

# La Programmazione Lineare e l'Algoritmo del Simplex

Albanesi Valentina, Radice David e Travaglino Ermanno

## Sommario

Questo breve testo ha come obiettivo la descrizione concisa dei principali risultati connessi con la programmazione lineare. Si tratterà in particolare l'algoritmo del simplex.

## 1 La Programmazione Lineare

Qui descriviamo la programmazione lineare come problema base.

### 1.1 Ipotesi Base modelli PL

Ipotesi di modelli di PL:

**Linearità:** proporzionalità e additività della funzione obiettivo e dei vincoli

**Proporzionalità:** contributo di ogni variabile = costante  $\times$  variabile. Non si tiene conto di economie di scala!

**Additività:** contributo di tutte le variabili = somma dei singoli contributi. Prodotti in competizione  $\Rightarrow$  guadagni non indipendenti!

**Divisibilità:** le variabili possono assumere valori frazionari (reali)

**Parametri:** supponiamo che tutti i parametri numerici del modello possano essere considerati costanti, ovvero stimati con un grado di precisione sufficiente.

### 1.2 Forme Equivalenti

Abbiamo una forma generale:

$$\begin{aligned} \min z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} && \text{funzione obiettivo} \\ (\max) &&& \\ A_1 \mathbf{x} &\geq \mathbf{b}_1 && \leftarrow \text{vincoli di disequaglianza} \\ A_2 \mathbf{x} &\leq \mathbf{b}_2 && \leftarrow \text{vincoli di disequaglianza} \\ A_3 \mathbf{x} &= \mathbf{b}_3 && \leftarrow \text{vincolo di uguaglianza} \end{aligned}$$

E una forma standard:

$$\begin{aligned} \min z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} && \leftarrow \text{funzione obiettivo} \\ A \mathbf{x} &= \mathbf{b} && \leftarrow \text{solo vincoli di uguaglianza} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} && \leftarrow \text{tutte variabili non negative} \end{aligned}$$

le due formulazioni sono equivalenti

### 1.3 Regole di trasformazione

Delle regole di trasformazione regolano il passaggio da una all'altra forma.

NB: Passando da una all'altra forma possono variare numero di variabile di vincoli.

PRIMA	DOPO
$\max \mathbf{c}^T \mathbf{x}$	$-\min \mathbf{c}^T \mathbf{x}$
$A^T \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$	$\begin{cases} A^T \mathbf{x} + \mathbf{s} = \mathbf{b} \\ \mathbf{s} \geq 0 \end{cases}$ <span style="margin-left: 2em;">variabile di scarto</span>
$A^T \mathbf{x} \geq \mathbf{b}$	$\begin{cases} A^T \mathbf{x} - \mathbf{s} = \mathbf{b} \\ \mathbf{s} \geq 0 \end{cases}$ <span style="margin-left: 2em;">variabile di surplus</span>
$\mathbf{x}_j$ libera	$\begin{cases} \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j^+ - \mathbf{x}_j^- \\ \mathbf{x}_j^+ \geq 0 \\ \mathbf{x}_j^- \geq 0 \end{cases}$

## 2 Il Metodo del Simplexso

Ci occupiamo di problemi in forma standard:

$$\begin{aligned} \min z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t:} \\ A \mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

e in particolare della loro risoluzione per mezzo dell'algoritmo del simplexso.

### 2.1 La Geometria del Simplexso

Qui di seguito descriviamo la geometria del simplexso. L'approccio è assolutamente non convenzionale e fa uso di una notazione sintetica inventata ad-hoc con lo scopo di rendere più chiaro l'algoritmo e in particolare di descrivere in maniera compatta matriciale i vari passaggi. In particolare consente di dare pieno significato a espressioni del tipo " $\mathbf{x} = \mathbf{x}_N + \mathbf{x}_B$ " e di "vedere" in azione l'algoritmo del simplexso in un caso generale, senza dover andare a scrivere tutti i vincoli come sommatorie. Il nostro problema di partenza richiede l'ottimizzazione vincolata di  $z$  su:

$$\Omega := \{A \mathbf{x} = \mathbf{b}\} \cap \{\mathbf{x} \geq 0\}$$

Dove  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ .

È chiaro che essendo:

$$\nabla z = \mathbf{c}$$

Non ci sono minimi in punti interni di  $\Omega$ .

L'obbiettivo è quindi quello di trovare un modo più "furbo" per rappresentare  $A \mathbf{x}$  e  $\partial\Omega$ . Per farlo ci dimenticheremo inizialmente del problema di partenza per sviluppare una breve teoria.

Cominciamo prendendo tre numeri naturali non nulli  $n, k, m$  tali che  $n = m + k$ . Prendiamo in esame i multi-indici  $\alpha$  dell'insieme  $\{0, 1\}^n$ . Definiamo *norma* di un multi-indice  $|\alpha|$  il numero:

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

In oltre definiamo il multi-indice complementare  $\alpha^c$  come:

$$\alpha_i^c = \begin{cases} 0 & \alpha_i = 1 \\ 1 & \alpha_i = 0 \end{cases}$$

Definiamo in oltre *traccia* di un multi-indice l'insieme:

$$\gamma(\alpha) := \{k \in \mathbb{N} \cap [0, n] : \alpha_k = 1\}$$

Sia in oltre  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$  la base canonica di  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Chiameremo, in oltre, con  $k_i(\alpha)$ <sup>1</sup> la posizione dell' $i$ -simo 1 nel multi-indice.

In particolare ci vogliamo concentrare sul sottoinsieme di  $\{0, 1\}^n$  che chiameremo  $Q$ :

$$Q = \{\alpha \in \{0, 1\}^n : |\alpha| = m\}$$

<sup>1</sup>o anche  $k_i$  dove sarà evidente a quale multi-indice ci si riferisca

Chiaramente  $|Q| = \binom{n}{m}$ . Quindi se  $\alpha \in Q$  possiamo introdurre una nuova struttura algebrica in  $\mathbb{R}^n$  che indicheremo con:

$$\left(\mathbb{R}^n\right)_\alpha = \left(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^k\right)_\alpha$$

Dove  $\oplus$  non indica una somma diretta! Per poter definire questa nuova struttura usiamo delle funzioni lineari indicizzate nell'intero insieme dei multi-indici definite come:

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^s, |\alpha| = s \implies i_\alpha(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^s x_i \mathbf{e}_{k_i}$$

Usando questa regola è possibile scrivere per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_m \oplus \mathbf{x}_k := i_\alpha(\mathbf{x}_m) + i_{\alpha^c}(\mathbf{x}_k) \quad \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^m, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^k \quad (1)$$

In questo modo dunque interpretiamo ogni elemento<sup>2</sup> di  $\mathbb{R}^n$  come la somma delle sue *proiezioni inverse* su sottospazi di dimensione  $m$  e  $k$ . I due sottospazi  $M$  e  $K$  sono determinati dalle basi:

$$M = \text{span} \{\mathbf{e}_{k_i(\alpha)}\} \quad K = \text{span} \{\mathbf{e}_{k_i(\alpha^c)}\}$$

Sono ovviamente ortogonali e  $M \cup K = \mathbb{R}^n$ . Tuttavia noi non usiamo direttamente le proiezioni di  $\mathbf{x}$  su questi due spazi, ma associamo a  $\mathbf{x}$  due vettori uno di  $\mathbb{R}^m$  e uno di  $\mathbb{R}^k$ . Ovvero scriviamo  $\mathbf{x}_k$  e  $\mathbf{x}_m$  non rispetto alla base di  $\mathbb{R}^n$ , ma rispetto alle basi intrinseche di  $M$  e  $K$ . Per ricostruire  $\mathbf{x}$  abbiamo quindi bisogno di due funzioni  $i_\alpha$  e  $i_{\alpha^c}$  che mappino le basi intrinseche di  $M$  e  $K$  in quella di  $\mathbb{R}^n$ .

