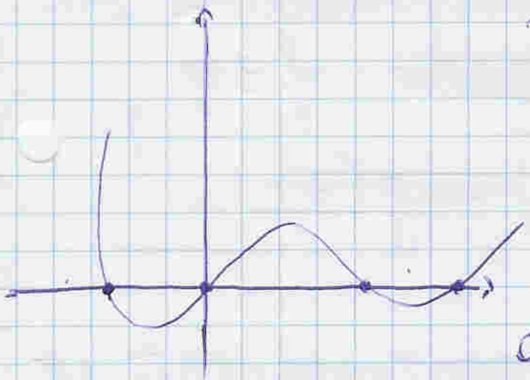
CONSIDERAZIONI INIZIALI SULLE EQUAZIONI

① Prendiamo una funzione f reale di variabile reale. Un problema frequente è quello di determinare i valori di x in corrispondenza dei quali la funzione assume valore nullo. Ovvero trovare le ascisse dei punti in cui il grafico della funzione incontra l'asse delle ascisse.



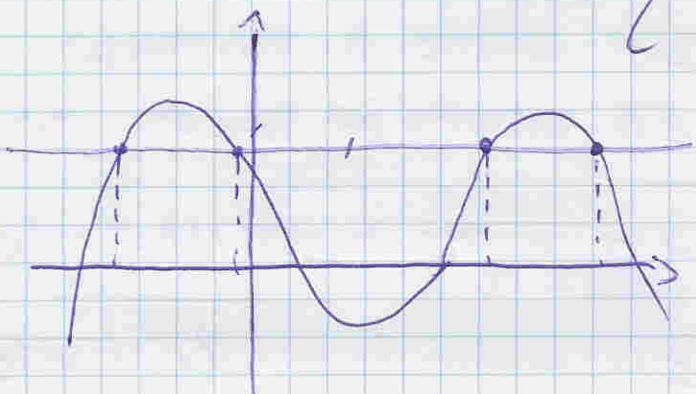
Per risolvere questo problema bisogna risolvere l'equazione $f(x) = 0$. Determinare l'insieme degli zeri della funzione ovvero:

INSIEME DEGLI ZERI: $\{x : x \in \text{dom} f \text{ e } f(x) = 0\}$

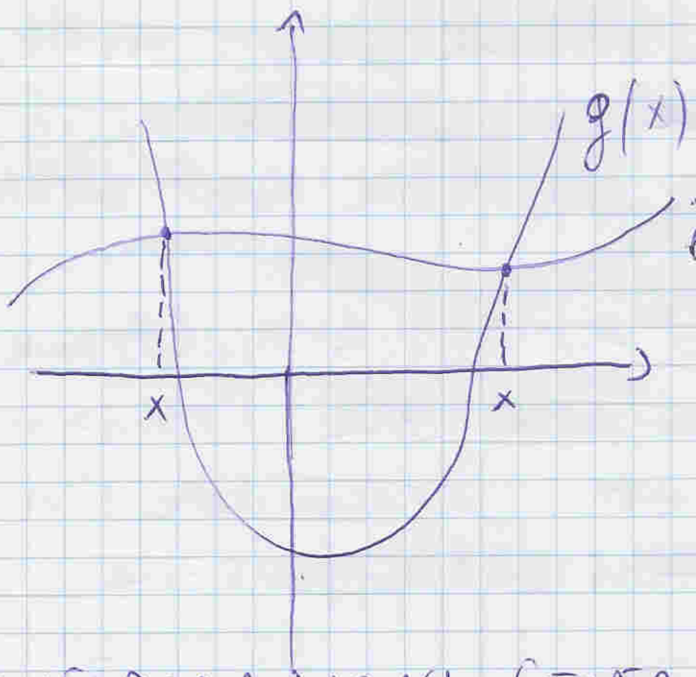
② Più in generale si può fissare un numero reale K e chiedersi se esistono dei punti x in cui $f(x)$ assume il valore K

$f(x) = K$

INSIEME DI LIVELLO K: $\{x : x \in \text{dom} f \text{ e } f(x) = K\}$



③ Un altro problema di natura più generale è quello di considerare due funzioni aventi un certo dominio comune e chiedersi se questi grafici hanno dei punti in comune.



Trovare i valori, sull'asse delle ascisse, in corrispondenza dei quali $f = g$;

$$f(x) = g(x)$$

CONSIDERAZIONI GENERALI PER INTRODURRE LE DISEQUAZIONI.

