

Capitolo 4

Relatività generale

La teoria della relatività generale (RG)¹ è una teoria della gravitazione. Essa è stata pubblicata da Einstein a partire dal 25 Novembre del 1915 e, oltre che essere tutt'ora la teoria di riferimento sulla gravitazione, è anche considerata una fra le più alte creazioni del pensiero umano di tutti i tempi.

La RG segue di ben dieci anni la pubblicazione della teoria della relatività ristretta (RR). Questo lungo lasso di tempo fu a causa della difficoltà matematica riscontrata da Einstein per dar corpo alla sua nuova visione dello spazio–tempo come di un continuum la cui metrica è influenzata dalle masse. Nell'Ottocento i concetti newtoniani di inerzia e gravitazione entrarono in crisi (Olbers, Mach). La cosmologia newtoniana, un universo infinito ed eterno, portava a contraddizioni e paradossi. Occorreva una nuova teoria della gravitazione che si collegasse anche alle nuove idee di spazio e tempo introdotte dalla RR. La RR ipotizza uno spazio–tempo pseudoeuclideo in assenza di campo gravitazionale in cui è possibile definire dei sistemi di riferimento inerziali (SRI) legati matematicamente fra loro dalle trasformazioni di Lorentz. Come introdurre in questo scenario anche un campo gravitazionale, creato da masse? L'idea di Einstein consiste nel fatto che le masse influenzano la metrica dello spazio–tempo per cui la metrica stessa cessa di essere pseudoeuclidea. In generale, quindi, il cronotopo potrebbe avere una metrica non pseudoeuclidea (i primi ad ipotizzare geometrie non euclidee furono Bolyai e Lobachevsky) ed il tipo di metrica è perciò passibile di indagine fisica e di verifica sperimentale. Questa idea, risalente a Riemann, costituisce un punto di rottura rispetto al passato. Una volta stabilito che il cronotopo può essere non pseudoeuclideo, occorre definire la matematica in grado di descriverlo ed in particolare occorre focalizzare l'attenzione sulle trasformazioni di coordinate al suo

¹Per non appesantire la trattazione con eccessivi tecnicismi di calcolo tensoriale, rischiando così di perdere di vista la linearità ed eleganza della teoria, nonché il suo senso fisico, qua e là si fa riferimento a formule consolidate senza riportarne la dimostrazione. Di tali formule verrà altresì fornito dettagliato riferimento bibliografico.

interno. Questo fatto è per continuità con la RR. La teoria matematica necessaria è quindi fornita proprio dal calcolo tensoriale sviluppato nel capitolo precedente.

4.1 Il principio di equivalenza

La RG si basa su un fatto sperimentale molto banale che è sotto gli occhi di tutti. Incredibilmente, una constatazione quasi elementare fu in grado di modificare profondamente le concezioni consolidate e radicate, apparentemente inamovibili, che si esprimono nella teoria della gravitazione universale di Newton.

La teoria della gravitazione universale di Newton (1687) è riassunta, per due punti materiali, dalla formula

$$F = G \frac{\mu_1 \mu_2}{r^2}$$

dove F è il modulo della forza gravitazionale, G è la costante di gravitazione universale, che vale circa $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$, μ_1 è la massa gravitazionale del primo punto materiale (diremo, quando conviene, anche corpo, grave o particella), μ_2 è la massa gravitazionale del secondo punto materiale ed r è la distanza fra i due punti materiali; il tutto è illustrato nella figura 4.1. Per il terzo principio

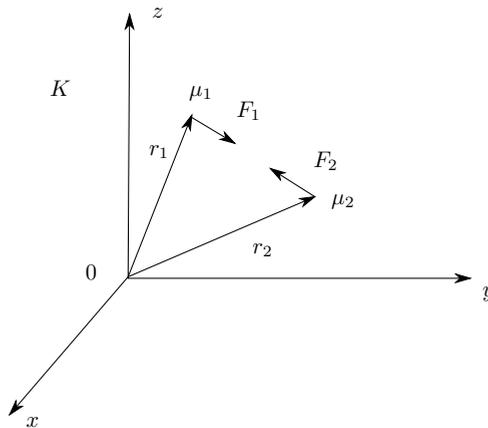


Figura 4.1: Attrazione newtoniana tra μ_1 e μ_2 .

della dinamica si ha $F_1 + F_2 = 0$; inoltre si ha $F = |F_1| = |F_2|$ e $r = |r_1 - r_2|$. Le accelerazioni subite dalle particelle, considerando che esse costituiscono un sistema

isolato, sono, in modulo, date da

$$\begin{cases} a_1 = \frac{F}{m_1} = G \frac{\mu_1 \mu_2}{m_1 r^2} \\ a_2 = \frac{F}{m_2} = G \frac{\mu_1 \mu_2}{m_2 r^2} \end{cases}$$

dove m_1 e m_2 sono le loro masse inerziali. Evidentemente, le accelerazioni dipendono sia dalle masse gravitazionali che dalle masse inerziali. Approfondiamo meglio questa affermazione. Supponiamo che sia $m_1 \ll m_2$. In questo caso l'accelerazione a_2 è trascurabile per cui la particella di massa gravitazionale μ_2 può, per comodità, essere considerata ferma rispetto al SRI K. Questa situazione è tipica del campo gravitazionale uniforme terrestre in cui la nostra esperienza quotidiana si esplica. Poniamoci allora nel campo gravitazionale uniforme terrestre e poniamo $\mu = \mu_1$, $m = m_1$, $a = a_1$, $\mu_T = \mu_2$ e $m_T = m_2$, dove T indica evidentemente il pianeta Terra; si veda in proposito la figura 4.2.

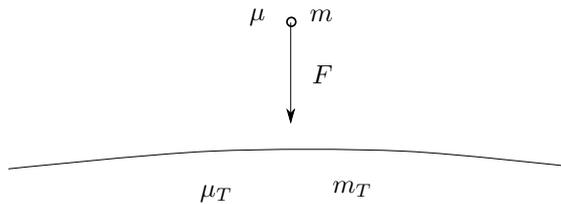


Figura 4.2: Forza di gravità.

Si ha quindi

$$a = \frac{F}{m} = G \frac{\mu}{m} \frac{\mu_T}{r^2} \quad (4.1)$$

dove qui r è la distanza del grave dal centro della Terra. Orbene, l'esperienza mostra che tutti i gravi cadono con la stessa accelerazione indipendentemente dalla loro massa inerziale (non considerando l'aria e la rotazione terrestre). Tale accelerazione è detta accelerazione di gravità ed è indicata solitamente con la lettera g : sul livello del mare vale $g \sim 9,8 \text{ m/s}^2$. La (4.1) diventa allora

$$g = G \frac{\mu}{m} \frac{\mu_T}{r^2} = \text{costante.}$$

Analizziamo il significato della costanza di g . Se g è costante, poiché μ_T è costante così come r , per cadute brevi, si ha di conseguenza che

$$\frac{\mu}{m} = k = \text{costante.} \quad (4.2)$$

La (4.2) esprime il fatto che la massa inerziale e quella gravitazionale sono proporzionali e questo fatto è stato verificato anche con esperimenti di grande precisione (Eötvös). Siccome all'interno della teoria newtoniana non è possibile definire il coefficiente di proporzionalità k fra massa inerziale e massa gravitazionale, possiamo supporre che si abbia $k = 1$. In questo modo massa inerziale e massa gravitazionale risultano equivalenti e possono essere indicate semplicemente con la parola massa. Questo è un principio di natura ed è chiamato *principio di equivalenza*. Esso è alla base della RG. Mentre per la teoria di Newton questo fatto è del tutto accidentale, per la RG è la chiave di volta dell'intera teoria.

Vediamo ora una conseguenza diretta del principio di equivalenza che può essere preso come formulazione analoga del suddetto principio e che costituisce, in quella forma, il punto di partenza della RG. Abbiamo visto che in un campo gravitazionale uniforme, come qui sulla superficie della Terra, i gravi cadono tutti con la stessa accelerazione indipendentemente dalla loro massa, non considerando l'aria e la rotazione terrestre. Consideriamo ora alcuni corpi dotati di masse diverse in quiete rispetto a un SRI K_0 ed introduciamo un secondo sistema di riferimento K_1 in moto uniformemente accelerato rispetto a K_0 con accelerazione g , come in figura 4.3. Come saranno visti i corpi rispetto al sistema di riferimento K_1 ? Evidentemente

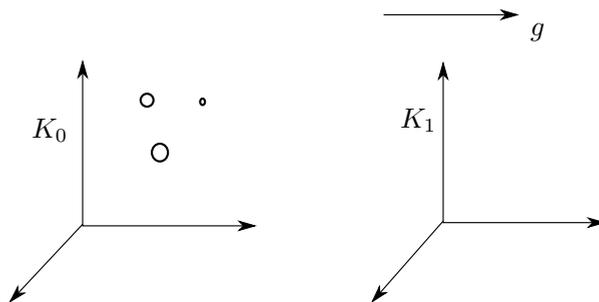


Figura 4.3: K_1 uniformemente accelerato con accelerazione g .

essi saranno visti da K_1 accelerare tutti, indipendentemente dalla loro massa, con accelerazione $-g$. Confrontando quest'ultima considerazione con quanto detto sopra, ovvero che i corpi cadono tutti con la stessa accelerazione indipendentemente dalla loro massa, possiamo esprimere il principio di equivalenza nel seguente modo: "un campo gravitazionale uniforme è equivalente ad un sistema di riferimento accelerato". Seguendo il principio di equivalenza così formulato possiamo descrivere localmente un campo gravitazionale qualunque rappresentandolo con un sistema di riferimento accelerato. Questa descrizione, non essendo in termini di forze, trasforma la fisica della gravitazione in geometria. Questa constatazione è alla base concettuale della RG.

4.2 Il campo gravitazionale g_{ij}

L'affermazione: “un campo gravitazionale uniforme è equivalente ad un sistema di riferimento uniformemente accelerato” può essere generalizzata nell'affermazione: “un campo gravitazionale è equivalente ad un sistema di riferimento non inerziale”. Possiamo allora considerare il cronotopo in cui è presente un campo gravitazionale come uno spazio quadridimensionale la cui metrica è descritta dal tensore metrico g_{ij} . Denotiamo tale spazio con \mathbb{E}^4 ; la lettera \mathbb{E} ricorda Einstein. In questo modo \mathbb{E}^4 e cronotopo coincidono e lo scopo della RG è quello di definire e studiare \mathbb{E}^4 tramite la sua metrica g_{ij} . Diremo perciò, in modo molto incisivo, che la metrica di \mathbb{E}^4 è influenzata, disturbata, dal campo gravitazionale. Il tensore metrico sostanzialmente coincide con il campo gravitazionale stesso.

