Capitolo 3

Calcolo tensoriale

Nel capitolo precedente dedicato alla teoria della relatività ristretta abbiamo spesso preso in considerazione quantità numeriche a più indici, ad esempio i quadrivettori delle coordinate spaziali e temporale, i quadrivettori velocità, la matrice (g_{ij}) che fornisce la pseudometrica di Lorentz, la matrice (F_{ik}) legata al campo elettromagnetico, ecc. In particolare, per dar senso alle leggi fisiche, tali enti numerici a più indici, combinandosi tra loro, devono formare quantità scalari che siano invarianti rispetto ai cambiamenti di riferimento. Allo scopo di introdurre proficuamente la teoria della relatività generale dobbiamo anzitutto occuparci, dal punto di vista puramente matematico, dello studio dell'invarianza di espressioni a più indici rispetto ai cambiamenti di sistemi di riferimento. La teoria matematica adatta a questo scopo è ogg costituita dalla geometria differenziale che si occupa dello studio di spazi geometrici "coordinatizzabili", ovvero per i quali esistono sistemi di coordinate: ad ogni punto P dello spazio geometrico è assegnata una n-upla di numeri reali, dette coordinate di P. La nozione corretta di spazio coordinatizzabile si ritrova nella definizione di varietà differenziabile, risalente a Riemann. Noi preferiamo evitare tale formalismo geometrico, eccessivo per gli scopi di questo libro. Diremo semplicemente che un certo insieme di punti X è uno spazio coordinatizzabile di dimensione n esiste un modo (in generale tanti modi) per assegnare ad ogni punto P di X una n-upla di numeri reali, le coordinate di P, che verranno denotate con $x^0, \ldots, x^{n-1}$. Per approfondire la questione dal punto di vista geometrico$-$differenziale si rimanda a [1]. Lo spazio $\mathbb{R}^n$, curve e ipersuperfici in $\mathbb{R}^n$, sono esempi classici di spazi coordinatizzabili nel senso appena definito, rispettivamente di dimensioni 1, n e $n-1$. Lo scopo del *calcolo tensoriale* è quello di studiare relazioni invarianti rispetto ai cambiamenti di coordinate ammissibili.

3.1 Cambiamenti di coordinate ammissibili

Sia $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^0, \dots, x^{n-1})$ un cambiamento di coordinate in $\mathbb{R}^n$. Diciamo che tale cambiamento di coordinate è ammissibile se l'applicazione $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^0, \dots, x^{n-1})$ è di classe C^1, ovvero differenziabile con differenziale continuo, e vale

$$\det\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right) \neq 0 \tag{3.1}$$

in ogni punto di $\mathbb{R}^n$. La condizione (3.1) assicura che la mappa $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^0, \dots, x^{n-1})$ è localmente invertibile attorno ad ogni punto di $\mathbb{R}^n$. Si ha quindi la relazione fondamentale

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} = \delta_k^j$$

dove δ_i^k, detto anche simbolo di Kronecker, vale 1 ogni volta che $i = k$ e 0 altrimenti. Analogamente si ha la relazione

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} = \delta_k^j.$$

In tutto il resto della trattazione supporremo sempre, senza ulteriori specificazioni, che i cambiamenti di coordinate coinvolti siano ammissibili.

3.2 Definizione di tensore

Il concetto di tensore può essere dato in modo più rigoroso di quanto qui esposto; noi preferiamo infatti seguire la linea di pensiero dei fondatori del calcolo tensoriale, come in [6].

Sia dato, nel sistema di coordinate x^i con $i = 0, \dots, n-1$, il sistema di coefficienti reali

$$T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}(P), \quad P \in X,$$

con $p, q \in \mathbb{N}$ e con gli indici interi $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q$ che variano tra 0 ed $n-1$. Ometteremo sempre d'ora in poi, per semplicità di notazione, la dipendenza funzionale dal punto P. Siamo interessati a quei coefficienti che, al variare del sistema di coordinate, obbediscono alla seguente legge di trasformazione:

$$\overline{T}_{r_1 \dots r_p}^{s_1 \dots s_q} = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p = 0 \\ j_1, \dots, j_q = 0}}^{n-1} T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^{r_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial \bar{x}^{r_p}} \frac{\partial \bar{x}^{s_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{s_q}}{\partial x^{j_q}}. \tag{3.2}$$

Diciamo che le componenti $T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ sono le componenti di un tensore p-covariante e q-controvariante se tali componenti si trasformano, al cambiare del sistema di coordinate, secondo la legge (3.2); diremo anche, più brevemente, che $T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}$ è un tensore di tipo (p,q).

Per scrivere più semplicemente la legge (3.2) d'ora in poi, ogni qualvolta saranno coinvolte componenti tensoriali, ometteremo le sommatorie sugli indici ripetuti: questa viene anche detta *convenzione di Einstein*. Applicando tale convenzione la legge (3.2) assume la forma semplificata

$$\overline{T}^{s_1\ldots s_q}_{r_1\ldots r_p} = T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^{r_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial \bar{x}^{r_p}} \frac{\partial \bar{x}^{s_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{s_q}}{\partial x^{j_q}}.$$

Un tensore T_i di tipo $(1,0)$ si dice anche vettore covariante; grazie alla legge di trasformazione (3.2) le componenti di un vettore covariante si trasformano mediante la legge

$$\overline{T}_i = T_j \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}. \tag{3.3}$$

Ad esempio sia data una funzione regolare $u\colon X \to \mathbb{R}$; allora dato un sistema di coordinate x^i possiamo considerare la funzione u come applicazione tra $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}$, e quindi formare il vettore gradiente di u come il vettore di componenti

$$\nabla_i u = \frac{\partial u}{\partial x^i}.$$

Le componenti $\nabla_i u$ formano un vettore covariante; infatti si ha, in base alle usuali regole del calcolo differenziale,

$$\overline{\nabla}_i u = \frac{\partial u}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial u}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} = \nabla_j u \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}.$$

Un tensore T^i di tipo $(0,1)$ si dice invece vettore controvariante; sempre grazie alla legge di trasformazione (3.2) le componenti di un vettore controvariante si trasformano mediante la legge

$$\overline{T}^i = T^j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \tag{3.4}$$

In questo caso l'esempio fondamentale è costituito dai vettori tangenti; un vettore tangente a X è un vettore tangente ad una curva $x^i = x^i(t)$ tracciata su X, e avrà quindi componenti, nel sistema di coordinate x^i, date da $\dfrac{dx^i}{dt}$. Passando al sistema di coordinate $\bar{x}^i$ si trova

$$\frac{d\bar{x}^i}{dt} = \frac{dx^j}{dt}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}$$

e dunque, per definizione, le componenti di un vettore tangente sono componenti di un vettore controvariante.

3.3 Proprietà dei tensori

In questa sezione passiamo a studiare alcune tra le più importanti proprietà e operazioni tra tensori. Un'operazione tra tensori deve restituire, per filosofia generale, ancora un tensore, come risultato; ne segue che se le operazioni vengono definite in un certo sistema di coordinate x^i, occorrerà di volta in volta mostrare che le componenti del risultato dell'operazione stessa si trasformano ancora come un tensore.

Sia dato un tensore $T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\dots i_p}$ di tipo (p,q); allora $T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\dots i_p}$ si dice simmetrico rispetto ad i_r e i_s se

$$T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\dots i_r\dots i_s\dots i_p} = T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\dots i_s\dots i_r\dots i_p}.$$

$T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\dots i_p}$ si dice invece simmetrico rispetto a j_r e j_s se

$$T^{j_1\cdots j_r\cdots j_s\cdots j_q}_{i_1\dots i_p} = T^{j_1\cdots j_s\cdots j_r\cdots j_q}_{i_1\dots i_p}.$$

La definizione di simmetria rispetto ad indici covarianti o controvarianti è ben posta. Supponiamo infatti, ad esempio, di avere un tensore T_{ij} di tipo $(2,0)$ con $T_{ij} = T_{ji}$ in un certo sistema di coordinate x^i. Allora per la legge di trasformazione (3.2) si ha

$$\overline{T}_{ji} = T_{rs}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i} = T_{sr}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^j} = \overline{T}_{ij}.$$

Un tensore $T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\dots i_p}$ di tipo (p,q) si dice completamente simmetrico se risulta simmetrico rispetto ad ogni coppia di indici covarianti i_r e i_s e rispetto ad ogni coppia di indici controvarianti j_r e j_s.

