EQUAZIONI E DISEQUAZIONI

Abbiamo la funzione $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ il cui dominio è $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$. Le soluzioni
$c \neq 0$; $ad-bc \neq 0$
dell'equazione e disequazione vanno ricercate nel dominio.
Il grafico abbiamo visto essere una iperbole ottenibile da $y = \frac{1}{x}$ mediante operazioni di affinità (simmetrie e traslazioni)
Vogliamo studiare, ora, il problema di determinare le soluzione dell'equazione $\frac{ax+b}{cx+d} = 0$ e delle disequazione $\frac{ax+b}{cx+d} > 0$

Per quanto riguarda l'equazione è sufficiente trovare il valore x per cui si annulla il numeratore: $x = -\frac{b}{a}$
Per quanto riguarda la disequazione, vediamo di studiarla sia graficamente costruendo il grafico della funzione, che algebricamente.
Alcune considerazioni: nel caso di $\frac{ax+b}{cx+d} > 0$

avremo che il quoziente sarà positivo quando numeratore e denominatore sono concordi.

L'insieme per cui vale la disequazione è visto come l'unione di altri due insiemi:
- il primo risolve la disequazione

(1) $\begin{cases} ax+b>0 \\ cx+d>0 \end{cases}$ contemporaneamente. Va presa, cioè, l'intersezione fra i due insiemi di soluzioni

il secondo risolve le disequazioni:

(2) $\begin{cases} ax+b<0 \\ cx+d<0 \end{cases}$ sempre contemporaneamente

Abbiamo quindi: $\begin{cases} ax+b>0 \\ cx+d>0 \end{cases} \cup \begin{cases} ax+b<0 \\ cx+d<0 \end{cases}$

Qui di seguito un esempio di disequazione in cui troviamo l'insieme delle soluzioni sia in maniera grafica che algebrica.

es. $h(x) = \dfrac{3x-1}{x+4} \leq 0$

Abbiamo la funzione $h(x)$ e dobbiamo determinare l'insieme dei punti in cui la funzione è ≤ 0.
Dapprima risolviamo l'equazione per trovare gli zeri. $h(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

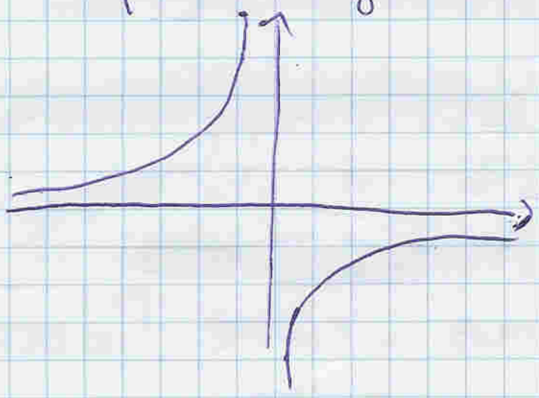
Per rappresentare graficamente la funzione h devo fare la divisione $3x - 1 : x + 4$ ed ottengo come quoziente 3 e come resto -13

Quindi $h(x) = 3 - \frac{13}{x+4}$

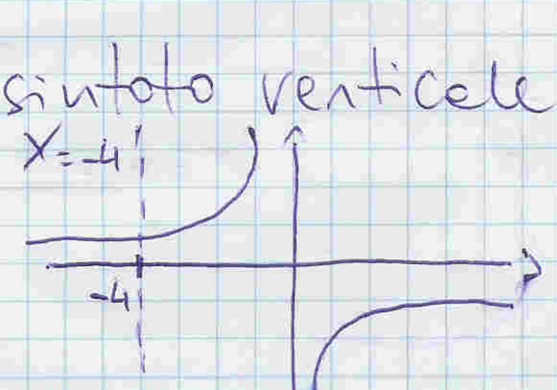
Abbiamo, quindi, che partendo dall'iperbole $y = \frac{1}{x}$ arriviamo al grafico della nostra disequazione con le seguenti trasformazioni del piano:

