di testa e di un numero maggiore di 4 nel lancio di una moneta e di un dado* $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}=\frac{2}{12}$

Dati due eventi aleatori A e B tra loro **indipendenti** la probabilità dell'evento intersezione tra A e B è data dalla probabilità di A moltiplicata per la probabilità di B. In simboli

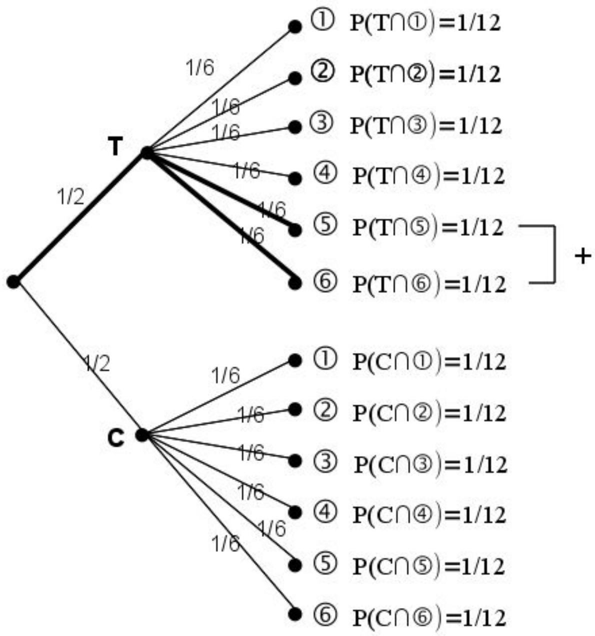
$$\boxed{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)}$$

## Diagrammi ad albero

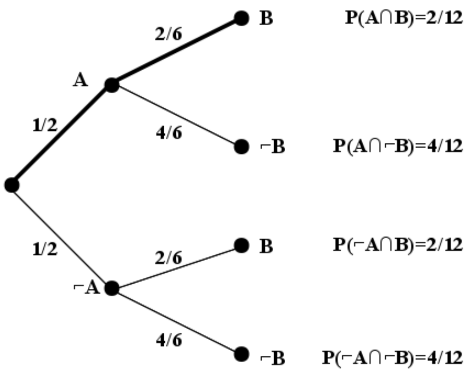
Una rappresentazione grafica che può risultare utile nello studio della probabilità dell'evento intersezione detto anche studio delle **probabilità composte** è il diagramma ad albero. Le linee dell'albero si dicono **rami**, mentre i punti da cui partono e arrivano i rami si dicono **nodi,** il nodo iniziale si chiama **radice**.

La costruzione di un diagramma ad albero nel caso delle probabilità composte consente di eseguire un'analisi completa di tutti i possibili esiti di una prova. Ogni percorso dell'albero che va dalla radice al nodo terminale indica una sequenza di eventi congiunti, incompatibile con qualsiasi altro percorso dell'albero. La probabilità di ogni singolo evento si indica sui rami, allora moltiplicando le probabilità che si incontrano nel percorso si ottiene la probabilità della congiunzione degli eventi che formano il percorso. Dato che ogni percorso che va dalla radice al nodo terminale individua eventi incompatibili, se vogliamo trovare l'unione di due o più percorsi possiamo semplicemente sommarli.

L'esempio precedente può essere schematizzato in questo modo:




L'albero può essere semplificato considerando gli eventi coinvolti e i loro complementari.




Esempio

- *In un'urna abbiamo tre palline bianche e due nere. Facciamo due estrazioni rimettendo dopo la prima estrazione la pallina nell'urna. Vogliamo calcolare la probabilità della uscita di una pallina nera nelle due estrazioni.*

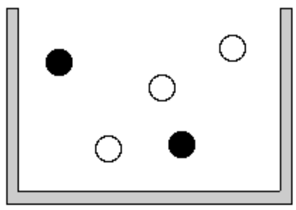
Evento $B_1$= nella prima estrazione pallina bianca $P(B_1)=\frac{3}{5}$

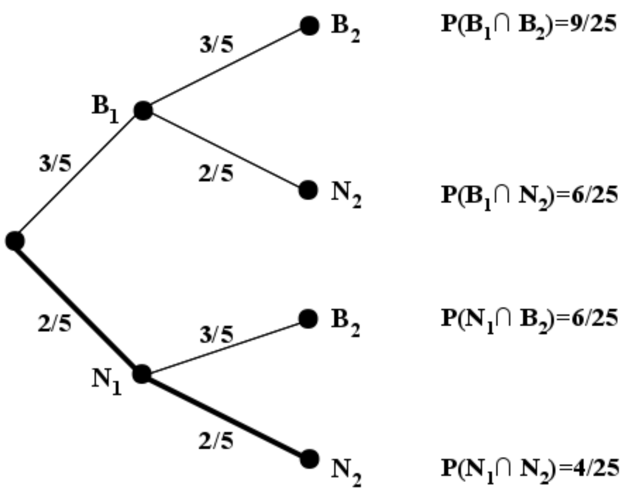
Evento $B_2$= nella seconda estrazione pallina bianca $P(B_2)=\frac{3}{5}$ in quanto la pallina si rimette nell'urna

Evento $N_1$= nella prima estrazione pallina nera $P(N_1)=\frac{2}{5}$

Evento $N_2$= nella seconda estrazione pallina nera $P(N_2)=\frac{2}{5}$

Evento $(N_1 \cap N_2)$ = nelle due estrazioni pallina nera $P(N_1 \cap N_2)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$ in quanto i due eventi sono indipendenti.






Il problema è sempre lo stesso: calcolare una probabilità su un insieme prodotto partendo dalle probabilità degli eventi componenti. Devo moltiplicare la probabilità di avere nera nella prima estrazione $P(N_1)=\frac{2}{5}$ con la probabilità di avere nera nella seconda estrazione $P(N_2)=\frac{2}{5}$ in quanto, l'uscita della prima pallina nera, evento considerato ora come avvenuto, non influenza la probabilità di avere nera alla seconda estrazione in quanto la pallina estratta viene rimessa nell'urna.

Le domande che posso fare su questo esperimento sono relative allo spazio degli eventi $\wp(\Omega)$. ove $\Omega=\{(B_1, B_2);(B_1, N_2);(N_1, B_2);(N_1, N_2)\}$ sono del tipo "Quale è la probabilità che escano palline di diverso colore", "Quale è la probabilità che la prima pallina sia bianca", ecc.

## Il Cavalier de Méré

Il Cavalier de Méré pose a Pascal nel 1654 il seguente problema: *perché scommettendo alla pari sull'evento A= "ottenere almeno una volta un 6 in quattro lanci di un dado" ho accumulato una fortuna, mentre rischio la rovina scommettendo alla pari sull'evento B= "ottenere almeno una coppia di 6 in 24 lanci di due dadi".*

Scommettere alla pari 1:1 significa assegnare alla probabilità degli eventi A e B il valore pari a $\frac{1}{2}$ .

Consideriamo la **probabilità dell'evento A** composto dai quattro eventi indipendenti ma non incompatibili $E_1$=ottenere 6 nel primo lancio, $E_2$=ottenere 6 nel secondo lancio, $E_3$=ottenere 6 nel terzo lancio, $E_4$=ottenere 6 nel quarto lancio.

In questo caso come è stato osservato in precedenza, conviene calcolare la probabilità dell'evento complementare $\overline{A}=(\overline{E_1}\cap\overline{E_2}\cap\overline{E_3}\cap\overline{E_4})$ = "non ottenere un 6 in quattro lanci di un dado". Dato che gli eventi sono indipendenti e equiprobabili e $P(\overline{E_1})=P(\overline{E_2})=P(\overline{E_3})=P(\overline{E_4})=\frac{5}{6}$ . I valori di ciascun evento vanno moltiplicati tra loro per la regola vista in precedenza. Quindi $P(\overline{A}) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{625}{1296} = 0{,}482$ .

La probabilità dell'evento A sarà quindi superiore a 0,5 in quanto $P(A)=1-P(\overline{A}) = 1-0{,}482 = 0{,}518$ e in un numero considerevole di scommesse il Cavalier de Méré accumulava una fortuna.

Consideriamo ora la **probabilità dell'evento B**, dove valgono considerazioni analoghe. Anche in questo caso conviene calcolare la probabilità dell'evento complementare $\overline{B}$ . Dato che i casi possibili nel lancio di due dadi sono 36 il caso favorevole all'evento 6 nel primo dado e 6 nel secondo dado è uno soltanto. Se $P(B) = \frac{1}{36} \rightarrow p(\overline{B}) = 1-P(B) = \frac{35}{36}$ . Dato che i lanci dei due dadi sono 24 avremo $p(\overline{B}) = \frac{35^{24}}{36^{24}} = 0{,}509$ da cui $P(B) = 1-0{,}509 = 0{,}491$ è spiegato come mai in un grande numero di scommesse scommettendo alla pari il Cavalier de Méré si rovinasse.

**48** Nel lancio di due monete qual è la probabilità che una almeno sia Croce? R. $P(E)=\frac{3}{4}$

**49** Nel lancio di due dadi qual è la probabilità di avere un totale di 8 o due numeri uguali? R. $P=\frac{5}{18}$

**50** Qual è la probabilità nel lancio di due dadi che la somma dei punti sia almeno 9? R. $P(E)=\frac{15}{18}$

**51** Punto 7 euro nel lancio di due dadi sulla somma delle facce uguale a 5. Quanto devo ricevere perché il gioco sia equo? R. 63 €

**52** La probabilità che un proiettile colpisca un determinato bersaglio è 0,5. Qual è la probabilità che tre proiettili lanciati uno dopo l'altro colpiscano tutti il bersaglio. R. $P(E)=0{,}125$

**53** Due persone giocano con le dita di entrambe le mani a pari e dispari. Con una posta 1:1 conviene giocare sul pari o sul dispari? R. *indifferente*

**54** Un allievo cuoco prepara la cena. La probabilità che la minestra sia troppo salata è pari a 0,3 e che l'arrosto bruci sia pari a 0,4. Qual è la probabilità che la cena riesca bene? R. $P(E)=0{,}42$

**55** Una scopa elettrica è formata da due apparati: il motore che si guasta una volta su 10 dopo un anno e la carrozzeria che si rompe una volta su 100 dopo un anno. Che probabilità ha la scopa elettrica di essere funzionante dopo un anno? R. $P(E)=89{,}1\,\%$

**56** Una coppia ha caratteri ereditari tali che ogni loro figlio ha probabilità pari a $\frac{1}{4}$ di essere malato. I genitori vorrebbero avere due figli.

A) Qual è la probabilità che entrambi siano sani?
B) Qual è la probabilità di avere almeno un figlio malato R. $P(A)=\frac{9}{16}$ ; $P(B)=\frac{7}{16}$

**57** Determinare la probabilità che lanciando tre volte una moneta si presentino

A) 3 Teste
B) 1 Testa
C) 2 Teste R. $P(A)=\frac{1}{8}$ ; $P(B)=\frac{3}{8}$ ; $P(C)=\frac{3}{8}$

**58** Nel lancio di una moneta e di un dado calcolare la probabilità di:

A) Ottenere Croce e il 6
B) Ottenere Testa e un numero multiplo di 2
C) Ottenere Croce e un numero maggiore di 2 R. $P(A)=\frac{1}{12}$ ; $P(B)=\frac{1}{4}$ ; $P(C)=\frac{1}{3}$

**59** In un'urna ci sono 6 palline, di cui 2 nere e 4 bianche: calcola la probabilità di estrarre palline di diverso colore nel caso in cui la prima pallina viene rimessa nell'urna. R. $P(E)=\frac{5}{9}$

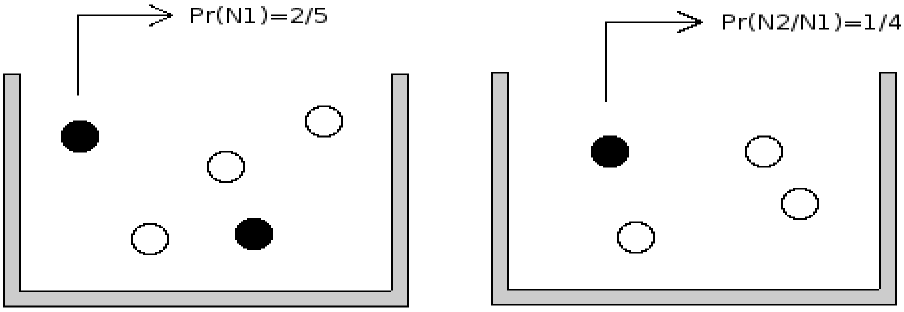
**60** Un'urna U1 contiene 10 palline rosso e 15 bianche, un'urna U2 contiene 12 palline rosso e 13 palline bianche. Calcola la probabilità che estraendo una pallina da U1 e una pallina da U2 siano entrambe rosse.

## Intersezione di due eventi tra loro dipendenti

Esempio

- *Si richiede la probabilità di avere due palline nere in due estrazioni nella stessa urna dell'esempio precedente, questa volta però senza rimettere la pallina nell'urna.*

Dato che vogliamo calcolare la probabilità dell'evento intersezione $(N_1 \cap N_2)$ questa sarà data dalla probabilità dell'evento $N_1$ moltiplicata per la probabilità dell'evento $N_2$ dopo che si è verificato l'evento $N_1$. La probabilità dell'evento $N_2$ dopo il verificarsi di $N_1$ non è la stessa dell'esperimento precedente in quanto la pallina estratta non viene rimessa nell'urna.

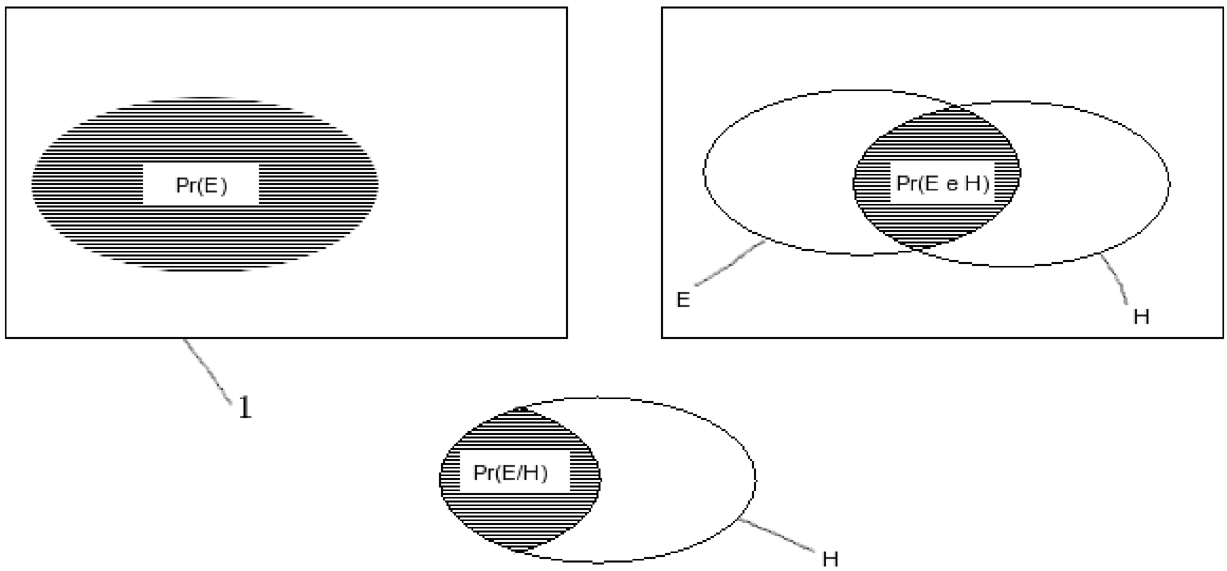


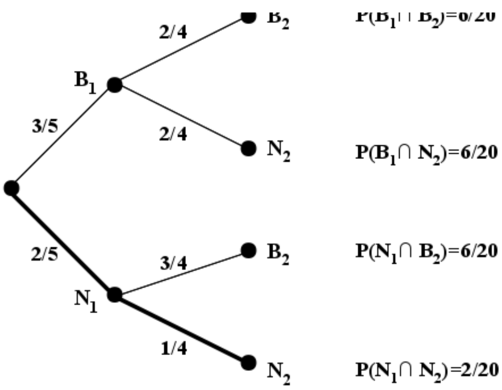

$P(N_2/N_1)$ significa probabilità di $N_2$ dopo che si è verificato $N_1$.

La probabilità dell'insieme intersezione diventa: $P(N_1 \cap N_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$

Esaminiamo le probabilità di questo esperimento (estrazione dall'urna senza rimettere la pallina nell'urna) degli eventi elementari appartenenti a Ω con $\Omega = \{(B_1, B_2); (B_1, N_2); (N_1, B_2); (N_1, N_2)\}$

Esempio



- Una scatola di caramelle contiene 20 caramelle assortite alla frutta, incartate allo stesso modo e quindi irriconoscibili. Di esse 14 sono al limone. Fabio ne mangia 2. Qual è la probabilità che siano tutte e due al limone?

Evento E1 = "la prima caramella è al limone" $p(E1)=\frac{14}{20}$

L' evento E2 = "la seconda è al limone" è dipendente dal primo, perché se Fabio ha mangiato una caramella al limone nella scatola rimangono 19 caramelle di cui 13 al limone. $p(E2)=\frac{13}{19}$

$p(E1\cap E2)=\frac{14}{20}\cdot\frac{13}{19}=\frac{91}{190}\approx 0{,}479\approx 47{,}9\%$ .

## ►6. Probabilità condizionata

DEFINIZIONE. Si dice **probabilità condizionata** di A rispetto a B e si indica con $P(A/B)$ la probabilità di A dopo che si è verificato B

TEOREMA DELLE PROBABILITA' COMPOSTE. Dati due eventi aleatori A e B qualsiasi la probabilità dell'evento intersezione tra A e B è dato dalla probabilità di A moltiplicata la probabilità di B dopo che A si è verificato. In simboli $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)$ .

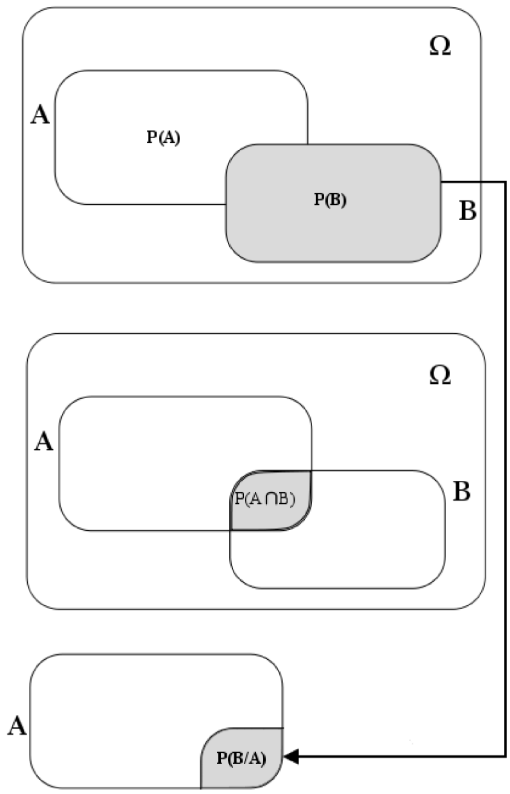
Dato che $A\cap B=B\cap A$ anche $P(A\cap B)=P(B\cap A)$ quindi $P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B)$ .
Possiamo ora meglio stabilire quando due venti sono dipendenti e quando sono indipendenti.
DEFINIZIONE: Due eventi $A, B\in\wp(\Omega)$ si dicono indipendenti se la probabilità di A e la probabilità di A subordinata a B sono uguali. Indipendenti nel caso contrario.