① Determinare qual è il sottoinsieme di dom f in cui la funzione f assume valori positivi (per esempio): $f(x) > 0$ (VEDI GRAFICO DI ESEMPIO)

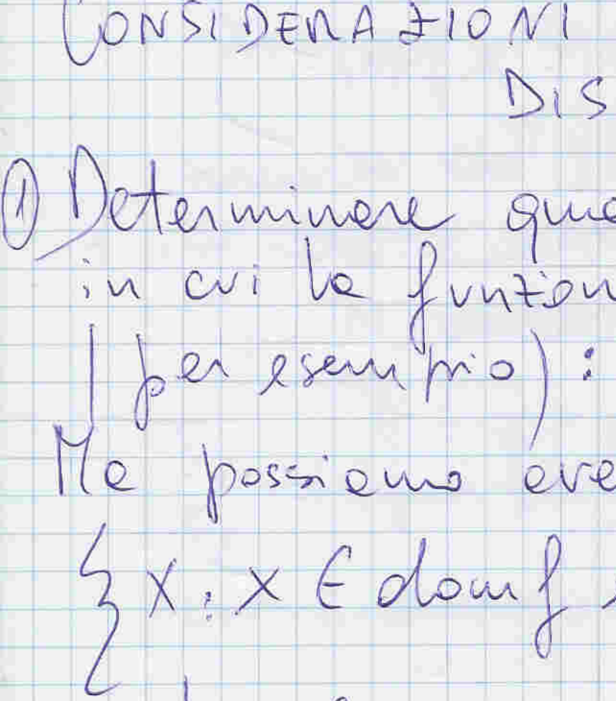
Ma possiamo avere tutti i casi seguenti:

$\{x : x \in \text{dom} f$ e $f(x) > 0$ INSIEME DI POSITIVITÀ

$f(x) < 0$ INSIEME DI NEGATIVITÀ

$f(x) \geq 0$ INSIEME DI NON NEGATIVITÀ

$f(x) \leq 0$ INSIEME DI NON POSITIVITÀ

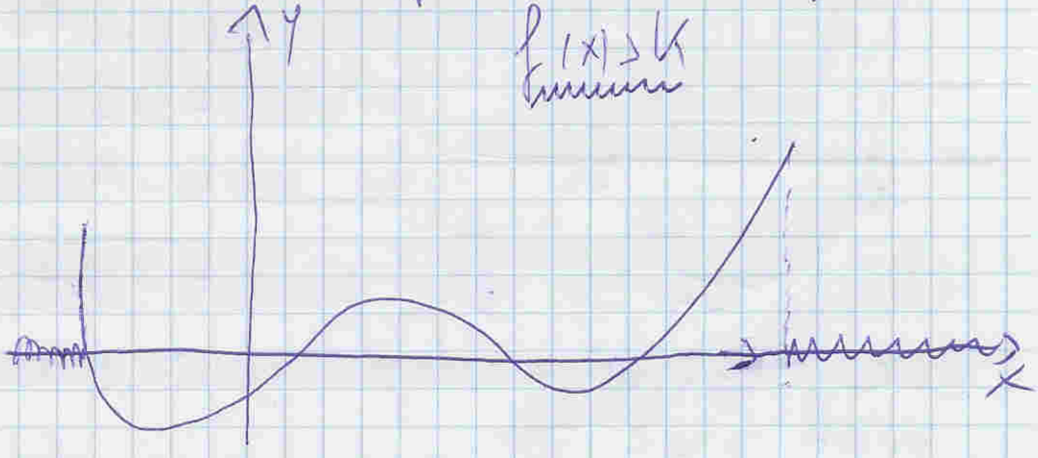


(2) Lo stesso discorso visto per le equazioni vale anche per le disequazioni ovvero fissato un valore K cerco il sottoinsieme di dom f in cui la funzione sia $f(x) > K$