da $y = \frac{1}{x}$ arrivo a $y = -\frac{13}{x}$

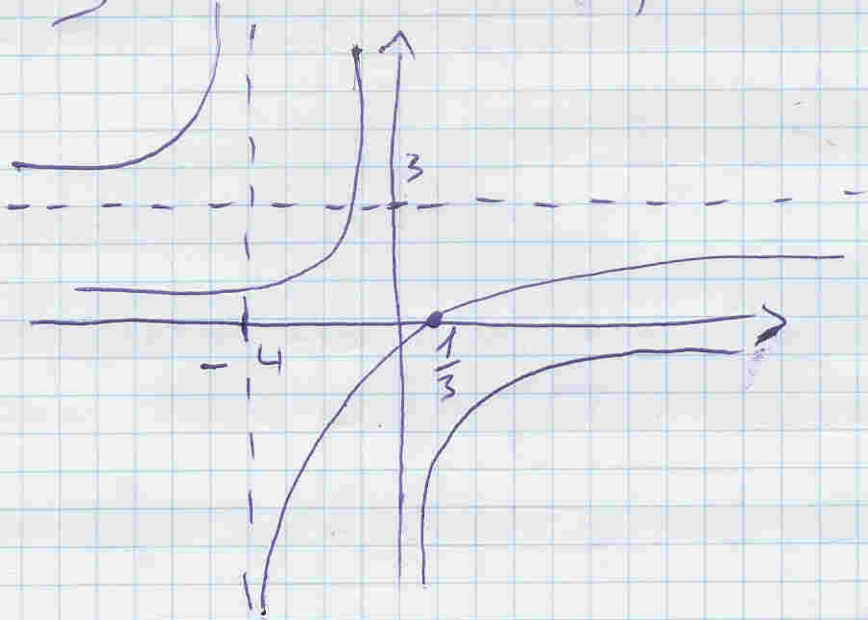
Il segno "−" indica una simmetria ed il "13" una dilatazione. Avremo un grafico di questo genere:



Successivamente operiamo una traslazione dove otteniamo $y = -\frac{13}{x+4}$ che mi porta l'asintoto verticale nella retta $x = -4$



Ed infine abbiamo traslare nella direzione delle y sommando la quantità 3.



Quindi dovendo determinare le soluzioni in cui abbiamo ≤ 0, dal grafico si può notare che la funzione assume valori ~~negat~~ negativi ~~che~~ quando la "x" sta nell'intervallo $x = -4$ (posizione in cui troviamo l'asintoto verticale) e $x = \frac{1}{3}$ (intersezione con l'asse delle x)

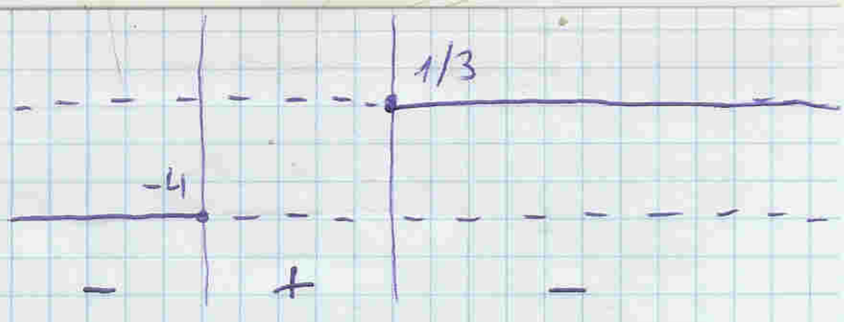
L'insieme delle soluzioni, quindi, è dato dall'intervallo $-4, \frac{1}{3}$ in cui è escluso il valore -4 ed è compreso il valore $\frac{1}{3}$ perchè quest'ultimo risolve l'equazione.

Algebricamente si risolve così:

$h(x) = 0 \; ; \; x = \frac{1}{3}$

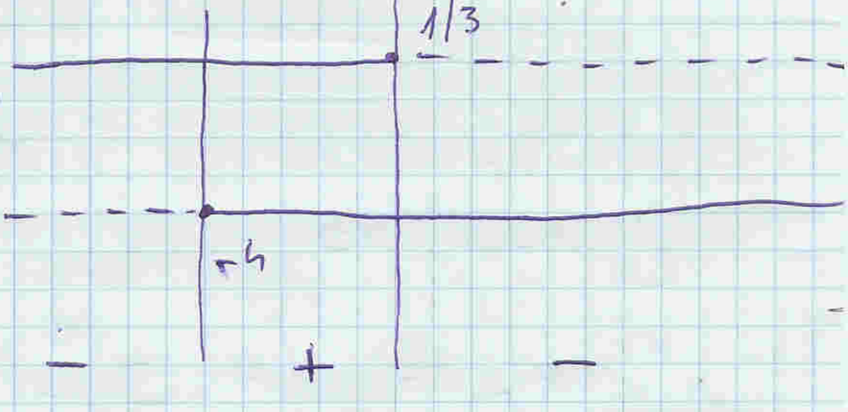
$$h(x) < 0 \; ; \; \begin{cases} 3x - 1 > 0 \\ x + 4 < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 3x - 1 < 0 \\ x + 4 > 0 \end{cases}$$