Per chiarire il fatto fondamentale che la metrica può non essere euclidea riportiamo il seguente esperimento ideale, dovuto ad Einstein stesso. Consideriamo un sistema di riferimento inerziale K ed un secondo sistema di riferimento K' non inerziale in rotazione uniforme rispetto a K . Consideriamo anche una circonferenza solidale con K come in figura 4.4. Rispetto a K il rapporto fra la circonferenza

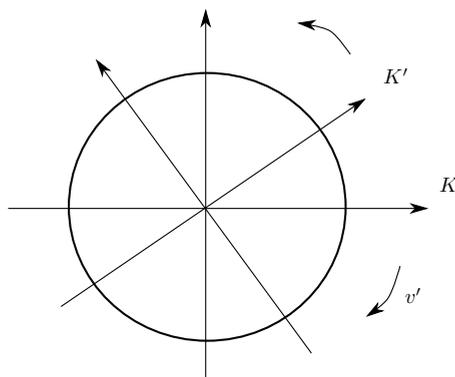


Figura 4.4: Sistema K' in rotazione.

in quiete ed il suo diametro è π . Rispetto a K' che ruota in senso antiorario la circonferenza viene vista ruotare in senso orario. Ogni piccolo segmento della circonferenza viene visto da K' muoversi con una certa velocità v' . In un certo istante ogni piccolo segmento di cui è formata la circonferenza viene visto contrarsi rispetto a K' secondo la legge della contrazione di Lorentz per cui il rapporto fra circonferenza e diametro è, rispetto a K' , diverso da π , poiché il diametro non subisce la contrazione di Lorentz, dal momento che non si muove rispetto a K' nel senso della sua lunghezza. Con questo semplice esempio si dimostra che lo spazio rispetto ad un sistema di riferimento accelerato non è euclideo, in quanto

non valgono più le regole della geometria euclidea. La metrica g_{ij} oggetto della RG è quindi pseudoriemanniana e questo sarà chiarito in seguito.

La RG è una teoria classica, non quantistica, per cui non considera la materia come costituita da atomi. La materia, per la RG, è distribuita in modo continuo nello spazio e questo non costituisce in generale una limitazione alla teoria, non prendendo in considerazione gli atomi, perché, essendo la gravità una forza molto debole, la più debole presente in natura, la scala di applicazione della RG, per avere forze apprezzabili, è molto grande. Si hanno però fondamentali eccezioni a questa impostazione per esempio nei buchi neri e nelle fasi iniziali dell'universo, secondo il modello del big bang. In tali situazioni, data l'enorme densità della materia che in quei casi si verifica, la struttura discontinua della stessa gioca un ruolo fondamentale assieme alla gravitazione. In quelle situazioni estreme tutte le interazioni fondamentali, gravitazione, forza elettrodebole e nucleare, si fondono in un *unicum* la comprensione del quale costituisce la scommessa attuale della fisica. La RG vale quindi solo se si può trascurare la natura quantistica della realtà. Una teoria quantistica della gravitazione, tutt'ora in fase di realizzazione, deve superare la grande difficoltà concettuale e matematica nel fondere assieme la visione classica, prettamente basata sulla continuità, con la visione quantistica, discontinua per definizione. Noi, qui, presenteremo la RG nella sua formulazione classica di Einstein con alcuni successivi sviluppi essi stessi, però, sulla stessa linea di classicità. Per quanto riguarda il campo elettromagnetico, non ce ne occuperemo se non in casi particolari e lo considereremo sempre debole, quindi non in grado di influenzare la metrica. Un'influenza del campo elettromagnetico sulla metrica si potrebbe avere a causa della relazione $E = mc^2$. Il campo elettromagnetico possiede una energia intrinseca che corrisponde ad una certa massa la quale, se non trascurabile, dovrebbe influenzare la metrica. Noi non seguiremo questa linea di ragionamenti.

4.2.1 L'elemento lineare

L'elemento ds della metrica di \mathbb{E}^4 è dato da $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$. Denoteremo le coordinate di un punto di \mathbb{E}^4 con (x^0, x^1, x^2, x^3) , avendo indicato con x^0 la coordinata temporale mentre con x^1, x^2, x^3 le coordinate spaziali. Se

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

si ha l'usuale SRI della RR. Chiameremo galileiano un tale sistema di riferimento, ovvero con metrica (4.3) in un certo sistema di coordinate, dette cartesiane, e indicheremo la metrica galileiana con $g_{ij}^{(0)}$. Fisicamente un sistema galileiano si ha quando il campo gravitazionale è assente e si prende un SRI come in RR. Per questo è evidente che la RR risulta così un caso particolare della RG. Sia $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^0, x^1, x^2, x^3)$ la generica trasformazione ammissibile di coordinate $(x^0, x^1, x^2, x^3) \mapsto (\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$.

Le componenti del tensore metrico g_{ij} si trasformano, come sappiamo grazie alla legge (3.2), nelle componenti \bar{g}_{ij} date da

$$\bar{g}_{ij} = \frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} g_{hk}.$$

Ebbene, se esiste una trasformazione di coordinate $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^0, x^1, x^2, x^3)$ per cui si ottenga in ogni punto la metrica galileiana, allora diremo che tale metrica, e, più propriamente, il relativo spazio, è piatto. Altrimenti, diremo che la metrica, e, più propriamente, il relativo spazio, è curvo (si dimostra che tale definizione è equivalente alla definizione di spazio piatto/curvo data in termini del tensore di Riemann). In RG la scelta di un sistema di coordinate x^i per \mathbb{E}^4 è del tutto arbitraria, e ciò vale, ben inteso, anche per la coordinata temporale x^0 , la quale può essere definita in qualsiasi modo.

4.2.2 Il principio di relatività generale

Tutti i sistemi di coordinate di \mathbb{E}^4 sono perciò equivalenti e le leggi della fisica devono avere una forma matematica invariante rispetto ad una qualsiasi trasformazione di coordinate in \mathbb{E}^4 . Questa affermazione va sotto il nome di *principio di relatività generale* ed è una logica estensione del principio di relatività ristretta. È evidente che le leggi della fisica debbano quindi essere espresse nella forma tensoriale

$$T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = 0. \quad (4.4)$$

Se il tensore $T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ è nullo in un dato sistema di coordinate, lo sarà anche, a causa delle note formule di trasformazione dei tensori, in qualunque altro sistema di coordinate. In questo modo la forma (4.4) di una legge fisica rimane invariata.

4.3 Proprietà generali di \mathbb{E}^4

In RG, come già sappiamo, la scelta di un sistema di coordinate x^i per \mathbb{E}^4 è del tutto arbitraria. Come allora riferirsi alla realtà fisica? Che proprietà generali dovrà avere il tensore metrico g_{ij} in modo che tale ente abbia senso fisico e rappresenti un campo gravitazionale reale? Vediamo di puntualizzare alcune proprietà generali di \mathbb{E}^4 .

4.3.1 Struttura pseudoriemanniana di \mathbb{E}^4

La forma quadratica $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ che definisce la metrica di \mathbb{E}^4 non è a priori definita positiva né negativa, per cui, come prima ipotesi basterebbe solo che sia $\det(g_{ij}) \neq 0$. Una conseguenza di questo è che l'elemento ds^2 può essere nullo anche per eventi non coincidenti o addirittura negativo. Diciamo quindi che \mathbb{E}^4 è uno spazio pseudoriemanniano.

Poiché in assenza di campo gravitazionale la metrica può essere trasformata nella galileiana $g_{ij}^{(0)}$, ed essendo per tale metrica $\det(g_{ij}^{(0)}) = -1$, porremo, per continuità con la RR, $\det(g_{ij}) < 0$ ovunque. L'elemento volumetrico di \mathbb{E}^4 è quindi dato da

$$\sqrt{-\det(g_{ij})}d\Omega$$

dove $d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$. Esso è un invariante rispetto ad una trasformazione di coordinate.

4.3.2 Il principio di equivalenza forte

Dato un qualsiasi punto P di \mathbb{E}^4 è sempre possibile scegliere un sistema di coordinate localmente galileiane, altrimenti dette localmente inerziali o localmente geodetiche, tali per cui valga $g_{ij}(P) = g_{ij}^{(0)}$ e $\Gamma_{ij}^k(P) = 0$, essendo Γ_{ij}^k i simboli di Christoffel della metrica. Ciò discende dall'esistenza delle coordinate geodetiche: infatti basterà prima di tutto rendere galileiano il tensore metrico nel punto P mediante un opportuno cambiamento di coordinate, e quindi poi cambiare tale sistema di coordinate nel sistema di coordinate geodetiche. Il principio secondo cui sia sempre possibile trovare un sistema galileiano centrato in un qualsiasi punto di \mathbb{E}^4 è anche chiamato *principio di equivalenza forte*, in aggiunta al principio di equivalenza mostrato in precedenza, detto debole, e corrisponde fisicamente alla possibilità di annullare localmente un campo gravitazionale. La realizzazione fisica di un tale sistema di coordinate localmente galileiano può avvenire scegliendo un sistema di punti materiali in caduta libera nel campo gravitazionale, come i celebri ascensori di Einstein.

4.3.3 Tempo proprio

In RG la scelta della coordinata temporale x^0 è arbitraria. Sorge allora il problema di come tale coordinata sia legata al tempo reale fisico. Per capire questo legame consideriamo la linea d'universo

$$\gamma = (x^0, x^1 = \text{costante}, x^2 = \text{costante}, x^3 = \text{costante})$$

che parte da P . Questa linea corrisponde allo stare fermi in un dato punto (x^1, x^2, x^3) dello spazio e lasciare scorrere il tempo x^0 . Costruiamo ora un sistema di riferimento localmente galileiano $(\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ con centro in P tale per cui la linea $\Gamma = (\bar{x}^0, 0, 0, 0)$ sia tangente in P alla linea γ . Possiamo perciò scrivere lungo γ partendo da P l'elemento lineare

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = g_{ij}^{(0)}d\bar{x}^i d\bar{x}^j.$$

Essendo $dx^1 = dx^2 = dx^3 = d\bar{x}^1 = d\bar{x}^2 = d\bar{x}^3 = 0$ avremo allora

$$g_{00}(dx^0)^2 = (d\bar{x}^0)^2. \tag{4.5}$$

In un sistema galileiano vale $\bar{x}^0 = c\tau$, dove la variabile τ indica il tempo reale fisico, detto tempo proprio, per cui la (4.5) diventa $g_{00}(dx^0)^2 = c^2d\tau^2$ da cui si ricava infine

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}dx^0. \quad (4.6)$$

Questa è la formula cercata che lega la coordinata temporale x^0 con il tempo proprio. Si noti subito che, perché un sistema di coordinate di \mathbb{E}^4 abbia senso fisico, occorre che si abbia $g_{00} > 0$. Se questo non si verifica per un certo sistema di coordinate, si potrà sempre, con una opportuna trasformazione, ottenere che tale condizione sia soddisfatta. Il significato fisico del fatto che il tempo x^0 non corrisponde in generale al tempo proprio può essere chiarito nel seguente modo. Prendiamo i punti spaziali A e B e poniamo in essi due orologi ideali come in figura 4.5: fisicamente potrebbero essere due orologi atomici perché il loro scandire il tempo praticamente non risente della gravità. I due orologi segnano il tempo proprio dei due punti spaziali A e B indipendentemente l'uno dall'altro. Secondo

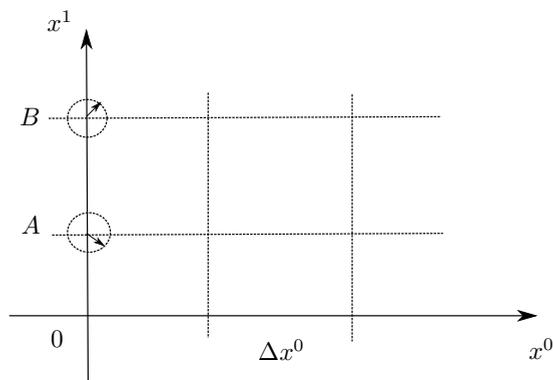


Figura 4.5: Orologi nei punti spaziali A e B .

la (4.6), poiché g_{00} dipende in generale da tutte le coordinate, risulta chiaro che un medesimo intervallo Δx^0 corrisponde a diversi intervalli di tempo proprio in A e B . In linea di principio, in RG, si suppone che ogni punto spaziale sia dotato di uno specifico orologio ideale che segni il tempo proprio di quel punto.