$P(A)=P(A/B)$ **eventi indipendenti**

$Pr(A)\neq P(A/B)$ **eventi dipendenti**

Naturalmente il teorema delle probabilità totali vale sia nel caso di eventi dipendenti che indipendenti.
Cerchiamo di dare una interpretazione insiemistica alla probabilità condizionata. Dalla uguaglianza del teorema delle probabilità composte isoliamo la probabilità condizionata per meglio individuare qual è il suo significato.
$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)$ Da ciò segue

$$\boxed{P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}}$$




Mettiamo a confronto $P(B)$ e $P(B/A)$ aiutandoci con i diagrammi di Venn.
L'analogia della massa unitaria da spalmare sull'evento come misura della probabilità può in questo caso tornare utile.
La probabilità B è la quantità di massa da spalmare sull'evento B in relazione allo spazio degli eventi $\wp(\Omega)$ .
Nell'ipotesi di ricevere un'ulteriore informazione dal verificarsi di A, questa informazione modifica la probabilità di B. L'insieme di riferimento per la probabilità di B non sarà più $\wp(\Omega)$ , ma $\wp(A)$ e $P(B/A)$ sarà data dal rapporto della massa spalmata tra ciò che hanno in comune A e B cioè $P(A\cap B)$ e la probabilità di A cioè $P(A)$ : $P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ .

- Se $P(B/A)=P(B)$ la parte della massa unitaria spalmata su B e il rapporto tra la massa spalmata sull'intersezione tra A e B e la massa spalmata su A rimane invariato e i due eventi si dicono indipendenti.

- Se $P(B/A) > P(B)$ si dice che l'evento B è correlato positivamente all'evento A. Cioè il verificarsi di A aumenta la probabilità dell'evento B.
- Se $P(B/A) < P(B)$ si dice che l'evento B è correlato negativamente all'evento A. Cioè il verificarsi di A diminuisce la probabilità dell'evento B.

**Osservazioni**

- due eventi A e B tra loro incompatibili cioè tali che $P(A\cap B)=0$ sono fortemente dipendenti. Infatti $P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0}{P(A)}=0;\ P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0}{P(B)}=0$ .
- La probabilità di A condizionato B è in genere diversa dalla probabilità di B condizionato A in quanto pur avendo lo stesso numeratore hanno denominatore diverso: $P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\neq P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$
- Dato che la probabilità dell'intersezione di due eventi è la stessa abbiamo $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B)$

<u>Esempio</u>

*Conviene scommettere alla pari che in una classe composta da 23 alunni, due persone compiano gli anni nello stesso giorno e mese?*

Scommettere alla pari significa intanto attribuire alla probabilità dell'evento A il valore di 0,5. Se la probabilità dell'evento è maggiore di 0,5 conviene scommettere altrimenti no.

Anche in questo caso conviene calcolare la probabilità dell'evento complementare $P(\overline{A})$ = la probabilità che nessuno dei 23 allievi compiano gli anni nello stesso giorno e mese.

$P(\overline{A})=P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_2}\ldots\overline{A_{21}}\cap\overline{A_{22}}\cap\overline{A_{23}})$ Dove $\overline{A_i}$ rappresenta la probabilità che il compleanno dell'alunno i-esimo non coincida con nessuno dei compleanni degli altri alunni.

Analizziamo alcune di queste probabilità e applichiamo il teorema delle probabilità composte:

$P(\overline{A_1})=\frac{365}{365};\ P(\overline{A_2}/\overline{A_1})=\frac{364}{365};\ P(\overline{A_3}/\overline{A_1}\cap\overline{A_2})=\frac{363}{365};\ P(\overline{A_4}/\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3})=\frac{362}{365};\ \ldots$ e così via fino ad arrivare $P(\overline{A_{23}}/\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_2}\ldots\overline{A_{21}}\cap\overline{A_{22}}\cap\overline{A_{23}})=\frac{343}{365}$

Il primo allievo avrà la certezza di non avere alcun allievo che compie gli anni nello stesso suo giorno, il secondo allievo avrà una probabilità pari a 364 giorni su 365 di non compiere gli anni nello stesso giorno del primo, il terzo allievo una probabilità di 363 giorni su 365 condizionata a non compiere gli anni lo stesso giorno del primo e del secondo e così via fino alla probabilità dell'ultimo allievo pari a 343 giorni su 365 di non compiere gli anni lo stesso giorno dei propri compagni.

Ora applichiamo il teorema delle probabilità composte:

$$P(\overline{A})=\frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\frac{362}{365}\cdots\frac{345}{365}\cdot\frac{344}{365}\cdot\frac{343}{365}=\frac{365\cdot 364\cdot 363\ldots(365-23+1)}{365^{23}}=0{,}493$$

Dato che $P(A)=1-P(\overline{A})=1-0{,}493=0{,}507$ .

Conclusione: conviene scommettere alla pari sull'evento A.

**61** Da un mazzo di 40 carte, si estrae una carta a caso. Determina la probabilità:

A) Che esca un Re
B) Che esca un Re nell'ipotesi che sia uscita una figura
C) Che esca un Re nell'ipotesi che sia uscito il seme di fiori
D) Che esca il seme di fiori dopo che è uscito un Re
E) Tra gli eventi A), B), C) e D) quali sono indipendenti?

$P(A)=\frac{1}{10};\ P(B)=\frac{1}{3};\ P(C)=\frac{1}{10};\ P(D)=\frac{1}{4};$ A e C sono indipendenti

**62** Uno studente universitario ha la probabilità 0,3 di superare l'esame di matematica e 0,5 di superare l'esame di diritto privato. Se i due eventi sono indipendenti determinare la probabilità che lo studente ha di superare

A) Tutti e due gli esami
B) Almeno un esame

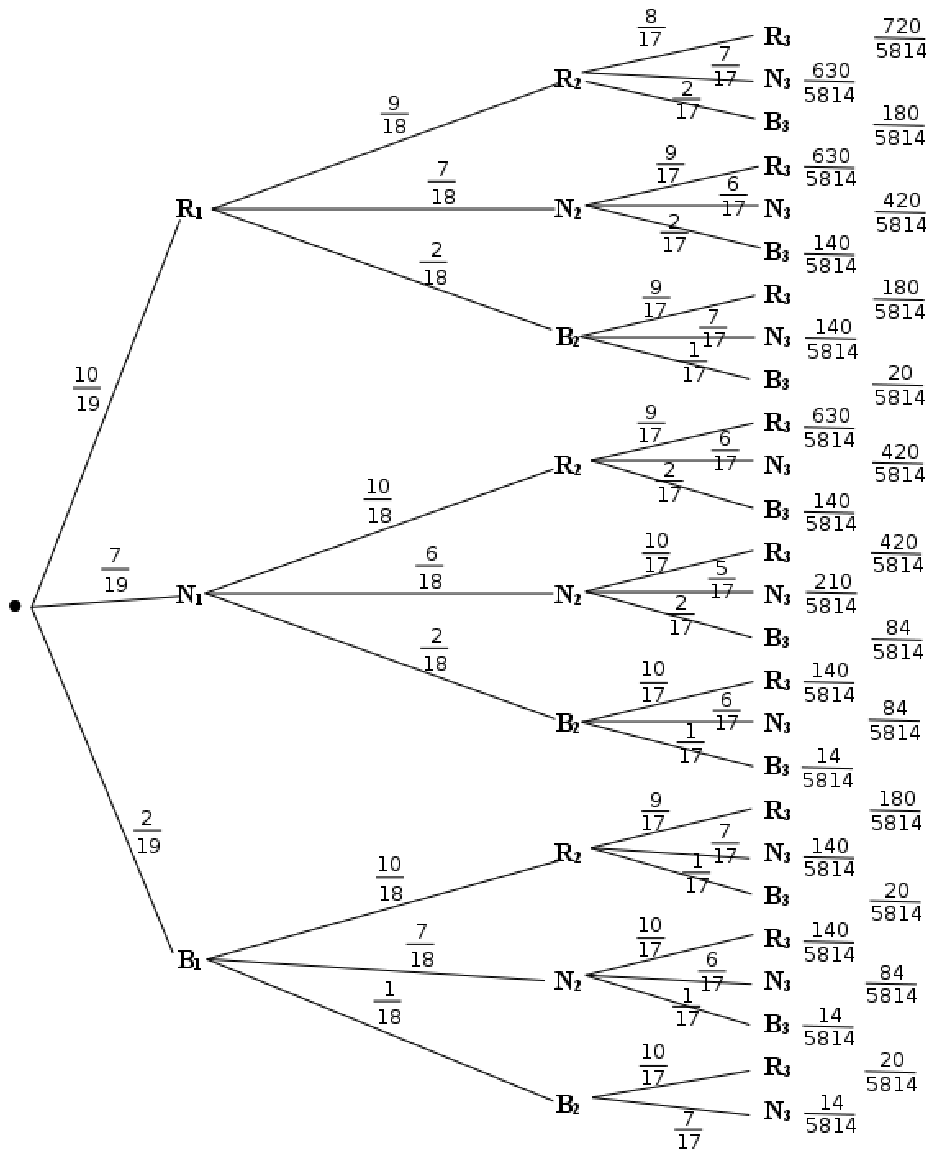
$P(A)=0{,}15;\ P(B)=0{,}65$

**63** Un'urna contiene 5 palline bianche e 12 nere. Estraendole due a caso qual è la probabilità che siano dello stesso colore? $P(A)=0{,}56$

**64** Un'urna contiene 10 palline rosse, 7 palline nere e 2 bianche. Estraendone simultaneamente, tre calcolare la probabilità:

A) tutte e tre rosse
B) tutte e tre bianche
C) 1 rossa e 2 nere
D) tutte di colore diverso
E) una sola bianca R. $P(A)=0{,}12$ ; $P(B)=0$ ; $P(C)=0{,}22$ ; $P(D)=0{,}14$ ; $P(E)=0{,}28$

Ecco il diagramma ad albero per aiutarti nella soluzione




**65** Uno studente ha la probabilità del 55% di prendere il debito in matematica, del 30% di prendere il debito in inglese e del 20% di prendere il debito in entrambe le materie. Valutare la probabilità di:

A) Avere il debito in matematica nell'ipotesi di averlo già preso in inglese.
B) Avere il debito in inglese nell'ipotesi di averlo già preso in matematica.
C) Avere il debito in matematica nell'ipotesi di non averlo preso in inglese.
D) Avere il debito in inglese nell'ipotesi di non averlo preso in matematica.
E) Non avere il debito in matematica nell'ipotesi di averlo preso in inglese.
F) Non avere il debito in inglese nell'ipotesi di non averlo preso in matematica.
R. $P(A)=67\%$ ; $P(B)=36\%$ ; $P(C)=50\%$ ; $P(D)=22\%$ ; $P(E)=33\%$ ; $P(F)=64\%$

## ►7. Dalla tavola statistica alla probabilità

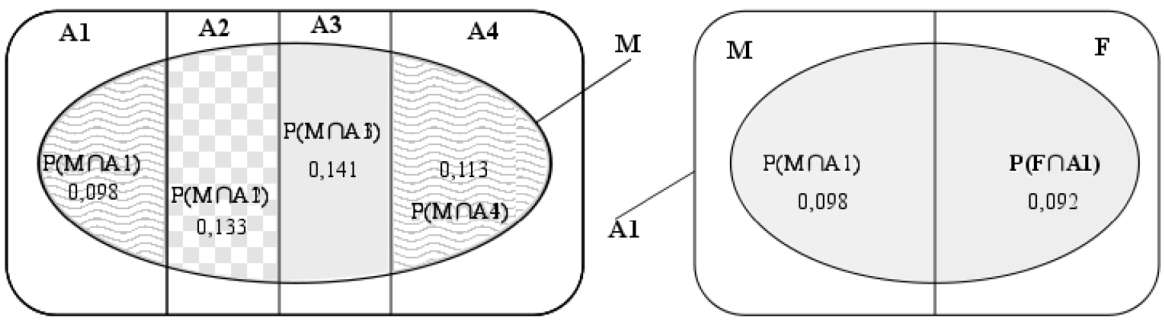
Consideriamo la seguente tabella che rappresenta la popolazione residente in Italia per classi di età e sesso al primo gennaio 2009 (migliaia di persone)

| | $A_1: 0 \le età < 20$ | $A_2: 20 \le età < 40$ | $A_3: 40 \le età < 60$ | $A_4: età \ge 60$ | Totale |
|---|---|---|---|---|---|
| M=Maschio | 5867 | 8014 | 8473 | 6798 | 29152 |
| F=Femmina | 5541 | 7845 | 8649 | 8857 | 30892 |
| Totale | 11408 | 15859 | 17122 | 15655 | 60044 |

L'esperimento in questo caso è costituito da una classificazione dei residenti secondo il sesso: (Maschi e Femmine) e classi di età ($A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$). I valori assoluti presenti all'interno delle celle rappresentano le persone che hanno in comune due caratteri, cioè . $M \cap A_1 = 5867$, $F \cap A_3 = 8649$ e così via.
In questo caso gli eventi elementari sono rappresentati dalle intersezione delle modalità dei due caratteri: $\Omega = \{(M, A_1); (M, A_2); (M, A_3); (M, A_4); (F, A_1); (F, A_2); (F, A_3); (F, A_4)\}$
Dato che il campione analizzato è l'intera popolazione italiana residente possono essere la base per il calcolo della probabilità. Per far questo passiamo alle frequenze relative come nella tabella seguente.

| | $A_1: 0 \le età < 20$ | $A_2: 20 \le età < 40$ | $A_3: 40 \le età < 60$ | $A_4: età \ge 60$ | Totale |
|---|---|---|---|---|---|
| M=Maschio | 0,098 | 0,133 | 0,141 | 0,113 | 0,485 |
| F=Femmina | 0,092 | 0,131 | 0,144 | 0,148 | 0,515 |
| Totale | 0,190 | 0,264 | 0,285 | 0,261 | 1,000 |

Aiutiamoci con i diagrammi di Venn per analizzare il significato dei totali di riga e di colonna. L'esempio si riferisce al totale della prima riga (0,098+0,133+0,141+0,113=0,485) e della prima colonna (0,098+0,092=0,190).




**Totale prima riga=0,098+0,133+0,141+0,113=0,485** **Totale prima colonna=0,098+0,092=0,190**

Dato che gli eventi intersezione sono tra loro incompatibili i totali di riga e di colonna detti anche **totali marginali** rappresentano le probabilità delle modalità semplici Maschio e Femmina e $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ relative alle classi di età.
Ma c'è di più. Nella tabella così strutturata abbiamo a disposizione sia la probabilità dell'intersezione delle modalità degli eventi, che la probabilità degli eventi stessi. Possiamo calcolare così anche le probabilità condizionate.
Le condizioni per trattare la probabilità come negli esempi precedenti sono che gli eventi presenti nelle righe e nelle colonne della tabella, siano eventi **esaustivi** e **incompatibili**, in altre parole devono rappresentare un insieme di eventi elementari. Questo è sempre possibile dati due venti elementari $A$ e $B$ considerando gli eventi complementari $\overline{A}$ e $\overline{B}$ .

**66** Supponiamo che il verificarsi della sordità sia indipendente dal sesso. Indicare e calcolare le quattro probabilità mancanti nella seguente tabella

| | Sordo | Non sordo | Totale |
|---|---|---|---|
| Maschio | | | 0,531 |
| Femmina | | | 0,469 |
| Totale | 0,004 | 0,996 | 1,000 |

**67** Il daltonismo è una malattia genetica collegata al sesso e si osserva più frequentemente nei maschi che nelle femmine. Le frequenze relative della seguente tabella, osservate su un campione molto elevato di popolazione, possono essere usate come probabilità.

| | P(Daltonico) | P(Non daltonico) | Totale |
|---|---|---|---|
| P(Maschio) | 8,1% | 45% | 53,1% |
| P(Femmina) | 0,5% | 46,4% | 46,9% |
| Totale | 8,6% | 91,4% | 100% |

P(D) indica la probabilità di essere daltonico, questa probabilità si legge nel totale marginale della prima colonna ed è pari a 8,6%. La probabilità di non essere daltonico P(N) è data dal totale marginale della seconda colonna e rappresenta la probabilità complementare del primo evento pari a 91,4%.
I totali marginali di riga indicano la probabilità di essere maschio pari al 53,1% e la probabilità di essere femmina pari al 46,9%.
Nella tabella abbiamo tutte le probabilità che ci consentono di calcolare le probabilità condizionate. In particolare:

- Probabilità condizionata che un maschio sia daltonico, incidenza del daltonismo per i maschi $P(D/M)=\dfrac{P(D\cap M)}{P(M)}=\dfrac{8,1\%}{53,1\%}=15,3\%$
- Probabilità condizionata che una femmina sia daltonica, incidenza del daltonismo per le femmine $P(D/F)=\dfrac{P(D\cap F)}{P(F)}=\dfrac{0,5\%}{46,9\%}=1,1\%$
- Probabilità condizionata che un daltonico sia maschio, incidenza dei maschi per il daltonismo $P(M/D)=\dfrac{P(D\cap M)}{P(D)}=\dfrac{8,1\%}{8,6\%}=94,2\%$
- Probabilità condizionata che un daltonico sia femmina, incidenza delle femmine per il daltonismo $P(F/D)=\dfrac{P(D\cap F)}{P(D)}=\dfrac{0,5\%}{8,6\%}=5,8\%$

**68** Un test diagnostico è qualsiasi procedimento che sappia individuare se un individuo è soggetto a una determinata malattia cioè **malato $M^+$** o **sano $M^-$**. Un test può dare esito **positivo** (cioè indicare che l'individuo è malato) **$T^+$** o **negativo** (indicare che un individuo è sano) **$T^-$**. Si sa però che le indicazioni dei più comuni test non sono del tutto sicure, può accadere che un individuo risultato positivo al test sia invece sano e viceversa. Quindi è necessario dare una valutazione delle caratteristiche di un test diagnostico.
Immaginiamo che un determinato test diagnostico sia sotto sperimentazione e che i risultati ottenuti siano indicati dalla seguente tabella

| | Positivo=$T^+$ | Negativo=$T^-$ | Totale |
|---|---|---|---|
| Malato = $M^+$ | 4120 | 512 | 4632 |
| Sano = $M^-$ | 1560 | 4322 | 5882 |
| Totale | 5680 | 4834 | 10514 |

Dato che la popolazione coinvolta è considerata significativa, possiamo passare alle frequenze relative e considerarle come una valutazione della probabilità.

| | Positivo=$T^+$ | Negativo=$T^-$ | Totale |
|---|---|---|---|
| Malato = $M^+$ | 39,2% | 4,9% | 44,1% |
| Sano = $M^-$ | 14,8% | 41,1% | 55,9% |
| Totale | 54,0% | 46,0% | 100% |

In ogni cella leggiamo la probabilità dell'intersezione dei due caratteri, mentre nei totali marginali la probabilità di essere malato e sano (totali di riga) e la probabilità che il test sia risultato positivo o negativo (totali di colonna).

- $P(M^+ \cap T^+) = 39{,}2\%$ probabilità che il test sia vero positivo
- $P(M^+ \cap T^-) = 4{,}9\%$ probabilità che il test sia falso negativo
- $P(M^- \cap T^+) = 14{,}8\%$ probabilità che il test sia falso positivo
- $P(M^- \cap T^-) = 41{,}1\%$ probabilità che il test sia vero negativo
- $P(M^+) = 44{,}1\%$ probabilità di essere malato
- $P(M^-) = 55{,}9\%$ probabilità di essere sano
- $P(T^+) = 54{,}0\%$ probabilità che il test sia positivo
- $P(T^-) = 46{,}0\%$ probabilità che il test sia positivo

Questo è quello che ci dicono i dati grezzi della precedente tabella. Ma con alcuni semplici calcoli si possono calcolare le probabilità condizionate, che ci danno informazioni più rilevanti. In particolare:

- **Sensibilità del test** cioè la probabilità che un malato sia positivo
  $$P(T^+ / M^+) = \frac{P(T^+ \cap M^+)}{M^+} = \frac{39{,}2\%}{44{,}1\%} = 88{,}9\%$$
- **Specificità del test** cioè la probabilità che un sano sia negativo
  $$P(T^- / M^-) = \frac{P(T^- \cap M^-)}{M^-} = \frac{41{,}1\%}{55{,}9\%} = 73{,}5\%$$
- **Valore predittivo del test** cioè la probabilità che un positivo sia malato
  $$P(M^+ / T^+) = \frac{P(T^+ \cap M^+)}{T^+} = \frac{39{,}2\%}{54{,}0\%} = 72{,}6\%$$

**69** Stimare la sensibilità, la specificità e il valore predittivo sulla base della seguente tabella:

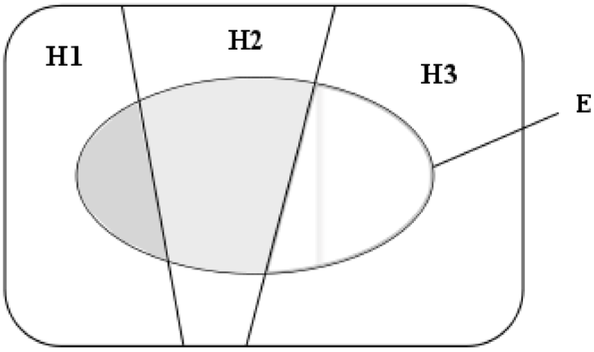
| | Positivo=$T^+$ | Negativo=$T^-$ |
|---|---|---|
| Malato=$M^+$ | 920 | 50 |
| Sano=$M^-$ | 60 | 180 |

## ►8. Teorema di Bayes

Il teorema di Bayes fornisce un metodo che consente di modificare l'opinione iniziale sul verificarsi di un evento (espressa sotto forma di probabilità a priori) sulla base delle informazioni fornite dall'esperienza che permettono di formulare nuove probabilità dette probabilità a posteriori.