$< K$

$\geq K$

$\leq K$

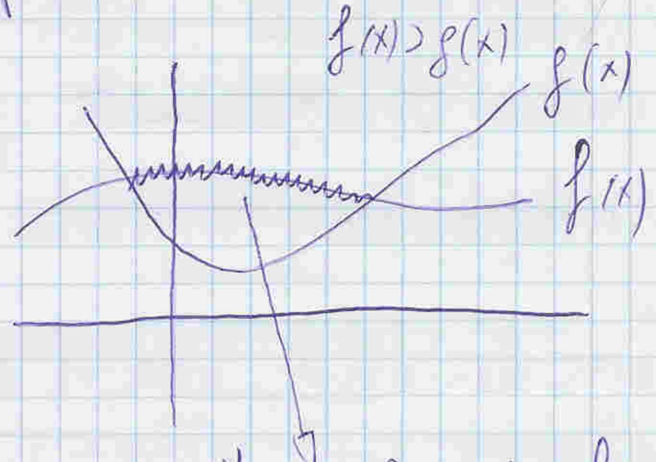


(3) Trovare quali sono i punti in cui vale la relazione $f(x) > g(x)$

$< g(x)$

$\geq g(x)$

$\leq g(x)$

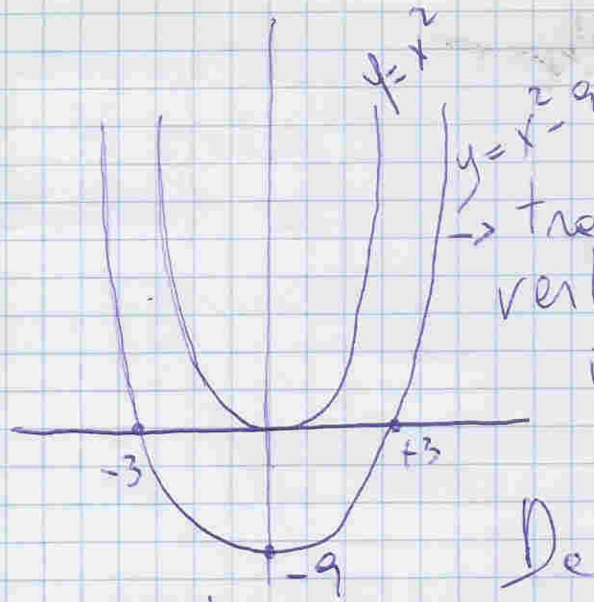


il grafico di f è tutto al di sopra del grafico di g -

Quindi abbiamo visto che costruire il grafico di una funzione può essere considerato il metodo di soluzione di equazioni e disequazioni -

Qui di seguito un esempio di soluzione di una equazione col metodo grafico -

Partiamo dell'equazione $y = x^2 - 9$



→ traslazione nelle y che porta il vertice nel punto -9. Le intersezioni con le ascisse si hanno nei punti $+3$, -3

Da quanto detto si può affermare che l'insieme degli zeri è costituito dai punti $\{-3, 3\}$

INSIEME DI POSITIVITÀ: $\{-\infty, -3\} \cup \{3, +\infty\}$

Ovvero i punti in cui la funzione assume valori strettamente positivi.

INSIEME DI NON POSITIVITÀ: $[-3, 3]$

Consideriamo, ora, il METODO ALGEBRICO facendo alcune considerazioni sui sistemi.

$$\begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)\leq 0 \end{cases}$$

Metterle "a sistema" significa considerare l'insieme delle soluzioni comuni. ~~Assetto~~ Risolvere la I^a equazione (o disequazione), la II^a equazione (o disequazione) e trovare l'intersezione di questi insiemi, cioè l'insieme degli "x" che soddisfano entrambe le condizioni.

Risolvere un sistema, quindi, significa trovare l'intersezione degli insiemi delle soluzioni delle singole equazioni o disequazioni.

PROPRIETÀ GENERALI DELLE EQUAZIONI

1. $f(x) = g(x)$
2. $\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x)$

Le equazioni 1 e 2 si dicono equivalenti se ogni soluzione di 1 è anche soluzione di 2 e viceversa.

Quando risolviamo algebricamente un'equazione, l'idea è di trasformarla in un'equazione equivalente più semplice di quella da cui siamo partiti. Partendo da 1, quali sono le operazioni per ottenere un'equivalente più semplice? Vediamo le regole.

1. $f(x) = g(x)$ Aggiungendo o sottraendo ad ambo i membri una stessa funzione, che sia definita nell'insieme di definizione comune di f e g, si ottengono equazioni equivalenti.

es. $f(x) = g(x) + h(x)$

$$f(x) - h(x) = g(x) + \cancel{h(x)} - \cancel{h(x)}$$

Si deduce che spostando un termine dell'equazione da un membro all'altro, si cambia di segno.

Infatti: $f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) = 0$

$f(x) = K \Rightarrow f(x) - K = 0$

Possono essere scritte portando tutto al primo membro.

Se abbiamo dei termini comuni possiamo semplificarli:

$$f(x) + \cancel{h(x)} = g(x) + \cancel{h(x)}$$

Equivale a dire che si sottrae $h(x)$ ad entrambi i membri oppure si porta da un membro all'altro $h(x)$ cambiandolo di segno e semplificandolo.