4.3.4 Eventi collegati da un raggio di luce

Consideriamo gli eventi $P = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ e $Q = (x^0 + dx^0, x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$ di \mathbb{E}^4 supponendo che siano collegati da un raggio di luce. Questo significa che da P parte un raggio di luce che poi raggiunge Q . Se introduciamo un sistema localmente galileiano con centro in P , dotato delle coordinate $(\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$

e dell'usale metrica $g_{ij}^{(0)}$, possiamo scrivere

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = g_{ij}^{(0)} d\bar{x}^i d\bar{x}^j.$$

D'altra parte, dalla RR sappiamo che in un sistema galileiano per due eventi collegati da un raggio di luce si ha $\Delta s = 0$, dove Δ indica una variazione finita. Possiamo perciò affermare che due eventi infinitamente vicini collegati da un raggio di luce forniscono sempre, per ogni sistema di coordinate, $ds = 0$. Questo risultato di grande importanza rappresenta una logica generalizzazione di ciò che avviene in RR.

4.3.5 Intervallo spaziale

La distanza spaziale reale (fisica) fra due eventi infinitamente vicini potrebbe essere calcolata, in analogia con quanto fatto per ricavare l'intervallo di tempo proprio, ponendo $dx^0 = 0$, cioè considerando gli eventi (x^0, x^1, x^2, x^3) e $(x^0 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$. Questo però non ha senso in RG a causa dell'arbitrarietà di x^0 e deve essere usato il tempo proprio. Per calcolare l'intervallo spaziale reale, fisico, fra due eventi useremo convenientemente la luce come illustrato nella figura 4.6. Un raggio di luce parte dal punto A' , raggiunge il punto B' e viene riflesso

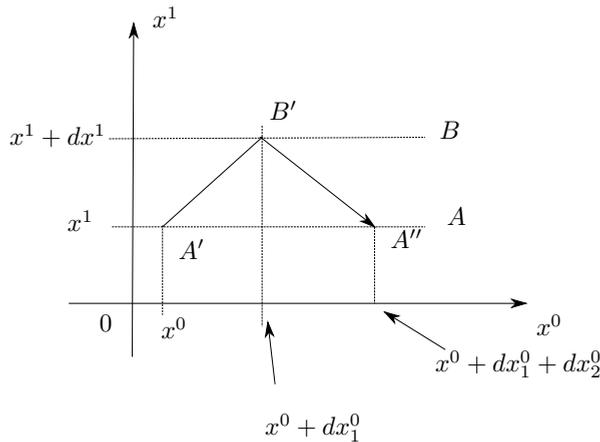


Figura 4.6: Intervallo spaziale.

pervenendo infine in A'' . Naturalmente A' e A'' sono eventi che avvengono in uno stesso punto spaziale A in tempi diversi, mentre B' è un evento che avviene nel punto spaziale B . I punti spaziali A e B sono infinitamente vicini. Possiamo allora scrivere

$$A' \rightarrow B' : \quad ds^2 = g_{00}(dx_1^0)^2 + 2g_{01}dx_1^0 dx^1 + g_{11}(dx^1)^2 = 0 \quad (4.7)$$

$$B' \rightarrow A'' : ds^2 = g_{00}(dx_2^0)^2 - 2g_{01}dx_2^0dx^1 + g_{11}(dx^1)^2 = 0 \quad (4.8)$$

$$A' \rightarrow A'' : d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}(dx_1^0 + dx_2^0). \quad (4.9)$$

Dalle (4.7) e (4.8) ricaviamo

$$dx_1^0 = \frac{-g_{01}dx^1 \pm dx^1\sqrt{g_{01}^2 - g_{00}g_{11}}}{g_{00}} \quad (4.10)$$

e

$$dx_2^0 = \frac{g_{01}dx^1 \pm dx^1\sqrt{g_{01}^2 - g_{00}g_{11}}}{g_{00}} \quad (4.11)$$

da cui, scegliendo opportunamente i segni, si ottiene

$$dx_1^0 + dx_2^0 = \frac{2dx^1\sqrt{g_{01}^2 - g_{00}g_{11}}}{g_{00}}.$$

Sostituendo, la (4.9) diventa

$$d\tau = \frac{2dx^1\sqrt{g_{01}^2 - g_{00}g_{11}}}{c\sqrt{g_{00}}}.$$

A questo punto, definiamo ragionevolmente l'intervallo spaziale $d\ell$ come

$$d\ell = \frac{cd\tau}{2}$$

per cui otteniamo direttamente

$$d\ell = dx^1\sqrt{\frac{g_{01}^2 - g_{00}g_{11}}{g_{00}}}$$

da cui

$$d\ell^2 = \left(-g_{11} + \frac{g_{01}^2}{g_{00}}\right)(dx^1)^2.$$

Generalizzando in quattro dimensioni si ottiene

$$d\ell^2 = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}\right)dx^\alpha dx^\beta.$$

Questo è l'elemento di distanza spaziale cercato; d'ora in poi indicheremo con lettere greche gli indici delle coordinate spaziali (x^1, x^2, x^3). Se poniamo

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}$$

si ricava

$$d\ell^2 = \gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta. \quad (4.12)$$

Il tensore simmetrico $\gamma_{\alpha\beta}$ descrive la metrica dello spazio tridimensionale fisico e per questo la forma quadratica (4.12) deve essere definita positiva. Questo, come si sa, si verifica se e solo se

$$\gamma_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{vmatrix} > 0.$$

Queste condizioni implicano poi che

$$\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \det(g_{ij}) < 0.$$

Ritroviamo così la nota condizione sul determinante di g_{ij} oltre a nuove condizioni che il tensore metrico deve soddisfare per aderire alla realtà fisica. Poiché in generale tutte le componenti di g_{ij} sono funzione della variabile temporale x^0 (che è arbitraria), la metrica $\gamma_{\alpha\beta}$ non può essere usata in linea di principio per misurare lunghezze finite dello spazio, ma solo lunghezze infinitesime. Perché la (4.12) possa essere usata per misurare lunghezze finite occorre in generale che le g_{ij} non dipendano da x^0 . In questo caso la metrica spaziale, non dipendendo dal tempo, ha senso su scala macroscopica.

4.3.6 Simultaneità

In meccanica classica si ipotizza un tempo universale unico per cui due eventi, se avvengono nel medesimo istante, sono simultanei per tutti i SRI. In RR ogni SRI ha il proprio tempo. Rispetto ad un SRI due eventi sono simultanei se avvengono nello stesso istante segnato dall'orologio solidale con quel SRI. Per SRI diversi la simultaneità è regolata dalle trasformazioni di Lorentz. Come abbiamo già visto, due eventi che accadono simultaneamente in punti diversi di un dato SRI non sono più simultanei se visti rispetto ad un altro SRI. In RG, invece, ogni punto spaziale ha il proprio tempo τ misurato da un orologio ideale posto in esso. La coordinata temporale x^0 è arbitraria e la relazione fra tempo proprio e coordinata temporale è definita dalla (4.6). In questo quadro, in RG il concetto di simultaneità è quindi ancora più problematico e deve essere definito localmente. Anche qui usiamo un raggio di luce per definire la simultaneità fra due eventi. Un raggio di luce parte dal punto A' , giunge in B' e, riflesso, perviene in A'' (figura 4.7). Consideriamo nel punto spaziale A l'evento A''' il cui tempo x^0 è esattamente intermedio fra i tempi di A' e A'' . Si ha allora

$$A''' = \left(x^0 + \frac{dx_1^0 + dx_2^0}{2}, x^1 \right)$$

mentre le coordinate di B' sono date da $(x^0 + dx_1^0, x^1 + dx^1)$. Orbene, definiamo simultanei gli eventi A''' e B' . Le coordinate temporali di A''' e B' sono

sono quindi da prediligersi. Mostriamo, nel caso in cui sia $g_{0\alpha} = 0$, con l'aiuto della figura 4.8 come si caratterizzano eventi simultanei dove A, B, C, D, \dots sono

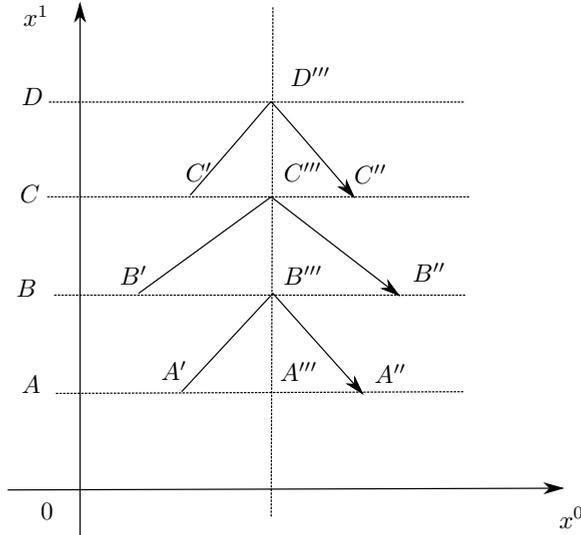


Figura 4.8: Caratterizzazione eventi simultanei.

punti spaziali infinitamente vicini e gli eventi simultanei che avvengono nell'istante x^0 sono evidentemente $A''', B''', C''', D''', \dots$. Consideriamo, in un sistema per cui $g_{0\alpha} = 0$, gli eventi A', A'', B', B'' non infinitamente vicini, né nello spazio né nel tempo, rappresentati dalla figura 4.9. Gli eventi A' e B' sono simultanei così come lo sono gli eventi A'' e B'' . A causa della (4.6), però, gli intervalli di tempo proprio $\Delta\tau_A$ e $\Delta\tau_B$ sono in generale diversi. L'intervallo di tempo proprio fra due eventi che avvengono nello stesso punto spaziale è in generale diverso dall'intervallo di tempo proprio fra due eventi simultanei ai precedenti che avvengono in un altro punto spaziale.

4.3.7 Sistemi sincroni

Un sistema di coordinate di \mathbb{E}^4 per cui valga $g_{00} = 1$ e $g_{0\alpha} = 0$ si dice sincrono. In questo caso si ha

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ 0 & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ 0 & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

e

$$ds^2 = (dx^0)^2 - \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

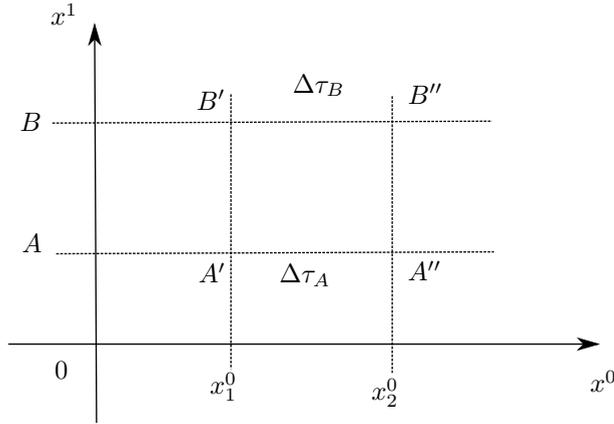


Figura 4.9: Eventi simultanei con intervalli di tempo proprio diverso.

e, poiché qui vale $d\tau = \frac{1}{c}dx^0$, il tempo proprio coincide, a meno di costanti, col tempo x^0 per cui possiamo scrivere $x^0 = ct$, avendo posto $t = \tau$. L'elemento ds^2 per i sistemi sincroni è quindi

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$$

I sistemi sincroni, proprio per il fatto che in essi tempo proprio e coordinata temporale x^0 coincidono, rivestono un ruolo di grande importanza in RG.

