FATTORIZZAZIONE DEI POLINOMI

Richiamiamo la scomposizione di un numero naturale in fattori primi.

$n = p_1^{m_1} \, p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}$

p_1, p_2, p_k sono numeri primi distinti scritti in maniera crescente

m_1, m_2, m_k sono numeri interi che rappresentano la molteplicità dei fattori cioè quante volte ~~che~~ quel termine compare nel prodotto.

Un numero può essere scomposto in uno ed un solo modo come prodotto di fattori primi.

es. $180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \, 3^2 \, 5$

Nei polinomi, l'equivalente del ruolo giocato dai numeri primi nell'insieme dei numeri, è dato dai polinomi irriducibili ovvero non divisibili in polinomi.

RACCOGLIMENTO A FATTOR COMUNE

$$x^4 - 3x^3 + 5x^2 = x^2 \big(\underbrace{x^2 - 3x + 5}_{\Delta < 0} \big)$$

quindi irriducibile

RACCOGLIMENTO PARZIALE

$$x^4 + a^2x^2 + b^2x^2 + a^2b^2 = x^2(x^2 + a^2) + b^2(x^2 + a^2) =$$

$$\big(\underbrace{x^2 + a^2}_{\Delta < 0} \big) \big(\underbrace{x^2 + b^2}_{\Delta < 0} \big)$$

PRODOTTI NOTEVOLI

$x^2-a^2=(x-a)(x+a)$

$x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$

$x^4-a^4=(x^2-a^2)(x^2+a^2)=(x-a)(x+a)(x^2+a^2)$

$x^5-a^5=(x-a)(x^4+a^3x+a^2x^2+ax^3+a^4)$

in generale:

$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\dots a^{n-2}x+a^{n-1})$

Se "n" è pari il binomio x^n-a^n è divisibile per $x-a$ e per $x+a$. se "n" è dispari il binomio x^n-a^n è divisibile per $x-a$ (ma non per $x+a$).

x^2+a^2 $(\Delta<0)$ è irriducibile

$x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$

x^4+a^4 è irriducibile

$x^5+a^5=(x+a)(x^4-a^3x+a^2x^2-ax^3+a^4)$

Se "n" è pari il binomio x^n+a^n non è divisibile né per $x-a$, né per $x+a$; se "n" è dispari il binomio x^n+a^n è divisibile per $x+a$ (ma non per $x-a$).

~~Nelle~~ Se "n" è dispari, in generale, avremo:

$$x^n + a^n = (x+a)\left(x^{n-1} - a x^{n-2} + a^2 x^{n-3} + \dots - a^{n-2} x + a^{n-1}\right)$$

Nelle espressioni $x^n - a^n$, $x^n + a^n$, abbiamo evidenziato dei fattori del tipo $x - a$, $x + a$.

Nel caso fattori di questo tipo non si evidenziano, non significa che i polinomi non siano decomponibili, ma significa semplicemente che non hanno questi termini di I° grado.

$\boxed{\text{Ad es. } x^6 + b^6}$ In questo caso non è divisibile né per $x - b$, né per $x + b$ perché inserendo $\pm b$ al posto di x, non ottengo "0".

In questo caso, per scomporre, posso fare così:

$$x^6 + b^6 = \underbrace{(x^2)^3}_{y^3} + \underbrace{(b^2)^3}_{K^3} = \underbrace{(x^2+b^2)}_{\Delta<0}\left(x^4 - b^2x^2 + b^4\right) =$$

$$= (x^2+b^2)\left(\underbrace{x^4 + 2b^2x^2 + b^4}_{\text{QUADRATO PERFETTO}} - 3b^2x^2\right) =$$

$$= (x^2+b^2)\left[(x^2+b^2)^2 - 3b^2x^2\right] =$$

$$= (x^2+b^2)\left(\underbrace{x^2+b^2-\sqrt{3}bx}_{\Delta<0}\right)\left(x^2+b^2+\sqrt{3}bx\right)$$

Nelle disequazioni in cui sono introdotti polinomi di grado superiore al secondo, possiamo servirci delle decomposizioni.

$\boxed{1° \text{ es}}$ $$\frac{x^3+8}{3x^4-7x^3+5x^2-7x+2} < 0$$

$N(x)$ = NUMERATORE
$D(x)$ = DENOMINATORE

Devo ridurre in polinomi di I° e II° grado e poi studiare le quantità che otteniamo.

$N(x)$: $x^3+2^3 = (x+2)(\underset{\Delta<0}{x^2-2x+4})$

$D(x)$: se riesco a trovare un numero reale "α" tale che $D(\alpha)=0$ posso scrivere che

$$D(x) = (x-\alpha)\underbrace{D'(x)}$$

D' è un polinomio di grado minore di 1.

Per identificare α c'è una regoletta che afferma che esistono soluzioni razionali dell'equazione $D(\alpha)=0$ se α è un numero $\mathbb{Q}$, se $\alpha \in \mathbb{Q}$ questo numero può essere scritto nella forma $\frac{p}{q}$ dove p e q

devono essere presi fra tutti i possibili fattori del termine noto (p) e tutti i possibili fattori del coefficiente del termine di grado ~~superiore~~ massimo (q).