Dal punto di vista algebrico va fatta attenzione al dominio quando aggiungo ad entrambi i membri ad esempio dei termini frazionari:

es. $x^2 = 4$; supponiamo di aggiungere $+\frac{1}{x-2}$;

ottengo: $x^2 + \frac{1}{x-2} = 4 + \frac{1}{x-2}$ PASSAGGIO SCORRETTO!

E' un passaggio scorretto perché non mi ha trasformato l'equazione assegnata in una equazione equivalente perché la soluzione di quella di partenza è $\{-2, 2\}$ mentre l'altra col valore 2 perde di significato perché rende il denominatore nullo. L'errore che si è commesso è il seguente: l'equazione $x^2 = 4$ ha validità in tutto $\mathbb{R}$ mentre $+\frac{1}{x-2}$ ha validità in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ quindi si perde una soluzione.

2- Un'altra operazione per ottenere un'equazione equivalente è: moltiplicando o dividendo ambo i membri per una funzione "h" che sia definita nell'insieme comune di definizione di f e g e tale che $h(x) \neq 0$, si ottiene una equazione equivalente-

PROPRIETÀ GENERALI DELLE DISEQUAZIONI

① $f(x) > g(x)$ Aggiungendo o sottraendo ad
$< g(x)$ ambo i membri una stessa
$\geq g(x)$ funzione definita nell'insieme
$\leq g(x)$ comune del dom f e dom g, ottengo una disequazione equivalente-

② Moltiplicare o dividere ambo i membri per una medesima funzione definita nell'insieme comune dei domini e strettamente positiva, perché se moltiplichiamo per un termine strettamente negativo avremo un cambiamento del segno di disequazione - Quindi se moltiplichiamo per $h(x)$ e tale che $h(x) < 0$ (cioè risulti strettamente negativa), allora la nostra funzione $f(x) > g(x)$ risulta equivalente a:

$f(x)\, h(x) < g(x)\,(hx)$ SE ABBIAMO MOLTIPLICATO

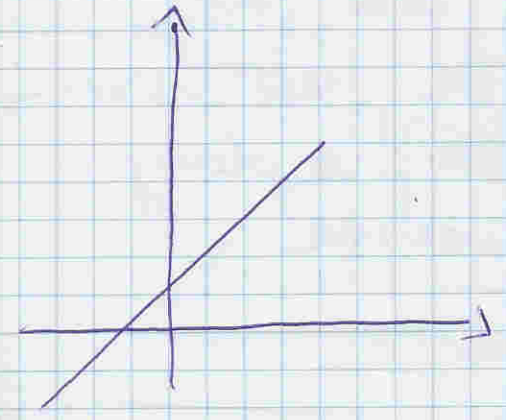
$\frac{f(x)}{h(x)} < \frac{g(x)}{h(x)}$ SE ABBIAMO DIVISO

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI DI I° GRADO LA CUI FUNZIONE E': $f(x) = ax + b$

Studiamo l'equazione: $ax + b = 0$

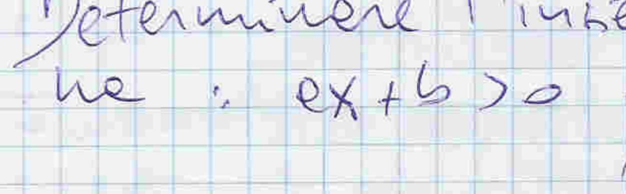
$\boxed{a = 0} \Rightarrow b = 0$
- se $b = 0$ l'insieme delle soluzioni è tutto $\mathbb{R}$
- se $b \neq 0$ $\emptyset$

$\boxed{a \neq 0} \Rightarrow ax + b = 0$; $\boxed{x = -\frac{b}{a}}$



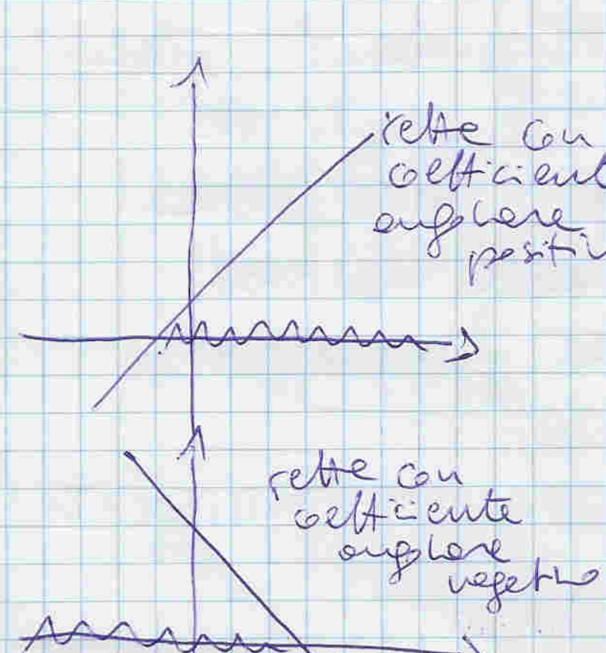
Graficamente
Trovare l'insieme degli zeri di queste rette -