4.3.8 Campi costanti

Se \mathbb{E}^4 è dotato di un tensore metrico g_{ij} le cui componenti non dipendono dalla coordinata temporale x^0 si dice che siamo in presenza di un campo gravitazionale costante ed il tempo x^0 è chiamato universale. Se inoltre si ha $g_{0\alpha} = 0$, il campo è detto statico. Un campo costante per cui non vale $g_{0\alpha} = 0$ è detto stazionario.

4.4 Moto in un campo gravitazionale

Consideriamo una particella di massa m posta in un campo gravitazionale g_{ij} . La massa m sia piccola così da non influire sul campo gravitazionale dato. L'azione per tale particella dovrà essere invariante per trasformazioni delle coordinate. Come in RR essa dovrà essere

$$S = -mc \int_{AB} ds$$

dove A e B sono due eventi di \mathbb{E}^4 e l'integrazione è eseguita lungo una linea d'universo che congiunge i suddetti punti (naturalmente, lungo tale linea, ds deve essere di genere tempo). Il principio di minima azione per una particella è quindi espresso dalla

$$\delta S = \delta \int_{AB} ds = 0.$$

L'integrale $\int_{AB} ds$ è la lunghezza, nella data metrica, di una linea d'universo fra gli eventi A e B . La particella, nel suo moto nel campo gravitazionale fra A e B , percorrerà quindi una linea di lunghezza estrema. Una tale linea è una geodetica di \mathbb{E}^4 per cui le equazioni del moto della particella si riducono alle equazioni delle geodetiche

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (4.13)$$

Se $\Gamma_{jk}^i = 0$, allora si ottengono le equazioni $\frac{d^2 x^i}{ds^2} = 0$ che rappresentano le equazioni del moto di una particella libera in RR, come è giusto che sia.

Per quanto riguarda il moto della luce in un campo gravitazionale la (4.13) non può essere usata perché per la propagazione di un raggio di luce vale $ds = 0$ in ogni suo punto. La luce percorre, come si dice, delle linee geodetiche nulle. Nel caso in cui il campo sia statico, cioè quando le componenti di g_{ij} non dipendono esplicitamente dalla coordinata temporale x^0 , e vale $g_{0\alpha} = 0$, il problema della propagazione della luce può essere risolto dal principio variazionale

$$\delta \int_{AB} dl = 0$$

dove A e B qui sono punti spaziali e (vedi (4.12)) $dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$, essendo $\gamma_{\alpha\beta}$ il tensore metrico spaziale tridimensionale, che ricordiamo essere definito nel presente caso da $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}$. La luce, quindi, in accordo con il principio di Fermat, percorre, in un campo statico, cammini di lunghezza spaziale estrema. Per il moto della luce non prenderemo in considerazione campi non statici.

4.5 Equazioni del campo gravitazionale

Siamo qui giunti al punto cruciale di tutta la teoria: la definizione delle equazioni del campo gravitazionale contenente la materia. Fino ad ora il campo g_{ij} era dato a priori e di esso abbiamo visto alcune proprietà generali nonché come le particelle e la luce vi si muovono. Ora dobbiamo trovare il legame fra la materia ed il campo, dobbiamo trovare perciò come la materia crea il campo gravitazionale. Partiamo da questa idea: la materia crea il campo ed il campo influenza la materia nel suo moto. In base a questo concetto, la descrizione del campo gravitazionale e della materia contenuta in esso deve essere completa. Ciò costituisce una differenza metodologica

rilevante fra la teoria del campo elettromagnetico di Maxwell e la RG. Risolvendo le equazioni del campo gravitazionale si deve pervenire contemporaneamente alla conoscenza del tensore g_{ij} e della distribuzione della materia nonché del suo moto. Queste ultime informazioni sono contenute nel tensore energia-impulso della materia T_{ij} (vedi appendice A) che viene ad assumere per questo un ruolo fondamentale al pari del tensore metrico². Introduciamo l'azione totale del campo gravitazionale e della materia

$$S = S_g + S_m$$

dove, appunto, S_g è l'azione del campo e S_m quella della materia. Per il principio di minima azione si deve avere

$$\delta S = \delta S_g + \delta S_m = 0.$$

Poniamo

$$\delta S_m = \frac{1}{2c} \int T_{ij} \delta g^{ij} \sqrt{-g} d\Omega, \quad (4.14)$$

dove $g = \det(g_{ij})$, $d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ (per cui $\sqrt{-g}d\Omega$ è l'elemento volumetrico di \mathbb{E}^4) e l'integrale è eseguito nel volume di \mathbb{E}^4 compreso fra le ipersuperfici $x^0 = x_A^0$ e $x^0 = x_B^0$. Definiamo ora l'azione del campo S_g e la sua variazione δS_g . Poniamo

$$S_g = k \int R \sqrt{-g} d\Omega$$

dove k è una costante, R è la curvatura scalare definita come in (3.21) e l'integrale è eseguito nel volume di cui sopra. Evidentemente S_g è uno scalare invariante per trasformazioni arbitrarie di coordinate come è giusto che sia. Eseguiamo la variazione di S_g . Ricordando che $R = g^{ij} R_{ij}$ dove R_{ij} è il tensore di Ricci, si ha

$$\begin{aligned} \delta S_g &= k \delta \int R \sqrt{-g} d\Omega = k \delta \int g^{ij} R_{ij} \sqrt{-g} d\Omega \\ &= k \int \delta g^{ij} R_{ij} \sqrt{-g} d\Omega + k \int g^{ij} \delta R_{ij} \sqrt{-g} d\Omega + k \int g^{ij} R_{ij} \delta \sqrt{-g} d\Omega. \end{aligned}$$

Considerando la formula (vedi [5] pag. 318)

$$\delta g = g g^{ij} \delta g_{ij} = -g g_{ij} \delta g^{ij},$$

si ricava

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ij} \delta g^{ij}$$

²In realtà, per una effettiva descrizione completa della distribuzione della materia e del suo moto, occorre tenere conto dell'equazione di stato della materia che lega pressione, densità e temperatura. Tale equazione va aggiunta alle equazioni del campo gravitazionale. Nelle applicazioni usuali della RG, tuttavia, ci si limita ad introdurre relazioni semplici (approssimate) fra densità della materia e pressione. Per i nostri scopi, non approfondiremo queste problematiche.

per cui si ottiene

$$\delta S_g = k \int \left(R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \right) \delta g^{ij} \sqrt{-g} d\Omega + k \int g^{ij} \delta R_{ij} \sqrt{-g} d\Omega.$$

Si può dimostrare che $\int g^{ij} \delta R_{ij} \sqrt{-g} d\Omega = 0$ (vedi [5], pagg. 360-361) mentre la costante k è definita come

$$k = -\frac{c^3}{16\pi G},$$

essendo G la costante di gravitazione universale. L'annullamento dell'azione totale, del campo e della materia, diventa così:

$$\delta S = -\frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \right) \delta g^{ij} \sqrt{-g} d\Omega + \frac{1}{2c} \int T_{ij} \delta g^{ij} \sqrt{-g} d\Omega = 0$$

da cui

$$-\frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R - \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} \right) \delta g^{ij} \sqrt{-g} d\Omega = 0.$$

poiché le δg^{ij} sono arbitrarie si ottiene

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2, 3. \quad (4.15)$$

Queste sono le equazioni del campo gravitazionale e della materia cercate e sono le equazioni fondamentali della RG. Esse sono chiamate equazioni di Einstein. Usando gli indici misti si ha

$$R_i^j - \frac{1}{2} \delta_i^j R = \frac{8\pi G}{c^4} T_i^j. \quad (4.16)$$

Se il tensore energia-impulso è nullo, cioè $T_{ij} = 0$, si deduce (vedi la successiva formula (4.17)) che deve essere $R_{ij} = 0$. L'annullarsi del tensore di Ricci non è però condizione sufficiente perché il cronotopo sia piatto. Condizione necessaria e sufficiente perché il cronotopo sia piatto è che sia nullo il tensore di Riemann (vedi [5] pag. 342). Il tensore

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R$$

è detto tensore di Einstein per cui l'equazione (si usa anche il singolare) di Einstein diventa sinteticamente

$$G_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}.$$

Nelle componenti miste, il tensore di Einstein vale

$$G_i^j = R_i^j - \frac{1}{2} \delta_i^j R$$

e l'equazione di Einstein risulta

$$G_i^j = \frac{8\pi G}{c^4} T_i^j.$$

Il tensore della materia, come sappiamo, deve soddisfare l'equazione di conservazione (A.2) in appendice A, ovvero

$$\nabla_j T_i^j = 0.$$

Per il tensore di Einstein deve quindi valere

$$\nabla_j G_i^j = 0$$

Questa fondamentale proprietà caratterizza il tensore di Einstein e conferma la scelta della (4.14). Essa è dimostrabile direttamente tramite la formula (vedi [5], pag. 345) data da

$$\nabla_j R_i^j = \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x^i}.$$

Contraendo gli indici nella (4.16) si ottiene

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4} T,$$

dove $T = T_i^i$. L'equazione di Einstein può dunque essere scritta anche nella forma

$$R_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T \right). \quad (4.17)$$

4.6 Limite classico

Non appena ricavate le equazioni del campo (4.15) occorre verificare se, eseguendo il limite classico, esse forniscono l'equazione di Newton del campo gravitazionale. Il limite classico in RG consiste nel considerare un campo gravitazionale debole e, di conseguenza, velocità delle particelle piccole. Scriviamo allora la lagrangiana classica di una particella in un campo gravitazionale come

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - m\phi$$

dove $\phi(x^1, x^2, x^3)$ è il potenziale non relativistico di un campo costante e la particella ha massa così piccola da non influenzare il campo. Sommiamo ad essa, per convenienza (l'aggiunta alla lagrangiana di un termine costante non modifica le equazioni del moto), la costante $-mc^2$ ottenendo così

$$L = -mc^2 + \frac{1}{2} m v^2 - m\phi. \quad (4.18)$$

L'azione classica di una particella è data da

$$S = \int_{t_A}^{t_B} L dt, \quad (4.19)$$

mentre ricordiamo che l'azione relativistica è data da

$$S = -mc \int_{AB} ds,$$

essendo l'integrale eseguito fra due eventi A e B . Confrontiamo le due azioni. Sostituendo la (4.18) nella (4.19) si ottiene

$$S = \int_{t_A}^{t_B} \left(-mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 - m\phi \right) dt = -mc \int_{t_A}^{t_B} \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c} \right) dt.$$

Il limite classico consiste allora nell'uguaglianza

$$ds = \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c} \right) dt.$$

Elevando al quadrato e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore (per $c \rightarrow +\infty$), si ottiene

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c} \right)^2 dt^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) c^2 dt^2 - v^2 dt^2 \\ &= \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \end{aligned}$$

A questo ds^2 corrisponde il tensore metrico

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2\phi}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che può essere considerato il tensore metrico del limite classico. Naturalmente, anche le componenti $g_{\alpha\beta}$ subiscono correzioni del medesimo ordine, cioè $\frac{1}{c^2}$, rispetto alla metrica galileiana, ma il presente metodo non è in grado di valutarle.