Esempio

Supponiamo che un paziente vada a farsi visitare da un medico per la prima volta.
Già prima di effettuare la visita il medico ha un'idea delle possibili malattie da cui potrebbe essere affetto: sa che molti dei suoi pazienti hanno disturbi di poco conto (evento $H_1$), alcuni hanno disturbi più gravi (evento $H_2$), altri ancora malattie rare (evento $H_3$).
A questo punto il medico effettuerà la visita, sottoporrà il paziente ad una serie di analisi cliniche ed otterrà il quadro dei sintomi: potrà adesso formulare una diagnosi sul paziente.
Vediamo che cosa rappresenta tutto ciò in termini di probabilità.
Indichiamo con $H_1$, $H_2$ ed $H_3$ le tre tipologie di malattia in ordine di rarità: sulla base delle informazioni che il medico ha in relazione ai propri pazienti può associare ad ognuno di questi eventi una probabilità a priori P(Hi).
In funzione della sintomatologia riscontrata (rappresentata dall'evento E) si possono determinare sulla base delle statistiche ufficiali a livello nazionale le probabilità condizionate P(E/Hi) che rappresentano le probabilità che si manifestino tali sintomi se un paziente è affetto da una delle tre tipologie di malattia in esame.
Ciò che ci interessa è ricavare le probabilità a posteriori P(Hi/E), che rappresentano le probabilità che il paziente abbia contratto una delle tre malattie, sapendo che presenta i sintomi rappresentati da E. Su questa base si formulerà la diagnosi.
Si conoscono o si possono conoscere le seguenti probabilità:
Probabilità sulla tipologia di malattia fornita dall'esperienza del medico
$P(H_1)=0{,}65\,;\quad P(H_2)=0{,}30\,;\quad P(H_3)=0{,}05$
Probabilità dei sintomi evidenziati dal paziente condizionate alla gravità della malattia desunte dalle statistiche ufficiali: $P(E/H_1)=0{,}20\,;\quad P(E/H_2)=0{,}60\,;\quad P(E/H_3)=0{,}70$
La situazione può essere rappresentata con un Diagramma di Venn:




Essendo $H_1$ , $H_2$ e $H_3$ eventi incompatibili ed esaustivi, l'evento E può essere visto come unione di tre eventi disgiunti: $E\cap H_1,\ E\cap H_2\ e\ E\cap H_3$
Quindi $P(E) = P(E\cap H_1)+P(E\cap H_2)+P(E\cap H_3)$
$P(E\cap H_1) = P(E/H_1)\cdot P(H_1);\ P(E\cap H_2) = P(E/H_2)\cdot P(H_2);\ P(E\cap H_3) = P(E/H_3)\cdot P(H_3)$ da cui
$P(E) = P(E/H_1)\cdot P(H_1) + P(E/H_2)\cdot P(H_2) + P(E/H_3)\cdot P(H_3)$
Nell'esempio: $P(E) = 0{,}65\cdot 0{,}2 + 0{,}3\cdot 0{,}6 + 0{,}05\cdot 0{,}7 = 0{,}345$
Quello che a noi interessa sono in realtà le probabilità che il paziente abbia una delle tre tipologie di malattia sapendo che manifesta i sintomi rappresentati dall'evento *E.*

$$P(H_i/E) = \frac{P\cap H_i}{P(E)} = \frac{P(E/H_i)\cdot P(H_i)}{P(E)}\ \text{quindi}$$

$$P(H_1/E) = \frac{P(E/H_1)\cdot P(H_1)}{P(E)};\ P(H_2/E) = \frac{P(E/H_2)\cdot P(H_2)}{P(E)};\ P(H_3/E) = \frac{P(E/H_3)\cdot P(H_3)}{P(E)}$$

Queste probabilità sono dette **probabilità a posteriori**.

Nell'esempio $P(H_1/E)=\frac{0{,}65\cdot 0{,}2}{0{,}345}=0{,}38$; $P(H_2/E)=\frac{0{,}3\cdot 0{,}6}{0{,}345}=0{,}52$; $P(H_3/E)=\frac{0{,}05\cdot 0{,}7}{0{,}345}=0{,}1$

Si può osservare che la conoscenza dei sintomi modifica in questo caso la diagnosi, in quanto la malattia più probabile non risulta quella più comune, bensì quella intermedia.

TEOREMA DI BAYES. Se $H_1, H_2, \ldots, H_n$ costituiscono un sistema di eventi incompatibili ed esaustivi ed $E$ è un evento non impossibile, allora per ogni $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ si ha la seguente uguaglianza: $P(H_i/E)=\frac{P(H_i)\cdot P(E/H_i)}{P(H_1)\cdot P(E/H_1)+P(H_2)\cdot P(E/H_2)+\ldots+P(H_n)\cdot P(E/H_n)}$ .

Il teorema di Bayes può quindi essere utilizzato ogni volta che abbiamo a che fare con un evento che può essere originato da n diverse cause tra loro incompatibili ed esaustive (o sul quale si possono formulare n ipotesi), delle quali si conosce la **probabilità a priori** e di cui si possono individuare, sulla base dell'esperienza, le probabilità $P(E/H_i)$ dette **probabilità probative** che ci permettono di modificare le nostre probabilità iniziali attraverso le **probabilità a posteriori** $P(H_i/E)$ .

Esempio

Un sacchetto contiene 4 palline che possono essere bianche o nere. Effettuiamo 5 estrazioni, rimettendo sempre la pallina estratta nel sacchetto. Occorre stimare la composizione dell'urna, cioè di quante palline bianche e nere questa si compone.

L'ipotesi di partenza senza conoscere la composizione dell'urna e senza aver effettuato alcun esperimento è che l'urna può contenere un numero di palline bianche compreso fra 0 e 4 e che ognuno di questi 5 eventi abbia la stessa probabilità, quindi $P(H_i)=\frac{1}{5}$ dove con $H_i$ si indica l'ipotesi che l'urna contenga *i* palline bianche.

Procediamo all'estrazione, rimettendo ogni volta la pallina nel sacchetto, supponiamo che l'estrazione abbia dato il seguente risultato: 3 palline bianche e 2 nere, nel seguente ordine BBNBN.

Qual è la probabilità associata all'esperimento in ognuna delle cinque ipotesi formulate in precedenza?

Si tratta della probabilità dell'intersezione di 5 eventi indipendenti: una pallina bianca alla 1^ estrazione e alla 2^ , una pallina nera alla 3^, una pallina bianca alla 4^ ed una nera alla 5^, quindi si ottiene come prodotto delle probabilità dei singoli eventi enumerati.

Se l'urna contiene *i* palline bianche la probabilità dell'evento prodotto è la seguente:

| | |
|---|---|
| Probabilità dell'esperimento subordinata all'ipotesi $H_0$= 0 palline bianche | $P(E/H_0)=\left(\frac{0}{4}\right)\cdot\left(\frac{0}{4}\right)\cdot\left(\frac{4-0}{4}\right)\cdot\left(\frac{0}{4}\right)\cdot\left(\frac{4-0}{4}\right)=0$ |
| Probabilità dell'esperimento subordinata all'ipotesi $H_1$= 1pallina bianca | $P(E/H_1)=\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{4-1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{4-1}{4}\right)=0{,}0088$ |
| Probabilità dell'esperimento subordinata all'ipotesi $H_2$= 2 palline bianche | $P(E/H_2)=\left(\frac{2}{4}\right)\cdot\left(\frac{2}{4}\right)\cdot\left(\frac{4-2}{4}\right)\cdot\left(\frac{2}{4}\right)\cdot\left(\frac{4-2}{4}\right)=0{,}0312$ |
| Probabilità dell'esperimento subordinata all'ipotesi $H_3$= 3 palline bianche | $P(E/H_3)=\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{4-3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{4-3}{4}\right)=0{,}0264$ |
| Probabilità dell'esperimento subordinata all'ipotesi $H_4$= 4 palline bianche | $P(E/H_4)=\left(\frac{4}{4}\right)\cdot\left(\frac{4}{4}\right)\cdot\left(\frac{4-4}{4}\right)\cdot\left(\frac{4}{4}\right)\cdot\left(\frac{4-4}{4}\right)=0$ |

A questo punto possiamo calcolare la probabilità dell'esperimento come somma delle probabilità condizionate per la probabilità di ogni ipotesi a priori =0,20.

$P(E)=P(E/H_0)\cdot P(H_0)+P(E/H_1)\cdot P(H_1)+P(E/H_2)\cdot P(H_2)+P(E/H_3)\cdot P(H_3)+P(E/H_4)\cdot P(H_4)$

$P(E)=0\cdot 0{,}2+0{,}0088\cdot 0{,}2+0{,}0312\cdot 0{,}2+0{,}0264\cdot 0{,}2+0\cdot 0{,}2=0{,}0133$

Ora, utilizzando il teorema di Bayes, si possono calcolare le probabilità a posteriori.

Probabilità ipotesi 0 palline bianche subordinata all'esperimento $P(H_0/E)=\frac{0\cdot 0{,}2}{0{,}0133}=0$

Probabilità ipotesi 1 pallina bianca subordinata all'esperimento $P(H_1/E)=\frac{0{,}0088\cdot 0{,}2}{0{,}0133}=0{,}1324$

Probabilità ipotesi 2 palline bianche subordinata all'esperimento $P(H_2/E)=\frac{0{,}0312\cdot 0{,}2}{0{,}0133}=0{,}4706$

Probabilità ipotesi 3 palline bianche subordinata all'esperimento $P(H_3/E)=\frac{0{,}0264\cdot 0{,}2}{0{,}0133}=0{,}3971$

Probabilità ipotesi 4 palline bianche subordinata all'esperimento $P(H_4/E)=\frac{0\cdot 0{,}2}{0{,}0133}=0$

Sulla base di questa esperienza risulta quindi che le due composizioni più probabili sono quella con 2 o 3 palline rosse.

**70** Ripetiamo l'esperimento assumendo le probabilità ottenute come nuove probabilità a priori ed effettuando ancora 5 estrazioni dal sacchetto. Supponiamo che la sequenza ottenuta sia: NNNNN. Quali sono le questa volta le probabilità subordinate all'esperimento?

$P(H_0/E)=0{,}723$ ; $P(H_1/E)=0{,}229$ ; $P(H_2/E)=0{,}045$ ; $P(H_3/E)=0{,}003$ ; $P(H_4/E)=0$

**71** Il 22%d egli individui appartenenti a una data popolazione adulta risulta fumatore ($F^+$). E' noto inoltre che l'85% dei fumatori ed il 20% dei non fumatori sono affetti da malattie respiratorie ($M^+$). Si completi la seguente tabella

| | Malato=$M^+$ | Sano=$M^-$ | Totale |
|---|---|---|---|
| Fumatore=$F^+$ | 18,7% | | 22% |
| Non Fumatore=$F^-$ | | | 78% |
| Totale | | | 100% |

Determinare la probabilità che una persona affetta da malattie respiratorie sia un fumatore

R. $P(F^+/M^+)=55\%$

**72** Un gruppo di escursionisti organizza una gita in montagna. Il 30% dei partecipanti è fuori allenamento. Si ipotizza che coloro che non sono allenati abbiano una probabilità di raggiungere la meta pari al 60% e che quelli allenati abbiano una probabilità pari al 95%.

A) Qual è la probabilità che un escursionista scelto a caso nel gruppo raggiunga la meta?
B) Sapendo che un escursionista ha raggiunto la meta, con quale probabilità di appartenere al gruppo dei non allenati? R. $P(A)=0{,}85$ ; $P(B)=0{,}79$

**73** Tra i villeggianti di una località di mare, il 75% trascorre le vacanze sempre nello stesso posto, il 25% solo saltuariamente. Il 60% dei villeggianti abitudinari possiede una casa e così il 10% dei villeggianti saltuari.

A) Sapendo che un villeggiante scelto a caso possiede una casa, con che probabilità si tratta di un abitudinario? R. $P(A)=0{,}95$

**74** Tre macchine, A B, e C, producono rispettivamente il 60%, il 30%, e il 10% del numero totale dei pezzi prodotti da una fabbrica. Le percentuali di produzione difettosa di queste macchine sono rispettivamente del 2%, 3% e 4%.

A) Determinare la probabilità di estrarre un pezzo difettoso.
B) Se viene estratto a caso un pezzo che risulta difettoso, determinare la probabilità che quel pezzo sia stato prodotto dalla macchina C. R. $P(A)=0{,}025$ ; $P(B)=0{,}16$

## ►9. Esercizi dalle prove Invalsi

**75** Se si lanciano contemporaneamente due monete, qual è la probabilità che escano una testa e una croce? (Prove Invalsi 2005)

**76** Qual è la probabilità che su 6 lanci di un comune dado a 6 facce non truccato si abbia per 6 volte il numero 3? (Prove Invalsi 2005)

**77** Un'urna contiene 20 gettoni numerati da 1 a 20. Si estrae un gettone: è un numero pari. Sena reinserire il gettone, se ne estrae un secondo. Qual è la probabilità di estrarre un numero dispari? (Prove Invalsi 2005)

**78** Se lanci un dado una sola volta, quale probabilità hai di ottenere un numero pari minore di 6? (Prove Invalsi 2006)

**79** E' lanciato un dado non truccato a forma di ottaedro (solido regolare a otto facce), le cui facce sono numerate da 1 a 8. Qual è la probabilità che escca una faccia il cui numero è multiplo di 3? (Prove Invalsi 2006)

**80** Un mazzo di carte da poker è composto da 52 pezzi, 12 dei quali sono figure. Pescando a caso una carta, qual è la probabilità che si verifichi l'evento: "esce una figura o un asso"? (Prove Invalsi 2006)

**81** Un'urna contiene 50 gettoni colorati. 20 sono di colore verde, 18 di colore rosso, 10 di colore blu. Qual è la probabilità di pescare un gettone che non sia né verde, né rosso e né blu? (Prove Invalsi 2006)

**82** La probabilità di estrarre una pallina rossa da un'urna contenente 100 palline è 3/50. Quante sono le palline rosse contenute nell'urma? (Prove Invalsi 2006)

**83** Si lancia un comune dado a 6 facce non truccato per 8 volte. Qual è la probabilità che al terzo lancio esca il numero 5? (Prove Invalsi 2005)

**84** Data un'urna contenente 30 palline, di cui 6 rosse, 9 gialle, 3 verdi e 12 blu, quale delle seguenti affermazioni è falsa? La probabilità di estrarre una pallina...

A. rossa o gialla è 0,5
B. verde è 0,1
C. blu o gialla è 0,7
D. rossa o blu è 0,4

(Prove Invalsi 2005)

**85** Se i lanciano contemporaneamente due monete, qual è la probabilità che esca almeno una testa? (Prove Invalsi 2006)

**86** Un'urna contiene 20 palline: 4 bianche, 6 rosse e 10 verdi. Quanto vale il rapporto fra la probabilità di estrarre una pallina bianca o rossa e la probabilità di estrarre una pallina rossa o verde? (Prove Invalsi 2006)

**87** La probabilità di estrarre una pallina bianca da un'urna è 4/10. Quale delle seguenti affermazioni è compatibile con la precedente?

A. L'urna contiene 20 palline bianche, 15 rosse e 5 nere.
B. L'urna contiene 40 palline bianche, 40 rosse e 40 nere.
C. L'urna contiene 40 palline bianche e 100 rosse.
D. l'urna contiene 80 palline bianche, 50 rosse e 70 nere.

(Prove Invalsi 2006)

**88** In un dado truccato avente le facce numerate da 1 a 6, la probabilità di uscita di un numero è direttamente proporzionale al numero stesso. Quanto vale la probabilità che, lanciando il dado, esca il numero 5? (Prove Invalsi 2006)

**89** Un'urna contiene 50 palline. Marco ne estrae 20 senza rimetterle nell'urna ed osserva che 10 sono nere e 10 sono rosse. Estraendo una 21-esima pallina, qual è la probabilità che questa si  nera? (Prove Invalsi 2007)

**90** Quanto vale la probabilità che una persona risponda correttamente ad una domanda che prevede solo una risposta esatta, scegliendo a caso una risposta fra le quattro proposte? (Prove Invalsi 2007)

**91** Un'urna contiene 21 palline, ognuna delle quali è contrassegnata da una lettera dell'alfabeto italiano. Qual è la probabilità che, estraendo a caso una di queste palline, si verifichi l'evento "esce la lettera π"? (Prove Invalsi 2007)

**92** In una lotteria i 4 premi sono assegnati per estrazioni successive, partendo dal 1° fino al 4°. Pietro ha acquistato uno solo dei 100 biglietti venduti. Egli è presente all'estrazione dei premi e l'estrazione del 1° premio lo vede perdente. Qual è la probabilità che Pietro vinca il 2° premio? (Prove Invalsi 2007)

**93** Si lanciano due dadi ed escono due numeri il cui prodotto è 6. Qual è la probabilità che uno dei due numeri usciti sia 2? (Prove Invalsi 2007)

**94** Quanti casi possibili si ottengono gettando un dado e una moneta contemporaneamente?

A. 12 B. 8 C. 36 D. 2 E. La risposta esatta non è tra quelle proposte.

(Prove Invalsi)

**95** Se lanci un normale dado numerato da 1 a 6, ciascun numero ha probabilità 1/6 di uscire. In 4 lanci successivi sono usciti i numeri 2, 3, 4 e 3. Se lanci il dado una quinta volta, qual è la probabilità che esca 3?

A. Maggiore di 61, perché nei 4 tiri precedenti il punteggio 3 è uscito 2 volte su 4.
B. 61, perché il dado non si ricorda degli eventi passati.
C. Minore di 61, perché il punteggio 3 è già uscito e ora è più probabile che escano gli altri.
D. 21, come indica il calcolo dei casi favorevoli (due) sul totale dei casi (quattro).
E. Le informazioni date non consentono di rispondere.

(Prove Invalsi 2003)

**96** Estrarre da un mazzo di carte francesi (52 carte) una carta di seme nero e figura è…

A. più probabile che estrarre una carta di seme nero.
B. più probabile che estrarre una figura di qualunque seme.
C. meno probabile che estrarre una carta di seme nero e asso.
D. altrettanto probabile che estrarre una carta di seme nero o figura.
E. altrettanto probabile che estrarre una carta di seme rosso e figura.

(Prove Invalsi 2003)

**97** La probabilità di estrarre un 6 o un 8 da un mazzo di carte napoletane (40 carte) è… (Prove Invalsi 2003)

**98** Aldo e Luigi giocano a testa o croce, ciascuno di essi lancia due monete. Qual è la probabilità che il numero di teste di Luigi sia uguale a quelle ottenute da Aldo? (Prove Invalsi 2003)

**99** Se lanci una normale moneta, Testa e Croce hanno entrambe probabilità 1/2 di uscire. In 4 lanci successivi, sono usciti Testa, Croce, Testa, Testa. Se lanci la moneta una quinta volta, qual è la probabilità che esca Testa?

