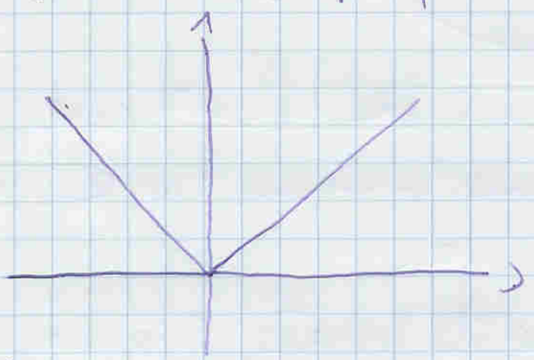
Equazioni e Disequazioni col valore assoluto

Il concetto di valore assoluto, per esempio di x, può essere riassunto con queste diciture:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Il grafico di $|x|$ è di questo tipo:

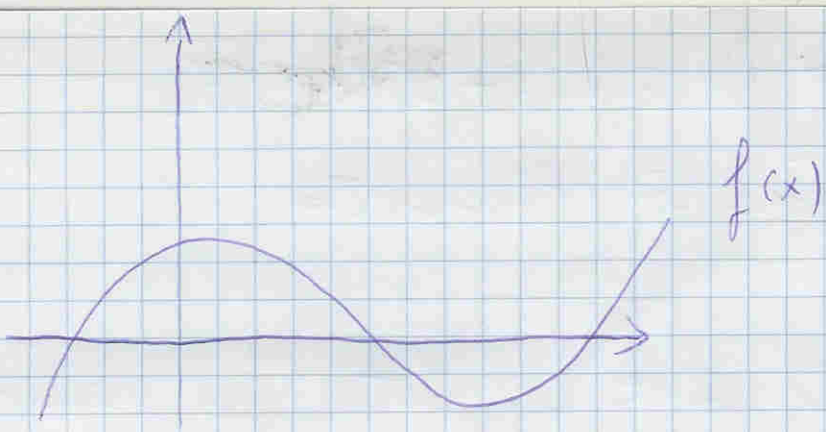


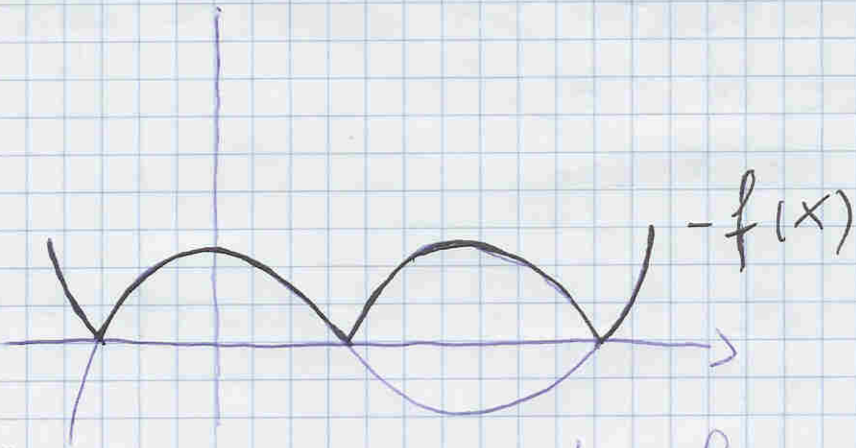
Per quanto riguarda una funzione $f(x)$ si può scrivere:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Il grafico della funzione "valore assoluto" coincide col grafico della funzione "$f(x)$" nei punti in cui la funzione è ≥ 0 ed il grafico della funzione $-f(x)$ è deducibile dal grafico di $f(x)$ con una opportuna simmetria rispetto all'asse delle ascisse.

Vediamone un esempio qui in seguito:





Negli insiemi in cui la funzione è negativa abbiamo operato una simmetria rispetto all'asse delle ascisse.