Ricaviamo ora la componente G_{00} del tensore di Einstein per il suddetto tensore metrico. Un calcolo diretto (eseguito utilizzando il programma Tensori (vedi appendice B)) fornisce per i simboli di Christoffel non nulli le seguenti quantità:

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{c^2 + 2\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^1}, \quad \Gamma_{02}^0 = \Gamma_{20}^0 = \frac{1}{c^2 + 2\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^2}$$

$$\Gamma_{03}^0 = \Gamma_{30}^0 = \frac{1}{c^2 + 2\phi} \frac{\partial\phi}{\partial x^3}, \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial x^1}$$

$$\Gamma_{00}^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial x^2}, \quad \Gamma_{00}^3 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial x^3}.$$

Per la componente R_{00} del tensore di Ricci, trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, si ha

$$R_{00} = \frac{1}{c^2} \Delta\phi \quad (4.20)$$

e per la curvatura scalare (trascurando gli infinitesimi di ordine superiore) si ha

$$R = \frac{2}{c^2 + 2\phi} \Delta\phi.$$

Per la prima componente del tensore di Einstein si ottiene infine $G_{00} = 0$. Questo risultato nullo dipende dal fatto che non abbiamo introdotto correzioni per le $g_{\alpha\beta}$. Occorre seguire quindi un'altra via. Usiamo l'equazione di Einstein nella forma (4.17), e supponiamo che R_{00} sia effettivamente approssimato dalla (4.20). Si ottiene quindi

$$R_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T \right). \quad (4.21)$$

Valutiamo ora il tensore dell'energia-impulso T_{ij} nel limite classico rifacendoci alla formula (A.3) in appendice A. Ponendo la pressione $p = 0$ e $\varepsilon = \mu c^2$, essendo μ la densità di materia, si ha

$$T_{ij} = \mu c^2 u_i u_j.$$

Poiché il moto della materia è da considerarsi lento, poniamo $u_0 = 1$ e $u_\alpha = 0$. Si avrà allora $T_{00} = T = \mu c^2$. La (4.21) diventa perciò

$$\frac{1}{c^2} \Delta\phi = \frac{8\pi G}{c^4} \left(\mu c^2 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) \mu c^2 \right)$$

da cui

$$\Delta\phi = 8\pi G\mu \left(\frac{1}{2} - \frac{\phi}{c^2} \right)$$

ed infine, trascurando il termine $\frac{\phi}{c^2}$, si ottiene

$$\Delta\phi = 4\pi G\mu.$$

Questa è l'equazione del campo gravitazionale classico in termini di potenziale da cui deriva direttamente la formula della forza gravitazionale di Newton. Il limite classico qui mostrato giustifica anche la scelta della costante k introdotta durante la deduzione delle equazioni di Einstein (vedi sezione 4.5).

4.7 Metrica di Schwarzschild

Il campo gravitazionale più semplice, così come nella teoria classica di Newton, è quello generato da una massa puntiforme. Un campo analogo può essere creato da una distribuzione di masse a simmetria centrale. Si tratta quindi di un campo statico a simmetria centrale la cui metrica ds fu trovata per primo da Schwarzschild nel 1916. Ci proponiamo, in questa sezione, di determinare tale metrica che costituisce un caso di fondamentale importanza in RG.

Consideriamo un sistema di coordinate sferiche (x^1, x^2, x^3) di \mathbb{R}^3 definite dalla trasformazione

$$f: \begin{cases} y^1 = x^1 \sin x^2 \cos x^3 \\ y^2 = x^1 \sin x^2 \sin x^3 \\ y^3 = x^1 \cos x^2 \end{cases}$$

dove $x^1 = r$, $x^2 = \theta$ e $x^3 = \varphi$, come in figura 4.10 poiché

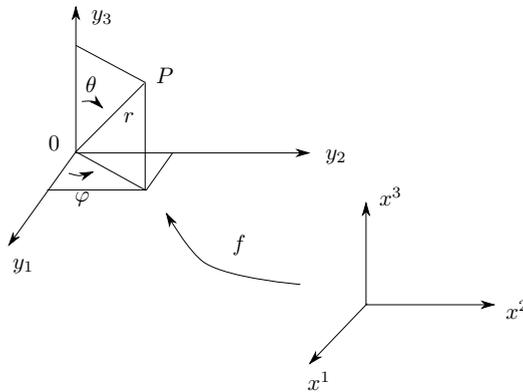


Figura 4.10: Sistema di coordinate sferiche.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta) \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} &= (-r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, 0) \end{aligned}$$

l'elemento $d\ell^2$ di \mathbb{R}^3 in coordinate sferiche vale $d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$ ed il tensore metrico vale

$$\gamma_{\alpha\beta}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Consideriamo ora una massa puntiforme M posizionata nell'origine 0 . Essa, come afferma la RG, perturba la metrica del cronotopo rendendolo non euclideo. Il tensore metrico del campo statico a simmetria centrale prodotto dalla massa M dovrà allora avere la forma

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} a(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 c(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 d(r) \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

dove $a(r)$, $b(r)$, $c(r)$ e $d(r)$ sono funzioni da determinare. La scelta delle componenti g_{ij} è dettata dal fatto che in un campo statico non deve essere presente esplicitamente la variabile temporale x^0 e deve essere $g_{0\alpha} = 0$. Inoltre, all'infinito, dove la metrica ritorna ad essere euclidea, $g_{\alpha\beta}$ deve eguagliare $-\gamma_{\alpha\beta}^{(0)}$. Infine la simmetria centrale impone che le funzioni a, b, c, d dipendano solo da r . L'elemento ds^2 è quindi dato da

$$ds^2 = a(r)c^2 dt^2 - b(r)dr^2 - r^2 c(r)d\theta^2 - r^2 d(r) \sin^2 \theta d\varphi^2$$

dove vale $x^0 = ct$. Il tensore metrico g_{ij} mantiene la proprietà di simmetria centrale richiesta ma la coordinata r non è più il raggio vettore in senso euclideo. Per dare un senso euclideo ad r imporremo che ogni circonferenza di centro 0 abbia lunghezza $2\pi r$. Per fare questo poniamo $\theta = \frac{\pi}{2}$, r e t costanti; l'elemento di lunghezza sarà allora $d\ell = r\sqrt{d(r)}d\varphi$. Integrando, affinché la circonferenza sia lunga $2\pi r$ deve essere $r\sqrt{d(r)}2\pi = 2\pi r$ da cui $d(r) = 1$. Facendo la stessa cosa ponendo φ costante si ottiene $c(r) = 1$. Il tensore metrico risulta così dato da

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} a(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

e l'elemento ds^2 di conseguenza sarà

$$ds^2 = a(r)c^2 dt^2 - b(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Un calcolo diretto (eseguito con il programma Tensori (vedi appendice B)) fornisce per i simboli di Christoffel non nulli i seguenti valori:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \frac{a'}{2a}, & \Gamma_{00}^1 &= \frac{a'}{2b} \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{b'}{2b}, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{r}{b}, & \Gamma_{33}^1 &= -\frac{r \sin^2 \theta}{b} \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

dove con l'apice si indica la derivata rispetto ad r . Le componenti non nulle del tensore di Ricci risultano di conseguenza (ottenute ancora con il programma di cui sopra)

$$R_{00} = \frac{a''}{2b} - \frac{a'}{4b}(\log(ab))' + \frac{a'}{rb}, \quad R_{11} = -\frac{a''}{2a} + \frac{a'^2}{4a^2} + \frac{a'b'}{4ab} + \frac{b'}{rb}$$

$$R_{22} = 1 - \frac{1}{b} + \frac{r}{2b} \left(\log \left(\frac{b}{a} \right) \right)', \quad R_{33} = \sin^2 \theta \left(1 - \frac{1}{b} + \frac{r}{2b} \left(\log \frac{b}{a} \right)' \right).$$

Nel vuoto, fuori dalla massa che crea il campo, deve essere $R_{ij} = 0$. Avremo quindi il sistema di equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a''}{2b} - \frac{a'}{4b}(\log(ab))' + \frac{a'}{rb} = 0 \\ -\frac{a''}{2a} + \frac{a'^2}{4a^2} + \frac{a'b'}{4ab} + \frac{b'}{rb} = 0 \\ 1 - \frac{1}{b} + \frac{r}{2b} \left(\log \frac{b}{a} \right)' = 0 \\ \sin^2 \theta \left(1 - \frac{1}{b} + \frac{r}{2b} \left(\log \frac{b}{a} \right)' \right) = 0. \end{array} \right. \quad (4.22)$$

Cerchiamo ora la funzione a della forma

$$a = 1 + \frac{\alpha}{r}.$$

Questa scelta è coerente col fatto che per r grande la metrica deve diventare galileiana. Sostituendo l'espressione di a nella prima equazione del sistema (4.22) si ottiene

$$b = \frac{\beta}{1 + \frac{\alpha}{r}}$$

dove β è un'altra costante da determinare. Sostituendo a e b nella terza equazione del sistema (4.22) si ricava $\beta = 1$. Le funzioni a e b risultano quindi

$$a = 1 + \frac{\alpha}{r}, \quad b = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{r}}.$$

Si dimostra immediatamente che esse soddisfano la seconda equazione del sistema (4.22). Questo significa che a e b sono effettivamente le soluzioni di (4.22) (si osservi

che la quarta equazione equivale alla terza). Rimane perciò da definire solamente la costante α e per far questo utilizzeremo il limite classico (per r grandi). Secondo tale limite si deve avere

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$$

dove ϕ è il potenziale gravitazionale classico (newtoniano). Il potenziale newtoniano generato dalla massa puntiforme M , come è noto, è dato da

$$\phi = -G \frac{M}{r}.$$

Dovendo essere

$$1 + \frac{\alpha}{r} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$$

si ricava

$$\alpha = -\frac{2GM}{c^2}.$$

Il valore

$$r_g := \frac{2GM}{c^2}$$

è detto raggio gravitazionale e le funzioni a e b si esprimono di conseguenza come

$$a = 1 - \frac{r_g}{r}, \quad b = \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}$$

che hanno l'andamento riportato in figura 4.11. Con queste posizioni la metrica ds^2 di Schwarzschild vale

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (4.23)$$

essendo il relativo tensore metrico

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{r_g}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Osservando questo risultato si vede subito che, perché la metrica abbia senso fisico, deve essere

$$g_{00} = 1 - \frac{r_g}{r} > 0. \quad (4.24)$$

Con tale posizione si ha $\det(g_{ij}) < 0$ come è giusto che sia. La (4.24) è vera per $r > r_g$. Questa condizione sulla metrica è di importanza capitale; essa fu compresa appieno solo molti anni dopo (collasso gravitazionale, buchi neri).

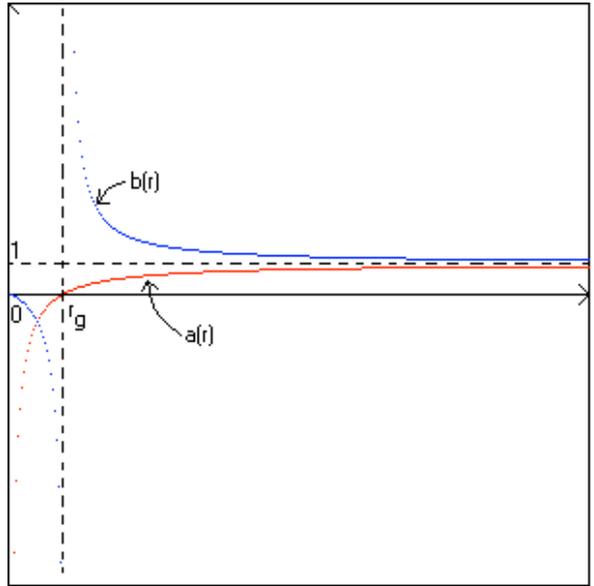


Figura 4.11: Le funzioni $a(r)$ e $b(r)$.