Quando vogliamo studiare le disequazioni, dobbiamo fare attenzione al segno di "a" -
Determinare l'insieme degli x per cui si ha: $ax + b > 0$; $ax > -b$
- $a > 0 \Rightarrow x > -\frac{b}{a}$
- $a < 0 \Rightarrow x < -\frac{b}{a}$



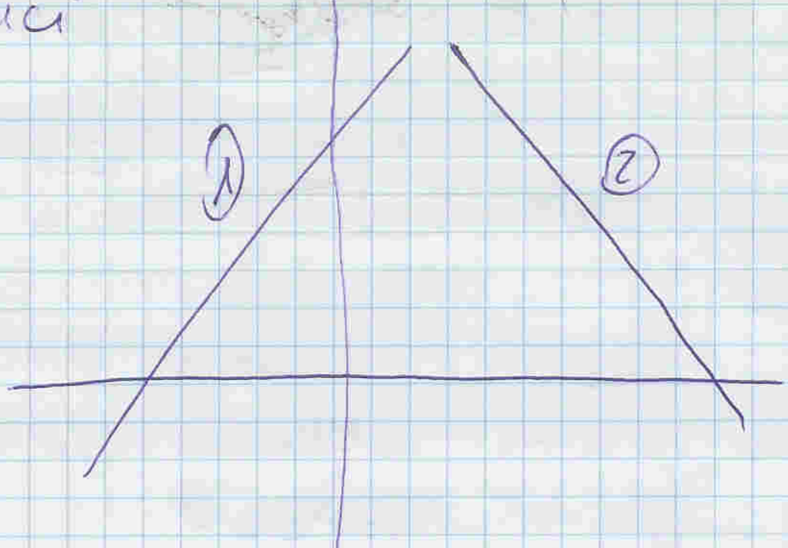
INSIEME DI POSITIVITA' è l'insieme degli $x > -\frac{b}{a}$

$x = -\frac{b}{a}$ VALORE IN CUI SI HA L'ANNULLAMENTO DELLA FUNZIONE



INSIEME DI POSITIVITA' è l'insieme degli $x < -\frac{b}{a}$

es. NUMERICI



1 Retta di equazione $y = 3x + 5$

Soluzioni dell'equazione (INSIEME DEGLI ZERI)

è $x = -\frac{5}{3}$

INSIEME DI POSITIVITÀ è la semiretta $\left(-\frac{5}{3}, +\infty\right)$

INSIEME DI NEGATIVITÀ è $\left(-\infty, -\frac{5}{3}\right)$

2 Retta di equazione $y = -2x + 7$

INSIEME DEGLI ZERI : $x = \frac{7}{2}$

INSIEME DI POSITIVITÀ: $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right)$

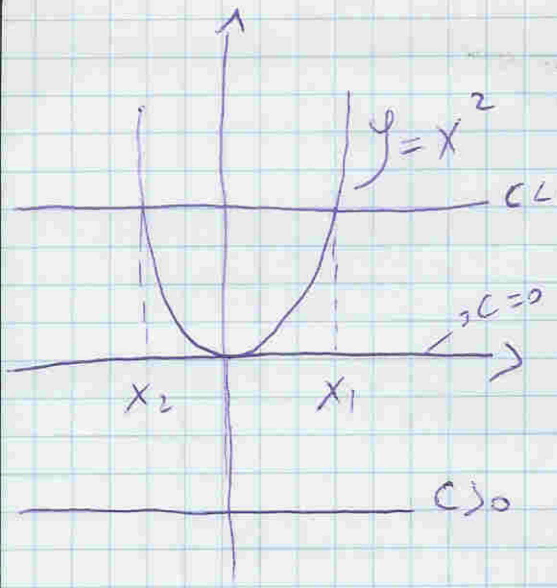
INSIEME DI NEGATIVITÀ $\left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI DI II° GRADO LA CUI FUNZIONE È $y = ax^2 + bx + c$

Studiamo l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$

$\boxed{a = 1}$, $\boxed{b = 0}$ $\Rightarrow x^2 + c = 0$; $\boxed{x^2 = -c}$

Si tratta di prendere la funzione $y = x^2$ e di studiarne gli insiemi di livello $-c$.