A. Maggiore di 1/2
B. Uguale a ½
C. Minore di ½
D. Le informazioni date non consentono di rispondere.

(Prove Invalsi 2004)

**100** Nel gioco della tombola qual è la probabilità di estrarre un numero maggiore di 20 e minore di 35? (Prove Invalsi 2004)

**101** Qual è la probabilità che lanciando un dado esca un numero dispari o multiplo di 3? (Prove Invalsi 2004)

# MATEMATICA C3 – ALGEBRA 2
# 8. TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE PIANE

La danza degli stormi, foto di _Pek_
http://www.flickr.com/photos/_pek_/4113244536

## Indice

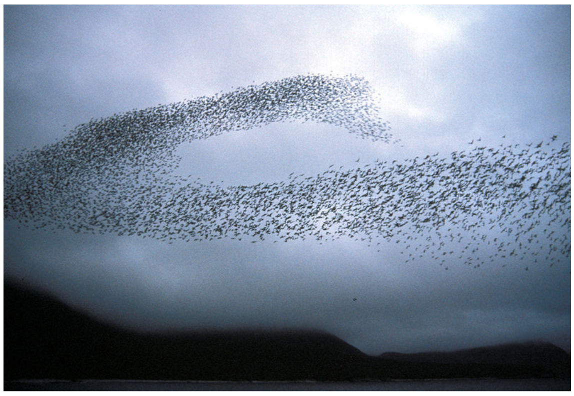
## ►1. Generalità sulle trasformazioni geometriche piane

### Introduzione e definizioni

"C'è una cosa straordinaria da vedere a Roma in questa fine d'autunno ed è il cielo gremito d'uccelli. Il terrazzo del signor Palomar è un buon punto d'osservazione… Nell'aria viola del tramonto egli guarda affiorare da una parte del cielo un pulviscolo minutissimo, una nuvola d'ali che volano… Quando si pensa agli uccelli migratori ci si immagina di solito una formazione di volo molto ordinata e compatta... Questa immagine non vale per gli storni, o almeno per questi storni autunnali nel cielo di Roma…" [Italo Calvino, *Palomar*]

Il volo di questi uccelli disegna nel cielo figure in continua **trasformazione**, come potete vedere nelle foto.

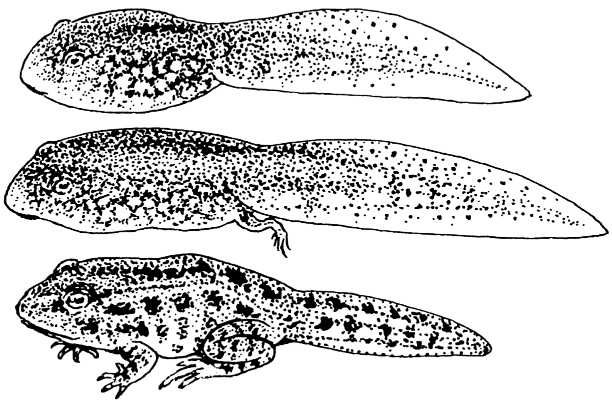
La danza degli stormi, foto di _Pek_
http://www.flickr.com/photos/_pek_/4113244536



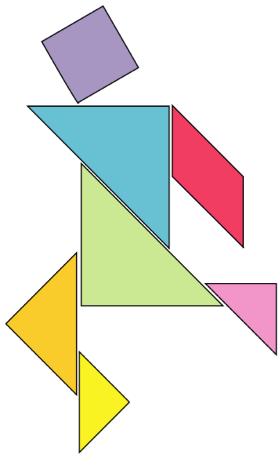
Auklet flock, Shumagins , foto di pubblico dominio
fonte http://digitalmedia.fws.gov/

Il concetto di trasformazione assume significati diversi a secondo dell'ambito in cui è definito: ad esempio in zoologia la trasformazione di un animale dallo stadio di larva allo stadio di adulto è più propriamente chiamata "metamorfosi". Ciò provoca un cambiamento totale del corpo del giovane e l'adulto quasi sempre avrà una forma molto differente da quella della larva.

Il gioco del Tangram si basa sulla capacità di passare da una figura ad un'altra senza che nessun pezzo del quadrato base venga tagliato o modificato nelle sue dimensioni: le figure che si ottengono hanno forme diverse, ma sono costituite dagli stessi pezzi. Possiamo dire che sono trasformate le une nelle altre grazie alla nostra fantasia.



Line art representation of w:Tadpole, pubblico dominio
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7e/Tadpole_%28PSF%29.png



Tangram, immagine di Actam pubblico dominio
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/7a/Tangram-man.svg/2000px-angram-man.svg.png

In geometria si definiscono le trasformazioni come particolari corrispondenze aventi come dominio e codominio il piano considerato come insieme di punti e precisamente si enuncia la:

DEFINIZIONE. **Trasformazione geometrica piana** è una corrispondenza biunivoca tra punti del piano; attraverso una legge ben definita; la corrispondenza associa ad un punto P del piano uno e un solo punto P' dello stesso piano e, viceversa, il punto P' risulta essere il corrispondente di un solo punto P del piano. Diciamo che **P' è l'immagine di P** nella trasformazione.

Indicata con Φ la legge della corrispondenza, per esprimere il legame tra P e P' scriveremo: $\Phi: P \rightarrow P'$ o anche $P \xrightarrow{\Phi} P'$ e leggeremo: **in Φ al punto P corrisponde il punto P'**, oppure $\Phi(P) = P'$ e leggeremo: **Φ di P è uguale a P'** , scrittura che definisce la trasformazione geometrica come funzione del punto preso in considerazione.

DEFINIZIONE. La trasformazione fa corrispondere ad una figura Ω del piano la figura Ω' costituita dalle immagini dei punti della figura iniziale: **Ω'** si definisce **immagine di Ω in Φ** e scriveremo: $\Phi: \Omega \rightarrow \Omega'$ o anche $\Omega \xrightarrow{\Phi} \Omega'$ o ancora $\Phi(\Omega) = \Omega'$

Le trasformazioni geometriche che noi studieremo sono tali da far corrispondere ad una retta r la retta r' individuata dai punti A' e B' immagine di due punti A e B scelti arbitrariamente su r. Tali trasformazioni sono chiamate **collineazioni**.

DEFINIZIONE. Si chiama **punto unito o fisso** nella trasformazione il punto che coincide con la sua immagine. Se tutti i punti del piano coincidono con la propria immagine la trasformazione è l'**identità**.

Per descrivere una trasformazione geometrica dobbiamo definire come si costruisce l'immagine di un qualunque punto del piano.

Esempio

Consideriamo nel piano la seguente corrispondenza: fissato un punto K la corrispondenza $S_K$ associa ad ogni punto P del piano il punto P' dello stesso piano tale che K risulti il punto medio del segmento PP'. $S_K$ è una trasformazione geometrica?

La definizione è costruttiva:

$P \xrightarrow{S_x} P' \wedge PK \equiv KP'$ $\quad A \xrightarrow{S_x} A' \wedge AK \equiv KA'$

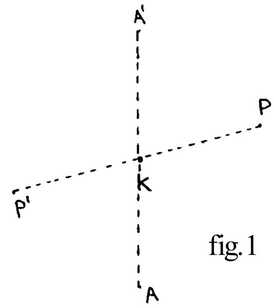


fig.1

Per dimostrare che la corrispondenza è una trasformazione geometrica dobbiamo verificare che si tratta di una corrispondenza biunivoca tra punti del piano: ogni punto ha un corrispondente in $S_K$ e viceversa ogni punto è immagine di un solo punto del piano stesso. Il punto K è corrispondente di se stesso dunque è un punto unito della trasformazione, anzi è l'unico punto unito. (fig.1)

Nella figura 2 è rappresentato come opera la trasformazione $S_K$ se applicata ad un quadrato

$AK \equiv KA';\ BK \equiv KB';\ CK \equiv KC';\ DK \equiv KD'$

$ABCD \xrightarrow{S_K} A'B'C'D'$ e i due quadrati hanno le stesse dimensioni.

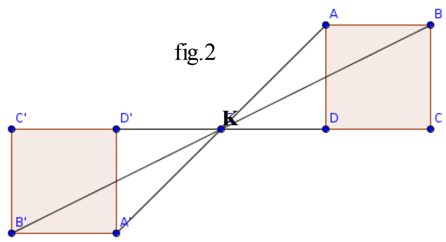


fig.2

Esempio

Definiamo una trasformazione geometrica Φ sul punto P: dato un punto O, tracciamo la semiretta uscente da O e passante per P; il punto P' trasformato di P è un punto della semiretta tale che OP'=2OP.

Applico questa trasformazione al quadrato ABCD. (fig. 3)

Il quadrato si trasforma in un altro quadrato, anche se i due quadrati non hanno le stesse dimensioni.

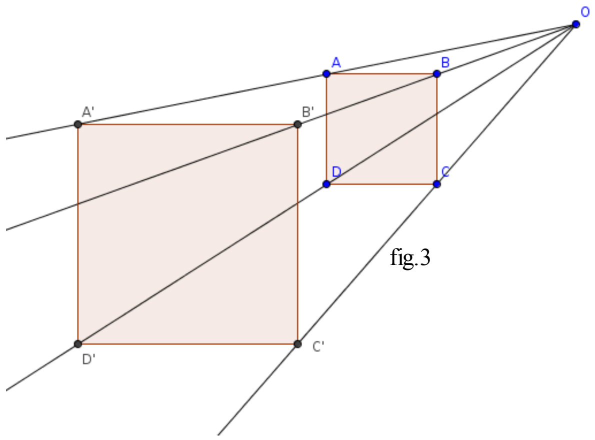


fig.3

Se il piano è dotato di riferimento cartesiano ortogonale la legge della trasformazione geometrica piana lega le coordinate di un punto e quelle del suo corrispondente mediante equazioni o sistemi di equazioni.

| |
|---|
| DEFINIZIONE. Chiamiamo **equazione della trasformazione** le espressioni algebriche che indicano come si passa dalle coordinate di un punto a quelle della sua immagine. |

Esempio

La corrispondenza Φ associa ad un punto P del piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale il punto P' secondo la seguente legge:

$\Phi : P(x_P, y_P) \to P'(-2x_p, x_P - y_P)$ . La corrispondenza assegnata è una trasformazione geometrica piana?

STRATEGIA RISOLUTIVA:

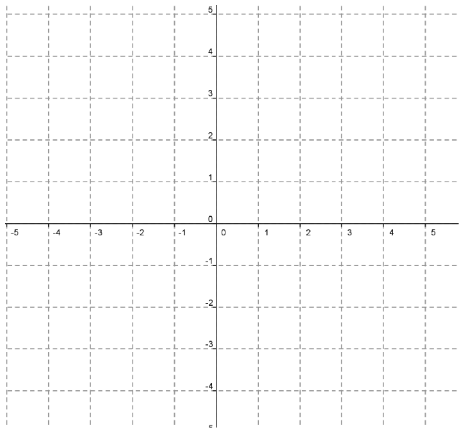
scelgo un punto del piano: P (…, …) e determino P'(…, …)

scelgo un punto Q'(…, ...) e determino la controimmagine Q(…, …)

posso affermare che la corrispondenza è biunivoca perché

… … … … … … … … … … … … … … … … … … … … …

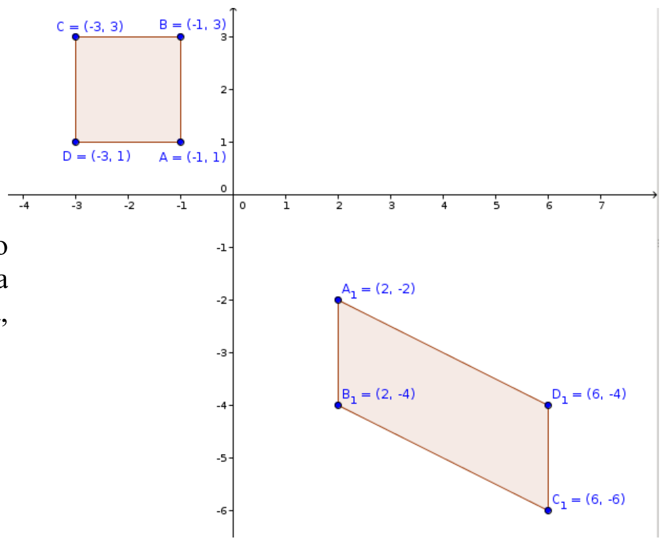
e quindi posso affermare che è una trasformazione geometrica.



Applichiamo la stessa trasformazione al quadrato di vertici A(-1;1) , B (-1;3) , C (-3;3) , D (-3;1) (vedi fig. 4)

Questa trasformazione fa corrispondere al quadrato ABCD il parallelogramma $A_1B_1C_1D_1$. Essa ha cambiato la natura della figura geometrica di partenza, ma ha mantenuto il parallelismo tra i lati:

$$\begin{cases} AB // CD \\ \Phi(AB) = A_1B_1 ; \Phi(CD) = C_1D_1 \end{cases} \to A_1B_1 // C_1D_1$$

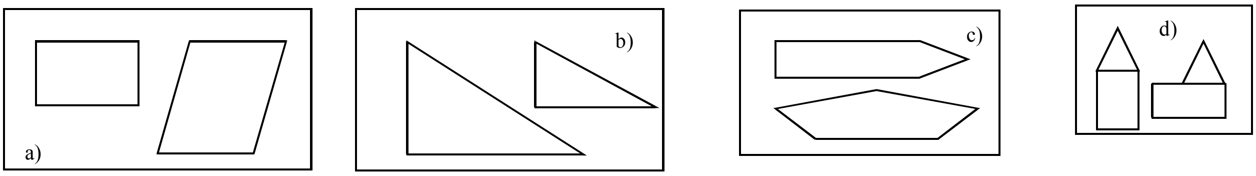


Si noti come ci sono trasformazioni geometriche che mantengono invariate forma e dimensioni delle figure a cui sono applicate, altre che mantengono inalterate forme ma non dimensioni, altre ancora che non mantengono neppure la forma.

DEFINIZIONE: Si chiamano **proprietà invarianti di una trasformazione** le caratteristiche che una figura e la sua corrispondente mantengono inalterate nella trasformazione.

Le principali caratteristiche che una trasformazione può lasciare inalterate sono: la lunghezza dei segmenti, l'ampiezza degli angoli, il rapporto tra segmenti, la misura della superficie, il parallelismo, l'orientamento dei punti del piano, la direzione della retta, la forma, il numero di lati.

**1** Le figure delle seguenti coppie si corrispondono in una trasformazione geometrica piana: associate a ciascuna coppia di figure la caratteristica che rimane immutata nella trasformazione, ossia individuate l'invariante o gli invarianti della trasformazione:




**2** Si sa che in una trasformazione geometrica muta un quadrato in un rombo; gli invarianti di questa trasformazione sono:
[A] il parallelismo dei lati e l'ampiezza degli angoli
[B] l'ampiezza degli angoli e la misura dei lati
[C] solo il parallelismo dei lati
[D] il parallelismo dei lati e la perpendicolarità delle diagonali

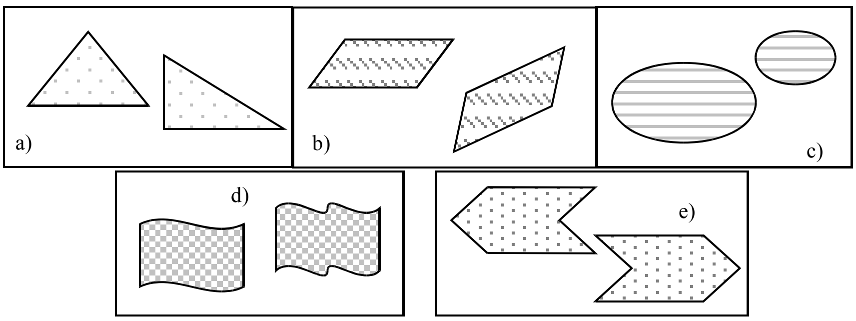
In questo capitolo tratteremo solo delle trasformazioni che mantengono invariate forma e dimensioni.

DEFINIZIONE. Si chiama **isometria** una trasformazione piana che associa a due punti A e B del piano i punti A' e B' tali che **AB e A'B' risultano congruenti**.

Solo il primo esempio, tra i precedenti, rappresenta una isometria. Per dimostrare che è una isometria dobbiamo dimostrare che segmenti corrispondenti sono congruenti. Consideriamo il segmento AP e il suo corrispondente A'P'; dimostriamo che AP≅A'P'. Considero i triangoli AKP e A'KP', hanno:

… … … … … … … … … … … ….
Lasciamo al lettore lo sviluppo della dimostrazione.

**3** Quali coppie sono formate da figure corrispondenti in una isometria?



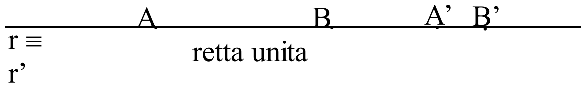

R. [ b) ; e)]

In una isometria:

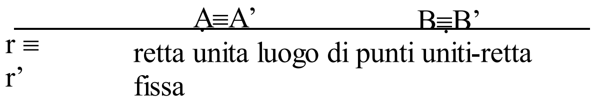
- L'immagine di una retta è una retta, l'immagine di una semiretta è una semiretta, l'immagine di un segmento è un segmento ad esso congruente.
- A rette parallele corrispondono rette parallele.
- A rette incidenti corrispondono rette incidenti.
- Ad un angolo corrisponde un angolo ad esso congruente.

DEFINIZIONE. Una **retta** è **unita** in una isometria Σ se coincide con la sua immagine, cioè ogni punto della retta data ha come corrispondente un punto della stessa retta.

Può succedere che ogni punto di una retta sia un punto unito: in tal caso la **retta unita è luogo di punti uniti o retta fissa.**




$$\left.\begin{array}{l} A\in r \wedge B\in r \\ \sum :(A\to A')\wedge(B\to B') \\ A'\in r \wedge B'\in r \end{array}\right\}\to r\equiv r'$$




$$\left.\begin{array}{l} A\in r \wedge B\in r \\ \sum :(A\to A')\wedge(B\to B') \\ A'\equiv A \wedge B'\equiv B \end{array}\right\}\to r\equiv r'$$

## ►2. Le isometrie

Riprendiamo la definizione del paragrafo precedente:
Si chiama isometria una trasformazione piana che associa a due punti A e B del piano i punti A' e B' tali che AB e A'B' risultano congruenti.

Richiamiamo anche le proprietà:

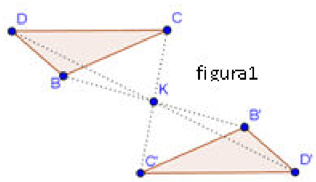
- l'immagine di una retta è una retta, l'immagine di una semiretta è una semiretta, l'immagine di un segmento è un segmento ad esso congruente;
- a rette parallele corrispondono rette parallele;
- a rette incidenti corrispondono rette incidenti;
- ad un angolo corrisponde un angolo ad esso congruente.

Ci proponiamo di studiare particolari isometrie.

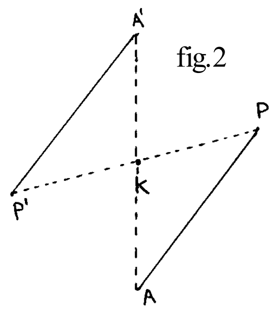
### La simmetria centrale

DEFINIZIONE. Fissato nel piano un punto K, chiamiamo **simmetria centrale di centro K** (*indicata col simbolo* $S_K$ ) la corrispondenza che associa ad un punto P del piano il punto P' tale che K risulti il punto medio del segmento PP'.

Per determinare l'immagine di un segmento basta determinare l'immagine dei suoi estremi. Nella figura1 è illustrato come agisce SK su una qualunque figura piana: l'immagine del triangolo BCD è il triangolo B'C'D' ottenuto determinando l'immagine di ciascuno dei suoi vertici.




TEOREMA 1
**Dimostrate che $S_K$ è una isometria.**
Fissato K, centro di simmetria, per la dimostrazione servitevi della figura 2.
Ipotesi: $A\overset{S_K}{\to}A'$; $P\overset{S_K}{\to}P' \to PK\equiv P'K$; $AK\equiv A'K$
Tesi: AP≅A'P'
Lasciamo al lettore la dimostrazione.