Quindi, fino a questo punto, siamo in grado di tracciare i grafici di

FUNZIONI LINEARI: $y = ax + b$

QUADRATICHE: $y = ax^2 + bx + c$

OMOGRAFICHE: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

E quindi siamo in grado di tracciare i rispettivi grafici delle rispettive funzioni "valore assoluto":

$$y = |ax+b| \; ; \; y = |ax^2+bx+c| \; ; \; y = \left|\frac{ax+b}{cx+d}\right|$$

$|$ EQUAZIONI $|$

$|f(x)| = c$ Non ha soluzioni se $c < 0$

Quindi devo porre $\boxed{c \geq 0}$

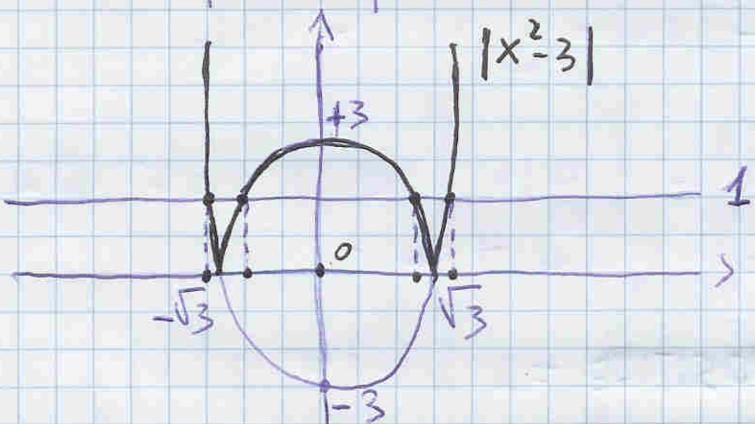
Definiamo: $Pf = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0\}$ INS. DI NON NEGAT.

$Nf = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < 0\}$ INS. DI NEGATIVITÀ

Se consideriamo $c \geq 0$ ho quanto segue:

$$|f(x)| = c \begin{cases} \boxed{f(x) = c} & \text{se ci troviamo in } Pf \\ \boxed{-f(x) = c} & \text{se ci troviamo in } Nf \end{cases}$$

ESEMPIO: $|x^2 - 3| = 1$



Ottengo, graficamente, quattro punti (soluzioni) simmetrici rispetto ad "O".

Geometricamente opero così:

$|x^2 - 3| = 1$

- $x^2 - 3 = 1$ in $Pf \Rightarrow (-\infty, -\sqrt{3}) \cup [\sqrt{3}, +\infty)$

  $x^2 = 4$; $\boxed{x_1 = -2}$; $\boxed{x_2 = 2}$

- $3 - x^2 = 1$ in $Nf \Rightarrow (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

  $x^2 = 2$; $\boxed{x_3 = -\sqrt{2}}$, $\boxed{x_4 = \sqrt{2}}$

ESEMPIO:

$|f(x)| = g(x)$

Se $g(x) < 0$ non ci sono soluzioni dell'equazione in dom g

Se $g(x) \geq 0$ $\begin{cases} f(x) = g(x) \text{ in } Pf \\ -f(x) = g(x) \text{ in } Nf \end{cases}$

Nel caso di: $|f(x)| = |g(x)|$ i casi da considerare sono quattro:

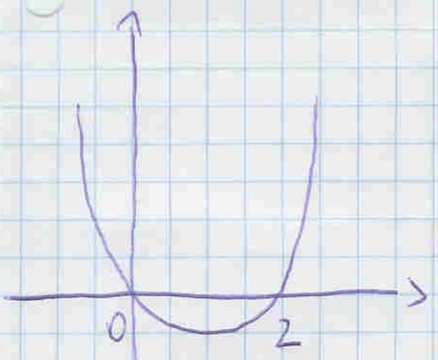
$Pf \cap Ng$ (ENTRAMBE **POSITIVE**) $\Rightarrow f(x) = g(x)$

$Nf \cap Ng$ (ENTRAMBE NEGATIVE) $\Rightarrow -f(x) = -g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$