Detto in parole povere abbiamo splittato le  $n$  componenti di  $\mathbf{x}$  in due vettori di componenti, ora, per ricostruire  $\mathbf{x}$  dobbiamo sapere in che posizione mettere tutte le componenti dei due vettori ...

La trasformazione  $i$  è una trasformazione lineare (al lettore la facile verifica) ed è in pratica una generalizzazione della matrice identità infatti:

$$i_\alpha \sim I_\alpha, \quad (I_\alpha)_{ij} = \delta_{k_i j}, \quad I_\alpha \in \mathbb{R}^{n \times |\alpha|}$$

Sia ora  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  una matrice a rango pieno. Per ogni  $\alpha \in Q$  possiamo scrivere:

$$A \mathbf{x} = A I_\alpha \mathbf{x}_m + A I_{\alpha^c} \mathbf{x}_k = B \mathbf{x}_m + N \mathbf{x}_k$$

Dove  $B$  è una matrice quadrata invertibile  $m \times m$  ( $A$  ha rango massimo) e  $N \in \mathbb{R}^{m \times k}$ . Che riscriviamo nella forma:

$$A \mathbf{x} = B \mathbf{x}_B + N \mathbf{x}_N$$

Ponendo  $\mathbf{x}_B = \mathbf{x}_m$  e  $\mathbf{x}_N = \mathbf{x}_k$ . Come si può vedere abbiamo scomposto  $A$  in due sottomatrici ovvero:

$$A = \left(B \oplus N\right)_\alpha$$

Dove  $(B \oplus N)_\alpha$  è un operatore lineare su  $(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^k)_\alpha$  (la dimostrazione è lasciata al lettore). Per cui useremo anche la notazione:

$$A \mathbf{x} = (B \oplus N)[\mathbf{x}_B \oplus \mathbf{x}_N] := B \mathbf{x}_B + N \mathbf{x}_N \quad (2)$$

In particolare utilizzeremo questa definizione per generare gli spazi  $M$  e  $K$ . Infatti se  $B$  è una sotto-matrice quadrata di  $A$  e  $N$  è la matrice delle colonne rimanenti allora la (2) definisce una struttura di  $\mathbb{R}^n$  e una partizione su  $\mathbf{x}$ . Motivo per cui si usa la notazione  $\mathbf{x}_B$  dove  $B$  è una matrice in luogo dalla notazione (più corretta) in cui si pone a pedice l'indicazione del sottospazio su cui si proietta  $\mathbf{x}$ .

È ovvio che si possono estendere le nozioni viste fin ora prendendo in esame strutture generate da più multindici scelti in maniera tale da avere:

$$\sum_{m=1}^k \alpha_i^m = 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

e quindi generare strutture del tipo:

$$\mathbb{R}_{\alpha^1 \alpha^2 \dots \alpha^k} = \left( \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{R}^{|\alpha^i|} \right)_{\alpha^1 \alpha^2 \dots \alpha^k}$$

Ma ciò esula dagli scopi di questo testo

Si può dimostrare che  $B$  è composta da  $m$  colonne di  $A$  e che  $N$  è composta dalle rimanenti.

<sup>2</sup>al lettore la facile verifica del fatto che  $\mathbb{R}^n$  sia completamente generato dalle basi di  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^k$  unitamente all'elemento nullo se pensiamo gli elementi di  $\mathbb{R}^n$  scritti nella forma (1)

**Def 2.1 (base)** Una base é una sottomatrice  $B$  di  $A$  invertibile.

Siccome, tornando al problema originale,  $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$  abbiamo:

$$B \mathbf{x}_B + N \mathbf{x}_N = \mathbf{b} \implies \mathbf{x}_B = -B^{-1}N \mathbf{x}_N + B^{-1} \mathbf{b}$$

Se  $B^{-1} \mathbf{b} \geq 0$  allora possiamo trovare un valore ammissibile di  $\mathbf{x}$  ponendo  $\mathbf{x}_N = 0$  e si avrebbe quindi (sottointendendo d'ora in anzi il multi-indice  $\alpha$ ):

$$\mathbf{x} = B^{-1} \mathbf{b} \oplus \mathbf{0}$$

Da cui:

**Def 2.2** Una base  $B$  di  $A$  t.c.:

$$B^{-1} \mathbf{b} \geq 0$$

é detta **base ammissibile** di  $A$

Una base ammissibile ha questa importante proprietà

**Teorema 2.1 (di Caratterizzazione)** Se  $\Omega$  é un poliedro e  $\mathcal{V}\{\Omega\}$  é l'insieme dei suoi vertici allora:

$$\mathcal{V}\{\Omega\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \mathbf{x}_B \oplus \mathbf{x}_N, \quad \mathbf{x}_B = B^{-1} \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}_N = \mathbf{0} \right\} \cap \left\{ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \right\} \quad \forall B \text{ sottomatrice di } A \text{ con rango pieno}$$

Questo è abbastanza evidente se pensiamo che:

$$\left( \Omega \right)_\alpha = \left( -B^{-1}N \mathbf{x}_N + B^{-1} \mathbf{b} \oplus \mathbf{x}_N \right)_\alpha \cap \left\{ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \right\} \quad (3)$$

Qui si vede che  $\Omega$  ha un vertice in  $\mathbf{x}_N = 0$  infatti il punto:

$$B^{-1} \mathbf{b} \oplus \mathbf{0}$$

Non può essere espresso come combinazione convessa di alcuna coppia di altri punti nella forma (3)<sup>3</sup>.

L'importanza di questo teorema è evidente anche alla luce di questo risultato:

**Teorema 2.2 (Fondamentale)** Se il poliedro  $\Omega$  non é vuoto e  $z$  é limitata interiormente in  $\Omega$  allora  $\exists \mathbf{x}_i$  vertice del poliedro t.c.:

$$z(\mathbf{x}_i) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega} \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$$

Infatti sostituendo nella funzione obiettivo si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T \mathbf{x} &= \mathbf{c}^T (I_\alpha \mathbf{x}_B + I_{\alpha^c} \mathbf{x}_N) \\ &= \mathbf{c}^T I_\alpha \mathbf{x}_B + \mathbf{c}^T I_{\alpha^c} \mathbf{x}_N \\ &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N \\ &= \mathbf{c}_B^T (B^{-1} \mathbf{b} - B^{-1}N \mathbf{x}_N) + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N \\ &= \underbrace{\mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{b}}_{\text{Costo soluzione di base ammissibile}} + \underbrace{(\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T B^{-1}N)}_{\text{costi ridotti}} \mathbf{x}_N \end{aligned}$$

Come si vede é possibile, esprimendo  $z$ , in funzione delle variabili fuori base, valutare i costi “risparmiati” ovvero *ridotti* ponendo a zero le variabili  $\mathbf{x}_N$ . É chiaro che se i costi ridotti  $\bar{\mathbf{c}}_N^T$  sono tutti positivi siamo all'ottimo. Viceversa é possibile che cambiando la matrice  $B$  si trovi un'altra soluzione ammissibile con un valore migliore della funzione obiettivo. In pratica si dimostra che, purché il problema non sia illimitato, con un numero finito di cambi di base é sempre possibile giungere alla soluzione ottima (scegliendo opportunamente le variabili da portare dentro e fuori base).

Per passare da una base all'altra è sufficiente cambiare l' $\alpha$  scelto. In particolare se  $\alpha_i : 0 \rightarrow 1$  si dice che la variabile  $x_i$  è stata portata in base. Viceversa  $x_i$  è stata portata fuori base. In pratica poi per non stare a calcolare  $B$  e  $\mathbf{x}_B$  ogni volta si agisce tenendo memoria dei passaggi precedenti dell'algoritmo, anche perché la moltiplicazione per le matrici  $I_\alpha$  e  $B^{-1}$  corrisponde a eseguire un pivoting sulla matrice:

$$\left[ \begin{array}{c|c} -z_0 & \mathbf{c}^T \\ \hline \mathbf{b} & A \end{array} \right] \longrightarrow \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{b} & \bar{\mathbf{c}}_N^T \\ \hline B^{-1} \mathbf{b} & I \oplus B^{-1}N \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} -\bar{z}_0 & \bar{\mathbf{c}}^T \\ \hline \bar{\mathbf{b}} & \bar{A} \end{array} \right]$$