TEOREMA 2
**Dimostrate che rette corrispondenti in $S_K$ sono parallele.**
Osserviamo che per determinare l'immagine r' di una retta r in $S_K$ basta costruire l'immagine A' e B' di due suoi punti A e B. Per la costruzione effettuata si ha $AK \equiv KA'$ e $BK \equiv KB'$, per la dimostrazione del Teorema 1 abbiamo ottenuto $AKB \equiv A'KB'$ dunque in particolare $A\hat{B}K \equiv A'\hat{B}'K$. Questi sono angoli alterni interni delle rette r ed r' con trasversale BB' che pertanto risultano parallele.

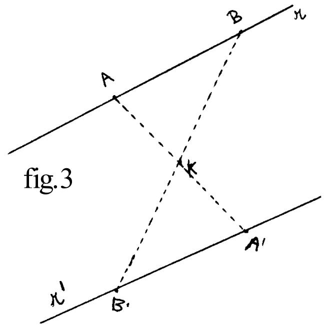
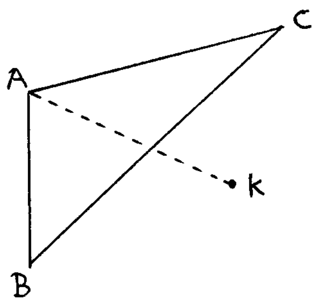


fig.3

GLI ELEMENTI UNITI
- l'unico punto unito è il centro di simmetria.
- sono unite tutte le rette passanti per il centro di simmetria.
*Lasciamo al lettore la verifica di quest'ultima proposizione*

**4** Completate la costruzione del simmetrico del triangolo ABC in $S_K$.

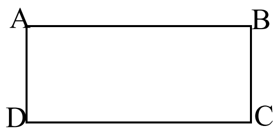



Immaginate di percorrere il contorno di ABC partendo dal vertice A: state ruotando in senso orario o antiorario? ……... In quale senso percorrete il contorno di A'B'C' partendo da A'? ………….
Questo fatto ci permette di concludere che $S_K$ mantiene l'orientamento dei punti: **è una isometria diretta**.

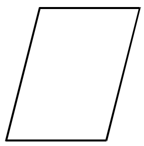
**5** Presi due punti T e T' nel piano è vero che possiamo individuare la simmetria centrale in cui T' è immagine di T?

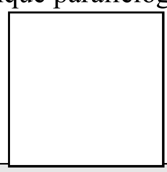
**6** Come dobbiamo scegliere due segmenti affinché sia possibile determinare una simmetria centrale in cui essi siano corrispondenti?

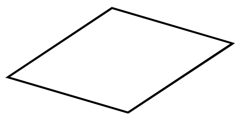
**7** Nel rettangolo ABCD indicate con O il punto d'incontro delle diagonali; determinate l'immagine di ABCD nella simmetria di centro O. Completate:
$S_O$ : ABCD → ......... pertanto il **rettangolo è una figura unita** nella simmetria avente come centro il punto d'intersezione delle sue diagonali.




Vale la stessa affermazione per qualunque parallelogrammo? Perché? ………………………..







DEFINIZIONE: Si dice che una figura **F ha un centro di simmetria** se esiste nel piano un punto K tale che nella simmetria di centro K, F coincide con la sua immagine F'. **F è unita in $S_K$.**

**8** Anche in natura si presentano elementi dotati di un centro di simmetria: individuatelo nel fiore dell'immagine.

Flower foto di Joe Shlabotnik
http://www.flickr.com/photos/joeshlabotnik/2307646852/

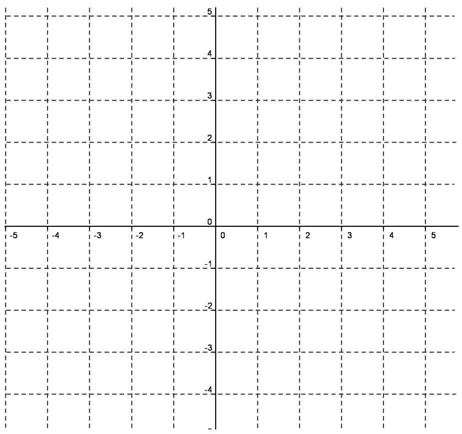
### Descrizione analitica di una simmetria centrale

DEFINIZIONE. Fissate le coordinate del centro di simmetria, chiamiamo **equazione di una simmetria centrale** le relazioni che legano le coordinate del punto P con le coordinate della sua immagine P'.

Sia $K(x_K, y_K)$ il centro di simmetria, $P(x, y)$ il generico punto di cui vogliamo determinare il corrispondente $P'(x', y')$. Ricordiamo la definizione di simmetria centrale: K risulta il punto medio di PP'. Sappiamo che le coordinate del punto medio M di un segmento AB si ottengono dalle coordinate dei suoi estremi $M\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$; nel nostro caso si dovrà avere $\begin{cases} x_K=\frac{x+x'}{2} \\ y_K=\frac{y+y'}{2} \end{cases}$ da cui possiamo ricavare l'equazione cercata: le coordinate del punto immagine $P'(x', y')$ sono date dall'equazione $\begin{cases} x'=2x_k-x \\ y'=2y_k-y \end{cases}$.

<u>Esempio</u>

Determinare il simmetrico di $P(-1,3)$ nella simmetria centrale di centro $K(1,-1)$.
Riportiamo K e P nel riferimento cartesiano ortogonale, scriviamo l'equazione della simmetria: $\begin{cases} x'=2-x \\ y'=-2-y \end{cases}$ e determiniamo le coordinate di $P'(3,-5)$.



**9** Sappiamo che $S_K: P\left(\frac{3}{5},0\right) \to P'\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{2}\right)$ , determinate il centro k della simmetria.

**10** Il segmento di estremi $A(-2,4)$ e $B(2,-4)$ in $S_O$, essendo O l'origine del riferimento cartesiano ortogonale,
[A] ha tutti i suoi punti fissi
[B] ha un solo punto fisso
[C] ha fissi solo gli estremi
[D] ha fissi tutti i punti interni ma non gli estremi
[E] non ha punti fissi

**11** Sono assegnati i punti $A(-5,0)$ , $B(0,5)$ , $C(1,-1)$ ; determinate le coordinate dei vertici $A', B', C'$ del triangolo immagine di $ABC$ nella simmetria avente come centro il punto medio $M$ del lato $AC$ .

**12** I punti $A(1,5)$ , $B(-2,2)$ , $C(0,-4)$ sono tre vertici di un parallelogrammo. Determinate le coordinate del quarto vertice. Indicate con $M$ il punto d'incontro delle diagonali; in $S_M$ il parallelogrammo $ABCD$ è fisso o unito? Perché?

**13** Sappiamo che l'equazione di una simmetria centrale di centro $C(p,q)$ è $\begin{cases} x'=2p-x \\ y'=2q-y \end{cases}$ ; note le coordinate di un punto $P(x,y)$ e della sua immagine $P'(x',y')$ le coordinate del centro sono:
[A] $p=x'+x \quad q=y'+y$
[B] $p=x-\frac{1}{2}x' \quad q=y-\frac{1}{2}y'$
[C] $p=2(x'+x) \quad q=2(y'+y)$
[D] $p=\frac{1}{2}(x'+x) \quad q=\frac{1}{2}(y'+y)$
[E] $p=\frac{1}{2}(x'-x) \quad q=\frac{1}{2}(y'-y)$

**14** Verificate che i tre punti $A(3,2), B(7,-2), C(5,0)$ sono allineati ed equidistanti da $C$ . È vero che $C$ è il centro della simmetria che fa corrispondere al punto $A$ il punto $B$ ?
(ricorda che puoi verificare l'allineamento verificando che $\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AB}$)

**15** Il centro della simmetria che associa al triangolo di vertici $A(0,4), B(-2,1), C(1,5)$ il triangolo di vertici $A'(2,-2), B'(4,1), C'(1,-3)$ è:
a] $K(-1,1)$ b] $K(1,-1)$ c] $K(1,1)$ d] $K(-1,-1)$

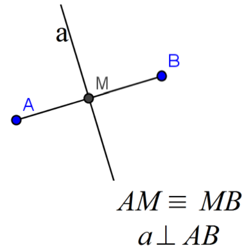
**16** Determinate l'immagine $M'$ del punto medio $M$ del segmento $AB$ di estremi $A(0,5)$ e $B(-4,1)$ in $S_O$ (o è l'origine del riferimento). È vero che $BM'A$ è isoscele sulla base $AB$ ?

**17** Determinate la natura del quadrilatero $ABA'B'$ che si ottiene congiungendo nell'ordine i punti $A(-1,1)$ , $B(-4,-5)$ , A' e B' rispettivamente simmetrici di A e B in $S_O$ . Determinate la misura delle sue diagonali.

### 2.2 La simmetria assiale

Ricordiamo la

DEFINIZIONE. L'**asse di un segmento** AB è la retta perpendicolare al segmento nel suo punto medio M.

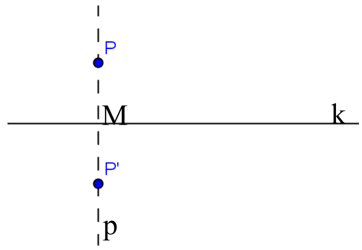



Studiamo una nuova corrispondenza tra punti del piano:

DEFINIZIONE. Fissata nel piano una retta $k$, chiamiamo **simmetria assiale di asse k** (*indicata col simbolo* $S_k$) la corrispondenza che associa ad un punto $P$ del piano il punto $P'$ tale che $k$ risulti l'asse del segmento $PP'$.

Per costruire il corrispondente di un punto P del piano procedete con i seguenti passi:

1. fissate l'asse di simmetria $k$
2. prendete un punto P del piano non appartenente a $k$
3. da $P$ tracciate la perpendicolare p all'asse $k$ e ponete $M = p \cap k$
4. il corrispondente $P'$ di $P$ si trova su p nel semipiano opposto e $P'M \equiv PM$




Avrete costruito una figura simile a quella accanto:

*Lasciamo al lettore le verifiche delle seguenti affermazioni circa gli elementi uniti.*

GLI ELEMENTI UNITI

- ogni punto dell'asse k è unito
- l'asse k è luogo di punti uniti, ossia è una retta fissa
- sono unite tutte le rette perpendicolari all'asse k

TEOREMA 1

Dimostrate che $\mathbf{S_k}$ è una isometria.

Strategia risolutiva:

Dovrete dimostrare che l'immagine di un segmento AB è il segmento A'B' tale che A'B'≅AB; servitevi della figura2 per la dimostrazione, ma prima indicate

Ipotesi: .........

Tesi A'B'≅AB

Suggerimento per la dimostrazione: tracciate la distanza da A e da A' a BB' e dimostrate la congruenza dei triangoli ottenuti ................................

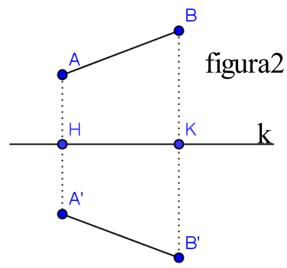


figura2

TEOREMA 2

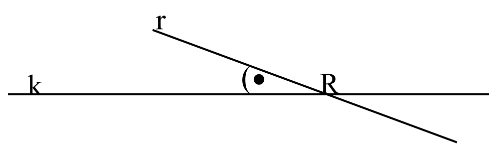
Dimostrate che se r è una retta del piano che interseca l'asse k in R allora la sua immagine r' in $\mathbf{S_k}$ passa per R. Dimostrate inoltre che k risulta la bisettrice dell'angolo di vertice R avente come lati r ed r'.

Ipotesi: k asse di simmetria

$R = r \cap k$

Tesi:

$R = r' \cap k\,;\ r\hat{R}k \equiv k\hat{R}r'$




Dimostrazione:

Per costruire r' costruiamo i simmetrici in $\mathbf{S_k}$ di due punti scelti su r. Possiamo usare il punto R e poi un altro qualunque A. Si ottiene $S_K:\ R \rightarrow \ldots\ldots$ perché ........................... e $S_K:\ A \rightarrow \ldots\ldots$

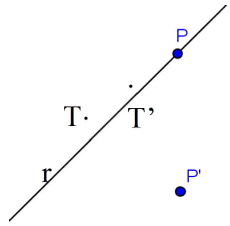
Congiungendo i punti immagine si ottiene r'.

Concludete ..........................................

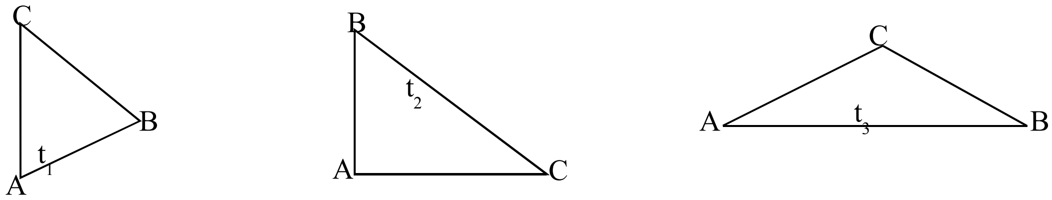
E continuate dimostrando la seconda tesi richiesta.

TEOREMA 3

Dimostrate che se r è parallela all’asse di simmetria allora anche r’ risulta parallela all’asse.




- Nel piano sono assegnati i punti T e T’ corrispondenti in una simmetria assiale. Come potete determinare l’asse di simmetria?
- Nel piano è assegnata la retta r e un suo punto P e un punto P’ non appartenente ad r. Costruisci la retta r’ immagine di r nella simmetria assiale che fa corrispondere al punto P il punto P’.
- Costruite l’immagine di ciascun triangolo ABC della figura nella simmetria avente come asse la retta del lato AC.




Percorrete il contorno del triangolo assegnato seguendo l’ordine alfabetico delle lettere ai vertici: in $t_1$ il percorso è stato in senso orario/antiorario, in $t_2$ in senso orario/antiorario, in $t_3$ in senso orario/antiorario. Cosa succede percorrendo il contorno dei triangoli immagine?

Questo fatto ci permette di concludere che $\mathbf{S_k}$ non mantiene l’orientamento dei punti: **è una isometria invertente**.

**18** Nel triangolo isoscele ABC di base BC considerate la retta r passante per A e perpendicolare a BC; costruite l’immagine di ABC nella simmetria di asse r. Stabilite quale proposizione è vera:
[A] il triangolo è <u>fisso</u> nella simmetria considerata
[B] il triangolo è <u>unito</u> nella simmetria considerata

**19** Assegnato il quadrato ABCD, determinate la sua immagine nella simmetria avente come asse la retta della diagonale AC. Stabilite quale proposizione è vera:
[A] il quadrato è <u>fisso</u> nella simmetria considerata
[B] il quadrato è <u>unito</u> nella simmetria considerata

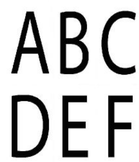
DEFINIZIONE. Si dice che una figura **F ha un asse di simmetria** se esiste nel piano una retta k tale che nella simmetria di asse k F coincide con la sua immagine F’. **F è unita in** $\mathbf{S_k}$

**20** Motivate la verità delle proposizioni
- $p_1$: “il quadrato possiede 4 assi di simmetria” ,
- $p_2$: “il triangolo equilatero possiede 3 assi di simmetria”

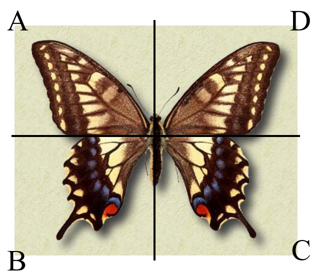
**21** Dimostrate che la retta di un diametro è asse di simmetria per la circonferenza. Potete concludere che la circonferenza possiede infiniti assi di simmetria?

**22** Tra i trapezi ne trovate uno avente un asse di simmetria? Qual è l’asse di simmetria?

**23** Quali lettere dell’alfabeto, tra quelle proposte hanno un asse di simmetria?




**24** Perché la retta che congiunge i punti medi dei lati obliqui di un trapezio isoscele non è un suo asse di simmetria?




**25** “Le due rette tracciate sono assi di simmetria del rettangolo ABCD e pertanto anche della immagine in esso contenuta.”
VERO o FALSO ?

### Descrizione analitica di una simmetria assiale

DEFINIZIONE: Fissata nel riferimento cartesiano ortogonale una retta k, chiamiamo **equazione della simmetria assiale di asse k ($S_k$)** le relazioni che legano le coordinate del punto P con le coordinate della sua immagine P' .

Limitiamo la ricerca dell'equazione della simmetria assiale fissando come asse particolari rette; proseguendo negli studi saprete determinare l'equazione di una simmetria assiale con asse una qualunque retta del piano cartesiano.

### Simmetria rispetto agli assi coordinati

**26** Studiate la corrispondenza tra punti del piano cartesiano espressa dal seguente predicato:

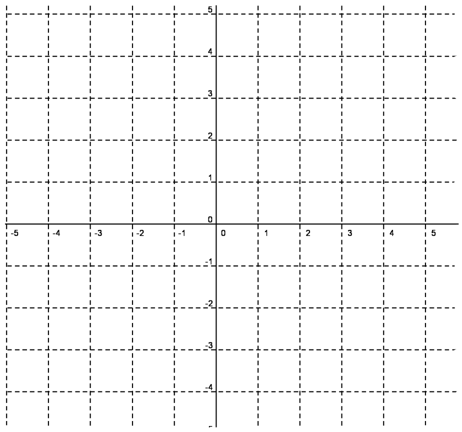
$$\Phi: \ P(x_P, y_P) \rightarrow P'(x_P, -y_P)$$

Completate la tabella:

| $\Phi: \ P(x_P, y_P) \rightarrow P'(x_P, -y_P)$ | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $x'$ | $y'$ |
| $-3$ | $1$ | | |
| $0$ | $-2$ | | |
| $1$ | $0$ | | |
| $4$ | $5$ | | |

E rappresentate nel riferimento cartesiano ciascun punto e il suo corrispondente.

Completate: $\begin{cases} x' = \ldots\ldots \\ y' = \ldots\ldots \end{cases}$



Motivate la verità delle seguenti proposizioni:

" ogni punto del piano ha un unico corrispondente"

… … … … … … … … … … … … … … … … … …

"di ogni punto del piano si può determinare la controimmagine" … … … … … … … … … ...

