1 Spazi vettoriali e sottospazi

Il concetto di spazio vettoriale nasce nel contesto della geometria dei vettori: l'esempio più semplice immaginabile di spazio vettoriale è rappresentato proprio dallo spazio dei vettori geometrici, rappresentati da segmenti orientati che hanno un punto di applicazione ed un punto finale, direzione e verso. Le più semplici operazioni che si possono fare tra i vettori geometrici sono quelle che si ritrovano nella definizione astratta di spazio vettoriale:

Definizione. Sia V un insieme non vuoto; V si dice spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ se esistono

a) un'operazione binaria interna, denotata con $+\colon V \times V \to V$

b) un prodotto per scalari denotato con $\cdot\colon \mathbb{K} \times V \to V$

tali per cui valgano le seguenti proprietà:

1) $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$ per ogni $v_1, v_2 \in V$.

2) $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$ per ogni $v_1, v_2, v_3 \in V$.

3) esiste $0 \in V$ tale per cui $v + 0 = v$ per ogni $v \in V$.

4) per ogni $v \in V$ esiste $-v \in V$ tale per cui $v + (-v) = 0$.

5) $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$ per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ e per ogni $v \in V$.

6) $\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ e per ogni $v_1, v_2 \in V$.

7) $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v) = (\lambda_1\lambda_2) \cdot v$ per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ e per ogni $v \in V$.

8) $1 \cdot v = v$ per ogni $v \in V$.

Nel seguito per semplicità verrà omesso l'uso del $\cdot$ per denotare il prodotto per scalare esterno; in ogni caso sarà chiaro quale sia lo scalare e quale sia il vettore.

Esempio. $\mathbb{R}$ è chiaramente uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto. Sia dato l'insieme $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$; allora $\mathbb{R}^2$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ ponendo

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \quad \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

$$0 = (0, 0), \quad -(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2).$$

La semplice verifica può essere svolta per esercizio; in modo analogo l'insieme $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ n volte ha una naturale struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ ponendo

$$(x_1, \cdots, x_n)+(y_1, \cdots, y_n) = (x_1+y_1, \cdots, x_n+y_n), \quad \lambda(x_1, \cdots, x_n) = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)$$

$$0 = (0, \cdots, 0), \quad -(x_1, \cdots, x_n) = (-x_1, \cdots, -x_n)$$

con $\lambda, x_i, y_i \in \mathbb{R}$.

Esempio. L'insieme $\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$ n volte ha una naturale struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{C}$; poniamo infatti, come nel caso reale,

$$(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n), \quad \lambda(x_1, \cdots, x_n) = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)$$

$$0 = (0, \cdots, 0), \quad -(x_1, \cdots, x_n) = (-x_1, \cdots, -x_n)$$

con $\lambda, x_i, y_i \in \mathbb{C}$.

Esempio. Lo spazio dei segmenti orientati (vettori geometrici) costituisce il più naturale esempio di spazio vettoriale nel quale la somma tra vettori ed il prodotto per lo scalare esterno sono esattamente le operazioni elementari di somma e prodotto per scalare definite sui vettori geometrici.