<sup>3</sup>La dimostrazione rigorosa che fa uso della proprietà distributiva di  $\cdot \oplus$  rispetto alla moltiplicazione per uno scalare (anch'essa da dimostrare) é lasciata al lettore.

## 2.2 Regola di Bland

La regola di Bland serve a determinare quali variabili far entrare in base e quali far uscire:

1. La variabile da far uscire é  $x_s$  dove  $s = \min\{j : \bar{c}_j < 0\}$
2. Immaginiamo di voler portare in base  $x_j$  e di dover quindi scegliere la  $x_i$  da portare fuori. Sia:

$$\theta_{ij} = \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}}$$

é il massimo valore di cui si può incrementare la  $x_j$  (se  $\theta > 0$ ) senza uscire dal poliedro. Infatti grazie alle trasformazioni di cui si é parlato prima le  $x_i$  saranno descritte nella forma:

$$x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \gamma(\alpha)} \bar{a}_{ij} x_j$$

Quindi per evitare di uscire dal poliedro occorre scegliere la variabile  $x_i$  in modo tale che:

$$x_i \in Q = \left\{ x_s : \theta_{sj} \leq \theta_{qj} \quad \forall j \right\}$$

Se  $|Q| > 1$  si sceglie l' $x_i$  con indice minimo

Osserviamo in oltre che vale il seguente:

**Teorema 2.3** Se  $\exists \bar{c}_j < 0$  con  $\bar{a}_{ij} \leq 0 \quad \forall i$  allora il problema è illimitato.

**Def 2.3** Una soluzione di base ammissibile che abbia una variabile in base di valore 0 é detta degenera.

Geometricamente una base degenera corrisponde a un vertice in cui si incontrano più vincoli. Quindi a un punto geometrico cui corrispondono più basi ammissibili! É possibile quindi che, con una scelta non ideale delle variabili da far entrare e uscire di base, si generino successioni di basi ammissibili cui corrisponde sempre lo stesso punto andando a generare cicli senza uscita. Un buon metodo per evitare tutto ciò é usare la regola di Bland di cui si é parlato prima. Infatti vale il seguente:

**Teorema 2.4** L'algoritmo del simplesso con la regola di Bland termina al più dopo  $\binom{n}{m}$  iterazioni all'ottimo.

In realtà tranne che in casi patologici si sa da campagne di prove sperimentali che  $T$ , la complessità temporale dell'algoritmo, ha l'andamento:

$$m \leq T \leq 3m$$

## 2.3 Metodo del Simplex a Due Fasi

Spesso non è molto semplice trovare una soluzione di base ammissibile con cui inizializzare l'algoritmo del simplesso. Per cui si ricorre a un problema ausiliario:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ A \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \min v = \sum_{i=1}^m y_i \\ A \mathbf{x} + I \mathbf{y} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{array} \right.$$

Le  $y_i$  sono dette *variabili artificiali* perché rappresentano la distanza di  $\mathbf{x}$  dai vincoli. Qui é molto facile trovare una base da cui partire:  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ . Se  $v^*$  é la soluzione all'ottimo, possono esservi 2 casi:

1.  $v^* > 0$  allora il problema di partenza é inammissibile.
2.  $v^* = 0$  allora  $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{x}^*$  é una soluzione di base ammissibile per il problema di partenza. Possono verificarsi 2 sottocasi:
  - Se  $y_i$  é fuori base allora avremo:

$$(A \oplus I)[\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}] \rightarrow (I \oplus N \oplus K)[\mathbf{x}_B \oplus \mathbf{x}_N \oplus \mathbf{y}] \quad (\text{dopo l'algoritmo})$$

Basta quindi prendere come base di partenza per il simplesso per il problema originale:

$$(I \oplus N)[\mathbf{x}_B \oplus \mathbf{x}_N]$$

- se c'è almeno un  $y_i$  in base allora é necessario portare tutti gli  $y_i$  fuori base per poter ricavare la base di partenza per il problema principale.

