POLINOMI

Consideremo espressioni del tipo:

$$A_n(x) = a_0 + \underbrace{a_1 x}_{\text{MONOMIO}} + \boxed{a_2} x^2 + \dots + a_n x^{\boxed{n}}$$

n → GRADO

a_2 → COEFFICIENTE

$a_0, a_1, a_n \in \mathbb{R}$

$a_n \neq 0$

I polinomi si scrivono per potenze crescenti o decrescenti.

Il polinomio con tutti i coefficienti "0" è detto nullo.

POLINOMI UGUALI

$$A_{\boxed{n}}(x) = B_{\boxed{m}}(x)$$

n → GRADO, m → GRADO

Due polinomi si dicono uguali se sono dello stesso grado ed hanno ordinatamente uguali i coefficienti dei monomi di uguale grado.

OPERAZIONI COI POLINOMI

$$A_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$B_m(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$$

$a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$

SOMMA: $\boxed{n \geq m}$

con $n = m$; $A_n(x) + B_n(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_n + b_n)x^n$

con $n > m$; $A_n(x) + B_m(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_m + b_m)x^m + (a_{m+1}x^{m+1}) \dots (a_n x^n)$

$\boxed{es.}$ $(x^2 + 2x - 5) + (x^3 - x + 2) =$

$= \underline{0x^3} + x^2 + 2x - 5 + (x^3 + 0x^2 - x + 2) = x^3 + x^2 + x - 3$

con $n > m$ il grado di $\cancel{A_n + B_m} = n$

$A_n + B_m = n$

con $n = m$ il grado di $A_n + B_n \leq n$

PRODOTTO: $A_n(x)\, B_m(x) = C_{n+m}(x) =$

$= c_0 + c_1 x + \dots + c_{n+m} x^{n+m}$

$c_0 = a_0 b_0$

$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$

$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$

$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \dots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$

$\boxed{es}$ $(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 + \cancel{x^2} + \cancel{x} - \cancel{x^2} - \cancel{x} - 1 = x^3 - 1$

DIVISIONE: Considerando sempre i polinomi visti in precedenza $A_n(x)$ e $B_m(x)$ con $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$, $n \geq m$ possiamo dare la seguente definizione.

- Dati due polinomi A_n di grado "n", B_m di grado "m" tali che $n \geq m$, possono essere ~~considerati~~ identificati in maniera univoca due polinomi $Q(x)$ ed $R(x)$ che soddisfano queste proprietà: il grado di Q è "$n-m$" ed il grado di R è "$< m$" e vale la relazione:

$$\boxed{A_n(x) = B_m(x) \cdot Q(x) + R(x)}$$

Il polinomio $Q(x)$ è il quoziente ed il polinomio $R(x)$ è il resto della divisione.

es $A(x) = 2x^4 + x^3 - x + 2$
$B(x) = x^2 + 3$

Determiniamo il quoziente ed il resto.
A è un polinomio di grado 4
B è un polinomio di grado 2
~~[illegible]~~ Quindi il grado del quoziente è $n-m = 2$ ed il grado del resto è $< m = 2$

DIVISIONE PER POTENZE DECRESCENTI

La divisione esposta precedentemente si svolge così:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & +x^3 & \ldots & -x & +2 & x^2+3 \\
\cline{6-6}
2x^4 & & +6x^2 & & & 2x^2+x-6 \\
\cline{1-5}
& x^3 & -6x^2 & -x & +2 & \\
& x^3 & & +3x & & \\
\cline{1-5}
& & -6x^2 & -4x & +2 & \\
& & -6x^2 & & -18 & \\
\cline{1-5}
& & & -4x & +20 &
\end{array}
$$