① $\begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x < -4 \end{cases}$ $\varnothing$



$\cup$

② $\begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ x > -4 \end{cases}$ $\left(-4, \frac{1}{3}\right)$



Nel caso ① l'insieme delle soluzioni è $\varnothing$ perchè non si verificano contemporaneamente le condizioni di essere $> \frac{1}{3}$ e < -4

Nel caso ② l'insieme delle soluzioni è $\left(-4, \frac{1}{3}\right)$ e quindi faccio l'unione dei due insiemi ed ottengo $\varnothing \cup \left(-4, \frac{1}{3}\right) = \left(-4, \frac{1}{3}\right)$

Considerando che la soluzione dell'equazione era $\frac{1}{3}$ concludiamo che la soluzione della nostra disequazione è data da:

$$\left[-4, \frac{1}{3}\right]$$

DISEQUAZIONI POLINOMIALI DI 2° GRADO

$$h(x) = \frac{x^2-3x-10}{1-x^2} \geq 0$$

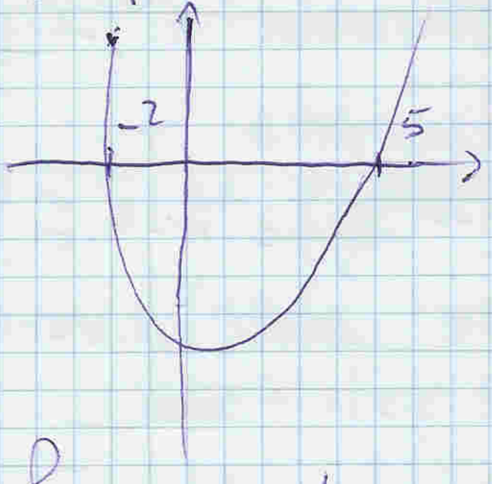
$h(x)=0$; $\boxed{x=-2}$; $\boxed{x=5}$ SOLUZIONI DELLA EQUAZIONE

$$\begin{cases} x^2-3x-10>0 \\ 1-x^2>0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2-3x-10<0 \\ 1-x^2<0 \end{cases}$$

$$x^2-3x-10 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{49}{4}$$

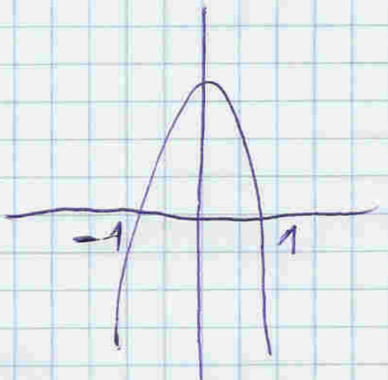
È una parabola con vertice nel punto $V=\left(\frac{3}{2}, -\frac{49}{4}\right)$ e concavità verso l'alto -