### 3 Dualità

Ad ogni problema di programmazione lineare (P) di minimo (massimo) si può associare un problema duale di massimo (minimo). Prendiamo in esame il problema:

$$\begin{aligned} \max z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ A \mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Vogliamo poter dare una stima di  $z$  attraverso una combinazione lineare dei vincoli. Moltiplichiamo ambo i membri della  $A \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$  per  $\mathbf{y}^T$  (con  $\mathbf{y} > \mathbf{0}$ ):

$$\mathbf{y} \cdot A \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \cdot \mathbf{y} \implies \mathbf{y} \cdot (A \mathbf{x} - \mathbf{b}) \leq 0 \implies A^T \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T \mathbf{y}$$

Se  $A^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$  possiamo scrivere:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T \mathbf{y}$$

È chiaro che a questo punto abbiamo un nuovo problema lineare:

$$\begin{aligned} \min w &= \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ A^T \mathbf{y} &\geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Detto problema **duale** (D).

Analogamente ragionando per problemi con  $A \mathbf{x} \geq \mathbf{b}$  o  $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$  si perviene alla seguente tabella:

Primale (min)	Duale (max)
$m$ vincoli	$m$ variabili
$n$ variabili	$n$ vincoli
coefficienti funzione obbiettivo	termini noti
termini noti	coefficienti funzione obbiettivo
$A$	$A^T$
vincoli di =	variabili <b>libere</b>
variabili <b>libere</b>	vincoli di =
vincoli di $\geq$ ( $\leq$ )	variabili $\geq 0$ ( $\leq 0$ )
variabili $\geq 0$ ( $\leq 0$ )	vincoli di $\leq$ ( $\geq$ )

**Teorema 3.1 (Dualità Debole)** *Siano:*

$$\begin{aligned} X &= \{ \mathbf{x} : A \mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \} \\ Y &= \{ \mathbf{y} : A^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \} \end{aligned}$$

Per ogni soluzione ammissibile  $\bar{\mathbf{x}} \in X$  di (P) (di minimo) e ogni soluzione ammissibile  $\bar{\mathbf{y}} \in Y$  di (D) (di massimo) si ha:

$$\mathbf{b}^T \bar{\mathbf{y}} \leq \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}}$$

Questo é abbastanza evidente a partire dalla tecnica con cui abbiamo ricavato il problema duale. In oltre vale il seguente teorema:

**Teorema 3.2 (Dualità Forte)** *Siano  $X$  e  $Y$  del teorema precedente, con la condizione:*

$$X \neq \emptyset \quad Y \neq \emptyset$$

Allora vale la seguente:

$$\min \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{x} \in X \} = \max \{ \mathbf{b}^T \mathbf{y} : \mathbf{y} \in Y \}$$

In oltre se  $\mathbf{x}^*$  è la soluzione ottima di (P) e quindi:

$$\mathbf{x}^* = B^{-1} \mathbf{b} \oplus \mathbf{0} \quad \mathbf{c} = \mathbf{c}_B \oplus \mathbf{c}_N$$

Allora la soluzione ottima di (D) è:

$$\bar{\mathbf{y}}^T = \mathbf{c}_B^T B^{-1}$$

In particolare dal teorema precedente abbiamo che  $\bar{\mathbf{y}}$  e  $\bar{\mathbf{x}}$  sono ottime sse:

$$\bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{b} = \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}}$$

Da cui ricordando  $A\bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{b}$  e  $\bar{\mathbf{y}}^T A \leq \mathbf{c}^T$  abbiamo:

$$\bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{b} \leq \bar{\mathbf{y}}^T A\bar{\mathbf{x}} \leq \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{b}$$