"la corrispondenza è una trasformazione geometrica" … … … … … … … … … … … …. …

"i punti dell'asse x sono fissi" … … … … … … … … … … … … … … … … … … … … …

"la corrispondenza è una isometria" … … … … … … … … … … … … … …. … … … …

DEFINIZIONE. L'isometria che associa ad ogni punto P del piano il punto P' avente stessa ascissa e ordinata opposta è la **simmetria assiale di asse x ($S_x$) di equazione** $S_x = \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

**27** Ripetete il procedimento seguito studiando la corrispondenza: $\Phi: \ P(x_P, y_P) \rightarrow P'(-x_P, y_P)$ e concludete la

DEFINIZIONE. L'isometria che associa ad ogni punto P del piano il punto P' avente stessa ……… e ………… opposta è la **simmetria assiale di asse ……. ($S_{\ldots}$) di equazione** $S_{\ldots}: \begin{cases} x' = \ldots\ldots \\ y' = \ldots\ldots \end{cases}$

**28** In $S_x$ il segmento AB di estremi A(3,2) e B(3,-2)

[A] è unito luogo di punti uniti
[B] non ha punti fissi
[C] ha tutti i suoi punti uniti tranne A e B
[D] ha un solo punto fisso
[E] ha solo A e B fissi

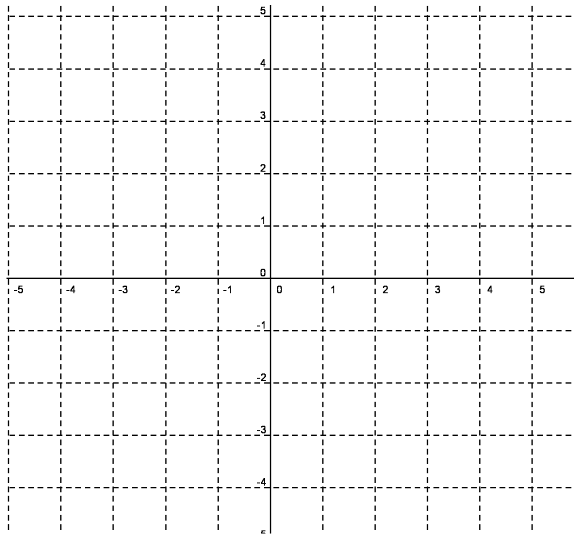
**29** Dimostrate che un qualunque segmento MN di estremi M(a,b) e N(c,d) ha come corrispondente sia nella simmetria avente come asse l'asse x, sia nella simmetria avente come asse l'asse y, il segmento M'N' tale che MN≅M'N'.

| | |
|---|---|
| Ipotesi: $\mathbf{S_x}$ Tesi:<br>M(a,b) ; N(c,d) MN≅M'N'<br>$\boldsymbol{S_x}:(M\to M')\wedge(N\to N')$<br>Dimostrazione:<br>determino $\overline{MN}=$………..<br>trovo M'(……,…..) e N'(…..,…..)<br>determino $\overline{M'N'}=$………..<br>concludo: ……………………… | Ipotesi: $\mathbf{S_y}$ Tesi:<br>M(a,b) ; N(c,d) MN≅M'N'<br>$\boldsymbol{S_x}:(M\to M')\wedge(N\to N')$<br>Dimostrazione:<br>determino $\overline{MN}=$………..<br>trovo M'(……,…..) e N'(…..,…..)<br>determino $\overline{M'N'}=$………..<br>concludo: ……………………… |

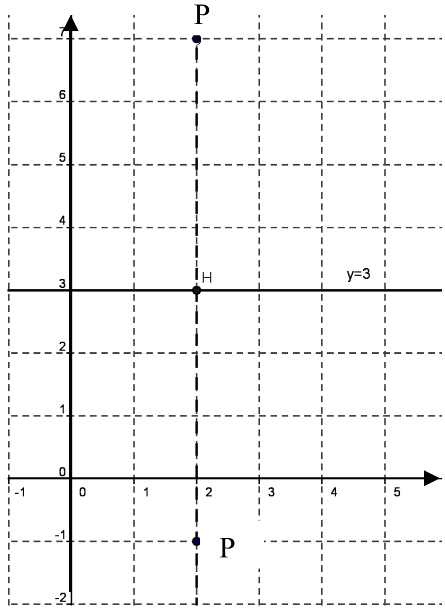
**30** Il triangolo ABC è isoscele; sapendo che A(0,4), B(-2,0) e l'asse x è il suo asse di simmetria, determinate il vertice C, il perimetro e l'area del triangolo.

**31** Il triangolo ABC è isoscele; sapendo che A(0,4), B(-2,0) e l'asse y è il suo asse di simmetria, determinate il vertice C, il perimetro e l'area del triangolo.

**32** Considerate la funzione di proporzionalità quadratica $y=2x^2$ ; rappresentatela nel riferimento cartesiano e segnate i suoi punti A, B, C rispettivamente di ascissa $x_A=1,\ x_B=-\frac{1}{2},\ x_C=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ; trovate i corrispondenti A', B', C' nella simmetria $\mathbf{S_y}$ e verificate che appartengono alla funzione assegnata. Vi è un punto della curva rappresentata che risulta fisso in $\mathbf{S_y}$? … … … … …
Quale delle seguenti affermazioni ritenete corretta:
[A] la curva è <u>fissa</u> nella simmetria considerata
[B] la curva è <u>unita</u> nella simmetria considerata



### Simmetria rispetto ad una retta parallela agli assi cartesiani




Esempio

Fissiamo nel piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale la retta parallela all'asse y di equazione y=3; ci proponiamo di determinare l'equazione della simmetria assiale $S_{y=3}$ avente come asse tale retta. Determiniamo l'immagine di P(2,-1); da P tracciamo la retta perpendicolare all'asse y=3 e indichiamo con H il loro punto di intersezione. Le coordinate di H sono (2,3); l'immagine di P è P'(2,y') è tale che PH≅P'H. Da questa congruenza deduciamo

$$\overline{PH}=\overline{P'H} \rightarrow |y_H-y_P|=|y_{P'}-y_H| \rightarrow 3-(-1)=y_{P'}-3 \rightarrow y_{P'}=7$$

$$S_{y=3}: P(2,-1) \rightarrow P'(2,7)$$

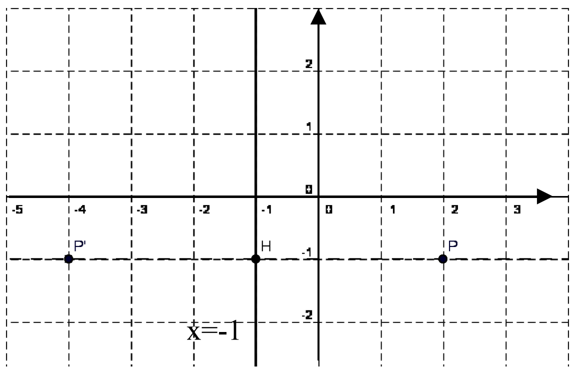
**33** Ripetendo il procedimento determinate l'immagine dei seguenti punti A(1,1) ; B(4,5) ; C(-1,0) e completate:

$$S_{y=3}: \begin{cases} A(\ldots,\ldots) \rightarrow A'(\ldots,\ldots) \\ B(\ldots,\ldots) \rightarrow B'(\ldots,\ldots) \\ C(\ldots,\ldots) \rightarrow C'(\ldots,\ldots) \end{cases}$$

*Generalizziamo*: Vogliamo determinare l'equazione della simmetria avente come asse una retta parallela all'asse x di equazione y=a; sia P(x,y) un generico punto del piano e sia P'(x',y') la sua immagine in $S_{y=a}$ . Seguendo il ragionamento dell'esempio possiamo scrivere: $|y-a|=|y'-a|$ essendo P e P' da parte opposta rispetto all'asse si ottiene $y-a=-y'+a \rightarrow y'=-y+2a$ ; concludendo

$S_{y=a}: P(x,y) \rightarrow P'(x,-y+2a)$ o anche $S_{y=a}: \begin{cases} x'=x \\ y'=-y+2a \end{cases}$

**34** Verificate con l'applicazione di questa equazione i risultati dell'esercizio precedente.




Esempio

Fissiamo nel piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale la retta parallela all'asse x di equazione x=-1; ci proponiamo di determinare l'equazione della simmetria assiale $S_{y=-1}$ avente come asse tale retta. Determiniamo l'immagine di P(2,-1); da P tracciamo la retta perpendicolare all'asse x=-1 e indichiamo con H il loro punto di intersezione. Le coordinate di H sono (-1,-1 ); l'immagine di P è P'(x',-1) è tale che PH≅P'H. Da questa congruenza deduciamo:

$$\overline{PH}=\overline{P'H} \rightarrow |x_P-x_H|=|x_H-x_{P'}| \rightarrow |2-(-1)|=|-1-x_{P'}| \rightarrow x_{P'}=-4 \quad S_{x=-1}: P(2,-1) \rightarrow P'(-4,-1)$$

Ripetendo il procedimento determinate l'immagine dei seguenti punti A(1,1) ; B(-3,-2) ; C(2,0) e completate:

$$S_{x=-1}: \begin{cases} A(\ldots,\ldots) \rightarrow A'(\ldots,\ldots) \\ B(\ldots,\ldots) \rightarrow B'(\ldots,\ldots) \\ C(\ldots,\ldots) \rightarrow C'(\ldots,\ldots) \end{cases}$$

*Generalizziamo*

Vogliamo determinare l'equazione della simmetria avente come asse una retta parallela all'asse y di equazione *x=b*; sia P(x,y) un generico punto del piano e sia P'(x',y') la sua immagine in $S_{x=b}$ . Seguendo il ragionamento dell'esempio possiamo scrivere: $|x-b|=|b-x'|$ essendo P e P' da parte opposta rispetto all'asse si ottiene $x-b=-x'+b \rightarrow x'=-x+2b$ ; concludendo

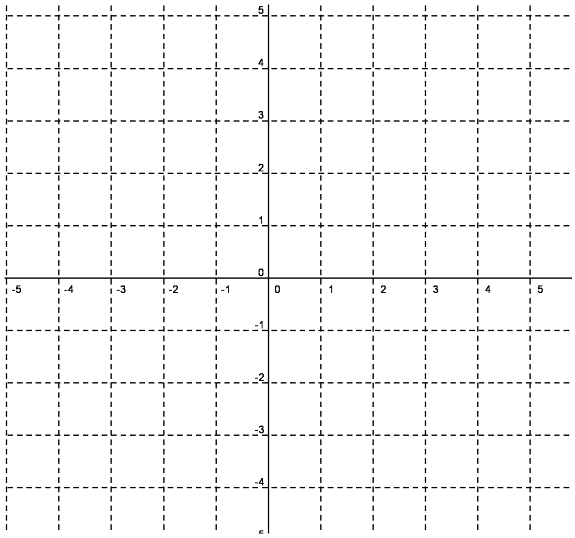
$S_{x=b}: P(x,y) \rightarrow P'(-x+2b, y)$ o anche $S_{x=b}: \begin{cases} x'=-x+2b \\ y'=y \end{cases}$

**35** I punti A(-5,1); B(-2,6); C(3,6); D(0,1) sono vertici di un quadrilatero.

1. Dimostrate che è un parallelogrammo
2. Determinate perimetro e area
3. Determinate la sua immagine A'B'C'D' in $S_{y=3}$

È vero che sia sul lato AB che sul lato CD esiste un punto fisso nella simmetria considerata? Tali punti su quali lati di A'B'C'D' si trovano? Perché?

### Simmetria rispetto alle bisettrici dei quadranti



**36** Determinate il punto medio M del segmento avente per estremi i punti P(4,2) e P'(2,4) e verificate che il triangolo POP' è isoscele sulla base PP'.

"La retta OM è l'asse di simmetria del triangolo considerato": VERO o FALSO?

Considerate un'altra coppia di punti Q(-1,-3) e Q'(-3,-1) e ripetete le richieste precedenti.

L'asse OM è la bisettrice del I°-III° quadrante, di equazione $y=x$ .

Generalizziamo: verificate che due punti $P(x_P, y_P)$ e $P'(y_P, x_P)$ sono equidistanti dall'origine del riferimento e che il punto medio del segmento PP' appartiene alla retta $y=x$ .

DEFINIZIONE. La simmetria assiale avente come asse la bisettrice I°-III° quadrante, indicata con $\boldsymbol{S_{b\,1}}$ associa ad ogni punto $P(x_P, y_P)$ il punto $P'(y_P, x_P)$ ottenuto scambiando le coordinate di P; la sua equazione è $\boldsymbol{S_{b\,1}}: \begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases}$

Tracciata nel riferimento la retta $y=-x$ , dopo aver verificato che è la bisettrice del II°-IV° quadrante, possiamo dare la seguente

DEFINIZIONE. La simmetria assiale avente come asse la bisettrice II°-IV° quadrante, indicata con $\boldsymbol{S_{b\,2}}$ , associa ad ogni punto $P(x_P, y_P)$ il punto $P'(-y_P, -x_P)$ ottenuto scambiando l'opposto delle coordinate di P; la sua equazione è $\boldsymbol{S_{b\,2}}: \begin{cases} x'=-y \\ y'=-x \end{cases}$

**37** Determinate l'immagine del quadrilatero ABCD di vertici A(0,0), B(2,2), C(5,3), D(0,5) nella simmetria. $\boldsymbol{S_{b\,1}}$

**38** Nella simmetria $\boldsymbol{S_{b\,1}}$ la retta y=-x è fissa o unita?

**39** Motivate la verità della seguente proposizione:" nella simmetria $\mathbf{S_{b2}}$ l'immagine dell'asse x è l'asse y". Viene mantenuto l'orientamento dell' asse x?

Completate: $\boldsymbol{S_{b\,2}}$ : (asse x)→(asse …..) e (asse y)→(……….)

Analogamente: : $\boldsymbol{S_{b\,1}}$ (asse x)→(…. …..) e (……..)→(……….)

**40** Dato il quadrilatero ABCD di vertici A(0,0), B(3,1), C(4,4), D(1,3), trovate il suo corrispondente in . $\boldsymbol{S_{b\,1}}$ Quale delle seguenti affermazioni ritenete corretta:

[A] il quadrilatero è fisso nella simmetria considerata

[B] il quadrilatero è unito nella simmetria considerata

**41** Determinate il corrispondente del parallelogrammo ABCD di vertici A(-5,1); B(-2,6); C(3,6); D(0,1) in C; perché AA',BB', CC' DD' sono paralleli? Ricordando che il parallelogrammo ha un centro di simmetria, determinate il centro di simmetria di ABCD e verificate che in $\boldsymbol{S_{b\,1}}$ esso ha come immagine il centro di simmetria di A'B'C'D'.

**42** Nel piano cartesiano sono assegnati i punti A(0,3), B(-2,0), C(-1,-3).

1. Determinate i punti A', B', C' immagine in $\mathbf{S_{b2}}$
2. Calcolate l'area del quadrilatero A'B'C'O, essendo O l'origine del riferimento
3. Motivate la verità della proposizione :" i segmenti AB e A'B' si incontrano in un punto P della bisettrice II°-IV° quadrante
4. È vero che AP'B è congruente a PAB'?

**43** Sono assegnate le simmetrie $S_1:\begin{cases}x'=-x\\y'=-y\end{cases};\ S_2:\begin{cases}x'=y\\y'=x\end{cases};\ S_3:\begin{cases}x'=2-x\\y'=y\end{cases};\ S_4:\begin{cases}x'=-x-1\\y'=3-y\end{cases}$

Usando qualche punto scelto arbitrariamente riconosci ciascuna di esse e completa la tabella sottostante:

| SIMMETRIA | TIPO | CENRO: coordinate | ASSE: equazione |
|---|---|---|---|
| $S_1$ | | | |
| $S_2$ | | | |
| $S_3$ | | | |
| $S_4$ | | | |

**44** Quale tra le seguenti caratteristiche è invariante in una simmetria assiale?
[A] la posizione della figura
[B] la direzione della retta
[C] il parallelismo
[D] l'orientamento dei punti
[E] dipende dall'asse di simmetria

**45** I segmenti AB e A'B' si corrispondono nella simmetria di asse r; sapendo che ABB'A' è un rettangolo, quale proposizione è vera?
[A] AB è perpendicolare ad r
[B] AB è parallelo ad r
[C] AB appartiene ad r
[D] AB è obliquo rispetto ad r e AB∩r=H

**46** È assegnato il punto $P\left(-\sqrt{3},\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$ ; determinate il suo corrispondente nelle simmetrie indicate e completate:

$S_{b2}:P\to P'(\ldots\ldots,\ldots\ldots);\ S_{x=-\frac{1}{2}}:P\to P'(\ldots\ldots,\ldots\ldots)\ S_O:P\to P'(\ldots\ldots,\ldots\ldots);$

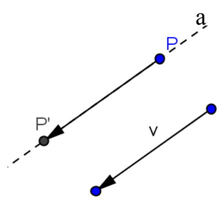
$S_x:P\to P'(\ldots\ldots,\ldots\ldots);\ S_{y=2}:P\to P'(\ldots\ldots,\ldots\ldots);\ S_{C(1,1)}:P\to P'(\ldots\ldots,\ldots\ldots);$

**47** Un segmento unito in $S_{b2}$ è
[A] un segmento perpendicolare alla bisettrice I°-III° quadrante
[B] un segmento perpendicolare alla bisettrice II°-IV° quadrante nel suo punto medio
[C] un segmento parallelo alla bisettrice I°-III° quadrante
[D] un segmento perpendicolare alla bisettrice II°-IV° quadrante
[E] un segmento avente il suo punto medio appartenente alla bisettrice II°-IV° quadrante

## 2.3 La traslazione

DEFINIZIONE. Fissato nel piano un vettore $\vec{v}$ si chiama **traslazione di vettore** $\vec{v}$ (indicata con **TR**) la corrispondenza che ad ogni punto P del piano fa corrispondere il punto P' dello stesso piano in modo che $\vec{PP'}\equiv\vec{v}$

Per costruire il corrispondente di un punto P del piano procedete con i seguenti passi:




- fissate un vettore $\vec{v}$
- prendete un punto P del piano
- da P tracciate la retta a avente la stessa direzione di $\vec{v}$
- su a fissate il punto P' tale che $\overrightarrow{PP'}$ sia equipollente a $\vec{v}$

- P' è l'immagine di P nella traslazione TR: $P \rightarrow P'$

GLI ELEMENTI UNITI

- p: "Nella traslazione non ci sono punti uniti".
- q: "Una retta parallela al vettore che individua la traslazione è unita".

*Lasciamo al lettore la verifica delle proposizioni enunciate.*

TEOREMA 1

**Dimostrate che TR è una isometria.**

Strategia risolutiva:

dovrete dimostrare che l'immagine di un segmento AB è il segmento A'B' tale che AB≅A'B'

TEOREMA 2

Dimostrate che se r ed r' sono due rette corrispondenti in una traslazione, allora sono parallele

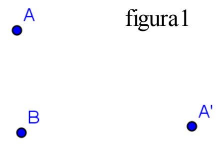


figura1

**48** Nel piano sono assegnati i tre punti A, B, A'; il punto A' è immagine di A in una traslazione; dopo aver determinato il vettore della traslazione costruite l'immagine del triangolo ABA'. (figura1)

**49** Determinate l'immagine del parallelogrammo ABCD nella traslazione di vettore $\vec{v} \equiv \overrightarrow{AC}$ .

**50** Dati due punti distinti A e B e il vettore $\overrightarrow{CD}$ della figura 2, detti A' e B' i punti immagine di A e B nella traslazione di vettore $\overrightarrow{CD}$ , rispondete alle questioni:

[A] di che natura è il quadrilatero ABB'A' ?

[B] può succedere che il quadrilatero in questione sia un rettangolo? E un rombo?

[C] cosa succede se AB è parallelo al vettore $\overrightarrow{CD}$ ?

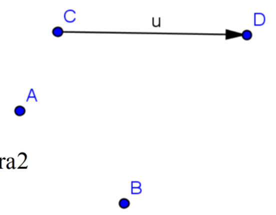


Figura2

**51** Come dobbiamo assegnare due segmenti AB e A'B' perché siano corrispondenti in una traslazione? È unica la traslazione che associa ad AB il segmento A'B'?

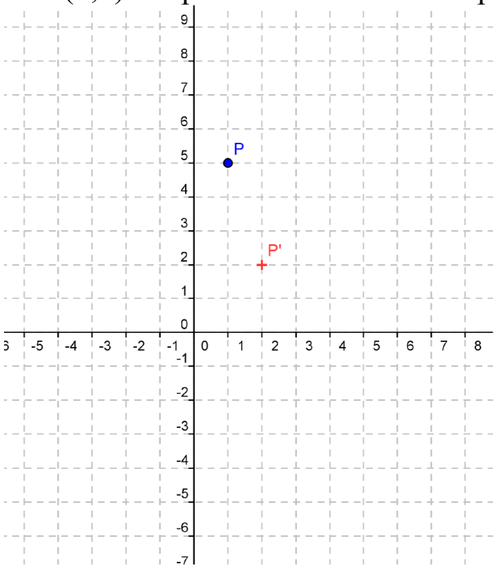
### Descrizione analitica di una traslazione

Pensiamo il piano, dotato di riferimento cartesiano ortogonale, come formato da due cartoncini sovrapposti: sul piano D, trasparente, i punti sono rappresentati dal solito simbolo, sull'altro C, sottostante, i punti sono rappresentati con +.

Studiamo la corrispondenza TR tra i punti del piano D e i punti del piano C espressa dalla legge:

$$P(x_P ; y_P) \in D \overset{TR}{\rightarrow} P'(x_p + 1 ; y_p + (-3)) \in C$$

Se P(1;5) è il punto di D il suo corrispondente è P'(2;2)




**52** Determinate il corrispondente di ciascuno dei seguenti punti $F(0;2);\ H(-1;8);\ K(3;3);\ V(4;-1)$

**53** Rispondete alle domande:

- è vero che il dominio della corrispondenza coincide con D?
- è vero che la corrispondenza assegnata è univoca?
- si può affermare che è biunivoca?
- di quale punto è immagine il punto S'(0;-4)?
- è vero che è una isometria?