I punti in cui si annulla sono $\boxed{-2, 5}$

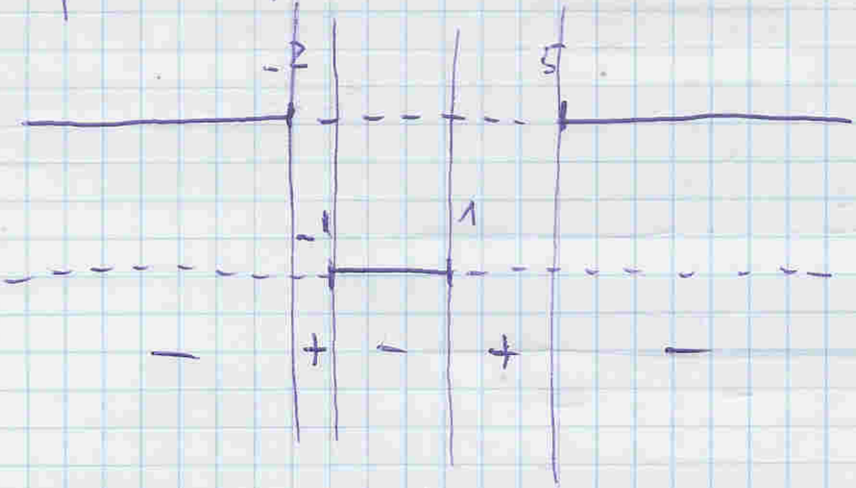


Avremo segno positivo per valori esterni all'intervallo cioè <-2, >5

Per quanto riguarda il denominatore



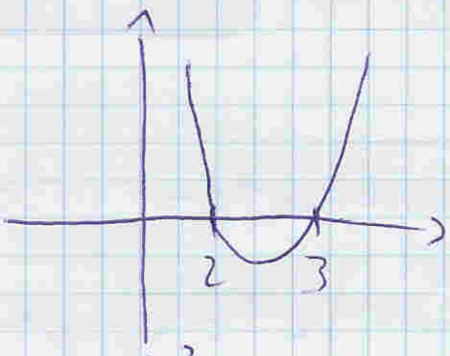
A questo punto si avrà:



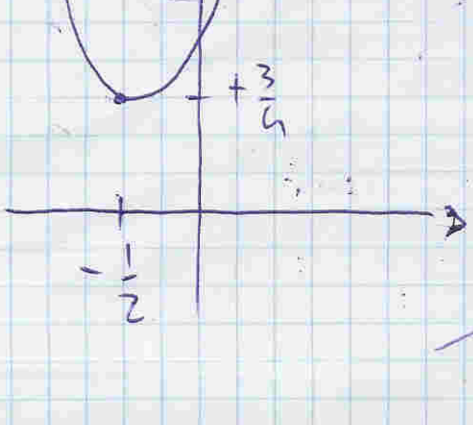
Dato che ci interessano > 0, l'insieme delle soluzioni è $(-2, -1) \cup (1, 5)$.
Tenendo conto delle soluzioni dell'equazione le soluzioni sono $[-2, -1) \cup (1, 5]$.

es. $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x + 1} \leq 0$ $\quad f(x) = 0$; $x^2 - 5x + 6 = 0$; $\boxed{x = 2,\ x = 3}$

Numeratore: $x^2 - 5x + 6$



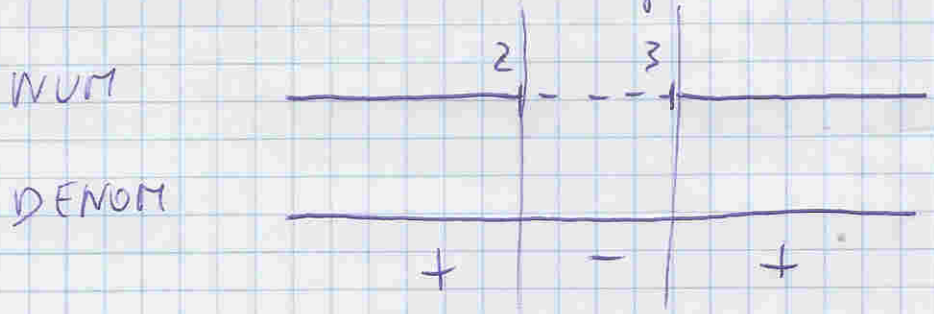
Denominatore: $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$



Dal grafico si può notare che la funzione è sempre strettamente positiva

In questo caso, allora, essendo

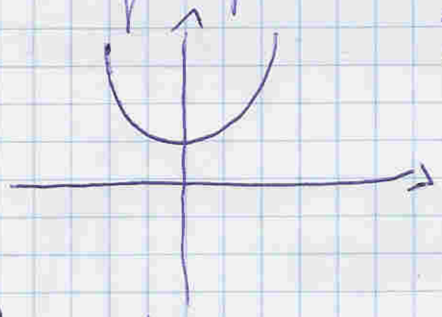
x^2+x+1 una quantità positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$, il segno della funzione f coincide con il segno del solo numeratore.