In modo analogo alla simmetria può essere definita anche l'antisimmetria: dato un tensore $T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\dots i_p}$ di tipo (p,q) si dice che $T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\dots i_p}$ è antisimmetrico rispetto ad i_r e i_s se

$$T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\dots i_r\dots i_s\dots i_p} = -T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\dots i_s\dots i_r\dots i_p}.$$

Si dice invece che $T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\dots i_p}$ è antisimmetrico rispetto a j_r e j_s se

$$T^{j_1\cdots j_r\cdots j_s\cdots j_q}_{i_1\dots i_p} = -T^{j_1\cdots j_s\cdots j_r\cdots j_q}_{i_1\dots i_p}.$$

Analogamente a quanto osservato circa la simmetria si verifica che anche la definizione di antisimmetria rispetto ad indici covarianti o controvarianti è ben posta. Finalmente un tensore $T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\dots i_p}$ di tipo (p,q) si dice completamente antisimmetrico se risulta antisimmetrico rispetto ad ogni coppia di indici covarianti i_r e i_s e rispetto ad ogni coppia di indici controvarianti j_r e j_s.

Siano $T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\dots i_p}$ ed $S^{j_1\cdots j_q}_{i_1\dots i_p}$ due tensori di tipo (p,q); formiamo allora le componenti

$$U^{j_1\cdots j_q}_{i_1\dots i_p} := T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\dots i_p} + S^{j_1\cdots j_q}_{i_1\dots i_p}.$$

Per la legge di trasformazione (3.2) si ha

$$\begin{aligned}
\overline{U}^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p} &= \overline{T}^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p} + \overline{S}^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p} \\
&= T^{s_1\dots s_q}_{r_1\dots r_p}\frac{\partial x^{r_1}}{\partial \bar{x}^{i_1}}\cdots\frac{\partial x^{r_p}}{\partial \bar{x}^{i_p}}\frac{\partial \bar{x}^{j_1}}{\partial x^{s_1}}\cdots\frac{\partial \bar{x}^{j_q}}{\partial x^{s_q}} + S^{s_1\dots s_q}_{r_1\dots r_p}\frac{\partial x^{r_1}}{\partial \bar{x}^{i_1}}\cdots\frac{\partial x^{r_p}}{\partial \bar{x}^{i_p}}\frac{\partial \bar{x}^{j_1}}{\partial x^{s_1}}\cdots\frac{\partial \bar{x}^{j_q}}{\partial x^{s_q}} \\
&= (T^{s_1\dots s_q}_{r_1\dots r_p} + S^{s_1\dots s_q}_{r_1\dots r_p})\frac{\partial x^{r_1}}{\partial \bar{x}^{i_1}}\cdots\frac{\partial x^{r_p}}{\partial \bar{x}^{i_p}}\frac{\partial \bar{x}^{j_1}}{\partial x^{s_1}}\cdots\frac{\partial \bar{x}^{j_q}}{\partial x^{s_q}} \\
&= U^{s_1\dots s_q}_{r_1\dots r_p}\frac{\partial x^{r_1}}{\partial \bar{x}^{i_1}}\cdots\frac{\partial x^{r_p}}{\partial \bar{x}^{i_p}}\frac{\partial \bar{x}^{j_1}}{\partial x^{s_1}}\cdots\frac{\partial \bar{x}^{j_q}}{\partial x^{s_q}}.
\end{aligned}$$

Ne segue che $U^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}$ è un ancora un tensore di tipo (p,q), detto somma tra $T^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}$ e $S^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}$. Allo stesso modo si mostra che anche

$$V^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p} = T^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p} - S^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}$$

è un tensore di tipo (p,q) detto differenza tra $T^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}$ e $S^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}$.

L'operazione più importante tra tensori è il cosidetto prodotto interno. Partiamo da un'operazione particolare che coinvolge solamente un tensore. Sia $T^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}$ un tensore di tipo (p,q); formiamo le componenti

$$U^{j_1\dots j_{q-1}}_{i_1\dots i_{p-1}} = T^{j_1\dots j_{q-1}\ell}_{i_1\dots i_{p-1}\ell}.$$

Ricordiamo che per la convenzione di Einstein al secondo membro è sottintesa una somma su ℓ. Verifichiamo che $U^{j_1\dots j_{q-1}}_{i_1\dots i_{p-1}}$ è un tensore di tipo $(p-1,q-1)$. Grazie alla legge di trasformazione (3.2) si ha

$$\begin{aligned}
\overline{U}^{j_1\dots j_{q-1}}_{i_1\dots i_{p-1}} &= \overline{T}^{j_1\dots j_{q-1}\ell}_{i_1\dots i_{p-1}\ell} \\
&= T^{s_1\dots s_q}_{r_1\dots r_p}\frac{\partial x^{r_1}}{\partial \bar{x}^{i_1}}\cdots\frac{\partial x^{r_p}}{\partial \bar{x}^{\ell}}\frac{\partial \bar{x}^{j_1}}{\partial x^{s_1}}\cdots\frac{\partial \bar{x}^{\ell}}{\partial x^{s_q}} \\
&= T^{s_1\dots s_q}_{r_1\dots r_p}\frac{\partial x^{r_1}}{\partial \bar{x}^{i_1}}\cdots\frac{\partial x^{r_{p-1}}}{\partial \bar{x}^{i_{p-1}}}\frac{\partial \bar{x}^{j_1}}{\partial x^{s_1}}\cdots\frac{\partial \bar{x}^{j_{q-1}}}{\partial x^{s_{q-1}}}\delta^{r_p}_{s_q}.
\end{aligned}$$

Dunque si trova

$$\begin{aligned}
\overline{U}^{j_1\dots j_{q-1}}_{i_1\dots i_{p-1}} &= T^{s_1\dots s_{q-1}\ell}_{r_1\dots r_{p-1}\ell}\frac{\partial x^{r_1}}{\partial \bar{x}^{i_1}}\cdots\frac{\partial x^{r_{p-1}}}{\partial \bar{x}^{i_{p-1}}}\frac{\partial \bar{x}^{j_1}}{\partial x^{s_1}}\cdots\frac{\partial \bar{x}^{j_{q-1}}}{\partial x^{s_{q-1}}} \\
&= U^{s_1\dots s_{q-1}}_{r_1\dots r_{p-1}}\frac{\partial x^{r_1}}{\partial \bar{x}^{i_1}}\cdots\frac{\partial x^{r_{p-1}}}{\partial \bar{x}^{i_{p-1}}}\frac{\partial \bar{x}^{j_1}}{\partial x^{s_1}}\cdots\frac{\partial \bar{x}^{j_{q-1}}}{\partial x^{s_{q-1}}}
\end{aligned}$$

la quale mostra la tensorialità delle componenti $U^{j_1\dots j_{q-1}}_{i_1\dots i_{p-1}}$. Diciamo che il tensore $U^{j_1\dots j_{q-1}}_{i_1\dots i_{p-1}}$ è ottenuto per contrazione dal tensore $T^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}$ rispetto agli indici i_p e j_q.

In modo del tutto analogo si può contrarre il tensore $T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}$ rispetto a due indici qualunque, purché l'uno di covarianza e l'altro di controvarianza: le componenti

$$U^{j_1\cdots j_{s-1}j_{s+1}\cdots j_q}_{i_1\ldots i_{r-1}i_{r+1}\ldots i_p} = T^{j_1\cdots j_{s-1}\ell j_{s+1}\cdots j_q}_{i_1\ldots i_{r-1}\ell i_{r+1}\ldots i_p}$$

formano un tensore di tipo $(p-1, q-1)$ ottenuto per contrazione dal tensore $T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\ldots i_p}$ rispetto agli indici i_r e j_s.