Ovvero:

$$\bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{b} = \bar{\mathbf{y}}^T A\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}}$$

Da cui si ha:

$$\bar{\mathbf{y}}^T (A\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) = 0 \quad (\mathbf{c}^T - \bar{\mathbf{y}}^T A)\bar{\mathbf{x}} = 0$$

Possiamo quindi spezzare queste equazioni in un sistema di  $2n$  equazioni in  $2n$  incognite visto che sappiamo che tutti i termini in gioco sono non-negativi e quindi ricordando che se  $s_i$  sono numeri reali:

$$\sum_i |s_i| = 0 \iff s_i = 0, \quad \forall i$$

agendo in ugual modo sulle equazioni di prima si perviene al seguente:

**Teorema 3.3 (degli Scarti Complementari)**  $\bar{\mathbf{x}} \in X$  e  $\bar{\mathbf{y}} \in Y$  sono ottime se e solo se:

$$\bar{y}_i^T (\text{row}_i^T(A)\bar{\mathbf{x}} - b_i) = 0 \quad (c_j - \bar{\mathbf{y}}^T \text{col}_j(A))\bar{x}_j = 0$$

Dove  $\text{row}_i^T(A)\bar{\mathbf{x}} - b_i$  e  $c_j - \bar{\mathbf{y}}^T \text{col}_j(A)$  sono dette variabili di scarto  $s_i$  ed  $s_j$  rispettivamente.

## 4 Analisi Di Sensitività

L'analisi di sensitività studia l'influsso di eventuali variazioni di  $A, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  sulla soluzione del problema:

$$\begin{aligned} \min z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t:} \\ A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

E in particolare si vogliono quantificare le massime variazioni tali che, se  $\bar{\mathbf{x}}$  è ottima per il problema di partenza e:

$$\bar{\mathbf{x}} = B^{-1} \mathbf{b} \oplus \mathbf{0}$$

la soluzione del problema perturbato  $\mathbf{x}^*$  è:

$$\mathbf{x}^* = B^{-1} \tilde{\mathbf{b}} \oplus \mathbf{0}$$

In particolare vogliamo stabilire entro quali limiti la base  $B$  rimane ottima. Questi limiti scaturiscono da due condizioni:

1. Ammissibilità:  $B^{-1} \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$
2. Ottimalità:  $\bar{\mathbf{c}}_N^T = \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T B^{-1} N \geq \mathbf{0}^T$

Premettiamo questa definizione:

**Def 4.1 (prezzo ombra)** *Massimo prezzo che un'azienda è disposta a pagare per una unità aggiuntiva di una risorsa*

## 4.1 Variazione dei Termini Noti

Sia  $\mathbf{b}' = \mathbf{b} + \delta_k \mathbf{e}_k$  la soluzione di base associata a  $B$  è:

$$\mathbf{x}_o = B^{-1}(\mathbf{b} + \delta \mathbf{e}_k) \oplus \mathbf{0}$$

Siccome i  $\bar{\mathbf{c}}_N$  non sono cambiati la soluzione rimane ottima fino a che è ammissibile ovvero fino a che:

$$B^{-1}(\mathbf{b} + \delta \mathbf{e}_k) \geq \mathbf{0} \implies B^{-1} \mathbf{b} \geq -\delta_k B^{-1} \mathbf{e}_k$$

Queste sono le condizioni sui vincoli cercate. Calcoliamo la variazione di  $z$ :

$$\Delta z = \mathbf{c}_B^T B^{-1}(\mathbf{b} + \delta \mathbf{e}_k) - \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{c}_B^T B^{-1}(\delta_k \mathbf{e}_k) = \underbrace{\delta_k y_k^*}_{\text{prezzo ombra!}}$$

Ricordando che  $\mathbf{y}^{*T} = \mathbf{c}_B^T B^{-1}$  è la soluzione del problema duale. Si noti, infatti che, se  $\delta_k = 1$  la variazione del guadagno  $z$  sarebbe  $y_k^*$ ...