Dato che mi interessa ≤ 0 ho che le soluzioni sono $x = [2, 3]$

es. $f(x) = \dfrac{2x^2+2x+1}{9x^2+1} \Rightarrow$ funzione sempre strettamente positiva

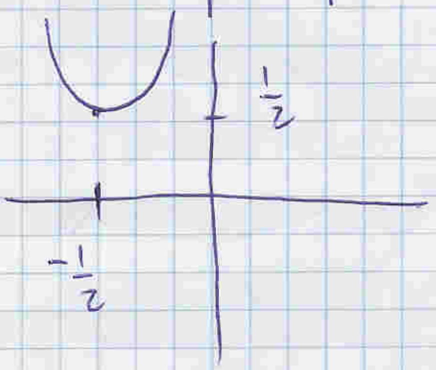
Avremo un grafico di questo tipo: guardando il denominatore



Il numeratore posso scriverlo come:

$$2(x^2+x)+1 = 2\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]+1 = 2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

Ed avremo un grafico del tipo:



Per cui sia al numeratore che al denominatore avremo due funzioni strettamente positive.

Per cui se abbiamo ad esempio:

$\frac{2x^2+2x+1}{9x^2+1} \leq 0$ l'insieme delle soluzioni è ϕ

Se abbiamo

$\frac{2x^2+2x+1}{9x^2+1} \geq 0$ l'insieme delle soluzioni è $\mathbb{R}$

EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL 2°

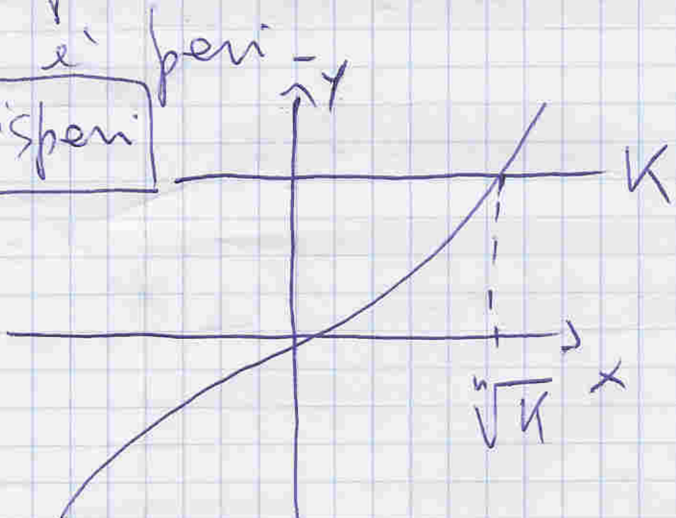
$x^n = K \quad n \geq 3 \quad K \in \mathbb{R}$

Si traccia il grafico della funzione $\boxed{y = x^n}$ e si studia l'insieme di livello K

Si prende, cioè, su y il valore K e si cercano le intersezioni tra il grafico e la retta $y = K$.

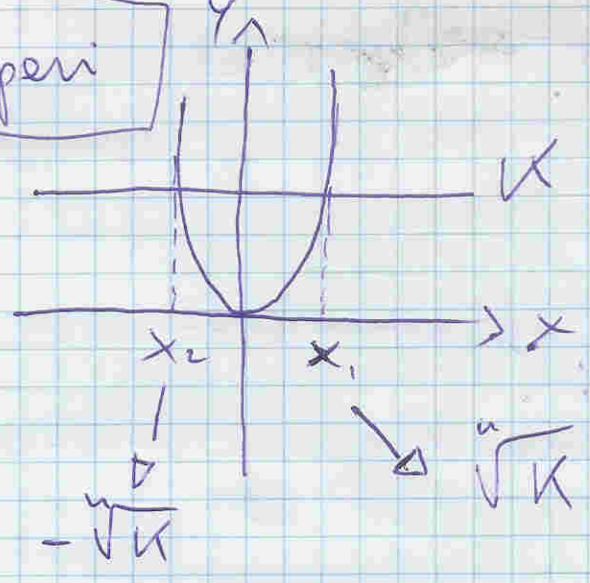
Distinguiamo i casi in cui "n" è dispari e "n" è pari.

$\boxed{\text{"n" dispari}}$



Per ogni valore K esiste una ed una sola intersezione. 1 sola soluzione per ogni valore di K.

"n" pari



- Con $K<0$ non ci sono soluzioni
- Con $K=0$ si ha una sola soluzione ovvero $x=0$
- Con $K>0$ si hanno 2 soluzioni simmetriche rispetto all'origine.