La contrazione è un caso particolare, in un certo senso, di un'operazione più generale che coinvolge due tensori, che è il loro prodotto interno. Siano dati un tensore $T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\ldots i_p}$ di tipo (p,q) ed un tensore $S^{k_1\ldots k_{q'}}_{h_1\ldots h_{p'}}$ di tipo (p',q'); formiamo le componenti

$$U^{j_1\cdots j_q k_1\ldots k_{s-1}k_{s+1}\ldots k_{q'}}_{i_1\ldots i_{r-1},i_{r+1}\ldots i_p h_1\ldots h_{p'}} = T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\ldots i_{r-1}\ell i_{r+1}\ldots i_p} S^{k_1\ldots k_{s-1}\ell k_{s+1}\ldots k_{q'}}_{h_1\ldots h_{p'}}.$$

Allora si verifica facilmente che $U^{j_1\cdots j_q k_1\ldots k_{s-1}k_{s+1}\ldots k_{q'}}_{i_1\ldots i_{r-1},i_{r+1}\ldots i_p h_1\ldots h_{p'}}$ è un tensore di tipo $(p+p'-1, q+q'-1)$; diciamo che $U^{j_1\cdots j_q k_1\ldots k_{s-1}k_{s+1}\ldots k_{q'}}_{i_1\ldots i_{r-1},i_{r+1}\ldots i_p h_1\ldots h_{p'}}$ è prodotto interno tra $T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\ldots i_p}$ ed $S^{k_1\ldots k_{q'}}_{h_1\ldots h_{p'}}$. Ovviamente esistono tanti modi per moltiplicare internamente due tensori, contraendo sempre una coppia di indici l'uno di covarianza e l'altro di controvarianza.

3.3.1 Costruzione di invarianti per prodotto interno

L'importanza del prodotto interno tra tensori è alla base del calcolo tensoriale e motiva, in un certo senso, la legge di trasformazione tensoriale. Siano ad esempio dati due vettori T_i e S^j, rispettivamente covariante e controvariante; allora il numero reale ottenuto per prodotto interno T_iS^i è un invariante. Infatti si ha, grazie alle leggi (3.3) e (3.4)

$$\overline{T}_i\overline{S}^i = T_j\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}S^h\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^h} = T_jS^h\delta^h_j = T_jS^j$$

per cui il numero reale T_iS^i non dipende dal sistema di coordinate scelto, ma solamente dal punto $P \in X$. In generale ogni volta che si moltiplicano internamente tensori e si giunge, dopo successivi prodotti interni, ad un numero reale, quest'ultimo sarà invariante rispetto al sistema di coordinate scelto.

Un esempio di quanto detto si ottiene moltiplicando internamente il vettore gradiente di una funzione reale u per il vettore controvariante formato dai differenziali delle variabili x^i, cioè il vettore dato dalle componenti formali $dx^0, \ldots, dx^{n-1}$. Dal momento che le componenti del vettore tangente formano un vettore controvariante, anche le componenti differenziali formano un vettore controvariante, per cui il differenziale di u dato formalmente da

$$du = \frac{\partial u}{\partial x^i}dx^i$$

è un invariante. Con lo stesso ragionamento si vede che anche l'espressione differenziale mista

$$\Phi = T^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}\frac{\partial u}{\partial x^{j_1}}\dots\frac{\partial u}{\partial x^{j_q}}dx^{i_1}\dots dx^{i_p}$$

è invariante ogni volta che $T^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}$ sono le componenti di un tensore, nel qual caso infatti si trova grazie alla (3.2)

$$T^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}\frac{\partial u}{\partial x^{j_1}}\dots\frac{\partial u}{\partial x^{j_q}}dx^{i_1}\dots dx^{i_p} = \overline{T}^{k_1\dots k_q}_{h_1\dots h_p}\frac{\partial u}{\partial \bar{x}^{k_1}}\dots\frac{\partial u}{\partial \bar{x}^{k_q}}d\bar{x}^{h_1}\dots d\bar{x}^{h_p}. \qquad (3.5)$$

Proprio lo studio dell'invarianza delle espressioni differenziali miste espressa dalla (3.5) ha portato alla creazione del calcolo tensoriale da parte dei matematici italiani Ricci Curbastro e Levi Civita.

Notevole importanza in contesto geometrico−differenziale assumono, ad esempio, le espressioni differenziali del tipo

$$\Phi = T_{i_1\dots i_p}dx^{i_1}\dots dx^{i_p}.$$

Nel caso particolare in cui $T_{i_1\dots i_p}$ sia un tensore completamente antisimmetrico è usuale denotare l'espressione Φ nel seguente modo:

$$\Phi = T_{i_1\dots i_p}dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}.$$

L'espressione Φ è anche detta forma differenziale di grado p; l'algebra tensoriale di un tensore $T_{i_1\dots i_p}$ di tipo $(p,0)$ e completamente antisimmetrico equivale dunque all'algebra dell'operatore $\wedge$ detta anche algebra esterna.

3.4 Il tensore metrico

Introduciamo in questa sezione il tensore più importante tra tutti: il tensore metrico. L'obiettivo è quello di mettere una metrica sullo spazio X, ovvero di poter misurare la lunghezza dei vettori tangenti e delle curve. Nel linguaggio delle varietà differenziabili l'introduzione del tensore metrico porta allo studio di strutture matematiche più complesse, dette varietà riemanniane; si veda [1] per un trattamento adeguato sull'argomento.

Diciamo che sullo spazio X è assegnato un tensore metrico se è dato un tensore g_{ij} di tipo $(2,0)$, completamente simmetrico e con $\det(g_{ij})\neq 0$ ovunque; il tensore g_{ij} viene anche detto tensore fondamentale.

Essendo $\det(g_{ij})\neq 0$ ovunque la matrice (g_{ij}) risulta invertibile punto per punto; esiste quindi la matrice inversa, che denotiamo con (g^{ij}), tale per cui si ha $g_{ij}g^{ik}=\delta^k_j$. Verifichiamo che anche g^{ij} è un tensore, più precisamente un tensore di tipo $(0,2)$. Sia T^i un generico vettore controvariante; allora il vettore di componenti $S_i = g_{ij}T^j$ è un generico vettore covariante, grazie all'invertibilità della matrice (g_{ij}). Dunque si ha $S_i g^{ik} = g_{ij}T^j g^{ik} = \delta_j^k T^j = T^k$. Ne segue che

$$S_\ell \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^i} \bar{g}^{ik} = \overline{S}_i \bar{g}^{ik} = \overline{T}^k = T^h \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^h} = S_\ell g^{\ell h} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^h}.$$

Per l'arbitrarietà delle componenti S_ℓ deve essere

$$\frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^i} \bar{g}^{ik} = g^{\ell h} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^h}$$

da cui

$$\bar{g}^{ik} = g^{\ell h} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\ell} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^h}$$

la quale mostra che g^{ij} è effettivamente un tensore di tipo $(0, 2)$.

Osserviamo che nello spazio $\mathbb{R}^n$ riferito a coordinate cartesiane ortogonali si ha ovviamente $g_{ij} = g^{ij} = \delta_i^j$.

Mediante prodotto interno con il tensore metrico, o con il suo inverso, è possibile costruire, a partire da un dato tensore, altri tensori: tale operazione viene detta innalzamento degli indici o abbassamento degli indici.

Ad esempio sia dato un tensore T_i^j di tipo $(1, 1)$; allora possiamo effettuare il prodotto interno $T_i^j g_{jk}$ ottenendo quindi un tensore di tipo $(2, 0)$ che denotiamo con T_{ik}; in tale operazione l'indice di controvarianza j viene quindi abbassato e diventa indice di covarianza. Invece se effettuiamo il prodotto $T_i^j g^{ik}$ otteniamo un tensore di tipo $(0, 2)$ che denotiamo con T^{jk}; in tale operazione l'indice di covarianza i viene alzato e diventa indice di controvarianza. Spesso tensori diversi ottenuti per innalzamento e abbassamento degli indici vengono identificati tra loro, come se si trattasse di uno stesso tensore. Risulta chiaro infine come l'operazione di innalzamento e abbassamento degli indici possa essere effettuata su un generico tensore $T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}$.