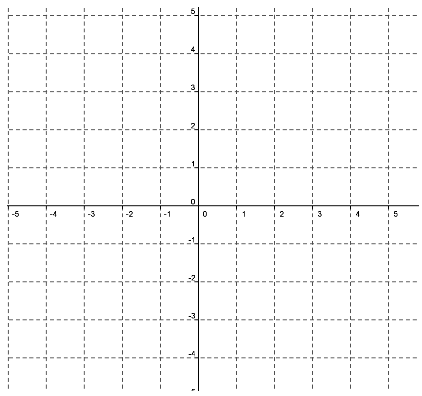
**54** Nel riferimento cartesiano rappresentate ogni punto dell'esercizio E55 e i corrispondenti F', H', K', V' e congiungete ciascuno con la propria immagine. I vettori $\overrightarrow{FF'},\ \overrightarrow{HH'},\ \overrightarrow{KK'},\ \overrightarrow{VV'}$ sono equipollenti?

Dagli esercizi precedenti possiamo affermare che la corrispondenza assegnata è una isometria completamente caratterizzata dal vettore $\vec{v}(1;-3)$ pertanto è una traslazione.

DEFINIZIONE: Fissato nel riferimento cartesiano ortogonale un vettore $\vec{v}(a;b)$, chiamiamo **equazione della traslazione di vettore** $\vec{v}(a;b)$ (**TR(a,b)**) le relazioni che legano le coordinate di un punto P con le coordinate della sua immagine P'.

DEFINIZIONE: Siano x e y le coordinate del punto P e x', y' le coordinate del punto sua immagine, l' **equazione della traslazione di vettore** $\vec{v}(a;b)$ è $TR(a;b):\begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \end{cases}$

**55** Nel riferimento cartesiano è assegnato il punto P(-4;2); determinate il punto P' immagine nella traslazione $TR(3;-1):\begin{cases} x'=x+3 \\ y'=y+(-1) \end{cases}$.



Strategia risolutiva:

1. individuate il vettore $\vec{w}$ della traslazione: $\vec{w}(\ldots;\ldots)$
2. tracciate il vettore nel riferimento cartesiano
3. determinate le coordinate di P': P'(…;….)

Completate: $\overrightarrow{PP'}$ è … … … … a $\vec{w}$ ; questo significa che i due vettori hanno … … … direzione (cioè sono … … … …), stesso … … … e … … … … intensità.

**56** Nello stesso riferimento dopo aver fissato un punto Q(…;…) e il punto Q'(…;…) immagine nella stessa traslazione TR(3,-1), dimostrate con le conoscenze di geometria sintetica che PP'Q'Q è un parallelogrammo.

Ipotesi: PP'≅QQ'; PP'… QQ'

Tesi: … … …

Dimostrazione:

**57** Sappiamo che l' equazione di una traslazione è $TR(a;b):\begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \end{cases}$. Assegnate le coordinate (x,y) di un punto P e (x',y') della sua immagine P', le componenti del vettore della traslazione sono date da:

[A] $a=x'+x\,,\ b=y'+y$

[B] $a=x-x'\,,\ b=y-y'$

[C] $a=x'-x\,,\ b=y'-y$

[D] $a=x'+x\,,\ b=y'-y$

[E] $a=\frac{x'}{x}\,,\ b=\frac{y'}{y}$

**58** Dopo aver determinato l'equazione della traslazione in cui A'(0,-2) è l'immagine di A(3, 2), determinate il perimetro del triangolo AO'A' essendo O' il corrispondente di O(0,0) nella traslazione trovata.

**59** Verificate che il punto medio M del segmento PQ di estremi P(-1,4) e Q(5,0) ha come immagine in TR(3,-1) il punto medio M' del segmento P'Q'.

**60** Applica la traslazione di equazione $\begin{cases} x'=x+2 \\ y'=y-1 \end{cases}$ al segmento di estremi A(-2;4) B(3;3).

**61** Dati A(1;0) e B(0,2), determina C e D in modo che ABCD sia un quadrato.

**62** Determinate l'immagine del triangolo di vertici A(0,2), B(-3,2), C(0,5) nella traslazione TR(4,1); calcolatene perimetro e area.

**63** Determinate l'equazione della traslazione di vettore $\vec{s}=\vec{u}+\vec{v}$ assegnati dalla figura 3. Determinate inoltre l'immagine del poligono di vertici H(-1,1), K(0,-2), L(3,0), F(1,2).

**64** Un vettore $\vec{v}$ ha modulo unitario, è applicato nell'origine e forma con l'asse delle ascisse un angolo di 30°. Determinate le sue componenti e scrivete l'equazione della traslazione da esso caratterizzata.

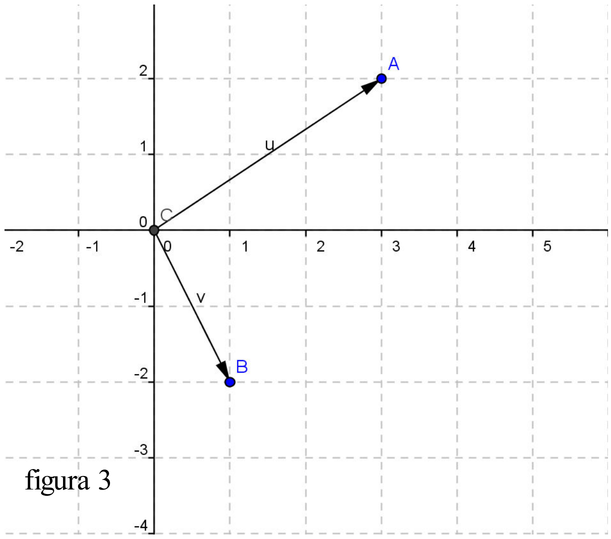
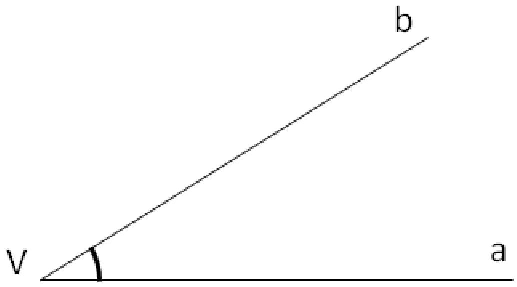


figura 3

### 2.4. La rotazione

Premessa:

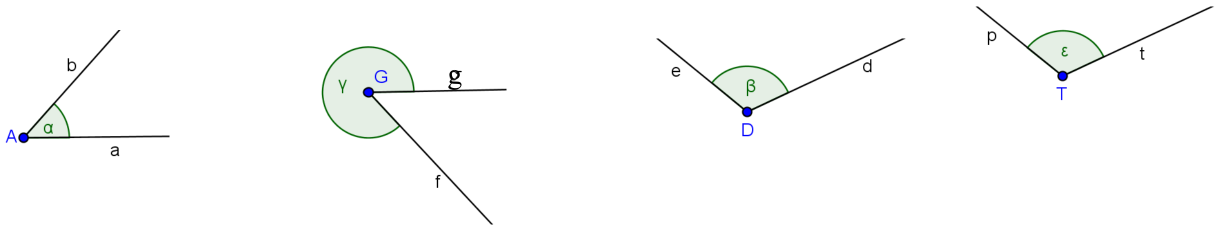
Nel piano fissiamo un angolo **convesso** di vertice V e lati a e b; se immaginiamo, bloccato il vertice V, di muovere il lato a fino a farlo sovrapporre al lato b abbiamo "percorso" l'angolo muovendoci in senso antiorario; considerando l'angolo **concavo** di vertice V e lati a e b se immaginiamo, bloccato il vertice V, di muovere il lato a fino a farlo sovrapporre al lato b abbiamo "percorso" l'angolo concavo muovendoci in senso orario.




DEFINIZIONE: Un **angolo** si dice **orientato** quando viene fissato un ordine tra i suoi lati, esempio l'ordine alfabetico. Se per andare dal primo lato al secondo ci si muove in senso **antiorario** diciamo che l'angolo è **positivo**, al contrario avremo un angolo negativo.

Esempio

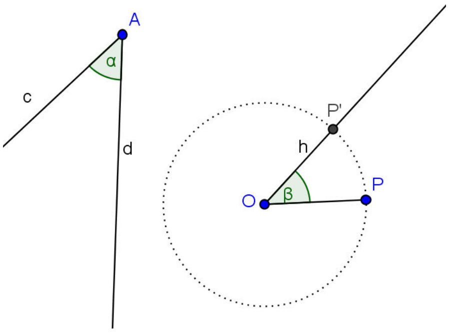
Nella figura sono disegnati alcuni angoli i cui lati seguono l'ordine alfabetico.




- Angolo di vertice A e lati a e b: a raggiunge b percorrendo l'angolo $\alpha$ in **senso antiorario** quindi diciamo che $\boldsymbol{\alpha}$ è **positivo** ;
- Angolo di vertice G e lati f e g: f raggiunge g percorrendo l'angolo $\gamma$ in **senso orario** quindi diciamo che $\boldsymbol{\gamma}$ è **negativo** ;

Completate:
- Angolo di vertice D e lati d ed e: ………………………………….
- Angolo di vertice T e lati p e t: ……………………………………

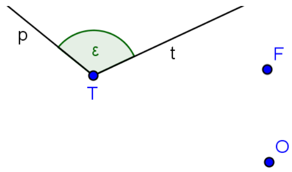
DEFINIZIONE. fissato un **punto O** e un **angolo orientato α** chiamiamo **rotazione di centro O e ampiezza α** (**$R_{O,\,\alpha}$**) la corrispondenza che associa ad un punto P del piano il punto P’ tale che $P'O \cong PO$ e $P\hat{O}P' = \alpha$ .




Fissato l’angolo orientato α , il punto O centro della rotazione e il punto P, la sua immagine si determina con i seguenti passi:

- congiungiamo O con P
- tracciamo la circonferenza di centro O e raggio OP
- costruiamo con vertice O l’angolo $\beta \cong \alpha$
- P’ è il punto di intersezione della circonferenza con il secondo lato h dell’angolo β

**65** Prendete in considerazione l’angolo ε di vertice T, sia O il centro di rotazione e F un punto del piano di cui si vuole determinare l’immagine. Costruite F’ seguendo i passi illustrati sopra.

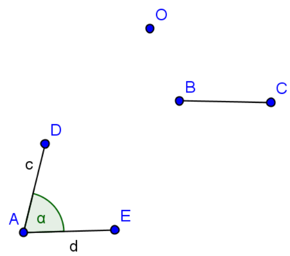



GLI ELEMENTI UNITI

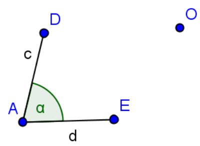
- p: nella rotazione il centro è l’unico punto unito
- q: nella rotazione sono unite tutte le circonferenze aventi il centro nel centro di rotazione

*Lasciamo al lettore la verifica di quanto affermato*.

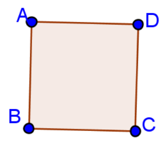
TEOREMA 1
**La rotazione è una isometria.**
Servitevi della figura accanto, in cui è segnato il centro di rotazione O, l’angolo orientato α (c è il primo lato) e un segmento BC per dimostrare il teorema proposto.
Strategia risolutiva:
costruite l’immagine B’C’ nella rotazione assegnata
Ipotesi … … … … … … … … … … …
Tesi … … … … … … … … … … … … … …
Dimostrazione … … … … … … … … … … … … … … …




TEOREMA 2
**La rotazione è un’isometria diretta.**
Ricordate che per questa dimostrazione basta costruire l’immagine di una figura e verificare che viene mantenuto il verso di percorrenza del contorno. Vi proponiamo il centro e l’angolo di rotazione; disegnate una figura geometrica, costruite la sua immagine e concludete.




**66** Costruite l’immagine del quadrato ABCD nella rotazione di +90° avente come centro di simmetria il vertice B.
Fissate i punti medi M ed N rispettivamente di AB e di CD; dove si trovano le rispettive immagini?




**67** È vero che il quadrato è unito nella rotazione avente come centro il punto d’incontro delle diagonali e come ampiezza 90°?

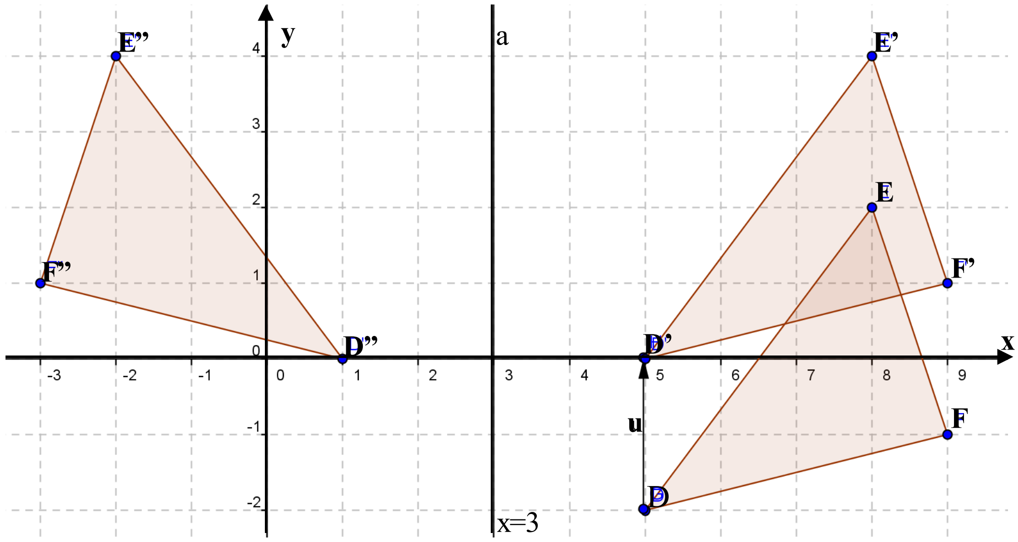
**68** “L’ortocentro di un triangolo equilatero è il centro di una rotazione in cui il triangolo è unito”. Determinate l’angolo di rotazione.

**69** Costruite l’immagine A’B’C’ del triangolo equilatero ABC nella rotazione di centro B e ampiezza $(-120\,°)$ . Dimostrate che C, B, A’ sono allineati e che ABC’ è un triangolo equilatero congruente a quello dato.

## ►3. Composizione di isometrie

### Composizione di isometrie di tipo diverso

Riferendovi alla figura, completate:




Nel riferimento cartesiano ortogonale sono assegnati il triangolo EFD avente i vertici di coordinate $E(\dots,\dots);F(\dots,\dots);D(\dots,\dots)$ e il vettore $\vec{u}$ di componenti $(\dots,\dots)$. Con la traslazione di vettore $\vec{u}$ si ha $DEF \xrightarrow{TR(\vec{u})} \dots\dots\dots$ e DEF ≅ D'E'F' essendo la traslazione una isometria.

Nel piano è tracciata la retta a di equazione x=3; nella simmetria assiale $S_a$ si ha $D'E'F' \xrightarrow{S_a} \dots\dots\dots$ e D'E'F'≅ D"E"F" essendo la simmetria assiale una isometria.

Completate con le coordinate dei punti

$E(\dots;\dots) \xrightarrow{TR(\vec{u})} E'(\dots;\dots) \xrightarrow{S_a} E''(\dots;\dots)$

$F(\dots;\dots) \xrightarrow{TR(\vec{u})} F'(\dots;\dots) \xrightarrow{S_a} F''(\dots;\dots)$ e $EFD \xrightarrow{TR(\vec{u})} E'F'D' \xrightarrow{S_a} E''F''D''$ e $DEF \equiv D''E''F''$

$D(\dots;\dots) \xrightarrow{TR(\vec{u})} D'(\dots;\dots) \xrightarrow{S_a} D''(\dots;\dots)$

per la proprietà transitiva della congruenza.

DEFINIZIONE. Chiamiamo **composizione di due isometrie** $\Phi_1$ **e** $\Phi_2$ **l'isometria** $\Phi$, (*e scriviamo* $\Phi=\Phi_2\circ\Phi_1$ *e leggiamo* " $\Phi_2$ composta con $\Phi_1$ "), che associa ad un qualunque punto P del piano il punto P" ottenuto determinando prima l'immagine P' di P in $\Phi_1$ e di seguito l'immagine P" di P' in $\Phi_2$. In formula: $\Phi(P)=\Phi_2\circ\Phi_1 : P \xrightarrow{\Phi_1} P' \xrightarrow{\Phi_2} P''$.

Riprendendo l'esempio precedente concludiamo $DEF \xrightarrow{S_a\circ TR(\vec{u})} D''E''F''$.

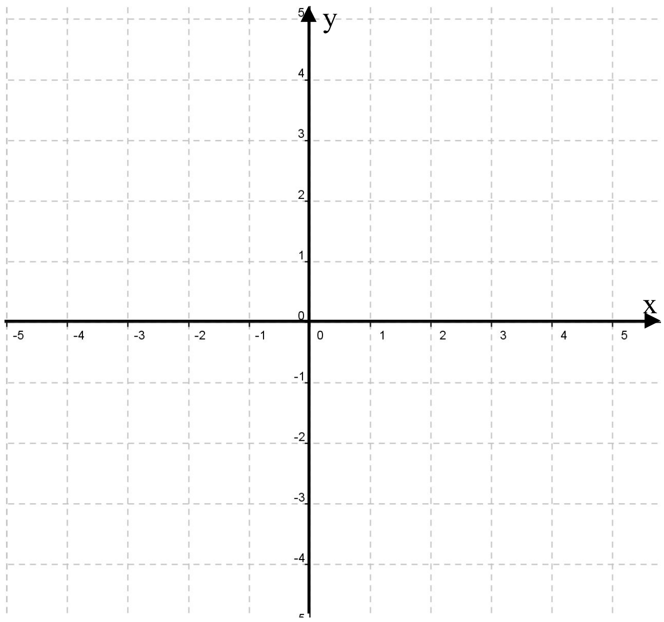
**In generale la composizione di isometrie non è commutativa:** $\Phi_1\circ\Phi_2\neq\Phi_2\circ\Phi_1$ **.** (*)

Se, utilizzando l'esempio precedente volete verificare che $S_a\circ TR(\vec{u})\neq TR(\vec{u})\circ S_a$, troverete un risultato che sembra contraddire quanto affermato; basta però un contro-esempio per convincerci della verità della proposizione **(*).**

Controesempio

Determinate l'immagine del punto P(2,2) in $S_y \circ TR(\vec{u})$ essendo $\vec{u}(3,2)$ e poi l'immagine dello stesso punto in $TR(\vec{u}) \circ S_y$ .

Tracciate il vettore $\vec{u}(3,2)$ e completate:




$$P \xrightarrow{TR(\vec{u})} P'(\ldots;\ldots) \xrightarrow{S_y} P''(\ldots;\ldots)$$

$$P \xrightarrow{S_y} P'(\ldots;\ldots) \xrightarrow{TR(\vec{u})} P''(\ldots;\ldots)$$

Concludete: la composizione di isometrie non è……………………., infatti si ha

$S_y \circ TR(\vec{u}) \ldots\ldots TR(\vec{u}) \circ S_y$

Problema

Possiamo determinare l'equazione che lega le coordinate del punto iniziale con quelle della sua immagine nell'isometria ottenuta dalla composizione? Procediamo per passi:

I° passo: scriviamo l'equazione della traslazione $TR(\vec{u}) = \begin{cases} x' = x+3 \\ y' = y+2 \end{cases}$ e della simmetria rispetto all'asse y $S_y = \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

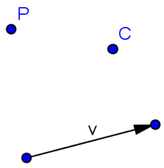
II° passo: determiniamo l'immagine di $P(x_P, y_P)$ in $S_y \circ TR(\vec{u})$

$$P(x_P, y_P) \xrightarrow{TR(\vec{u})} P'(x_P+3, y_P+2) \xrightarrow{S_y} P''(-x_P-3, y_P+2) \Rightarrow S_y \circ TR(\vec{u}) \begin{cases} x'' = -x_P - 3 \\ y'' = y_P + 2 \end{cases}$$

III° passo: determiniamo l'immagine di $P(x_P, y_P)$ in $TR(\vec{u}) \circ S_y$

$$P(x_P, y_P) \xrightarrow{S_y} P'(-x_P, y_P) \xrightarrow{TR(\vec{u})} P''(-x_P+3, y_P+2) \Rightarrow TR(\vec{u}) \circ S_y \begin{cases} x'' = -x_P + 3 \\ y'' = y_P + 2 \end{cases}$$

da quanto fatto riconfermiamo la non commutatività dell'operazione di composizione di isometrie.