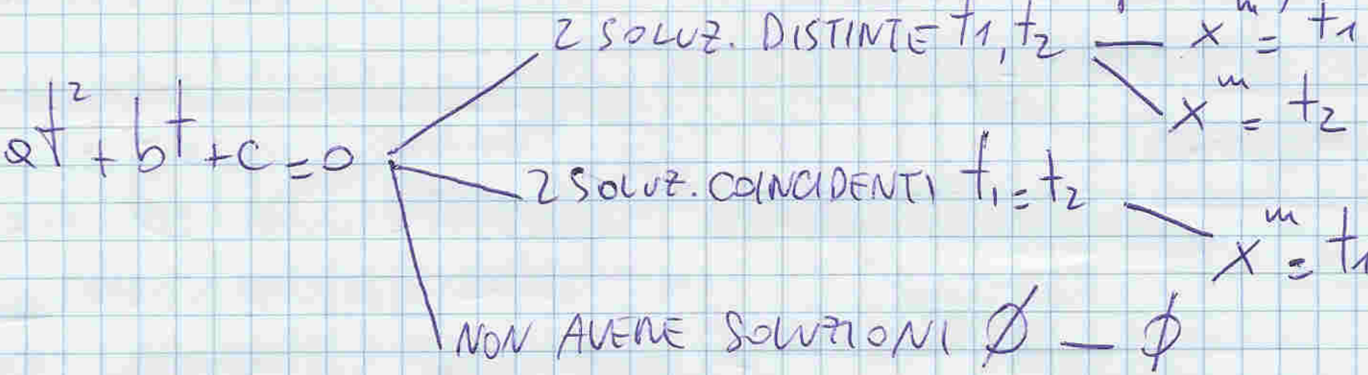
Proviamo a risolvere qualche equazione di grado superiore al secondo.

$$ax^{2n}+bx^{n}+c=0$$

$a,b,c \in \mathbb{R}$ $\quad n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Ci possiamo ricondurre, tramite sostituzione, alle situazioni viste precedentemente.
Risolviamo tramite sostituzione: $t=x^n$

avremo: $at^2+bt+c=0$ (otteng. equazione di 2° grado).



Vediamo alcuni esempi.

$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$\boxed{x^2 = t}$ $\quad t^2 - 3t - 4 = 0$

$\begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = 4 \end{cases}$ INSIEME DELLE SOLUZIONI DELL'EQUAZ. IN t

Quindi tenendo conto che $x^2 = t$ otteniamo:

$x^2 = -1 \quad \Rightarrow$ NON HA SOLUZIONI

$x^2 = 4 \quad \Rightarrow \{\pm 2\}$ SOLUZIONI

Altro esempio:

$x^6 + 12x^3 + 36 = 0 \quad ; \quad \boxed{x^3 = t}$

$t^2 + 12t + 36 = 0 \quad ; \quad (t+6)^2 = 0 \quad ; \quad t = -6$

$x^3 = -6 \quad ; \quad x = \sqrt[3]{-6}$ SOLUZIONE

Ultimo esempio:

$x^{10} + 2x^5 + 6 = 0 \quad ; \quad \boxed{x^5 = t}$

$t^2 + 2t + 6 = 0 \quad ;$ In questo caso il discriminante $4 - 4 \cdot 6 < 0$ quindi non ci sono soluzioni.

Ci sono casi in cui, polinomi superiori al secondo, riusciamo a scriverli come prodotto di fattori di primo e secondo grado.

es.

$f(x) = (x^2 - 3x + 1)(x^2 - 2x)$

Vogliamo trovare i punti in cui $f(x) = 0$ ed $f(x) > 0$

Si tratta di equazione e disequazione di quarto grado scritte già come prodotto di termini di secondo grado. Siamo in ~~grado~~ grado di risolvere entrambe le funzioni in questa maniera: per quanto riguarda l'equazione, per la legge dell'annullamento del prodotto, avremo che $(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 2x) = 0$ se uno dei fattori è nullo. Quindi risolveremo la I^a equazione di secondo grado $(x^2 - 3x + 1) = 0$ la II^a equazione di secondo grado $(x^2 - 2x) = 0$ e prendiamo come soluzioni dell'equazione di quarto grado, l'unione dei due insiemi.

Allo stesso modo ragioniamo per la disequazione $(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 2x) > 0$. I fattori devono essere concordi e la soluzione sarà scrivibile tramite sistemi di disequazioni di secondo grado del tipo:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 1 > 0 \\ x^2 - 2x > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 3x + 1 < 0 \\ x^2 - 2x < 0 \end{cases}$$