## 4.2 Variazione Costi

Sia  $\mathbf{c}' = \mathbf{c} + \delta_k \mathbf{e}_k$ . La base  $B$  rimane ottima fino a che i costi ridotti associati sono positivi ovvero fino a che:

$$\mathbf{c}'_N - \mathbf{c}'_B B^{-1} N \geq \mathbf{0}^T$$

Per poter studiare meglio il problema è necessario distinguere due casi:

1.  $x_k$  è fuori base. Allora:

$$\mathbf{c}' = \mathbf{c}_B \oplus \mathbf{c}_N + \delta_k \mathbf{e}_{N,k} \quad N = \text{span}\{\mathbf{e}_{N,k}\}_k$$

Quindi abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{0}^T &\leq \bar{\mathbf{c}}'_N = \mathbf{c}'_N - \mathbf{c}'_B B^{-1} N \\ &= (\mathbf{c}_N^T + \delta_k \mathbf{e}_k^T) - \mathbf{c}_B^T B^{-1} N \\ &= (\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T B^{-1} N) + \delta_k \mathbf{e}_k^T \\ &= \bar{\mathbf{c}}_N^T + \delta_k \mathbf{e}_k^T \\ &\implies \delta_k \geq -\bar{c}_k \end{aligned}$$

Ovviamente se la base rimane ottima  $\Delta z = 0$ . Infatti:

$$\Delta z^* = z^*_{|\mathbf{c}'} - z^*_{|\mathbf{c}} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* - \mathbf{c}'^T \mathbf{x}^* = (\mathbf{c}' - \mathbf{c})^T \mathbf{x}^* = \mathbf{x}_N^T \delta_k \mathbf{e}_{N,k} = 0 \iff \mathbf{x}_N = \mathbf{0}$$

Notiamo in oltre che il massimo decremento  $\delta_k$  per cui la base  $B$  rimane ottima coincide con il costo ridotto associato alla  $k$ -sima variabile!

2.  $\mathbf{x}_k$  è in base. Allora:

$$\mathbf{c}' = \mathbf{c}_B + \delta_k \mathbf{e}_{B,k} \oplus \mathbf{c}_N \quad B = \text{span}\{\mathbf{e}_{B,k}\}_k$$

Quindi abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{0}^T &\leq \bar{\mathbf{c}}'_N = \mathbf{c}'_N - \mathbf{c}'_B B^{-1} N \\ &= \mathbf{c}_N^T - (\mathbf{c}_B^T + \delta_k \mathbf{e}_k^T) B^{-1} N \\ &= (\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T B^{-1} N) - \delta_k \mathbf{e}_k^T B^{-1} N \\ &\implies \bar{\mathbf{c}}_N^T - \delta_k \rho_k^T \geq \mathbf{0}^T \quad \rho_i = \text{row}_i(B^{-1} N) \\ &\implies \bar{\mathbf{c}}_N^T \geq \delta_k \rho_k^T \end{aligned}$$

Il sistema di disuguaglianze:

$$\bar{\mathbf{c}}_N^T \geq \delta_k \rho_k^T$$

è ovviamente soddisfatto se:

$$\max_{\rho_{kj}^T} \frac{\bar{\mathbf{c}}_j}{\rho_{kj}^T} \leq \delta_k \leq \min_{\rho_{kj}^T} \frac{\bar{\mathbf{c}}_j}{\rho_{kj}^T}$$

Per quanto riguarda la variazione della funzione obiettivo in questo caso si ha:

$$\Delta z^* = \Delta z^* = z_{|c}^* - z_{|c'}^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* - \mathbf{c}'^T \mathbf{x}^* = (\mathbf{c}' - \mathbf{c})^T \mathbf{x} = (\delta_k \mathbf{e}_{B,k})^T \mathbf{x}_B^* = \delta_k x_k^*$$

Come si può vedere facilmente sostituendo banalmente i valori. Quindi per definizione di funzione lineare abbiamo che:

$$\frac{\partial z^*}{\partial c_k} = x_k^*$$