SISTEMI LINEARI (I° GRADO)

Facciamo una piccola introduzione riprendendo il discorso delle rette nel piano.

La forma generale è: $ax + by + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Questa relazione fra x ed y rappresenta solo rette oppure anche altri insiemi?

se $b \neq 0$; $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ equazione del tipo $y = mx + q$

se $b = 0$, $a \neq 0$; $x = -\frac{c}{a}$ equazione della retta parallela alle ordinate.

se $b = 0$, $a = 0$
- $c = 0$: $0x + 0y + 0 = 0$ equazione sempre soddisfatta: l'insieme delle coppie (x, y) che soddisfa la relazione è costituito da $\mathbb{R}^2$.
- $c \neq 0$; l'insieme delle soluzioni è vuoto

Riassumendo:

$b \neq 0$			retta $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$
$b = 0$	$a \neq 0$		retta $x = -\frac{c}{a}$
	$a = 0$	$c \neq 0$	insieme vuoto
	$a = 0$	$c = 0$	l'intero piano

Dopo queste introduzione possiamo studiare le problematiche dei sistemi.
Siamo arrivati a dire che una relazione di questo tipo (esclusi i casi particolari) rappresenta una retta nel piano.
Se, adesso, formuliamo un'altra relazione di questo tipo, ne posso formare il sistema.
Mettere a sistema due equazioni consiste nel trovare le soluzioni comuni dell'equazione.
Graficamente parlando si devono trovare i punti comuni.

SISTEMA LINEARE o DI PRIMO GRADO IN X ed y

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$$

Risolviamo algebricamente col I° METODO:
SOSTITUZIONE

es.

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 3x + 5y + 9 = 0 \end{cases}$$

Prendere una delle due equazioni (per esempio la prima) e risolvere una delle incognite in funzione dell'altra.

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ 3x + 5y + 9 = 0 \end{cases}$$

Come secondo passaggio vado a prendere la II^a equazione ed inserisco l'espressione ottenuta di y in funzione di x –

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ 3x + 5(1-x) + 9 = 0 \end{cases}$$

Otteniamo che la II^a equazione è una funzione di I° grado dipendente solo da x –
Ora possiamo risolvere:

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ 3x + 5 - 5x + 9 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 - x \\ x = 7 \end{cases}$$

A questo punto ho ricavato il valore di x e vado a sostituire nella I^a equazione

$$\begin{cases} y = -6 \\ x = 7 \end{cases}$$ trovo la coppia $(7, -6)$

Geometricamente come interpreto il discorso?
Allora la I^a equazione rappresenta la retta $y = 1 - x$ e la II^a rappresenta la retta $y = -\frac{3}{5}x - \frac{9}{5}$

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ y = -\frac{3}{5}x - \frac{9}{5} \end{cases}$$

Si tratta, ora, di cercare i punti comuni (di intersezione) fra queste due rette

Si ottengono due rette incidenti_

II° METODO ALGEBRICO - COMBINAZIONE LINEARE

Fissati una coppia di numeri $h, K \in \mathbb{R}$ e fissato un sistema $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$

si dice combinazione lineare dell'equazione $f(x,y)=0$ e $g(x,y)=0$ una espressione del tipo: $h\,f(x,y)+K\,g(x,y)=0$

I coefficienti h e K sono ~~coefficienti~~ detti coefficienti della combinazione lineare_

se $h=K=1$ applichiamo la semplice somma membro a membro_

se $h=1$ e $K=-1$ applichiamo la semplice differenza membro a membro_

$\boxed{es}$ S $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$ S' $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ h f(x,y)+K g(x,y)=0 \end{cases}$ $\boxed{K \neq 0}$

S ed S' sono sistemi equivalenti cioè ogni soluzione di S è soluzione di S' e viceversa_

Dimostriamo, qui di seguito, questa proprietà

Allora $(\bar{x}, \bar{y})$ risolve $S \iff (\bar{x}, \bar{y})$ risolve S' -

$$\begin{cases} f(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \\ g(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \\ h f(x, y) + K g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Ad (x, y) sostituisco $(\bar{x}, \bar{y})$ ed ottengo:

$$\begin{cases} f(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \\ h \underbrace{f(\bar{x}, \bar{y})}_{0} + K \underbrace{g(\bar{x}, \bar{y})}_{0} = 0 \end{cases}$$

Qualunque siano h e K il risultato è sempre "0" quindi vuol dire che $\bar{x}$ ed $\bar{y}$ risolvono anche il sistema S' -

Vediamo, ora, il viceversa -
Supponiamo che $\bar{x}, \bar{y}$ risolvano il II° sistema (S') e dobbiamo dimostrare che risolve anche il I° (S) -