Se $c<0 \Rightarrow \boxed{-c}$ è positivo

l'insieme di livello $\boxed{-c}$ è dato da $x_1=\sqrt{-c}$ e $x_2=-\sqrt{-c}$

$c=0$ l'insieme di livello è costituito dalla sola origine quindi $x_1=x_2=0$

$c>0 \Rightarrow \boxed{-c}$ è negativo e quindi non ci sono soluzioni.

L'insieme di livello di $c<0$ è costituito da due punti simmetrici rispetto all'origine; dall'insieme $\emptyset$ nel caso di $c>0$ e dall'origine nel caso di $c=0$

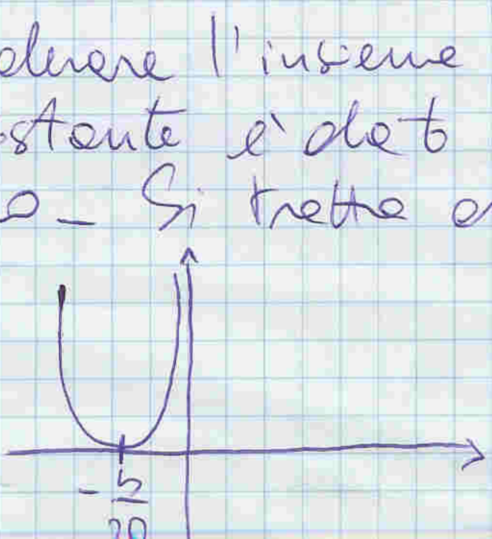
Affrontiamo, ora, un caso generale.

$$ax^2+bx+c=0 \; ; \; a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\boxed{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

È una parabola traslata in modo da avere il vertice nel punto $-\frac{b}{2a}$ di cui vogliamo considerare l'insieme di livello dove il valore della costante è dato dall'espressione nel riquadro. Si tratta di risolvere

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=K$$



Lo studio ~~più~~ di questa equazione dipende dal segno del secondo membro e visto che il denominatore è sempre positivo, dipende dal segno del numeratore.

$\Delta = b^2 - 4ac$ DISCRIMINANTE DELL'EQUAZIONE

$\Delta > 0$ la costante è positiva e quindi abbiamo da trovare l'insieme di livello di una costante positiva. Si tratta di due soluzioni:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Formule per la soluzione di equazioni di II° grado.

$\Delta = 0$; $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

$\Delta < 0$; $\emptyset$ l'equazione non ha soluzioni reali.

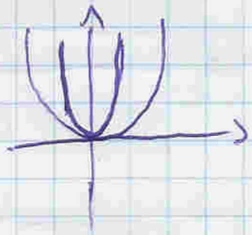
NOTAZIONI: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

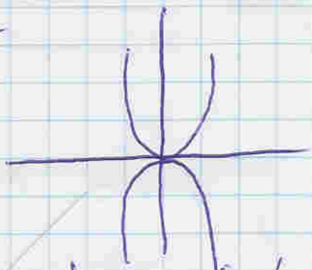
Nelle disequazioni di II° grado, dal punto di vista geometrico, ci rivolgiamo allo studio della funzione $y = ax^2 + bx + c$ ovvero di una parabola con vertice in $(p, q) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ come visto nelle scorse lezioni –

"a" mi dà l'operazione di dilatazione o affinità $(k = a)$ –

Se $a > 0$ l'effetto è quello di rendere la parabola più stretta o più larga

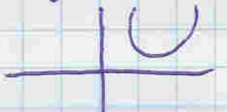


Se $a < 0$ l'effetto è quello di passare da una parabola alla sua capovolta



Il segno di "a" mi dà una parabola con concavità verso l'alto o verso il basso –
La relazione tra "Δ" ed "a" mi dice ovvero l'ordinata del vertice –

Supponiamo $a > 0$ (concavità verso l'alto)
$\Delta < 0$
Avremo una parabola con vertice in una ordinata positiva – I valori assunti dalla funzione $ax^2 + bx + c$ sono tutti valori strettamente positivi –



Se stiamo svolgendo una disequazione $ax^2+bx+c>0$ significa che in tutto il dom f si assumono valori positivi, ~~R~~ quindi l'insieme delle soluzioni è costituito dai numeri reali $\mathbb{R}$.