Nel nostro esempio:

$p = \pm 1, \pm 2$

$q = \pm 1, \pm 3$

Ora abbiamo considerare tutti i numeri razionali che possono essere scritti con queste ~~[illegible]~~ combinazioni di numeri ed abbiamo: $\pm 1, \pm \frac{1}{3}, \pm 2, \pm \frac{2}{3}$

$D\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \qquad D(2) = 0$

A questo punto divido il polinomio con Ruffini da prima per 2

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 3 & -7 & 5 & -7 & 2 \\ 2 & & 6 & -2 & 6 & -2 \\ \hline & 3 & -1 & 3 & -1 & 0 \end{array}$$

$$D(x) = (x-2)(3x^3 - x^2 + 3x - 1)$$

e successivamente divido per $\frac{1}{3}$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & -1 & 3 & -1 \\ 1/3 & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 3 & 0 & 3 & 0 \end{array}$$

$$D(x) = (x-2)\left(x - \frac{1}{3}\right)(3x^2 + 3)$$

A questo punto riscrivo la disequazione in forma ridotta

$$\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x-2)\left(x-\frac{1}{3}\right)3(x^2+1)} < 0$$

I termini:

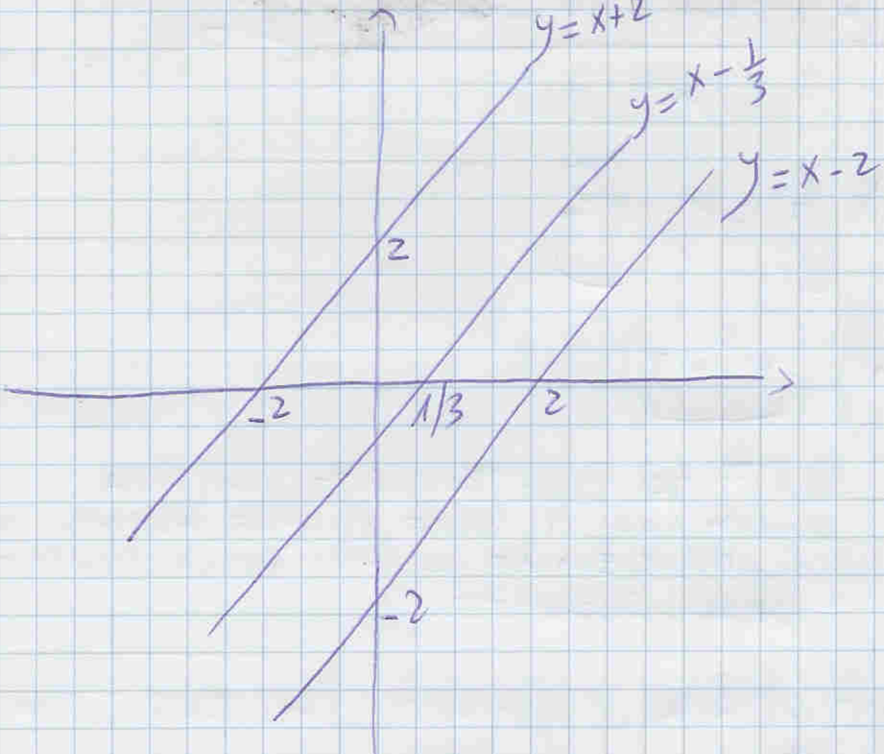
$(x^2-2x+4) \to \Delta < 0$ quindi quantità strettamente positiva

$3(x^2+1) \to$ quantità strettamente positiva

possiamo tranquillamente escluderli dallo studio della disequazione.
La nostra disequazione, concludendo, potremo scriverla così:

$$\frac{(x+2)}{(x-2)\left(x-\frac{1}{3}\right)} < 0$$

Quindi se io devo cercare i punti in cui il quoziente $\frac{N}{D}$ è negativo, il segno dipenderà dal numeratore, ~~quindi~~ Posso risolverla tranquillamente per via geometrica.



Con $x < -2$ le tre funzioni sono negative e quindi l'espressione totale è negativa

Con x compreso tra -2 e $\frac{1}{3}$ la $\underline{I}^a$ funzione è positiva e le altre due sono negative e quindi l'espressione generale sarà positiva.

Con x compreso tra $\frac{1}{3}$ e 2 ho due funzioni positive ed una negativa quindi l'espressione generale sarà negativa.

Con $x > 2$ tutte e tre le funzioni saranno positive ed avrò una espressione generale positiva.

Quindi l'insieme delle soluzioni sarà:

$$\left(-\infty, -2\right) \cup \left(\frac{1}{3}, 2\right)$$

$\boxed{\text{es. 2}}$ $g(x) = \dfrac{x^5 - 2mx^4 + 3x - 6m}{x^2 - 1} \geq 0$

$dom(g) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$N(x): (x - 2m)\underbrace{(x^4 + 3)}$

QUANTITÀ STRETTAMENTE POSITIVA
QUINDI NON MI SERVE ANDARE AVANTI NELLA SCOMPOSIZIONE AI FINI DELLO STUDIO DELLA DISEQUAZIONE.

Quindi per studiare i punti in cui ho il maggiore stretto, mi basta studiare la disequazione:

$$\frac{(x - 2m)}{x^2 - 1} \geq 0$$