**70** Nel piano è assegnato il punto C e il vettore $\vec{v}$ ; costruite l'immagine del punto P nell'isometria $TR(\vec{v}) \circ S_C$ e anche l'immagine dello stesso punto P nell'isometria $S_C \circ TR(\vec{v})$ .

**71** Il centro della simmetria è il punto $C(-1,-2)$ , il vettore della traslazione è $\vec{v}(3,-2)$ e il punto di cui vogliamo determinare l'immagine è scelto da voi arbitrariamente. Ripetete l'esercizio precedente e determinate l'equazione di $\Phi_1 = TR(\vec{v}) \circ S_C$ e di $\Phi_2 = S_C \circ TR(\vec{v})$

**72** Sono assegnati il punto C(-4,3), la retta x=1 e il punto P(0,5); determinate l'immagine P" di P nell'isometria $\Delta = S_C \circ S_{x=1}$ e l'immagine P* di P nell'isometria $\Delta^* = S_{x=1} \circ S_C$ . È vero che p" e P* si corrispondono nella simmetria $S_y$ ? Determinate l'area del triangolo PP"P*. (R. area=40u$^2$)

**73** È assegnato un punto O; determinate l'immagine P' di un punto P nella rotazione di centro O e angolo di 60° e l'immagine P" di P' nella simmetria avente come asse la retta PO.

1. Completate: $P \xrightarrow{\ldots\ldots\ldots} P''$
2. Dimostrate che P, P', P" appartengono alla circonferenza di centro O e raggio OP
3. Individuate le caratteristiche del quadrilatero PP"OP'
4. Determinatene l'area, supponendo $\overline{OP} = 2(m)$ (R. $area = 2\sqrt{3}(m^2)$ )

## Composizione di isometrie dello stesso tipo

**74** Determinate l'equazione dell'isometria che si ottiene componendo la simmetria che ha per asse l'asse x e la simmetria avente come asse l'asse y: $S_y \circ S_x \begin{cases} \dots\dots \\ \dots\dots \end{cases}$ Quale isometria avete ottenuto?

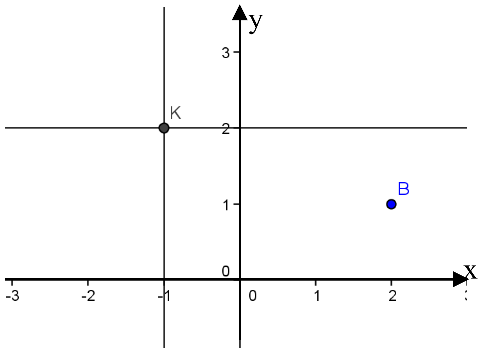
Determinate l'equazione di $S_x \circ S_y \begin{cases} \dots\dots \\ \dots\dots \end{cases}$ Cosa potete concludere?

**75** Nel riferimento cartesiano ortogonale sono tracciate le rette $a: x=-1$ e $b: y=2$ e il punto $B(2,1)$ .

1] Determinate l'immagine di B nell'isometria $\Omega = S_a \circ S_b$ di cui indicherete l'equazione.

2] Determinate l'immagine di B nell'isometria $\Omega_1 = S_b \circ S_a$ di cui indicherete l'equazione.

3] Indicate le coordinate del punto K e scrivete l'equazione della simmetria di centro K. Cosa concludete?




*Generalizziamo*

Le rette a e b sono perpendicolari e O è il loro punto di intersezione. Dimostrate che:

1. La composizione delle due simmetrie di assi a e b è commutativa
2. L'isometria $\Omega = S_a \circ S_b = S_b \circ S_a$ è la simmetria centrale di centro O

**Conclusione**: La composizione di due simmetrie assiali con assi perpendicolari in O è la simmetria centrale di centro O. L'operazione è commutativa.

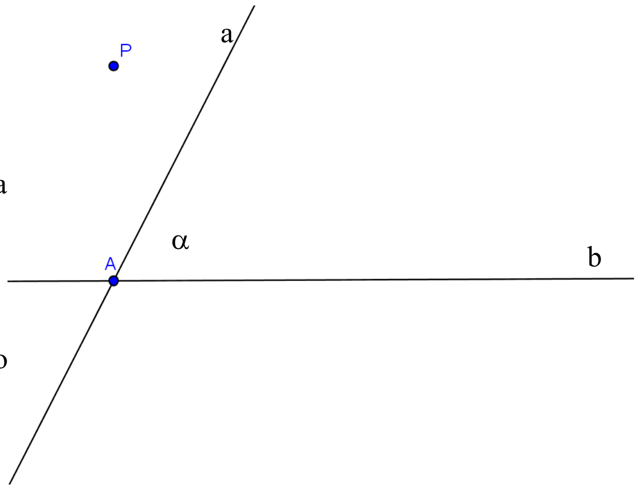
**76** Determinate l'immagine del punto P nell'isometria ottenuta componendo due simmetrie con assi incidenti. Servitevi della figura accanto. $P \xrightarrow{S_a} P' \xrightarrow{S_b} P''$

Verificate che la composizione non è commutativa determinando $P \xrightarrow{S_b} P'_1 \xrightarrow{S_a} P''_1$

Dimostrate che $PA \equiv P'A \equiv P''A \equiv P'_1 A \equiv P''_1 A$

Dimostrate che i punti $P,\ P',\ P'',\ P'_1,\ P''_1$ stanno sulla circonferenza di centro A.

Dimostrate che $P\hat{A}P'' = 2 \cdot \hat{\alpha}$




**Conclusione**: La composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti nel punto A è la rotazione di centro A e angolo orientato $\mathbf{2 \cdot \hat{\alpha}}$ ; punti corrispondenti appartengono alla circonferenza di centro A e raggio PA. La composizione in esame non è commutativa.

**77** ABC è un triangolo equilatero e O è il centro della circonferenza circoscritta. Dimostrate che il triangolo è unito nella rotazione di centro O e angolo α=120°. Analogamente il quadrato ABCD è unito nella rotazione di centro H, punto d'incontro delle sue diagonali, di angolo α=90°.

**78** Giustificate la verità della proposizione: "La simmetria centrale di centro K è una rotazione di 180°".

**79** Nel piano dotato di riferimento cartesiano è tracciata la bisettrice I°-III° quadrante e la retta $y=1$ . Completate le osservazioni seguenti:

- il punto di intersezione K ha coordinate K(…,…)
- l'angolo delle due rette è di …..°

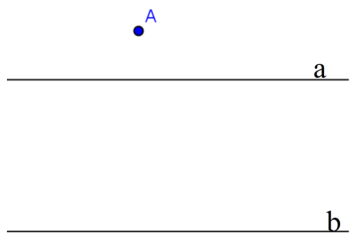
**80** Scrivete l'equazione della simmetria avente come asse la bisettrice: $S_{b1}\begin{cases}x'=\ldots\ldots\\y'=\ldots\ldots\end{cases}$ e l'equazione della simmetria di asse la retta $y=1$ : $S_{y=1}\begin{cases}x'=\ldots\ldots\\y'=\ldots\ldots\end{cases}$.

**81** Determinate le coordinate del punto P" immagine di P, arbitrariamente scelto, in $\Omega=S_{b1}\circ S_{y=1}$ e scrivete l'equazione di Ω.
Concludete: Ω è la rotazione di centro ……. e angolo ……(ricordate il segno all'angolo di rotazione)

**82** Determinate le coordinate del punto P* immagine di P, arbitrariamente scelto, in $\Omega^*=S_{y=1}\circ S_{b1}$ e scrivete l'equazione di Ω*.
Concludete: Ω* è la rotazione di centro ……. e angolo ……(ricordate il segno all'angolo di rotazione)

**83** Determinate l'equazione della isometria $J=S_{b1}\circ S_{x=4}$ e stabilite se esiste qualche elemento unito. Come cambia l'equazione dell'isometria $J^*=S_{x=4}\circ S_{b1}$ rispetto alla precedente? Sia J che J* sono rotazioni: determinate centro e angolo (con segno) di ciascuna. A questo scopo potete utilizzare il punto P(2,4) o un punto arbitrariamente scelto.

**84** Determinate l'immagine del punto A nell'isometria $\Delta=S_b\circ S_a$ essendo a e b le rette parallele segnate in figura e A il punto dato. Dimostrate che $\overline{AA''}=2\cdot d$ essendo d la distanza tra le rette a e b.
Fissate arbitrariamente un altro punto B non appartenente ad alcuna delle rette date e determinate la sua immagine B" nell'isometria Δ.
È vero che $\overline{AA''}=\overline{BB''}$ e $\overline{AA''}//\overline{BB''}$ ? Potete concludere che l'isometria Δ è la traslazione di vettore $\overrightarrow{AA''}$ ?




DEFINIZIONE. La composizione di due simmetrie assiali con assi paralleli è una **traslazione di vettore** avente direzione perpendicolare ai due assi di simmetria e modulo uguale al doppio della distanza tra gli stessi assi.

**85** Verificate che la traslazione $\Delta_1=S_b\circ S_a$ è caratterizzata da un vettore avente modulo e direzione uguali al vettore $\overrightarrow{AA''}$ trovato nell'esercizio precedente, ma verso opposto.

**86** Nel riferimento cartesiano ortogonale sono assegnati i punti A(1,5); B(2,1); C(-1,3). Determinate i punti A", B", C" immagine rispettivamente di A, B, C nella traslazione $TR=S_{x=-2}\circ S_{x=1}$ . Scrivete l'equazione della traslazione, individuate il vettore che la definisce calcolandone modulo e direzione.

**87** Determinate i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ delle traslazioni $TR(\vec{u})\begin{cases}x'=x+1\\y'=y-2\end{cases}$ e $TR(\vec{v})\begin{cases}x'=x-3\\y'=y-1\end{cases}$ e il vettore $\vec{s}=\vec{u}+\vec{v}$ . Verificate che $TR(\vec{v})\circ TR(\vec{u})=TR(\vec{s})$ .
Cosa otteniamo dalla composizione $TR(\vec{u})\circ TR(\vec{v})$ ? Sapresti darne la motivazione?
Concludete: componendo due traslazioni si ottiene ……………………………………….

**88** Nel riferimento cartesiano ortogonale Oxy è assegnato il punto $O_1(2,1)$ ; scrivete l'equazione della simmetria centrale di centro O $S_O=\begin{cases}x'=\ldots\ldots\\y'=\ldots\ldots\end{cases}$ e l'equazione della simmetria centrale di centro $O_1$ $S_{O_1}=\begin{cases}x'=\ldots\ldots\\y'=\ldots\ldots\end{cases}$ . Determinate l'immagine P" del punto $P(1,2)$ nell'isometria $\Sigma=S_O\circ S_{O_1}$ di cui avrete scritto l'equazione e determinate $\overline{PP''}$ . Determinate Q" immagine di $Q\left(\frac{1}{2},-1\right)$ nell'isometria Σ e determinate $\overline{QQ''}$ . Potete affermare che $\overrightarrow{PP''}\equiv\overrightarrow{QQ''}$ ? Verificate che $\overrightarrow{PP''}\equiv\overrightarrow{QQ''}\equiv 2\cdot\overrightarrow{O_1O}$ .

**89** È vero che $\Sigma=S_O\circ S_{O_1}$ e $\Sigma_1=S_{O_1}\circ S_O$ sono la stessa isometria?

**90** Dimostrate che la composizione di due simmetrie centrali è una traslazione caratterizzata dal vettore parallelo alla retta passante per i due centri e modulo uguale al doppio della loro distanza.

DEFINIZIONE. La composizione di due simmetrie centrali è una **traslazione di vettore** avente la direzione della retta $OO_1$ e modulo uguale al doppio della distanza tra O e $O_1$ .

**91** Composizione di due simmetrie assiali con assi paralleli.

Prima simmetria $\begin{cases} x'=2b-x \\ y'=y \end{cases}$ ; Seconda simmetria $\begin{cases} x'=2a-x \\ y'=y \end{cases}$

Componendo le due simmetrie si ha $\begin{cases} x'=2b-2a+x \\ y'=y \end{cases}$ che è … … … … … … … … …

Se a=b le due simmetrie sono … … … … … … … … … … la loro composizione è … … … … … …

**92** Composizione di due simmetrie assiali con assi perpendicolari.

Una simmetria con asse parallelo all'asse y ha equazione $\begin{cases} x'=2a-x \\ y'=y \end{cases}$ e asse x = a

Mentre una simmetria con asse parallelo all'asse x ha equazione $\begin{cases} x'=x \\ y'=2b-y \end{cases}$ e asse y = b

Componendo le due simmetrie otteniamo … …

## Isometria inversa

Sappiamo che dalla composizione di due isometrie si ottiene una isometria e in generale componendo due trasformazioni geometriche si ottiene una trasformazione geometrica, ossia una corrispondenza biunivoca tra punti del piano.
Considerate due trasformazioni $\Psi_1$ e $\Psi_2$ e detta $I$ l'identità può succedere che $\Psi_1 \circ \Psi_2 = \Psi_2 \circ \Psi_1 = I$ cioè che l'immagine di un generico punto P nella trasformazione composta coincida con P stesso.

DEFINIZIONE. Si chiama **inversa di una trasformazione** $\boldsymbol{\Psi}$ la trasformazione che composta con $\boldsymbol{\Psi}$ , a destra o a sinistra, dà origine all'identità e la indicheremo con $\boldsymbol{\Psi}^{-1}$ ; in simboli: $\boldsymbol{\Psi} \circ \boldsymbol{\Psi}^{-1} = \boldsymbol{\Psi}^{-1} \circ \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{I}$

Per quanto riguarda le isometrie studiate

**93** Verificate che:

1. l'inversa della traslazione di vettore $\vec{v}(a, b)$ è la traslazione di vettore $-\vec{v}$ ;
2. l'inversa di una rotazione di centro O e angolo α è la rotazione di centro O e angolo -α

**94** Verificate che le simmetrie (centrale, assiale) hanno se stesse come isometria inversa, ossia $(S_K)^{-1} = S_K$ e $(S_r)^{-1} = S_r$

DEFINIZIONE. Si chiama **involutoria** una trasformazione che coincide con la sua inversa.

**95** La proposizione "la simmetria centrale è la composizione di due simmetrie assiali" è:
[A] sempre vera [B] vera se i due assi sono incidenti [C] mai vera
[D] vera se i due assi sono perpendicolari [E] vera se i due assi sono paralleli

**96** Completa la proposizione: "La simmetria centrale di centro $C\left(-\frac{5}{3}, \sqrt{3}\right)$ può essere ottenuta come composizione delle due simmetrie assiali di assi le rette … … … … … … e la sua equazione è … … … … … … … … … … … … … … … …

**97** Stabilite il valore di verità delle proposizioni:
Componendo due isometrie si ottiene una isometria

a) Componendo due simmetrie assiali si ottiene una simmetria assiale V F
b) Componendo due traslazioni si ottiene una traslazione V F
c) Componendo due simmetrie centrali si ottiene una simmetria centrale V F
d) Componendo due simmetrie assiali di assi incidenti si ottiene una rotazione V F
e) Componendo due rotazioni si ottiene una rotazione V F
f) L'identità si ottiene componendo una isometria con sé stessa V F
g) L'inversa di una traslazione è la stessa traslazione V F
h) Componendo una simmetria centrale con una rotazione si ottiene l'identità V F
i) Componendo una simmetria centrale di centro H con la simmetria assiale avente come asse una retta passante per H si ottiene sempre l'identità V F

*Ulteriori esercizi sulle isometrie*

**98** L'equazione $\begin{cases} x' = 4 - x \\ y' = y \end{cases}$ descrive:

[A] la simmetria di asse l'asse y
[B] la simmetria di asse la retta $x = 4$
[C] la traslazione di vettore $\vec{v}(4,0)$
[D] la simmetria di asse x=2
[E] la simmetria di centro C(4,0)

**99** La trasformazione $\Sigma \begin{cases} x' = -y + 2 \\ y' = 2x \end{cases}$ è un'isometria?

**100** Il segmento di estremi A(3,4) e B(3,-2) ha come simmetrico il segmento di estremi A'(3,2) e B'(5,2); è stata eseguita:

[A] la simmetria di asse la retta $x = 4$
[B] la simmetria $S_{b2}$
[C] la simmetria $S_{b1}$
[D] la simmetria di asse la retta $x = 3$
[E] la simmetria $S_{y=3}$

**101** Attribuisci il valore di verità alle seguenti proposizioni:

a) In una isometria vi è almeno un elemento unito
b) Nella simmetria centrale vi sono infinite rette unite, ma solamente un punto unito
c) In ogni triangolo vi è almeno un asse di simmetria
d) Qualche quadrilatero ha un centro di simmetria
e) Il triangolo equilatero ha un centro di simmetria
f) Il rombo è l'unico quadrilatero avente due assi di simmetria
g) Tutte le rette aventi la stessa direzione del vettore della traslazione sono rette unite
h) Solo la simmetria assiale è una isometria invertente
i) Rette parallele hanno come immagine in una isometria rette parallele
j) In una isometria una retta è sempre parallela alla sua immagine

**102** Il quadrilatero di vertici A(5,0), B(9,0), C(12,4), D(7,3) nella simmetria $S_x$ ha fisso il lato AB. Spiegate come sia possibile questo fatto.

**103** Dimostrate che la bisettrice di un angolo è il suo asse di simmetria

**104** Il rettangolo ABCD con AB<BC ha come immagine il rettangolo A'B'C'D' nella simmetria avente come asse la retta AC. Potete affermare che AB'DCD'B è un esagono regolare?

**105** I due segmenti della figura1 possono essere corrispondenti in una simmetria centrale?

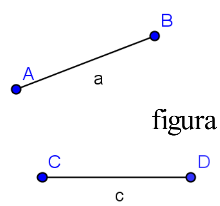


figura1

**106** Nella figura2 abbiamo disegnato il quadrato ABCD e il punto A' corrispondente di A in una isometria. Stabilite quale isometria è completamente fissata con questi elementi (simmetria assiale, traslazione, simmetria centrale) e determinate in essa l'immagine del quadrato.

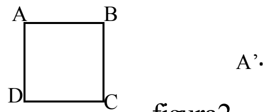


figura2

**107** Costruite l'immagine di un triangolo rettangolo ABC (non isoscele) di ipotenusa BC

a) in ciascuna delle simmetrie $S_A$; $S_B$; $S_C$
b) nella simmetria $S_M$ essendo M il punto medio dell'ipotenusa
c) in ciascuna delle simmetrie aventi come assi le rette dei lati

**108** Comporre due traslazioni di vettori $v_1(2; 3)$ e $v_2(3; 6)$ applicandole al triangolo ABC, con A(-2; -1) B(-1; -2) C(-4; -3) .

**109** Determina il corrispondente A'B' del segmento di vertici A(-2; 6) e B(-3; 3) nella simmetria di asse x=-1, applica poi al segmento ottenuto un'ulteriore simmetria con asse x=4. Utilizzando l'equazione per la composizione di due simmetrie con assi paralleli tra di loro trova le nuove coordinate dei due punti A e B.

**110** Determina il corrispondente A'B' del segmento di vertici A(1; -6) e B(4; 3) nella simmetria di asse x = 2, applica poi al segmento ottenuto un ulteriore simmetria con asse y = 1. Utilizzando l'equazione per la composizione di due simmetrie con assi perpendicolari tra di loro determina le nuove coordinate dei due punti A e B.

**111** Componi le seguenti trasformazioni geometriche scrivendo l'equazione della trasformazione composta e fornendo un esempio con disegno relativo.

a) Due rotazioni con lo stesso centro
b) Due rotazioni con centro diverso
c) Due simmetrie centrali
d) Due rotazioni di un angolo retto