4.8 Moto di una particella nella metrica di Schwarzschild

I simboli di Christoffel non nulli della metrica (4.23) sono dati da

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^1 = \frac{r_g}{2r(r - r_g)}, \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{r_g(r - r_g)}{2r^3}$$

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{r_g}{2r(r - r_g)}, \quad \Gamma_{22}^1 = -(r - r_g), \quad \Gamma_{33}^1 = -(r - r_g) \sin^2 \theta$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.$$

Consideriamo una particella di massa trascurabile, tale da non disturbare il campo, e studiamone il moto nella presente metrica. Come sappiamo la particella segue la geodetica di equazioni

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds}, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

A causa della simmetria centrale del campo il moto della particella avviene su un piano; non perdiamo di generalità quindi se poniamo $\theta = \frac{\pi}{2}$. Con questa posizione le equazioni delle geodetiche forniscono

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{t} + \frac{r_g}{r(r-r_g)} \dot{t}\dot{r} = 0 \\ \ddot{r} + \frac{c^2 r_g (r-r_g)}{2r^3} \dot{t}^2 - \frac{r_g}{2r(r-r_g)} \dot{r}^2 - (r-r_g) \dot{\varphi}^2 = 0 \\ \ddot{\varphi} + \frac{2}{r} \dot{r}\dot{\varphi} = 0 \end{array} \right. \quad (4.25)$$

con le condizioni iniziali

$$\left\{ \begin{array}{ll} t_0 = t(0), & \dot{t}_0 = \dot{t}(0) \\ r_0 = r(0), & \dot{r}_0 = \dot{r}(0) \\ \varphi_0 = \varphi(0), & \dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}(0) \end{array} \right.$$

dove con il punto indichiamo la derivata rispetto ad s .

La caratteristica saliente delle soluzioni periodiche ($r_{min} < r < r_{max}$) delle (4.25) è che, diversamente da come succede nella teoria newtoniana (prima legge di Keplero), si tratta di traiettorie aperte per le quali i punti con $\dot{r} = 0$ si hanno per angoli che differiscono di $\Delta\varphi > 2\pi$ e una maggiore variazione da 2π si verifica tanto più si è vicini alla massa che genera il campo. Una simulazione con il programma Moto di una particella nella metrica di Schwarzschild (vedi appendice B) lo mostra chiaramente. La figura 4.12 illustra il grafico di (φ, r) mentre la figura 4.13 illustra il grafico di $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Questa particolarità della metrica di Schwarzschild costituisce una delle prove classiche a favore della RG, riportata dallo stesso Einstein. In natura il fenomeno è evidentemente meglio osservabile dove il campo è particolarmente forte, per esempio in prossimità del sole. È chiaro quindi che il pianeta Mercurio, più degli altri del sistema solare, dovrebbe mostrare tale fenomeno con uno spostamento apprezzabile del perielio (o afelio). Uno spostamento (precessione) del perielio di Mercurio era già noto agli astronomi dell'Ottocento, ma la sua entità non era pienamente spiegabile. Anche introducendo noti fenomeni quali le perturbazioni degli altri pianeti e la non perfetta sfericità del Sole, 43 secondi di grado per secolo del totale della precessione osservata non trovavano spiegazione nell'ambito della teoria newtoniana. Fu anche proposta l'esistenza di un ulteriore pianeta fra il Sole e Mercurio, chiamato Vulcano, che però non fu mai trovato. È solo con la RG che la discrepanza in questione trova una spiegazione coerente³.

Valutiamo $\Delta\varphi$ per l'orbita di Mercurio utilizzando il suddetto programma con i dati, in unità del S.I., riportati della tabella 4.1.

³I fenomeni di spostamento del perielio nella metrica di Schwarzschild sono rappresentabili

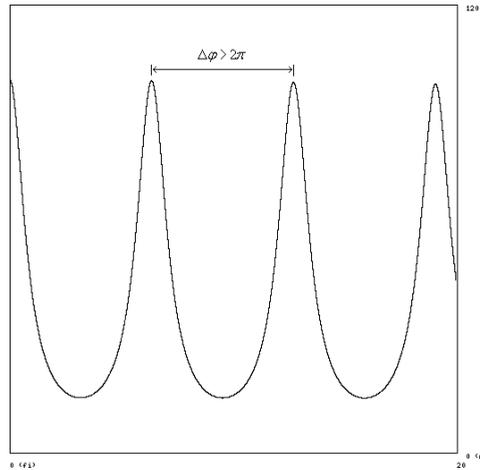


Figura 4.12: Grafico di (φ, r) .

Con tali dati in un tempo macchina di 1 ora circa (Intel(R) Pentium(R) IV, 3 GHz) il programma fornisce il valore

$$\Delta\varphi = 6.28318586046$$

da cui $\Delta\varphi - 2\pi = 5.53285254057 \cdot 10^{-7}$. Questo valore corrisponde a circa 47 secondi di grado per secolo. Il risultato ottenuto è da considerarsi migliorabile aumentando la precisione delle costanti e dei valori iniziali, la precisione della macchina nonché aumentando il numero di iterazioni N e diminuendo il valore ds .

4.9 Propagazione della luce nella metrica di Schwarzschild

La propagazione della luce nella metrica di Schwarzschild riveste un ruolo di particolare importanza nella RG, ruolo che si potrebbe definire paradigmatico. Prima di procedere nell'analisi di tale propagazione, dobbiamo fare qualche considerazione basilare sulle caratteristiche della coordinata temporale $x^0 = ct$.

Poiché il campo è costante, cioè il tensore metrico non contiene esplicitamente la coordinata x^0 , t rappresenta il tempo universale del sistema (per comodità, tralasciamo la costante moltiplicativa c). Inoltre, poiché $g_{0\alpha} = 0$, con $\alpha = 1, 2, 3$,

tramite note formule ampiamente riscontrabili e ben descritte nella letteratura. Essendo la loro deduzione matematica altresì piuttosto complessa, si è preferito non presentarle qui prediligendo soluzioni numeriche.

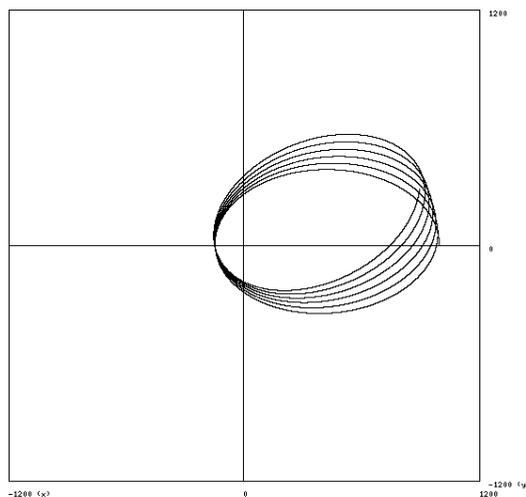


Figura 4.13: Grafico di $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$.

gli orologi sono sincronizzabili, ovvero tutti gli eventi con lo stesso valore di t sono da considerarsi simultanei. Il tempo universale t , però, non coincide con il tempo proprio τ . Infatti si ha

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dx^0 = \sqrt{g_{00}} dt = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} dt.$$

Quando $\frac{r_g}{r} \rightarrow 0$, ovvero per $r \gg r_g$, cioè quando il campo tende ad essere piatto, tempo universale e tempo proprio tendono a coincidere, cioè si viene ad avere $dt = d\tau$. Per questo motivo, un $d\tau$ che avviene in un certo punto spaziale con coordinata r viene visto all'infinito durare un intervallo di tempo proprio

$$\frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}}. \quad (4.26)$$

Dalla formula precedente si deduce che tanto più il $d\tau$ avviene vicino a r_g (con $r > r_g$), quanto più esso sarà visto durare in termini di tempo proprio da un osservatore all'infinito. Un orologio posto vicino a r_g , quindi, se confrontato con un orologio posto all'infinito, apparirà avanzare più lentamente tanto più esso (il primo orologio) è posto vicino a r_g . Questo è un risultato molto importante ed è analogo a quanto avviene in RR con velocità tendenti a c .

Per studiare la propagazione della luce, consideriamo due casi: propagazione radiale (rispetto al centro del campo in cui è posta la massa puntiforme M) e caso

Tabella 4.1: Dati per Mercurio.

costante di gravitazione universale	$G = 6.67428 \cdot 10^{-11}$
velocità della luce nel vuoto	$c = 2.99792458 \cdot 10^8$
massa del sole	$M = 1.9891 \cdot 10^{30}$
valori iniziali per t	$t_0 = 0, \dot{t}_0 = 1/c = 3.33564095198 \cdot 10^{-9}$
valori iniziali per r in afelio	$r_0 = 6.981806568 \cdot 10^{10}, \dot{r}_0 = 0$
velocità orbitale in afelio	$v_0 = 3.886 \cdot 10^4$
valori iniziali per φ in perielio	$\varphi_0 = 0, \dot{\varphi}_0 = v_0/r_0 c = 1.8565826213 \cdot 10^{-15}$
incremento s per iterazione	$ds = 10^7$
numero iterazioni programma	$N = 24 \cdot 10^7$

generale. Il primo caso è facilmente risolvibile analiticamente mentre per il secondo presenteremo un'approssimazione numerica.

4.9.1 Propagazione radiale

Consideriamo un raggio di luce in direzione radiale, per esempio ponendo

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \text{costante} \quad (4.27)$$

fra i due punti A e B individuati da r_A e r_B , con $r_A < r_B$, come in figura 4.14. Poniamo anche la condizione $r > r_g$. Come già mostrato nella sezione 4.4 la propagazione della luce soddisfa l'eguaglianza $ds = 0$ per cui la (4.23), tenendo conto delle posizioni (4.27), fornisce direttamente

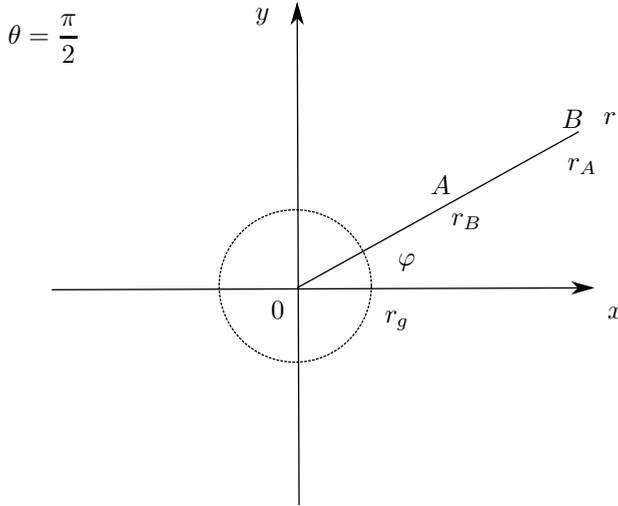
$$\dot{r} = \pm c \frac{r - r_g}{r}$$

dove il segno $+$ vale se la luce va da A a B ed il segno $-$ vale se la luce va da B ad A . Integrando elementarmente, con $r > r_g$, si ottiene

$$t = \pm \frac{r}{c} \pm \frac{r_g}{c} \log(r - r_g) + k,$$

dove k è la costante di integrazione. Supponiamo ora che dal punto A partano due raggi di luce, che chiamiamo raggio₁ e raggio₂, verso B , rispettivamente agli istanti universali t_{A1} e t_{A2} , con $t_{A1} < t_{A2}$. I due raggi raggiungeranno B agli istanti universali t_{B1} e t_{B2} . Tutto ciò è rappresentabile dal grafico (r, t) dato dalla figura 4.15. Le equazioni orarie dei due raggi, rispettivamente per raggio₁ e raggio₂, sono

$$t = \frac{r}{c} + \frac{r_g}{c} \log(r - r_g) + k_1, \quad t = \frac{r}{c} + \frac{r_g}{c} \log(r - r_g) + k_2$$

