Integrazione

Applicazioni dell'integrale definito: volume e area della superficie di solidi

L'area della superficie e il volume di un solido generato dalla rotazione del grafico di una funzione continua attorno ad un asse, possono essere trovati integrando una funzione su un intervallo.

Formule

Il volume del solido, ottenuto ruotando attorno all'asse x la regione piana compresa tra il grafico di una funzione continua y = f(x), l'asse x e le rette di equazioni x=a e x = b, è dato dal seguente integrale:

$$\int_a^b \pi \cdot f(x)^2 \, dx$$

Se la funzione y = f(x) ha la derivata prima continua nell'intervallo [a, b], l'area della superficie generata ruotando la curva f(x) attorno all'asse x si calcola mediante il seguente integrale:

$$S = \int_a^b 2 \cdot \pi \cdot y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} y\right)^2} \, dx$$

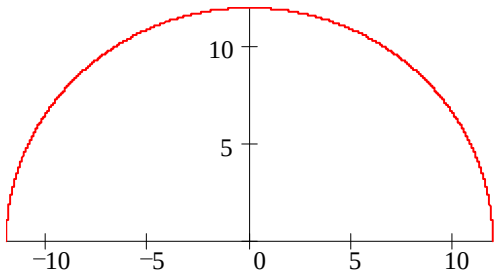
Esempio 1

Qual è il volume di una sfera di raggio 12 centimetri?

$R := 12 \cdot cm$

Consideriamo la seguente funzione:

$f(x) := \sqrt{R^2 - x^2}$



Se ruotiamo il grafico di f(x) attorno all'asse x, otteniamo una sfera di raggio R il cui volume è dato dal seguente integrale:

$$\int_{-R}^{R} \pi \cdot \left(R^2 - z^2\right) dz$$

il cui risultato è

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

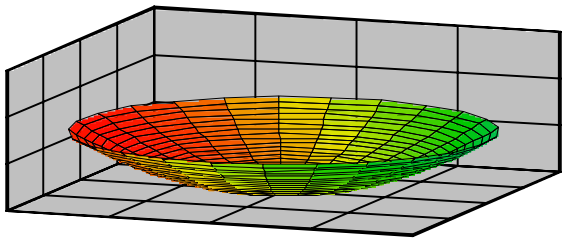
Pertanto il volume della sfera è:

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = 7.238 \cdot$$

Esempio 2

Una parabola satellitare gode della proprietà che tutte le onde elettromagnetiche, che arrivano in direzione parallela all'asse della parabola, convergono in un solo punto. La forma di una parabola satellitare è quella di un *paraboloide*. Esso è generato dalla rotazione del grafico di una parabola di equazione $y = ax^2$ attorno all'asse y.

Parabola Satellitare



Y , X , Z

Qual è l'area della superficie di una parabola satellitare di 2 metri di diametro definita dalla parabola di equazione $\mathbf{y = .3x^2}$?

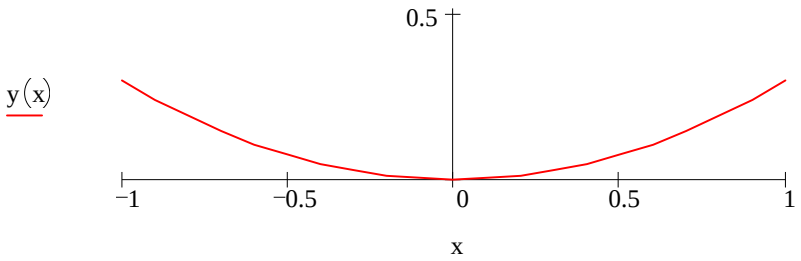
Diametro della parabola satellitare:

diam := 2

Equazione della parabola:

$y(x) := .3 \cdot x^2$

La sezione del paraboloide appare così:



Nota che le scale sui due assi coordinati non sono proporzionali.

La distanza verticale dal centro del paraboloide a un punto alla stessa altezza sulla sua superficie è:

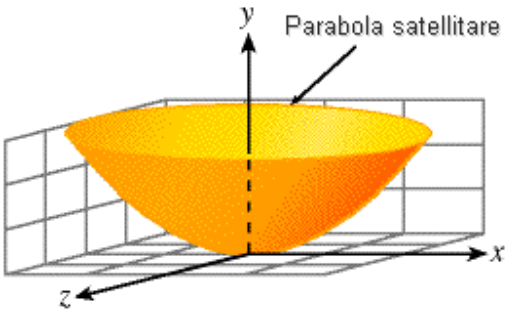
$$b := y\left(\frac{diam}{2}\right)$$

$$b = 0.3$$

Questo è l'estremo superiore dell'intervallo d'integrazione.
Poiché y è la variabile di integrazione, ricaviamo x in funzione di y.

$$x(y) = \sqrt{\frac{y}{.3}}$$

$$x'(y) = \frac{d}{dy}\sqrt{\frac{y}{.3}}$$

L'area della superficie del paraboloide è:

$$\int_0^b 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{y}{.3}}\cdot\left[1+\left(\frac{d}{dy}\sqrt{\frac{y}{.3}}\right)^2\right]dy = 3.408$$