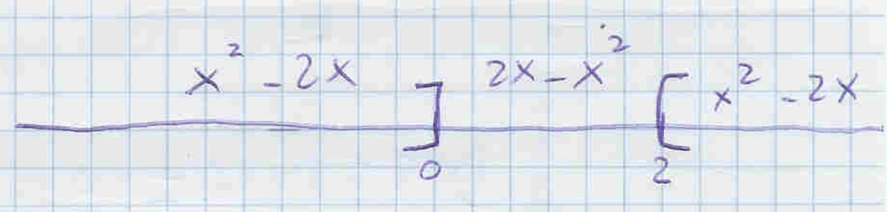
$Pf \cap Ng$ (POSITIVA f, NEGATIVA g) $\Rightarrow -f(x) = g(x)$

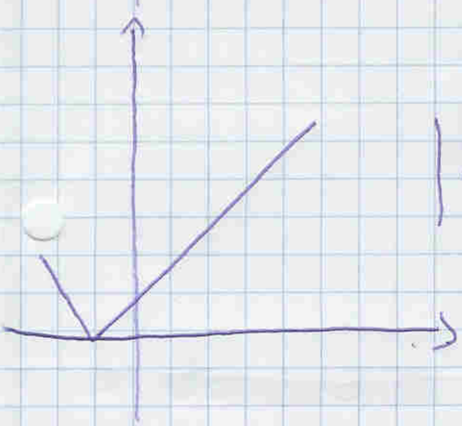
$Nf \cap Pg$ (NEGATIVA f, POSITIVA g) $\Rightarrow -f(x) = g(x)$

$$|x^2-2x| = \left|\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right|$$

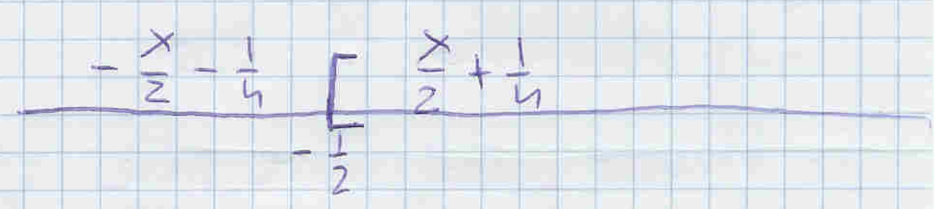


$|x^2-2x|$





$\left|\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right|$



$$x^2-2x = -\frac{x}{2}-\frac{1}{4} \quad \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2-2x = \frac{x}{2}+\frac{1}{4} \quad \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$$

$$2x-x^2 = \frac{x}{2}+\frac{1}{4} \quad (0, 2)$$

$$x^2-2x = \frac{x}{2}+\frac{1}{4} \quad [2, +\infty)$$

Dunque il nostro problema si riduce a risolvere l'equazione $x^2-2x = -\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$ tenendo valide solo le soluzioni che capitano nell'insieme $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, 2)$ ed a risolvere l'equazione $x^2-2x = \frac{x}{2}+\frac{1}{4}$ tenendo buone le soluzioni che capitano nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cup [2, +\infty)$

Il risultato è che abbiamo quattro soluzioni accettabili: $\frac{5 \pm \sqrt{29}}{4}$, $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}$

DISEQUAZIONI

$|f(x)| \leq K$ $\boxed{\text{idem per } |f(x)| < K}$

Consideriamo $K \geq 0$

Se $K = 0$ vuol dire che stiamo andando a studiare la funzione $|f(x)| \leq 0$ e siccome $f(x)$ non può mai essere strettamente minore di zero, vorrà dire che rimane solo il caso $f(x) = 0$

Se $K > 0$ $|f(x)| \leq K$ si traduce così:

$f(x) \leq K$ in $Pf \Rightarrow \boxed{0 \leq f(x) \leq K}$

$-f(x) \leq K$ in $Nf \Rightarrow \boxed{-K \leq f(x) < 0}$

esempio:

$$|x-7| \le 3 \quad \begin{cases} ① \; 0 \le x-7 \le 3 \\ ② \; -3 \le x-7 < 0 \end{cases}$$

① $0 \le x-7 \Rightarrow x \ge 7$

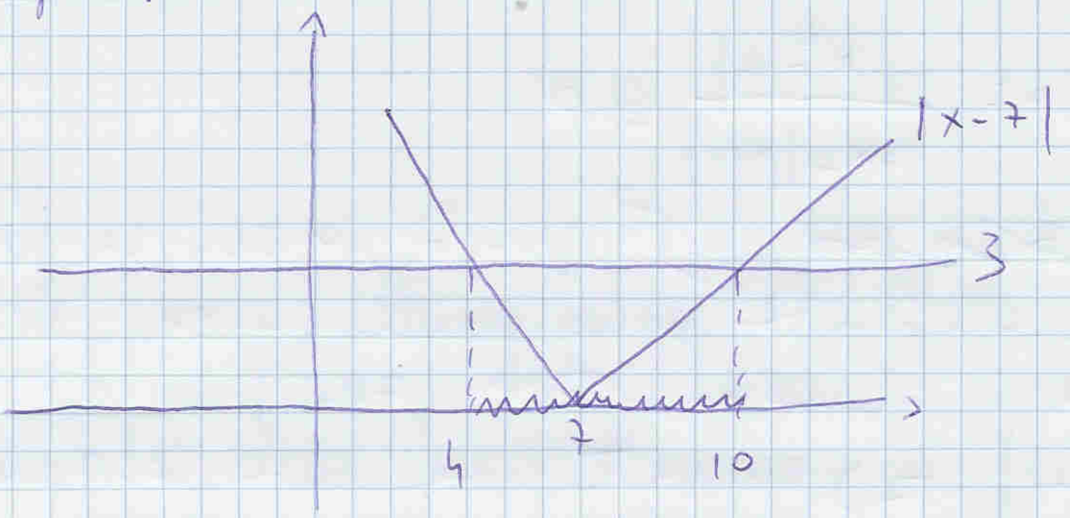
$x-7 \le 3 \Rightarrow x \le 10$ $\quad \Rightarrow [7, 10]$

② $x-7 < 0 \Rightarrow x < 7$

$-3 \le x-7 \Rightarrow x \ge 4$ $\quad \Rightarrow [4, 7)$

Soluzioni: $[7, 10] \cup [4, 7) \Rightarrow [4, 10]$

Il grafico delle soluzioni è il seguente:



$\left| f(x) \right| \geq K$

Se $K \leq 0$ il modulo di $f(x) \geq$ di un numero strettamente negativo è sempre vero: la soluzione è l'intero dom f.

Se $K > 0$ $\longrightarrow$ in Pf: $f(x) \geq K$

$\searrow$ in Nf: $-f(x) \geq K \Rightarrow f(x) \leq -K$

esempio: $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| > 3$

$\frac{x-1}{x+1} > 3 \Rightarrow (-2, -1)$

$\frac{x-1}{x+1} < -3 \Rightarrow \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

esempio: $\frac{|x^2-4|}{3x-|x+1|} \leq 0$

~~Espositori~~ I punti in cui la funzione non è definita sono quelli in cui si annulla il denominatore (zeri).

$3x = |x+1| \Rightarrow$ ammette come unica soluzione $\frac{1}{2}$

Quindi il dom $f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

$f(x) = 0$ se $|x^2-4| = 0$, $\boxed{x_1 = -2}$, $\boxed{x_2 = 2}$

$f(x) < 0$: dipenderà dal denominatore perché il numeratore è sempre positivo

Quindi:

$$3x - |x+1| < 0$$

$$3x < |x+1|$$

$3x < x+1$ in $[-1, +\infty)$

$3x < -x-1$ in $(-\infty, -1)$

L'insieme delle soluzioni è: $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup \{2\}$