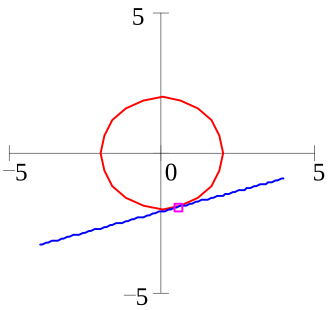
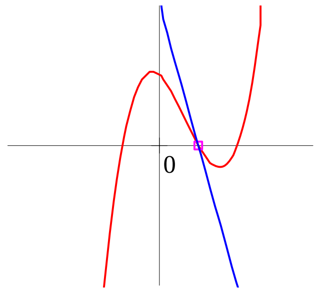
Coefficiente angolare della retta tangente

In geometria piana, una retta si dice tangente a una circonferenza se interseca la circonferenza in un solo punto. Per altri tipi di curve, una retta può intersecarle in un solo punto, ma non essere tangente. Se vogliamo applicare il concetto di tangente ad altre curve diverse dalla circonferenza abbiamo bisogno di una definizione matematica più generale.



La retta blu è una tangente.



La retta blu interseca la curva in un solo punto, ma non è tangente.

Per definire il coefficiente angolare di una tangente usiamo il concetto di limite. Nella scheda precedente, abbiamo definito la retta secante, che passa per due punti della curva. Ora definiamo la retta tangente in un singolo punto $(x_0, f(x_0))$ alla curva $f(x)$ come la retta che passa per il punto $(x_0, f(x_0))$ il cui coefficiente angolare è il limite, per h tendente a zero, dei coefficienti angolari delle secanti che passano per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0+h, f(x_0+h))$.

Formula

Coefficiente angolare della retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$ alla curva $f(x)$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Esempio 1

Troviamo il coefficiente angolare della tangente alla curva $x^2 + x$ nel punto (2, 6).

Funzione:

$f(x) := x^2 + x$

Ascissa x del punto:

$x_0 := 2$

Valutiamo l'espressione del limite per piccoli valori di h, sia positivi che negativi.

$i := 1..5$

$hp_i :=$

1
.1
.01
.001
.0001

$\dfrac{f(x_0 + hp_i) - f(x_0)}{hp_i}$

6
5.1
5.01
5.001
5.0001

$hn_i :=$

-1
-.1
-.01
-.001
-.0001

$\dfrac{f(x_0 + hn_i) - f(x_0)}{hn_i}$

4
4.9
4.99
4.999
4.9999

Dalle tabelle precedenti potete vedere a quale numero si avvicinano i valori sulle colonne di destra per valori di h tendenti a zero.

Per confermare che il coefficiente angolare della tangente è 5, sostituiamo la definizione di f(x) nell'espressione del limite ed e otteniamo:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\left[(x_0 + h)^2 + (x_0 + h)\right] - \left(x_0^2 + x_0\right)}{h}$$

Poiché $x_0 = 2$ sostituiamo questo valore nell'espressione, si ottiene:

$$\frac{(f(2+h)-f(2))}{h} = \frac{\left[(2+h)^2-4+h\right]}{h}$$

Da cui:

$$\frac{\left[(2+h)^2-4+h\right]}{h}$$

quindi

$$5+h$$

Infine valutiamo il risultato del limite quando h tende a zero.

$$\lim_{h \to 0} 5+h$$

Otteniamo 5

Esempio 2

Troviamo il punto sulla curva $y(t) := \frac{1}{t}$ in cui il coefficiente angolare della tangente è –.3. Rappresentiamo graficamente y(t), la retta tangente e la perpendicolare (o normale).

$$s := -.3$$

Il coefficiente angolare della tangente in (t_0, y(t_0)) è:

$$\lim_{h \to 0} \frac{y(t_0+h)-y(t_0)}{h} = s$$

Sostituiamo la definizione di y(t) nell'espressione del limite e poniamo

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{t_0+h}-\frac{1}{t_0}}{h} = s = -.3$$

L'equazione ha soluzioni

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{s}\cdot\sqrt{-s} \\ \frac{1}{s}\cdot\sqrt{-s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.826 \\ -1.826 \end{bmatrix}$$

Poiché ci sono 2 soluzioni, esistono due punti, due rette tangenti e due normali.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{-1}{s}\cdot\sqrt{-s} \\ \frac{1}{s}\cdot\sqrt{-s} \end{bmatrix}$$

Il coefficiente angolare s_{perp} di rette perpendicolari soddisfa la relazione $s\ s_{perp} = -1$, così:

$$s_{perp} := -\frac{1}{s}$$

$$s_{perp} = 3.333$$

Equazioni delle tangenti:

$$l_1(t) := y(a) + (t - a)\cdot s$$

$$l_2(t) := y(b) + (t - b)\cdot s$$

Equazioni delle normali:

$$p_1(t) := y(a) + (t - a)\cdot s_{perp}$$

$$p_2(t) := y(b) + (t - b)\cdot s_{perp}$$

$$r := -3, -2.96 .. 3$$