Mediante l'uso del tensore metrico è possibile definire la lunghezza di un vettore controvariante (vettore tangente) di componenti T^i; per definizione poniamo

$$||T^i|| := \sqrt{g_{hk}T^h T^k}.$$

La quantità $||T^i||$ risulta essere invariante dal momento che g_{ij} è un tensore e T^i è un vettore controvariante. Osserviamo che non necessariamente vale $g_{hk}T^h T^k \geq 0$; ne segue che $||T^i||$ potrebbe anche non essere reale. Effettivamente quello che capita, come anche in relatività ristretta, è che la forma quadratica associata alla matrice (g_{ij}) potrebbe non essere semidefinita postiva.

In modo analogo si definisce la lunghezza di un vettore covariante di componenti T_i ponendo

$$||T_i|| := \sqrt{g^{hk}T_h T_k}.$$

Osserviamo che in $\mathbb{R}^n$ riferito a coordinate cartesiane ortogonali dal momento che $g_{ij} = \delta_i^j$ si ha

$$||T^i|| = \sum_{h=0}^{n-1} |T^h|^2, \quad ||T_i|| = \sum_{h=0}^{n-1} |T_h|^2$$

per cui si ritrovano le classiche formule per il calcolo della lunghezza di vettori euclidei.

Analogamente alla lunghezza di vettori si può definire anche l'angolo tra vettori. Siano dati due vettori controvarianti T^i e S^j di lunghezza unitaria; allora l'angolo θ tra T^i e S^j è definito dalla relazione

$$\cos\theta = g_{ij} T^i S^j.$$

Verifichiamo che θ risulta sempre reale nel caso in cui la forma quadratica associata alla matrice (g_{ij}) è semidefinita positiva; basta mostrare che la quantità $\lambda := g_{ij} T^i S^j$ soddisfa $|\lambda| \leq 1$ per ogni coppia di vettori controvarianti T^i e S^j di lunghezza unitaria. Grazie al fatto che $g_{hk} R^h R^k \geq 0$ ovunque e per ogni vettore R^i si ha

$$g_{ij}(\alpha T^i + \beta S^i)(\alpha T^j + \beta S^j) \geq 0 \tag{3.6}$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tenunto conto che $g_{ij} T^i T^j = g_{ij} S^i S^j = 1$ si ha, sviluppando la (3.6), $\alpha^2 + 2\alpha\beta\lambda + \beta^2 \geq 0$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ovvero $(\alpha + \beta\lambda)^2 + \beta^2(1 - \lambda^2) \geq 0$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ne segue che dovrà essere $1 - \lambda^2 \geq 0$, e dunque $|\lambda| \leq 1$.

Siano ora T^i e S^j due vettori controvarianti non necessariamente unitari; allora possiamo definire l'angolo θ tra essi mediante

$$\cos\theta = \frac{g_{ij} T^i S^j}{\sqrt{g_{hk} T^h T^k g_{rs} S^r S^s}}$$

e analogamente per due vettori covarianti T_i e S_j mediante

$$\cos\theta = \frac{g^{ij} T_i S_j}{\sqrt{g^{hk} T_h T_k g^{rs} S_r S_s}}.$$

Due vettori controvarianti si dicono ortogonali se $\cos\theta = 0$.

3.4.1 Lunghezza di curve

La definizione di lunghezza di una curva viene data generalizzando la formula valida in ambito classico. Sia c un arco di curva regolare su X espresso mediante $x^i = x^i(t)$ per $t \in [a, b]$; definiamo $\mathcal{L}(c)$ ponendo

$$\mathcal{L}(c) := \int_a^b \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}\, dt. \tag{3.7}$$

È facile verificare che $\mathcal{L}(c)$ non dipende dal parametro t scelto per rappresentare la curva. Inoltre essendo g_{ij} componenti di un tensore di tipo $(2,0)$ ed essendo $\dfrac{dx^i}{dt}$ componenti di un vettore controvariante l'espressione

$$\sqrt{g_{ij}(t)\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}$$

è invariante. La lunghezza dell'arco di curva c data, per definizione, dal numero $\mathcal{L}(c)$ dipende quindi solo dall'arco c, e non dalla parametrizzazione di c, né dal sistema di coordinate x^i, scelto per scrivere la (3.7). Osserviamo che anche in tal caso la lunghezza di una curva potrebbe non essere reale se la forma quadratica associata alla matrice (g_{ij}) non è semidefinita positiva. Ancora una volta ciò è in corrispondenza con quanto accade in relatività ristretta considerando la metrica di Lorentz.

3.5 Calcolo differenziale assoluto

In questa sezione entriamo nel cuore del calcolo tensoriale, analizzando il concetto di derivazione covariante di un tensore. Supponiamo di volere, ad esempio, derivare un campo vettoriale in $\mathbb{R}^2$ lungo una curva. Utilizzando la nozione classica di derivata dobbiamo anzitutto essere in grado di calcolare la differenza tra due vettori che, in ambito euclideo, si effettua componente per componente. Consideriamo invece una situazione più complicata. Sia data una superficie $\mathcal{S}$ immersa in $\mathbb{R}^3$ e sia dato un campo di vettori tangenti ad $\mathcal{S}$ lungo una curva tracciata sopra $\mathcal{S}$. Volendo derivare tale campo non è più idonea la differenza dei vettori tangenti componente per componente, dal momento che, così facendo, otterremmo, come derivata, ancora un campo vettoriale, che però non è più tangente alla superficie, e dunque un oggetto "non intrinseco", ovvero non interpretabile solo in termini delle coordinate di superficie. Va quindi cercata una definizione più adatta di derivazione, che sarà l'obiettivo di questa sezione. In particolare cercheremo la definizione di derivazione covariante più naturale dal punto di vista geometrico. In realtà ci possono essere varie definizioni di derivata covariante, e nella letteratura moderna il concetto di derivata covariante viene generalizzato nel concetto di *connessione* sopra una varietà riemanniana. In questo ordine di idee quello che analizzeremo noi sarà la *connessione di Levi Civita*, che è l'unica nozione di derivazione covariante "compatibile" con la metrica definita sulla varietà. La connessione di Levi Civita è quindi, in un certo senso, la connessione canonica.

Il problema della derivazione covariante si pone quando si vuole differenziare un'espressione invariante

$$\Phi = T^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}\frac{\partial u}{\partial x^{j_1}}\dots\frac{\partial u}{\partial x^{j_q}}dx^{i_1}\dots dx^{i_p}.$$

In tal caso il differenziale di Φ dovrà essere ancora un'espressione invariante data da

$$\mathrm{d}\Phi = \nabla_h T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} \frac{\partial u}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial u}{\partial x^{j_q}} dx^{i_1} \dots dx^{i_p} dx^h$$

per certi coefficienti $\nabla_h T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}$ i quali formeranno, per invarianza, un tensore detto derivata covariante del tensore $T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}$.

Per tutto il resto della sezione supporremo che sullo spazio X sia assegnato un tensore metrico g_{ij}.

Cominciamo l'analisi della derivazione covariante partendo dal caso più semplice: derivare un invariante. Il modo più semplice per derivare una funzione regolare (invariante) $u\colon X \to \mathbb{R}$ è quello di considerarne il suo gradiente, vettore covariante di componenti

$$\nabla_h u := \frac{\partial u}{\partial x^h}.$$

Un invariante u può essere visto come un tensore di tipo $(0, 0)$; la derivata covariante di un invariante u è dunque un tensore di tipo $(1, 0)$ dato dalle componenti $\nabla_h u$, per cui la derivazione covariante aumenta di 1 il grado di covarianza del tensore dato. Osserviamo che dal momento che per un invariante la derivazione covariante coincide con quella ordinaria, vale la *formula di Leibniz* data da $\nabla_h(uv) = (\nabla_h u)v + u\nabla_h v$ per ogni coppia di invarianti regolari u e v.

Per passare allo studio della derivazione covariante dei vettori premettiamo l'analisi della derivazione, in ambito euclideo, dei campi di vettori tangenti ad una superficie.