**Figura 4.14:** Raggio di luce in direzione radiale.

dove

$$k_1 = t_{A1} - \frac{r_A}{c} - \frac{r_g}{c} \log(r_A - r_g), \quad k_2 = t_{A2} - \frac{r_A}{c} - \frac{r_g}{c} \log(r_A - r_g).$$

Poniamo

$$\Delta t_A = t_{A2} - t_{A1}, \quad \Delta t_B = t_{B2} - t_{B1}.$$

Evidentemente si ha $\Delta t_A = \Delta t_B$. Per i tempi propri abbiamo

$$\Delta \tau_A = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r_A}} \Delta t_A, \quad \Delta \tau_B = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r_B}} \Delta t_B.$$

Si ricava quindi

$$\Delta \tau_B = \frac{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r_B}}}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r_A}}} \Delta \tau_A.$$

L'intervallo di tempo proprio $\Delta \tau_B$ risulta quindi tanto maggiore di $\Delta \tau_A$ quanto più r_A è vicino a r_g . Se $r_B \rightarrow +\infty$, coerentemente con la (4.26), si ottiene più semplicemente

$$\Delta \tau_B = \frac{\Delta \tau_A}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r_A}}}.$$

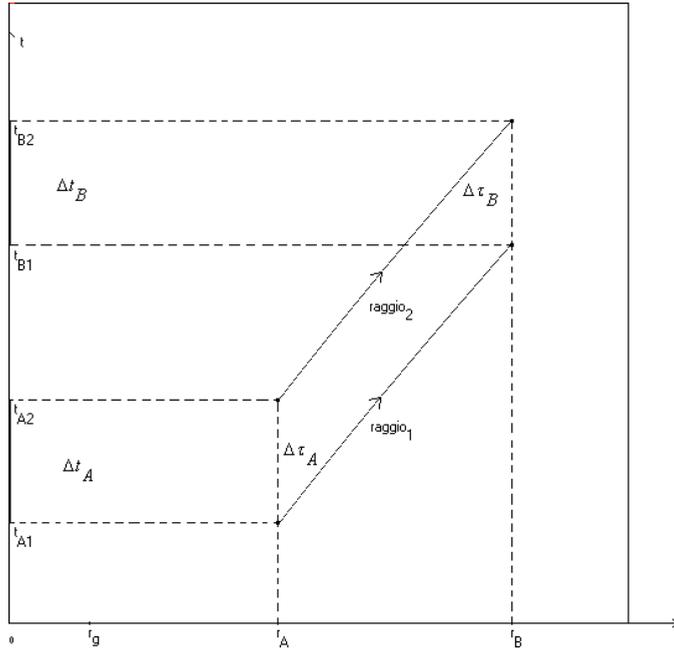


Figura 4.15: Raggi di luce emessi da A.

Questo risultato ha un importante significato e fornisce la spiegazione del fenomeno dello spostamento verso il rosso gravitazionale (*gravitational red shift*). Se il campo è creato da una stella con alta densità di materia, la frequenza ν di una riga di emissione viene vista da un osservatore all'infinito con frequenza minore (luce più rossa). Infatti, l'emissione di una riga di frequenza ν in A (sulla superficie della stella) può essere considerata equivalente all'emissione di due raggi di luce in due istanti di tempo proprio distanti $\Delta\tau_A = \frac{1}{\nu_A}$. In B avremo allora $\Delta\tau_B = \frac{1}{\nu_B}$ da cui

$$\nu_B = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r_A}} \nu_A.$$

Dalla formula si deduce che più la stella è densa, a parità di massa, più r_A è prossimo a r_g e di conseguenza più ν_B appare rossa.

Studiamo ora le proprietà di un raggio di luce che parte da B al tempo universale t_B propagandosi verso A, sempre radialmente. La sua equazione oraria è data da

$$t = -\frac{r}{c} - \frac{r_g}{c} \log(r - r_g) + k$$

dove

$$k = t_B + \frac{r_B}{c} + \frac{r_g}{c} \log(r_B - r_g).$$

La luce raggiunge A all'istante universale

$$t_A = -\frac{r_A}{c} - \frac{r_g}{c} \log(r_A - r_g) + k.$$

La dipendenza dell'istante t_A da r_A è tale per cui

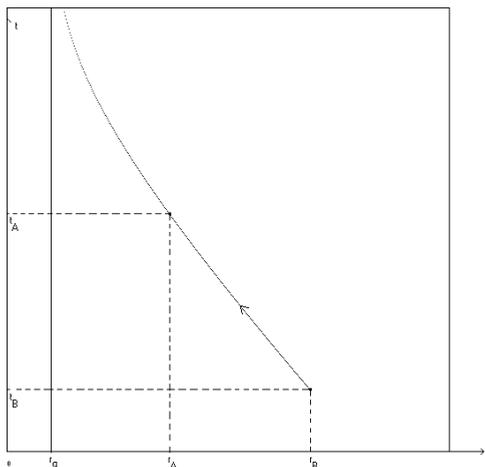


Figura 4.16: Comportamento per $r_A \rightarrow r_g$.

$$r_A \rightarrow r_g \Rightarrow t_A \rightarrow +\infty$$

come illustra la figura ???. Questo importante risultato, fondamentale per la teoria dei buchi neri, significa che un raggio di luce che si dirige radialmente verso il centro di gravità viene visto raggiungere la distanza r_g dal centro medesimo in un tempo infinito.

4.9.2 Caso generale

Consideriamo la propagazione della luce in una qualunque direzione, sempre nel caso $r > r_g$. Questo caso generale, anch'esso di importanza capitale in RG, non produce una soluzione analitica come nel precedente caso radiale. Essendo la metrica di Schwarzschild statica, la traiettoria di un raggio di luce può essere

supposta, in accordo con il principio di Fermat, coincidere con una geodetica dello spazio tridimensionale di coordinate (r, θ, φ) dotato del tensore metrico

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

che corrisponde all'elemento lineare

$$d\ell^2 = \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Essendo al solito $x^1 = r$, $x^2 = \theta$ e $x^3 = \varphi$, i simboli di Christoffel non nulli (calcolati utilizzando il programma Tensori (vedi appendice B)) sono dati da

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{r_g}{2r(r - r_g)}, \quad \Gamma_{22}^1 = -(r - r_g), \quad \Gamma_{33}^1 = -(r - r_g) \sin^2 \theta$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.$$

Le equazioni delle geodetiche

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds}, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

dove s è un parametro qualunque (in quanto qui le geodetiche sono quelle dello spazio tridimensionale e non sono le equazioni del moto della luce), assieme alle condizioni $\theta = \frac{\pi}{2}$ e φ costante, forniscono il sistema

$$\begin{cases} \ddot{r} = \frac{r_g}{2r(r - r_g)} \dot{r}^2 + (r - r_g) \dot{\varphi}^2 \\ \ddot{\varphi} = -\frac{2}{r} \dot{r} \dot{\varphi} \end{cases} \quad (4.28)$$

con le condizioni iniziali

$$\begin{cases} r_0 = r(0), & \dot{r}_0 = \dot{r}(0) \\ \varphi_0 = \varphi(0), & \dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}(0) \end{cases}$$

dove, come al solito, con il punto indichiamo la derivata rispetto ad s . Poniamo per comodità $\dot{r}_0 = 0$ e $\dot{\varphi}_0 = 0$. La propagazione di un raggio di luce presenta la fondamentale proprietà di deviare dalla direzione rettilinea e questa particolarità

costituisce una ulteriore prova classica a favore della RG, prevista dallo stesso Einstein e verificata da Eddington durante l'eclisse totale del 29 maggio 1919. Questa deviazione tende a divenire sempre più piccola quanto più r è grande perché, lontano dal centro, il campo tende a diventare galileiano. Il fenomeno, altrimenti detto anche *gravitational lensing*, sta assumendo un ruolo sempre maggiore in cosmologia ed in astronomia (per esempio anche nella ricerca dei pianeti extrasolari).

Presentiamo infine alcune simulazioni con il programma Propagazione della luce nella metrica di Schwarzschild (vedi appendice B) in cui r_0 viene fatto progressivamente avvicinare a r_g ⁴. Si noti, nelle immagini che seguono, il progressivo “avvitarsi” del raggio di luce attorno al cerchio gravitazionale.

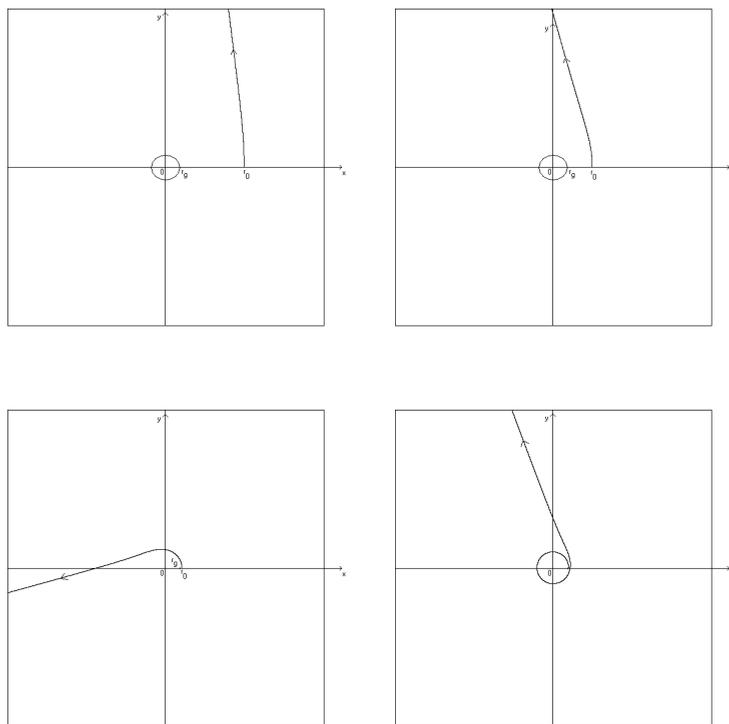


Figura 4.17: Avvitamento del raggio di luce attorno al cerchio gravitazionale

⁴ Anche nel caso della deviazione dei raggi di luce nella metrica di Schwarzschild le note formule si trovano ben descritte nella letteratura, per cui preferiamo non presentarle qui prediligendo soluzioni numeriche.

4.10 Sviluppi attuali della teoria

La presente introduzione alla teoria della relatività, in particolare alla RG, è stata impostata con finalità prettamente propedeutiche. I semplici, schematici ed essenziali concetti fin qui mostrati hanno lo scopo di fornire al lettore quegli strumenti minimi di base necessari per eventualmente approfondire i vasti ed ancora aperti sviluppi della teoria. Una teoria fisica deve spiegare i fenomeni già noti e ne deve prevedere altri in precedenza ignoti: una teoria è tanto migliore, quanto più prevede nuovi fenomeni! Abbiamo mostrato come la meccanica classica (compresa la gravitazione newtoniana) e la teoria del campo elettromagnetico di Maxwell sono contenute come caso limite nella teoria della relatività (RR + RG). Abbiamo mostrato anche alcuni effetti non previsti dalle vecchie teorie sia legati alla RR (contrazioni e dilatazioni di spazio e tempo ecc.) che alla RG (red shift gravitazionale, *gravitational lensing*, ecc.), ma i nuovi fenomeni e sviluppi più interessanti (legati alla RG), non previsti dalle vecchie teorie, che costituiscono oggetto di prolifici e prorompenti attuali e futuri sviluppi, sono principalmente i seguenti: onde gravitazionali, buchi neri, cosmologia, unificazione. Descriviamoli brevemente; per maggiori dettagli si veda la bibliografia riportata.