S $\begin{cases} f(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ S' $\begin{cases} f(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \\ h \underbrace{f(\bar{x}, \bar{y})}_{=0 \text{ qualunque sia } h} + K \underbrace{g(\bar{x}, \bar{y})}_{K \neq 0 \text{ per ipotesi ne consegue che } g = 0} = 0 \end{cases}$

Ne deriva che $\bar{x}, \bar{y}$ risolvono anche il I° sistema. ~~quindi risolvendo anche la seconda~~
~~se~~ Ad (x, y) di S posso sostituire $(\bar{x}, \bar{y})$

Questa proprietà ~~das~~ di sostituire una equazione con una combinazione lineare (purché $K \neq 0$), mi può portare a semplificare il sistema. Vediamone un esempio.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y - 2 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

Cerchiamo, ora, una combinazione lineare per ottenere una equazione più semplice. Se, infatti, moltiplico la I^a equazione per 2 e la II^a per 3 e poi faccio la somma, il termine "y" scompare: ottengo, infatti,

$\boxed{7x - 7 = 0}$. A questo punto ho semplificato il sistema: $\begin{cases} 2x - 3y - 2 = 0 \\ 7x - 7 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ $\boxed{(1,0)}$ SOLUZIONI

es. $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -4x + 2y = -6 \end{cases}$ Moltiplico la I^a eq. per 2 la II^a eq. per 1 ~~ed ottengo~~ e poi faccio la somma ottenendo:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

In questo caso il sistema ha infinite soluzioni perché quando vado a cercare i punti comuni ho $\mathbb{R}^2$ intersezione le soluzioni della prima equazione; in pratica mi riduco alle sole soluzioni della I^a equazione per cui le soluzioni sono tutte le coppie ordinate (x, y) che rappresentano ascisse ed ordinate di un punto che sta sulla retta ~~2x-y=3~~ $y = 2x - 3$ – Quindi sono tutte le coppie in cui posso scegliere x generico ed y in modo ~~da~~ tale da soddisfare ~~2x-3~~ $2x - y = 3$. Quindi avrò $(x, 2x-3)$ –

$\boxed{es}$ $\begin{cases} 3x - 6y + 2 = 0 & \text{moltiplico per } 1 \\ x - 2y - 1 = 0 & \text{moltiplico per } -3 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x - 6y + 2 = 0 \\ 0x + 0y + 5 = 0 \end{cases}$$

La II^a equazione non ha mai soluzione e l'intersezione è l'insieme vuoto $\emptyset$

Ricaviamo la "y" per il discorso geometrico:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

due rette parallele e distinte quindi senza punti in comune –

PROBLEMI

RISOLUBILI APPLICANDO I SISTEMI LINEARI

Ci sono dei commensali ed al momento di pagare il conto vien detto loro:
Se foste due in più ognuno pagherebbe

2000 lire in meno (a parità di costo totale).
Se, invece, fossero due in meno ognuno pagherebbe 3000 lire in più.
Quanti sono i commensali? E quanto devono pagare?

Incognite: x = numero di commensali
y = costo individuale

Il costo globale $\cancel{c}$ = xy

$$\begin{cases}(x+2)(y-2000)=xy\\(x-2)(y+3000)=xy\end{cases}\qquad\begin{cases}\cancel{xy}-2000x+2y-4000=\cancel{xy}\\\cancel{xy}+3000x-2y-6000=\cancel{xy}\end{cases}$$

$$\begin{cases}2y-2000x-4000=0\\-2y+3000x-6000=0\end{cases}$$

Sommo membro a membro ed ottengo:

$$\begin{cases}2y-2000x-4000=0\\1000x-10000=0\end{cases}\qquad\begin{cases}2y-2000x-4000=0\\\boxed{x=10}\end{cases}$$

$$\begin{cases}2y-20000-4000=0\\x=10\end{cases}\qquad\begin{cases}y=12.000\\x=10\end{cases}$$

II° Problema

Trovare due numeri tali che la loro somma ed il loro quoziente siano entrambi uguali ad ~~...~~ un altro numero reale "a" - Discutere la risolubilità del problema al variare di "a" in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{cases} x+y=a \\ \frac{x}{y}=a \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=a \\ x=ay \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=a \\ x-ay=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=a-x \\ x-a^2+ax=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=a-x \\ x(1+a)=a^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y=a-x \\ x=\frac{a^2}{1+a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\frac{a}{1+a} \\ x=\frac{a^2}{1+a} \end{cases} \quad \boxed{\left(\frac{a^2}{1+a}, \frac{a}{1+a}\right)} \text{ rette incidenti}$$

La soluzione trovata è valida per ~~...~~ ~~...~~ $a \neq -1$

Se $a=-1$ $\begin{cases} x+y=-1 \\ x+y=0 \end{cases}$

Sistema privo di soluzioni $\emptyset$ ottengo due rette parallele e distinte -