3.5.1 Derivazione di campi vettoriali superficiali

Sia Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $r\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ una mappa invertibile, differenziabile con inversa differenziabile. Dunque l'insieme $\mathcal{S} = \mathrm{Im} r$ è un'ipersuperficie regolare (di dimensione n) immersa in $\mathbb{R}^{n+1}$. In tal caso le componenti del tensore metrico indotto dalla metrica euclidea di $\mathbb{R}^{n+1}$ sono date da

$$g_{ij} = \frac{\partial r}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial r}{\partial x^j}.$$

Supponiamo di voler derivare un campo V di vettori tangenti a $\mathcal{S}$ lungo una curva $x^i = x^i(t)$. Possiamo supporre V dato da

$$V(t) = v^i(t) \frac{\partial r}{\partial x^i}(t)$$

per opportuni coefficienti regolari $v^i(t)$, componenti controvarianti del campo V, e t parametro reale. Si ha allora

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dv^i}{dt} \frac{\partial r}{\partial x^i} + v^i(t) \frac{\partial^2 r}{\partial x^j \partial x^i} \frac{dx^j}{dt}.$$

La presenza del termine

$$v^i(t)\frac{\partial^2 r}{\partial x^j \partial x^i}\frac{dx^j}{dt}$$

dice che $\dfrac{dV}{dt}$ non è definito in modo intrinseco, dipende cioè anche dalle coordinate dell'ambiente $\mathbb{R}^{n+1}$. Per ottenere come derivata del campo V ancora un campo di vettori tangenti teniamo conto solamente della componente del vettore $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^j \partial x^i}$ lungo lo spazio tangente. Si avrà quindi

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^j \partial x^i} = \Gamma^k_{ij}\frac{\partial r}{\partial x^k} + \alpha_{ij}\mathbf{n} \tag{3.8}$$

per certi coefficienti Γ^k_{ij} e α_{ij}, dove Γ^k_{ij} sono le componenti di $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^j \partial x^i}$ lungo lo spazio tangente, mentre α_{ij} è la componente di $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^j \partial x^i}$ lungo la normale $\mathbf{n}$ a $\mathcal{S}$. Dalla (3.8) si ha

$$\frac{\partial r}{\partial x^h}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial x^j \partial x^i} = \Gamma^k_{ij}\frac{\partial r}{\partial x^h}\cdot\frac{\partial r}{\partial x^k} = \Gamma^k_{ij}g_{hk}.$$

Osserviamo ora che

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial r}{\partial x^h}\cdot\frac{\partial r}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial^2 r}{\partial x^j \partial x^h}\cdot\frac{\partial r}{\partial x^i} + \frac{\partial r}{\partial x^h}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial x^j \partial x^i}$$

da cui

$$\frac{\partial r}{\partial x^h}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial r}{\partial x^h}\cdot\frac{\partial r}{\partial x^i}\right) - \frac{\partial^2 r}{\partial x^j \partial x^h}\cdot\frac{\partial r}{\partial x^i}.$$

Procedendo in modo analogo sugli altri termini si arriva alla formula

$$2\frac{\partial r}{\partial x^h}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial r}{\partial x^h}\cdot\frac{\partial r}{\partial x^i}\right) + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial r}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial r}{\partial x^h}\right) - \frac{\partial}{\partial x^h}\left(\frac{\partial r}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial r}{\partial x^i}\right)$$

per cui si trova

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial r}{\partial x^h}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial x^j \partial x^i}\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial r}{\partial x^h}\cdot\frac{\partial r}{\partial x^i}\right) + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial r}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial r}{\partial x^h}\right) - \frac{\partial}{\partial x^h}\left(\frac{\partial r}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial r}{\partial x^i}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h}\right).
\end{aligned}$$

Finalmente si conclude che

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h}\right) = \Gamma^k_{ij}g_{hk}$$

e quindi, ricordando che $g_{hk}g^{h\ell} = \delta_k^\ell$, si trova facilmente

$$\Gamma_{ij}^\ell = \frac{1}{2} g^{h\ell} \left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} \right).$$

Riassumendo la derivata intrinseca del campo V lungo la curva $x^i = x^i(t)$ è data da

$$\frac{DV}{dt} := \frac{dv^i}{dt}\frac{\partial r}{\partial x^i} + v^i(t)\frac{dx^j}{dt}\Gamma_{ij}^k \frac{\partial r}{\partial x^k} = \left(\frac{\partial v^k}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^k v^i \right) \frac{\partial r}{\partial x^k}\frac{dx^j}{dt}$$

dove

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{hk} \left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} \right). \tag{3.9}$$

Facciamo ora alcune osservazioni fondamentali per quanto seguirà: la quantità $\dfrac{DV}{dt}$ è, per costruzione, un invariante, e dunque, formalmente, anche la quantità DV data da

$$DV = \left(\frac{\partial v^k}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^k v^i \right) \frac{\partial r}{\partial x^k} dx^j$$

è invariante (la perdita del dt ci svincola, per così dire, dalla curva $x^i = x^i(t)$ ottenendo una formula più generale). Denotando con DV^k le componenti del campo DV nel sistema di coordinate x^i si ha quindi

$$DV^k = \left(\frac{\partial v^k}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^k v^i \right) dx^j.$$

Le componenti

$$\frac{\partial v^k}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^k v^i$$

per invarianza dovranno quindi formare un tensore di tipo $(1,1)$; inoltre i coefficienti Γ_{ij}^k dati dalla (3.9) sono espressi unicamente in termini del tensore metrico e delle coordinate di superficie x^i.

3.5.2 Derivazione covariante dei tensori

Torniamo ora al generico spazio X dotato di tensore metrico g_{ij}. In analogia a quanto visto definiamo i simboli di Christoffel come le quantità date da

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{hk} \left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} \right).$$

Per definizione di simboli di Christoffel sono simmetrici negli indici i e j, ovvero per ogni i, j, k si ha $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

È opportuno osservare che i simboli di Christoffel non formano un tensore. Infatti si può noiosamente dimostrare che la legge di trasformazione rispetto al generico cambiamento di coordinate è data da

$$\overline{\Gamma}_{ij}^{k} = \Gamma_{\ell m}^{s} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^s} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^m} \frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} \tag{3.10}$$

la quale rende evidente il fatto che i simboli di Christoffel non formano un tensore.

In analogia a quanto visto nel caso delle ipersuperfici regolari immerse in uno spazio euclideo possiamo facilmente definire la derivata covariante di un vettore controvariante T^i come il tensore $\nabla_h T^i$ di tipo $(1,1)$ dato da

$$\nabla_h T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^h} + \Gamma_{hk}^{i} T^k \tag{3.11}$$

Come nel caso degli invarianti la derivazione covariante aumenta di 1 il grado di covarianza: da un tensore di tipo $(0,1)$ per derivazione covariante otteniamo ad un tensore di tipo $(1,1)$.

Passiamo ora a derivare vettori covarianti e poi tensori qualunque, tenendo presente che uno degli scopi è quello di ottenere ancora un tensore. Per analogia a quanto visto per la derivazione covariante di un invariante richiederemo sempre che la derivazione covariante soddisfi almeno alla formula di Leibniz rispetto al prodotto interno tra tensori; questo ci consentirà di arrivare facilmente alla formula generale di derivazione di un tensore qualunque.

Sfruttiamo la formula di Leibniz per trovare la derivata covariante di un vettore covariante T_i. Sia S^j un arbitrario vettore controvariante; allora per la formula di Leibniz deve essere

$$\nabla_h (T_i S^i) = (\nabla_h T_i) S^i + T_i \nabla_h S^i. \tag{3.12}$$

La quantità $T_i S^i$ è un invariante; dunque si ha

$$\nabla_h (T_i S^i) = \frac{\partial (T_i S^i)}{\partial x^h} = \frac{\partial T_i}{\partial x^h} S^i + T_i \frac{\partial S^i}{\partial x^h}.$$

Per la (3.11) si ha anche

$$\nabla_h S^i = \frac{\partial S^i}{\partial x^h} + \Gamma_{hk}^{i} S^k$$

per cui mettendo tutto nella (3.12) si trova

$$\frac{\partial T_i}{\partial x^h} S^i + T_i \frac{\partial S^i}{\partial x^h} = (\nabla_h T_i) S^i + T_i \frac{\partial S^i}{\partial x^h} + T_i \Gamma_{hk}^{i} S^k.$$

Ne segue che per ogni vettore controvariante S^i si ha

$$(\nabla_h T_i) S^i = \frac{\partial T_i}{\partial x^h} S^i - T_i \Gamma_{hk}^{i} S^k$$

ovvero si deve avere

$$\nabla_h T_i = \frac{\partial T_i}{\partial x^h} - \Gamma^k_{hi} T_k \tag{3.13}$$

la quale esprime la derivata covariante di un vettore covariante, che risulta essere un tensore di tipo $(2, 0)$.