4.10.1 Onde gravitazionali

Già previste da Einstein, costituiscono l'unico effetto della RG non ancora verificato sperimentalmente a causa della loro debolezza. Solo catastrofici eventi cosmici, come l'esplosione di una stella massiccia o la collisione fra buchi neri (e quindi che accadono raramente nello spazio non troppo lontano da noi), possono generare onde gravitazionali captabili dai nostri strumenti. Un'onda gravitazionale è una perturbazione del campo gravitazionale. Il caso più semplice è un'onda gravitazionale debole sulla metrica galileiana $g_{ij}^{(0)}$. Sia data la metrica

$$g_{ij} = g_{ij}^{(0)} + h_{ij}$$

dove il tensore h_{ij} descrive appunto una piccola perturbazione della metrica galileiana. Se le h_{ij} sono piccole, non è difficile dimostrare che nel vuoto vale l'equazione

$$\square h_{ij} = 0$$

dove l'operatore d'alembertiano in coordinate cartesiane risulta essere dato da

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Naturalmente, l'equazione

$$\square h_{ij} = 0$$

esprime il fatto che la perturbazione h_{ij} si comporta come un'onda che si propaga nel vuoto alla velocità della luce c . Questo risultato è di fondamentale importanza

perché, in analogia con il campo elettromagnetico, ribadisce la natura di campo di g_{ij} ed è coerente con il principio per cui c è la velocità massima raggiungibile in natura.

4.10.2 Buchi neri (black holes)

Il significato fisico del raggio gravitazionale $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ presente nella metrica di Schwarzschild fu compreso pienamente solo molto tempo dopo la scoperta della suddetta metrica. La superficie sferica di raggio r_g è detta orizzonte degli eventi e costituisce un limite invalicabile per la materia e la luce che si trova al suo interno: esse non possono uscirne. La metrica di Schwarzschild perde significato fisico se $r < r_g$: infatti diventa $g_{00} < 0$. Questo fatto è aggirabile scegliendo un opportuno sistema di riferimento per cui non si abbia la singolarità $r = r_g$. L'analisi di tali metriche conduce appunto all'imprevisto fatto che materia e luce possono solo entrare all'interno dell'orizzonte degli eventi senza però più uscirne. Per esempio, per una massa come quella della Terra vale $r_g = 0.9$ cm e per una massa come quella del Sole vale $r_g = 3$ km. Esistono corpi contenuti completamente all'interno del proprio orizzonte degli eventi? La risposta è affermativa (Oppenheimer, Snyder, 1939) e tali corpi si chiamano buchi neri, proprio perché non emettono luce. Una stella sufficientemente massiccia, terminato l'idrogeno che ne costituisce il carburante nucleare, muore, cioè entra in una complessa fase caratterizzata da numerose trasformazioni. Nell'ultima fase, durante il collasso gravitazionale a cui la stella morente va incontro, se la sua massa è sufficientemente grande, la materia della stella viene drammaticamente (tale processo avviene velocemente coinvolgendo enormi energie) a trovarsi all'interno dell'orizzonte degli eventi e nasce un buco nero. I buchi neri possono essere ruotanti e dotati di campo elettrico e magnetico per cui le loro metriche risultano di conseguenza più complesse della metrica di Schwarzschild. Inoltre, raggiungendosi densità enormi, in un buco nero la meccanica quantistica, che descrive il comportamento delle particelle, diventa non più trascurabile (come per la materia poco densa) e l'equazione gravitazionale di Einstein non è più sufficiente a descrivere la realtà delle cose. Addirittura, a causa degli effetti quantistici, un buco nero dovrebbe emettere (Hawking, 1974), anche se lentamente, materia ed energia per cui, in realtà, si dovrebbe parlare di buchi grigi. Lo studio dei buchi neri costituisce perciò un campo della fisica aperto ed estremamente fecondo in cui le due grandi teorie, la teoria della relatività da una parte e la meccanica quantistica dall'altra, così profondamente diverse e fra loro non comunicanti, giocano un ruolo paritetico e ci spingono a ricercare una nuova teoria che le contenga come casi limite (vedi sezione 4.10.4).

4.10.3 Cosmologia

L'equazione gravitazionale di Einstein è in grado di descrivere l'intero universo semplicemente ponendo delle condizioni di omogeneità ed isotropia. Questo è

possibile perché, anche se localmente l'universo è disomogeneo ed anisotropo, su larga scala esso sembra omogeneo ed isotropo. La cosmologia, grazie alla RG, diventa così una branca della fisica estremamente dinamica, prolifica ed in continuo sviluppo. Si può dire essa costituisca uno dei due attuali maggiori campi di ricerca (l'altro è l'ambito delle particelle). La cosmologia newtoniana è, d'altro canto, inadatta a fornire previsioni sull'universo su larga scala perché porta ad insanabili contraddizioni, oltre all'assenza del concetto di campo. Fra tutte, va menzionato il paradosso di Olbers secondo il quale un universo euclideo newtoniano non dovrebbe permettere notti buie. Nel 1917, Einstein stesso si rese pienamente conto di come la cosmologia poteva essere rifondata su basi relativistiche e cominciò subito a lavorare ai possibili modelli cosmologici coerenti con le proprie equazioni gravitazionali. Egli, sulla base dei propri convincimenti filosofici, propose un modello statico in cui lo spazio è finito ed illimitato (analogo, in due dimensioni, ad una superficie sferica). Inoltre, per ottenere soluzioni statiche, a causa della gravità che è attrattiva, corresse la propria equazione introducendo la costante cosmologica Λ , da aggiungere in modo opportuno all'azione del campo. L'equazione gravitazionale diventa perciò

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij} + \Lambda g_{ij}.$$

Tale equazione presenta soluzioni stazionarie. Nel 1922 Friedman trovò delle soluzioni non stazionarie per $\Lambda = 0$ e nel 1924 Hubble scoprì che l'universo non coincideva con la sola nostra galassia, la Via Lattea. Hubble comprese che molte altre galassie simili alla nostra, in realtà, popolavano l'universo! Hubble spiegò anche il già noto spostamento verso il rosso dello spettro delle galassie (red shift cosmologico) in termini di espansione dell'universo (in analogia con l'effetto Doppler). Le soluzioni di Friedman, quindi, erano coerenti con le evidenze sperimentali. Einstein, allora, rinunciò al proprio modello stazionario (ed alla costante cosmologica Λ) dichiarando che ciò fu l'errore più grande della sua vita! L'universo appare quindi non stazionario ed attualmente in espansione. Come era allora l'universo nel passato? Come sarà nel futuro? Se l'universo si sta espandendo, allora, in un remoto passato, esso poteva essere altamente denso e concentrato. Questa considerazione porta all'ipotesi del big bang (Lemaitre, 1931, l'atomo primordiale) successivamente sviluppata da Gamow. Hoyle (1948), in alternativa, introduceva un modello stazionario ma in espansione ipotizzando la creazione continua della materia (così da rendere la densità della materia costante pur nell'espansione). A fare propendere per l'ipotesi del big bang fu però la successiva scoperta della radiazione cosmica di fondo, detta anche fossile, da parte di Penzias e Wilson (1964). Tale radiazione (microonde corrispondenti ad una radiazione di corpo nero alla temperatura di 2.7 kelvin) costituisce la prova, già ipotizzata da Gamow, più evidente dell'ipotetica esplosione iniziale. Attualmente, lo studio della radiazione cosmica di fondo è uno dei capitoli più importanti della ricerca specialmente per quanto riguarda la sua debole anisotropia. Il futuro dell'universo potrebbe avere diversi scenari (secondo le soluzioni di Friedman): cessazione dell'espansione e contrazione verso uno stato altamente condensato (big

crunch) che dà luogo ad un nuovo big bang (modello chiuso); oppure espansione continua con velocità decrescente ma tendente asintoticamente ad un valore positivo (modello aperto), oppure ancora espansione continua con velocità decrescente ma tendente asintoticamente a zero (modello piatto). Tali scenari sono dipendenti dalla quantità di materia contenuta nell'universo. Le ultime scoperte nell'ambito della cosmologia, però, mostrano un universo in espansione a velocità crescente. I motivi fisici per una tale espansione crescente (in contraddizione con il carattere attrattivo della gravità) sono attualmente ignoti. Si è ipotizzato che l'universo sia costituito principalmente da materia ed energia oscura. La comprensione della natura fisica di tali sconosciute forme di materia ed energia costituisce una delle scommesse del futuro della fisica. L'energia oscura, che viene indicata come la causa dell'espansione accelerata e potrebbe essere legata all'energia quantistica di punto zero del vuoto (zero point energy, ZPE), viene descritta matematicamente tramite la costante cosmologica Λ . È sorprendente come un presunto errore sia in effetti stato così provvidenziale!

4.10.4 Unificazione

Il quadro presentato dalla teoria della relatività (RR + Maxwell + RG) propone una descrizione separata del campo elettromagnetico e del campo gravitazionale. Nella RR + Maxwell si presuppone che la metrica sia galileiana (assenza di campo gravitazionale) per cui le particelle materiali nell'ambito della RR + Maxwell vanno considerate di piccola massa tali da non creare un campo gravitazionale, così come il campo elettromagnetico è supposto non creare campo gravitazionale. Viceversa, nella RG il campo elettromagnetico, propagandosi, è influenzato dalla curvatura del cronotopo e va considerato debole in modo da non produrre, come in linea di principio potrebbe supporre, campo gravitazionale, grazie all'eguaglianza $E = mc^2$. È possibile avere una descrizione unificata e completa di campo elettromagnetico e campo gravitazionale fornita da una stessa equazione, o gruppo di equazioni? In altre parole, gravità e campo elettromagnetico potrebbero essere aspetti diversi di una sola forza unificata? A questa ipotesi Einstein lavorò con entusiasmo fino alla morte (1955) ma senza successo. Il motivo del fallimento, come comunemente a posteriori si riconosce, è dovuto al fatto che Einstein cercò soluzioni classiche, e non quantistiche. Va però riconosciuto che questo tentativo aprì la strada a quello che oggi appare la sfida più importante della fisica: unificare le quattro interazioni conosciute (gravitazione, elettromagnetismo, forza nucleare debole e forte). In questo, il sogno di Einstein fu profetico. L'unificazione dovrà essere però su basi quantistiche: si dovrà cercare una gravità quantistica, cioè si dovrà costruire una nuova teoria che quantizzi la gravità ovvero che ne definisca la particella in grado di trasportare l'interazione gravitazionale (l'ipotetico *gravitone*). Va però sottolineato il fatto che le ricerche dell'unificazione su base classica non furono del tutto sterili. Nel 1919 Kaluza propose un cronotopo a cinque dimensioni. Questa idea di indagare in ulteriori dimensioni oltre alle tradizionali quattro è alla base delle attuali teorie delle stringhe e brane, basate su dieci o più dimensioni. La

difficoltà enorme da superare è però il fatto che la gravità, come in sintesi ultima mostra il lavoro di Einstein, è legata allo spazio ed al tempo più, come sembra, delle altre forze. Si dovrà quindi indagare ancora più a fondo la natura fisica di spazio e tempo introducendo una quantizzazione del cronotopo. Tentativi promettenti nella ricerca dell'unificazione, per il momento solo teorici ed in attesa di verifiche sperimentali, sono le teorie della supergravità, delle stringhe e brane ecc. e la sfida è più che mai aperta.