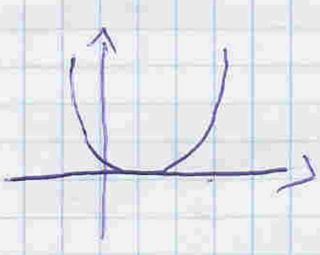
~~Se~~ Stessa considerazione se si pone ≥ 0.

Se, invece, poniamo $ax^2+bx+c<0$ / ≤ 0 abbiamo che non sono mai soddisfatte.

In questi ultimi due casi l'insieme delle soluzioni è l'insieme vuoto $\emptyset$

~~Se~~ ~~$\Delta<0$~~

Se $\Delta=0$



esiste un punto in cui la funzione si annulla ed in tutti gli altri casi è positivo

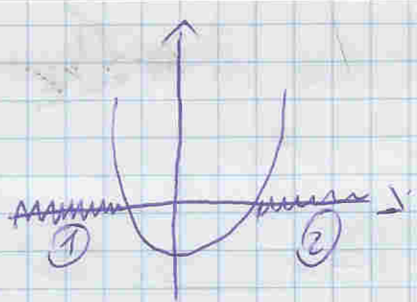
Se $\Delta>0$

il vertice è strettamente negativo.

Prendiamo in considerazione l'ultimo esempio con $\Delta>0$ per vedere graficamente l'insieme delle soluzioni delle disequazioni ax^2+bx+c >0, <0, ≥ 0, ≤ 0

$\Delta > 0$

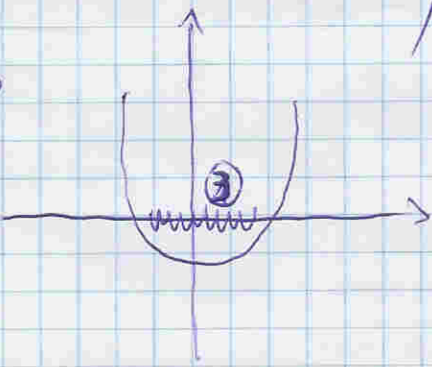
$ax^2+bx+c>0$



L'insieme delle soluzioni è costituito dall'unione delle due semirette 1 e 2 (semirette aperte).

$ax^2+bx+c\geq 0$ alle semirette precedenti aggiungiamo anche i punti di intersezione della parabola con l'asse delle ascisse (semirette chiuse)

$ax^2+bx+c<0$



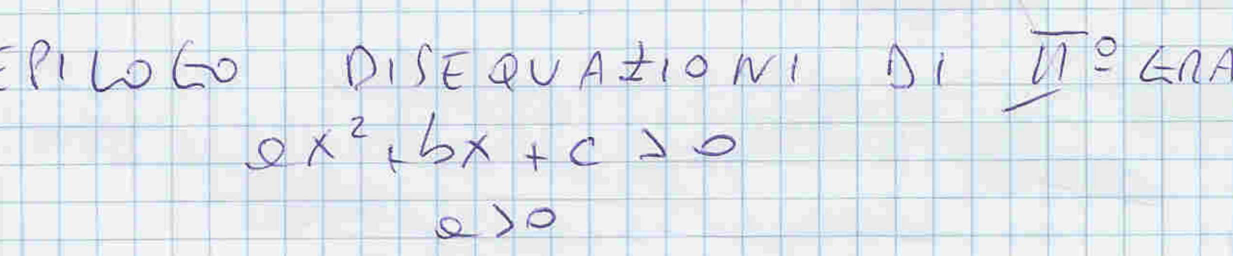
L'insieme di negatività è costituito dal segmento 3 aperto

$ax^2+bx+c\leq 0$ L'insieme di non positività è costituito dal segmento 3 chiuso.

RIEPILOGO DISEQUAZIONI DI II° GRADO

$ax^2+bx+c>0$

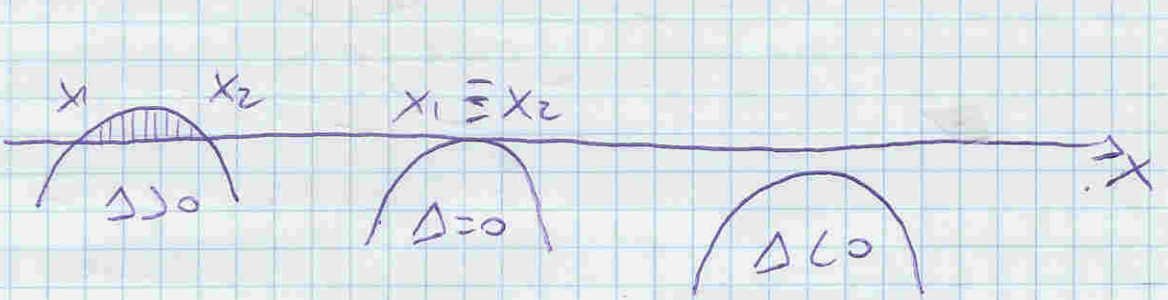
$a>0$



(esclusi dal grafico i punti in cui si annulla)