Finalmente la formula generale di derivazione covariante di un tensore si ottiene facilmente da quanto esposto sin d'ora, tenendo sempre presente la validità, assunta per ipotesi, della formula di Leibniz.

Sia dato un tensore T_i^j di tipo $(1, 1)$ e un arbitrario vettore covariante S_i. Per la formula di Leibniz deve essere

$$\nabla_h (T_i^j S_j) = (\nabla_h T_i^j) S_j + T_i^j \nabla_h S_j.$$

Per la (3.13) si ha

$$\nabla_h (T_i^j S_j) = \frac{\partial (T_i^j S_j)}{\partial x^h} - \Gamma^k_{hi} T_k^j S_j = \frac{\partial T_i^j}{\partial x^h} S_j + T_i^j \frac{\partial S_j}{\partial x^h} - \Gamma^k_{hi} T_k^j S_j$$

e

$$\nabla_h S_j = \frac{\partial S_j}{\partial x^h} - \Gamma^k_{hj} S_k.$$

Dunque si trova

$$\begin{aligned}(\nabla_h T_i^j) S_j &= \frac{\partial T_i^j}{\partial x^h} S_j + T_i^j \frac{\partial S_j}{\partial x^h} - \Gamma^k_{hi} T_k^j S_j - T_i^j \frac{\partial S_j}{\partial x^h} + T_i^j \Gamma^k_{hj} S_k \\ &= \frac{\partial T_i^j}{\partial x^h} S_j - \Gamma^k_{hi} T_k^j S_j + T_i^j \Gamma^k_{hj} S_k.\end{aligned}$$

Per l'arbitarietà di S_i deve essere

$$\nabla_h T_i^j = \frac{\partial T_i^j}{\partial x^h} - \Gamma^k_{hi} T_k^j + \Gamma^j_{hk} T_i^k$$

che rappresenta la derivata covariante del tensore T_i^j, la quale è un tensore di tipo $(2, 1)$.

Ormai risulta chiaro come procedere: per ricorsione la formula generale che fornisce la derivata covariante di un generico tensore $T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}$ risulta essere

$$\nabla_h T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^h} - \sum_{\ell=1}^{p} \Gamma^k_{i_\ell h} T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_{\ell-1} k i_{\ell+1} \dots i_p} + \sum_{\ell=1}^{q} \Gamma^{j_\ell}_{kh} T^{j_1 \dots j_{\ell-1} k j_{\ell+1} \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}. \tag{3.14}$$

Il tensore $\nabla_h T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}$ è un tensore di tipo $(p + 1, q)$, detto derivata covariante del tensore $T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}$.

La derivazione covariante dei tensori verifica le classiche proprietà della derivazione.

(1) Additività. Per ogni $T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}, S^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}$ tensori di tipo (p,q) si ha
$$\nabla_h(T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} \pm S^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}) = \nabla_h T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} \pm \nabla_h S^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}.$$
La semplice verifica può essere svolta per esercizio.

(2) Formula di Leibniz. La derivata covariante del prodotto interno tra due tensori è pari alla derivata covariante del primo tensore moltiplicata internamente per il secondo tensore a cui va aggiunto il prodotto interno tra il primo tensore e la derivata covariante del secondo tensore. Ad esempio
$$\nabla_h(T^k_{ij} S^i_k) = (\nabla_h T^k_{ij}) S^i_k + T^k_{ij} \nabla_h S^i_k.$$
Tale formula non necessita di verifica dal momento che abbiamo utilizzato la formula stessa, supposta vera, per costruire la derivata covariante di vettori covarianti e tensori generici.

(3) Teorema di Ricci. Si ha $\nabla_h g_{ij} = 0$. Infatti per la (3.14)
$$\nabla_h g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} - \Gamma^k_{ih} g_{kj} - \Gamma^k_{hj} g_{ik}.$$
Sostituendo i simboli di Christoffel dati dalla (3.9) si trova facilmente la tesi.

3.5.3 Differenziale assoluto e derivata intrinseca

Abbiamo già osservato che uno dei motivi storici dell'introduzione del calcolo tensoriale è quello di rendere invariante il differenziale di un invariante u, formalmente dato da
$$du = \frac{\partial u}{\partial x^h} dx^h.$$
Tale differenziale può essere anche riscritto come $du = \nabla_h u \, dx^h$ che rappresenta il differenziale assoluto dell'invariante u, il quale è ancora un invariante. Allo stesso modo definiamo il differenziale assoluto del tensore $T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}$ di tipo (p,q) come un tensore ancora di tipo (p,q) denotato con $\nabla T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}$ e dato formalmente da
$$\nabla T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} := \nabla_h T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} \, dx^h.$$

Un'altra quantità di notevole interesse è rappresentata dalla derivata intrinseca di un tensore $T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}$ di tipo (p,q) lungo una curva $x^i = x^i(t)$, e data dal tensore di tipo (p,q) di componenti
$$\frac{\delta T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}}{dt} := \nabla_h T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} \frac{dx^h}{dt}.$$
Nel caso di un campo vettoriale controvariante T^i la derivazione intrinseca corrisponde esattamente alla derivazione di campi vettoriali superficiali precedentemente illustrata.

3.6 Trasporto per parallelismo

L'applicazione geometrica principale della derivazione covariante dei tensori consiste nello studio del trasporto parallelo dei campi di vettori tangenti. Infatti attraverso la nozione di derivata covariante è possibile spiegare come i vettori tangenti si trasportano rimanendo "paralleli a se stessi". Il trasporto per parallelismo è un fatto elementare negli spazi euclidei, dal momento che per spostare i vettori parallelamente a se stessi basta effettuare una traslazione componente per componente. La cosa è più complicata considerando vettori tangenti ad una superficie: un vettore tangente rimane parallelo a se stesso, muovendosi lungo una curva tracciata sulla superficie, se non varia la sua componente tangenziale. Infatti la derivata ordinaria del campo lungo la curva avrà, in generale, sia una componente lungo lo spazio tangente, sia una componente ortogonale allo spazio tangente, come illustrato nella sezione 3.5.1. Per generalizzare il concetto di trasporto parallelo dovremo quindi richiedere che la derivata del campo vettoriale sia solo ortogonale allo spazio tangente. La derivazione covariante dei vettori tangenti (controvarianti) tiene in considerazione la sola variazione della componente tangenziale, e dunque rappresenta lo strumento giusto per analizzare il trasporto per parallelismo, in un generico spazio coordinatizzabile X dotato di tensore metrico g_{ij}.

Sia dato dunque un vettore controvariante T^i. Volendo affermare che T^i si trasporta parallelamente a se stesso lungo la curva $x^i = x^i(t)$ basterà richiedere, per quanto precedentemente osservato, l'annullarsi della derivata intrinseca del vettore T^i lungo la curva, ovvero che sia $\dfrac{\delta T^i}{dt} = 0$. Per la (3.11) deve quindi essere

$$\left(\frac{\partial T^i}{\partial x^h} + \Gamma^i_{hk} T^k\right) \frac{dx^h}{dt} = 0$$

che può essere scritta come

$$\frac{dT^i}{dt} + \Gamma^i_{hk} T^k \frac{dx^h}{dt} = 0 \tag{3.15}$$

la quale esprime l'equazione del parallelismo lungo la curva $x^i = x^i(t)$. Una formula analoga si ottiene per lo spostamento parallelo di vettori covarianti T_i lungo la curva $x^i = x^i(t)$:

$$\frac{dT_i}{dt} - \Gamma^k_{hi} T_k \frac{dx^h}{dt} = 0.$$

Lo spostamento parallelo dei vettori tangenti (controvarianti) verifica alcune proprietà che generalizzano fatti noti ed elementari degli spazi euclidei. Ad esempio in $\mathbb{R}^n$ la traslazione di un vettore non altera la lunghezza del vettore stesso; verifichiamo che la stessa cosa vale anche in generale. Sia dato un vettore controvariante