$x^3 - 6x^2 - x + 2 \rightarrow$ I° RESTO PARZIALE $R_3 = A - 2x^2 B$

$-6x^2 - 4x + 2 \rightarrow$ II° RESTO PARZIALE $R_2 = R_3 - xB$

$-4x + 20 \rightarrow$ III° RESTO PARZIALE $R_1 = R_2 - (-6)B$

$$\cancel{R_3} + \cancel{R_2} + R_1 = A + \cancel{R_3} + \cancel{R_2} - (2x^2 + x - 6)B$$

$$\underbrace{A}_{\downarrow} = \underbrace{(2x^2 + x - 6)}_{\downarrow} \underbrace{B}_{\downarrow} + \underbrace{R_1}_{\downarrow}$$

$$A_n = Q \cdot B_m + R$$

DIVISIBILITÀ FRA POLINOMI

$$A_n(x) = B_m(x)\, Q(x) + R(x)$$

Se $R(x) = 0$ allora $A_n(x)$ è divisibile per $B_m(x)$
$B_m(x)$ è un divisore di $A_n(x)$

$A_n(x)$ è irriducibile se $n \geq 1$ e non esistono divisori $B_m(x)$ di $A_n(x)$ tali che $0 < m < n$

I divisori devono essere quindi, perlomeno di primo grado $(ax+b)$ ed al più di grado $n-1$.

CASO SPECIFICO DI DIVISIBILITÀ PER IL POLINOMIO $\boxed{x-c}$

Scelgo $m=1$ e $B_1(x)=x-c$ dove $c \in R$

$A_n(x)=(x-c)\,Q_{n-1}(x)+r$ (r è costante perché di grado zero)

teorema: $A_n(x)$ è divisibile per $\boxed{x-c}$ se e solo se $A_n(c)=0$

La divisibilità di un polinomio per $x-c$ si determina andando a controllare questa condizione: $A_n(c)=0$

Infatti: $A_n(x)=(x-c)\,Q_{n-1}(x)+r$

$r=0$ allora: $A_n(c)=(c-c)\,Q_{n-1}(c)+0$

$$A_n(c)=0$$

Quindi questo dimostra che se $A_n(x)$ è divisibile per $x-c$ allora $A_n(c)=0$

Vediamo, ora, il viceversa:

$A_n(x)=(x-c)\,Q_{n-1}(x)+r$

Supponiamo che $A_n(c)=0$ e dobbiamo fare vedere che A_n è divisibile per $x-c$.

$A_n(c)=r$ ma visto che per ipotesi $A_n(c)=0$

Si deduce che $r=0$. Quindi $A_n(c) = r = 0$

Dire che $r=0$ equivale a dire che
$A_n(x) = (x-c)\, Q_{n-1}(x)$

Quindi c'è la condizione di divisibilità che volevamo.

Il numero "c" che soddisfa l'equazione $A_n(c)=0$ è detto radice o zero del polinomio $A_n(x)$.
Quindi le radici del polinomio sono le soluzioni dell'equazione $A_n(x)=0$.

Quando consideriamo $x-c$ come divisore, si può calcolare il quoziente con la regola di Ruffini.

REGOLA DI RUFFINI

es. $A_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$$\underbrace{A_3(x)} = (x-c)\,\underbrace{Q_2(x)}_{q_2x^2+q_1x+q_0} + r$$

$$(x-c)\,Q_2(x) + r = q_2x^3 + (q_1 - cq_2)x^2 + (q_0 - cq_1)x + (r - cq_0)$$

$$\begin{cases} q_2 = a_3 \\ q_1 = a_2 + cq_2 \\ q_0 = a_1 + cq_1 \\ r = a_0 + cq_0 \end{cases}$$

È più usuale scrivere questo risultato in forma di tabella.

	a_3	a_2	a_1	a_0
c		cq_2	cq_1	cq_0
	q_2	q_1	q_0	r

$q_2 = a_3$

$q_1 = a_2 + ca_3$

$q_0 = a_1 + c(a_2 + ca_3)$

$r = a_0 + c[a_1 + c(a_2 + ca_3)]$

$r = A_3(c)$

A questo punto sostituiamo nella tabella generale:

	a_3	a_2	a_1	a_0
c		ca_3	$c(a_2+ca_3)$	$c[a_1+c(a_2+ca_3)]$
	a_3	a_2+ca_3	$a_1+c(a_2+ca_3)$	$a_0+c[a_1+c(a_2+ca_3)]$

La divisibilità sarà data dall'avere il resto uguale a zero: $r = 0$