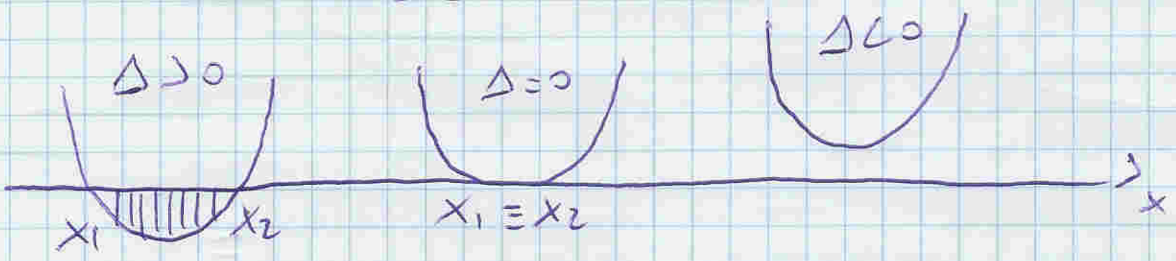
$ax^2+bx+c>0$

$a<0$



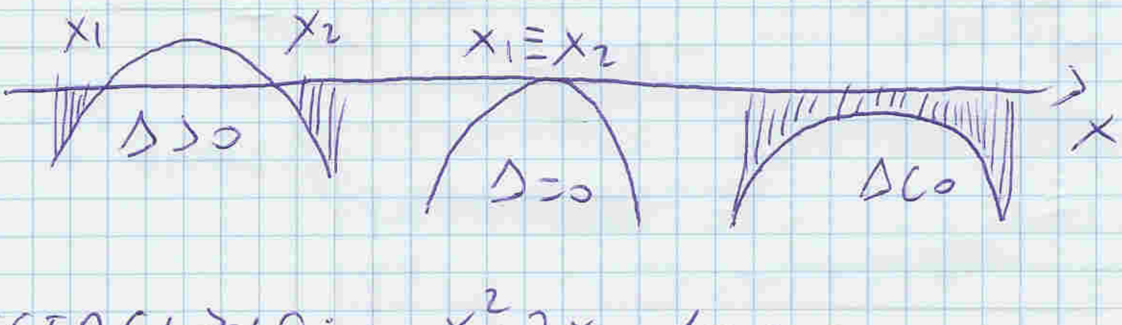
$ax^2+bx+c<0$

$a>0$



$ax^2+bx+c<0$

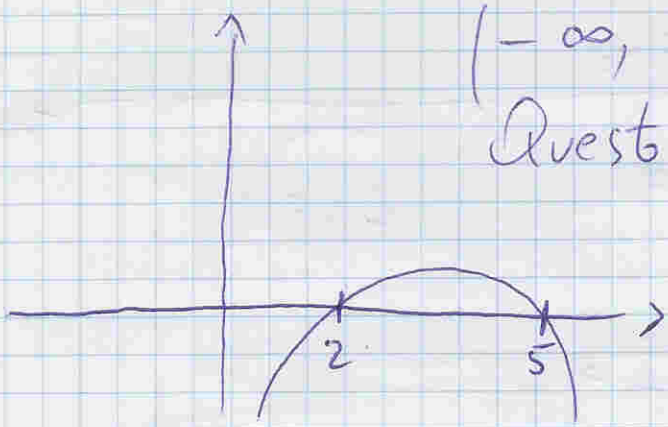
$a<0$



ESERCIZIO: $-x^2+7x-10\leq 0$

"a" è un coefficiente negativo quindi la concavità della parabola sarà verso il basso. Cercherò i punti in cui la funzione ~~assume~~ assume valore nullo (soluzione dell'equazione). Si risolve l'equazione $-x^2+7x-10=0$ e si scopre che le soluzioni sono i punti 2 e 5.

Si tratta di una parabola e dato che ci interessano i punti in cui assume valori ≤ 0 abbiamo come soluzione le semirette



$(-\infty, 2] \cup [5, +\infty)$.

Questo appena sopra è l'insieme delle soluzioni di questa disequazione.