T^i che si trasporta per parallelismo lungo la curva $x^i = x^i(t)$; allora anzitutto ricordiamo che $||T^i||^2 = g_{ij}T^iT^j$. Per derivazione intrinseca si ha

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}||T^i||^2 &= \frac{\delta}{dt}(g_{ij}T^iT^j) = \nabla_h g_{ij}T^iT^j\frac{dx^h}{dt} + 2g_{ij}(\nabla_h T^i)T^j\frac{dx^h}{dt}\\ &= \nabla_h g_{ij}T^iT^j\frac{dx^h}{dt} + 2g_{ij}\frac{\delta T^i}{dt}T^j.\end{aligned}$$

Per il Teorema di Ricci risulta dunque

$$\frac{d}{dt}||T^i||^2 = 2g_{ij}\frac{\delta T^i}{dt}T^j.$$

Dal momento che il campo T^i si sposta per parallelismo deve essere $\dfrac{\delta T^i}{dt} = 0$ da cui $\dfrac{d}{dt}||T^i||^2 = 0$. Tale formula mostra che la lunghezza del vettore T^i resta costante. Alla stessa condizione si arriva applicando lo stesso ragionamento ad un campo di vettori covarianti.

Un'altra proprietà vera in ambito euclideo è l'invarianza dell'angolo tra due vettori spostati per traslazione lungo una stessa curva. Siano T^i e S^j due vettori controvarianti che si spostano per parallelismo lungo la stessa curva $x^i = x^i(t)$. Per semplicità supponiamo i vettori dati di lunghezza unitaria; per quanto visto in precedenza tali vettori restano di lunghezza unitaria se trasportati per parallelismo lungo la curva $x^i = x^i(t)$. L'angolo θ tra T^i e S^j sarà quindi dato dalla condizione $\cos\theta = g_{ij}T^iS^j$. Derivando intrinsecamente e tenendo ancora conto del Teorema di Ricci, si ha

$$\frac{d}{dt}(\cos\vartheta) = \frac{\delta}{dt}(g_{ij}T^iS^j) = g_{ij}\frac{\delta T^i}{dt}S^j + g_{ij}T^i\frac{\delta S^j}{dt}.$$

Dal momento che

$$\frac{\delta T^i}{dt} = \frac{\delta S^j}{dt} = 0$$

si ha che $\cos\theta$ resta costante, e così anche l'angolo θ tra T^i e S^j. La stessa proprietà vale per i vettori covarianti.

3.7 Geodetiche

Un caso particolare di spostamento parallelo si ha quando il vettore tangente ad una curva $x^i = x^i(t)$ si sposta per parallelismo lungo la curva stessa. Grazie all'equazione del parallelismo (3.15) questo si traduce nel sistema di equazioni

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{hk}\dfrac{dx^h}{dt}\dfrac{dx^k}{dt} = 0\\ i = 0,\dots,n-1.\end{cases} \tag{3.16}$$

Il sistema (3.16) rappresenta un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine; le soluzioni di tale sistema sono dette geodetiche su X. Il vettore tangente ad una geodetica dunque si trasporta per parallelismo lungo la geodetica stessa.

Come osservato l'equazione delle geodetiche è un sistema del secondo ordine; per il teorema di esistenza ed unicità locale per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie fissati t_0, $x^i(t_0)$ e $\frac{dx^i}{dt}(t_0)$, tale sistema ammette, sotto sufficienti condizioni di regolarità, un'unica soluzione locale. Geometricamente ciò significa che fissato un punto $P \in X$ e un vettore tangente v a X in P, esiste, localmente, una ed una sola geodetica che passa per P ed ha vettore tangente v in P, ovvero esiste, localmente, una ed una sola curva passante per P e con vettore tangente v in P, lungo la quale il vettore tangente si mantiene parallelo a v.

Come nel caso euclideo le geodetiche spiccate da un punto fissato P possono venire usate come riferimento per un sistema di coordinate. Ci proponiamo quindi il seguente problema: dato un punto $P \in X$ è possibile scegliere un sistema di coordinate x^i tale per cui le curve coordinate x^i =costante siano geodetiche passanti per P? Una versione debole di tale problema è la seguente: esiste un sistema di coordinate x^i tale per cui si abbia $\Gamma^k_{ij}(P) = 0$? In tali termini il problema è sempre risolubile. Siano infatti $\tilde{x}^i$ le coordinate di P nel sistema di coordinate x^i; allora poniamo

$$\bar{x}^i = x^i - \tilde{x}^i + \frac{1}{2}\Gamma^i_{hk}(P)(x^h - \tilde{x}^h)(x^k - \tilde{x}^k).$$

Osserviamo anzitutto che si ha

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} = \delta^i_j + \Gamma^i_{jh}(P)(x^h - \tilde{x}^h) \tag{3.17}$$

per cui si trova

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}(P) = \delta^i_j$$

e dunque il cambimento $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^0, \ldots, x^{n-1})$ è ammissibile in un intorno di P. Andiamo a verificare che $\overline{\Gamma}^k_{ij}(P) = 0$. Per la legge di trasformazione (3.10) si ha

$$\overline{\Gamma}^k_{ij}(P) = \Gamma^s_{\ell m}(P)\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^s}(\tilde{x})\frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^i}(\tilde{x})\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j}(\tilde{x}) + \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^m}(\tilde{x})\frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j}(\tilde{x}). \tag{3.18}$$

Dalla (3.17) si trova che

$$\delta^i_k = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} + \Gamma^i_{jh}(P)(x^h - \tilde{x}^h)\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k}. \tag{3.19}$$

Si ha quindi subito che

$$\delta^i_k = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}(\tilde{x}).$$

Derivando la (3.19) rispetto a $\bar{x}^\ell$ si ottiene

$$0 = \frac{\partial^2 x^i}{\partial\bar{x}^\ell \partial\bar{x}^k} + \Gamma^i_{jh}(P)\frac{\partial x^h}{\partial\bar{x}^\ell}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^k} + \Gamma^i_{jh}(P)(x^h - \tilde{x}^h)\frac{\partial^2 x^j}{\partial\bar{x}^\ell \partial\bar{x}^k}$$

da cui

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial\bar{x}^\ell \partial\bar{x}^k}(P) = -\Gamma^i_{jh}(P)\frac{\partial x^h}{\partial\bar{x}^\ell}(\tilde{x})\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^k}(\tilde{x}) = -\Gamma^i_{jh}(P)\delta^h_\ell\delta^j_k = -\Gamma^i_{k\ell}.$$

Mettendo tutto nella (3.18) finalmente si ha

$$\overline{\Gamma}^k_{ij}(P) = \Gamma^s_{\ell m}(P)\delta^k_s\delta^\ell_i\delta^m_j - \Gamma^m_{ij}(P)\delta^k_m = \Gamma^k_{ij}(P) - \Gamma^k_{ij}(P) = 0$$

che conclude la verifica. Il punto P si chiama anche polo del sistema di coordinate $\bar{x}^i$, detto anche sistema di coordinate geodetiche.

3.7.1 Caratterizzazione variazionale delle geodetiche

In questa sezione analizziamo una caratterizzazione delle geodetiche di tipo variazionale. In quanto segue supporremo la forma quadratica associata alla matrice (g_{ij}) definita positiva ; in particolare quindi tutte le curve tracciate su X hanno lunghezza reale.

In $\mathbb{R}^n$ una geodetica è sempre una linea retta, dal momento che è la sola curva lungo la quale il vettore tangente si sposta per traslazione, ovvero per parallelismo elementare. I segmenti di retta nel piano sono anche gli archi di curva che minimizzano la lunghezza. La stessa cosa vale in generale solo localmente; globalmente vale un'affermazione più debole: le geodetiche sono quelle curve che rendono *stazionario* il funzionale lunghezza.

Troviamo le equazioni di Eulero−Lagrange date dalle (1.3) con la scelta del funzionale di lunghezza $\mathcal{L}$ dato dalla (3.7). In realtà scriveremo esplicitamente le equazioni di Eulero−Lagrange per il funzionale $\mathcal{E}$ dato da

$$\mathcal{E}(c) = \int_a^b g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\,dt$$

detto anche funzionale di energia della curva c, e che risulta più semplice da trattare. Ricordiamo infatti che $\mathcal{L}(c)$ non dipende dalla parametrizzazione della curva c; ne segue che possiamo scegliere di parametrizzare c imponendo

$$\left|\left|\frac{dx^i}{dt}\right|\right| = 1.$$

Per le curve parametrizzate in tal modo si ha $\mathcal{L}(c) = \mathcal{E}(c)$, per cui per tali curve risolvere $\delta L = 0$ equivale a risolvere $\delta\mathcal{E} = 0$.

Per esteso l'integranda del funzionale $\mathcal{E}$ è data da

$$F(t, x^0, \ldots, x^{n-1}, p^0, \ldots, p^{n-1}) = g_{ij}(x^0, \ldots, x^n)p^ip^j$$

Anzitutto si trova facilmente che

$$\frac{\partial F}{\partial x^h} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} p^i p^j \qquad \frac{\partial F}{\partial p^h} = 2 g_{hj} p^j .$$

Inoltre

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial p^h} = 2 g_{hj} \frac{dp^j}{dt} + 2 \frac{\partial g_{hj}}{\partial x^k} p^k p^j .$$

Ne segue che le equazioni di Eulero-Lagrange (1.3) per $\mathcal{E}$ sono date esplicitamente da

$$\begin{cases} 2 g_{hj} \dfrac{d^2 x^j}{dt^2} + 2 \dfrac{\partial g_{hj}}{\partial x^k} \dfrac{dx^k}{dt} \dfrac{dx^j}{dt} = \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} \dfrac{dx^i}{dt} \dfrac{dx^j}{dt} \\ h = 0, \ldots, n-1 \end{cases}$$

le quali possono essere riscritte anche nel seguente modo:

$$\frac{d^2 x^j}{dt^2} + \Gamma^j_{hk} \frac{dx^h}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0, \quad j = 0, \ldots, n-1$$

che coincide con il sistema di equazioni (3.16) che definisce le geodetiche.

3.8 Curvatura

Lo studio della curvatura di uno spazio X coordinatizzabile e dotato di tensore metrico g_{ij} conclude la parte di calcolo tensoriale e costituisce una delle principali applicazioni geometriche del calcolo differenziale assoluto. La presenza di curvatura è dovuta al fatto che quando i vettori tangenti si spostano per parallelismo subiscono un incremento, che abbiamo dovuto mettere in conto quando abbiamo studiato il concetto di derivazione covariante prima per i campi vettoriali superficiali e poi per un generico campo di vettori controvarianti. Responsabili dell'incremento dovuto al trasporto per parallelismo sono i simboli di Christoffel Γ^k_{ij}; l'incremento di parallelismo si annulla se i simboli di Christoffel sono tutti nulli, come accade invero in $\mathbb{R}^n$ riferito a coordinate cartesiane ortogonali. I simboli di Christoffel però non sono le componenti di un tensore, e potrebbero quindi essere non nulli se calcolati in un diverso sistema di coordinate. Ne segue che l'annullarsi dei simboli di Christoffel non è in grado di indicare assenza di curvatura dello spazio. Dobbiamo quindi individuare un tensore che tenga conto dei soli simboli di Christoffel, ed eventualmente del tensore metrico.

Allo scopo di costruire un tensore costituito da combinazioni dei simboli di Christoffel consideriamo il tensore di tipo $(3, 0)$ dato dalla differenza

$$\nabla_\ell \nabla_h T_i - \nabla_h \nabla_\ell T_i$$

dove T_i è un generico vettore covariante. Ricordando che

$$\nabla_h T_i = \frac{\partial T_i}{\partial x^h} - \Gamma^k_{ih} T_k$$

e che

$$\nabla_\ell S_{ih} = \frac{\partial S_{ih}}{\partial x^\ell} - \Gamma^r_{i\ell} S_{rh} - \Gamma^s_{h\ell} S_{is}$$

si ha

$$\nabla_\ell \nabla_h T_i = \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^\ell \partial x^h} - \frac{\partial \Gamma^k_{ih}}{\partial x^\ell} T_k - \Gamma^k_{ih} \frac{\partial T_k}{\partial x^\ell} - \Gamma^r_{i\ell} \frac{\partial T_r}{\partial x^h} + \Gamma^r_{i\ell} \Gamma^k_{rh} T_k - \Gamma^s_{h\ell} \frac{\partial T_i}{\partial x^s} + \Gamma^s_{h\ell} \Gamma^k_{is} T_k.$$

In modo analogo si trova che

$$\nabla_h \nabla_\ell T_i = \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^h \partial x^\ell} - \frac{\partial \Gamma^k_{i\ell}}{\partial x^h} T_k - \Gamma^k_{i\ell} \frac{\partial T_k}{\partial x^h} - \Gamma^r_{ih} \frac{\partial T_r}{\partial x^\ell} + \Gamma^r_{ih} \Gamma^k_{r\ell} T_k - \Gamma^s_{\ell h} \frac{\partial T_i}{\partial x^s} + \Gamma^s_{\ell h} \Gamma^k_{is} T_k.$$

A conti fatti si ottiene quindi

$$\nabla_\ell \nabla_h T_i - \nabla_h \nabla_\ell T_i = \left(\frac{\partial \Gamma^k_{i\ell}}{\partial x^h} - \frac{\partial \Gamma^k_{ih}}{\partial x^\ell} + (\Gamma^r_{i\ell} \Gamma^k_{rh} - \Gamma^r_{ih} \Gamma^k_{r\ell}) \right) T_k.$$

Essendo T_k componenti di un generico vettore covariante ed essendo $\nabla_\ell \nabla_h T_i - \nabla_h \nabla_\ell T_i$ un tensore di tipo $(3, 0)$ si ha che

$$R^k_{ih\ell} := \frac{\partial \Gamma^k_{i\ell}}{\partial x^h} - \frac{\partial \Gamma^k_{ih}}{\partial x^\ell} + (\Gamma^r_{i\ell} \Gamma^k_{rh} - \Gamma^r_{ih} \Gamma^k_{r\ell}) \tag{3.20}$$

è un tensore di tipo $(3, 1)$, detto tensore di Riemann.

Abbiamo quindi trovato un tensore che si annulla se esiste un sistema di coordinate x_i rispetto al quale g_{ij} sono tutti costanti, ovvero, intuitivamente, se vi è assenza di curvatura. Lo spazio X si dice piatto se il tensore di Riemann $R^k_{ih\ell}$ è nullo; altrimenti lo spazio X si dice curvo.

Accenniamo a due importanti tensori utili nelle applicazioni. Con un'opportuna contrazione del tensore di Riemann si ottiene il tensore di Ricci dato da

$$R_{ij} = R^h_{ijh}.$$

Finalmente la curvatura scalare è data dall'invariante scalare

$$R = g^{ij} R_{ij}. \tag{3.21}$$

Concludiamo con un'interessante relazione che sussiste tra le componenti del tensore di Riemann. Sia dato un sistema di coordinate geodetiche x_i con polo nel punto P; allora in tale punto, dal momento che i simboli di Christoffel sono tutti nulli, si ha, dalla (3.20),

$$\nabla_s R^k_{ih\ell} = \frac{\partial R^k_{ih\ell}}{\partial x^s} = \frac{\partial^2 \Gamma^k_{i\ell}}{\partial x^s \partial x^h} - \frac{\partial^2 \Gamma^k_{ih}}{\partial x^s \partial x^\ell}.$$

Permutando ciclicamente gli indici e sommando si trova $\nabla_s R^k_{ih\ell} + \nabla_h R^k_{i\ell s} + \nabla_\ell R^k_{ish} = 0$. Tale equazione vale nel polo del sistema di coordinate geodetiche scelto e dunque, essendo una relazione tensoriale, vale in ogni sistema di coordinate; inoltre potendo scegliere come polo ogni punto di X tale equazione vale dappertutto in ogni sistema di coordinate. Si ha dunque in ogni punto di X la relazione

$$\nabla_s R^k_{ih\ell} + \nabla_h R^k_{i\ell s} + \nabla_\ell R^k_{ish} = 0 \tag{3.22}$$

detta anche identità di Bianchi.