

La suddivisione di un corpo in elementi ha carattere ideale in quanto in generale i corpi danno l'impressione di una distribuzione continua di materia in un dominio dello spazio. Si introduce quindi lo schema continuo nel quale la massa è distribuita in ogni porzione del dominio tridimensionale C occupato dal corpo. Ad ogni porzione finita misurabile c di C viene associata la massa $m(c)$ degli elementi in essa contenuti. Dividendo $m(c)$ per la misura assoluta del volume di c si ottiene una grandezza scalare che da una valutazione globale della distribuzione di massa in c $[M L^{-3}]$ (densità volumetrica media di c). Per passare a una valutazione locale della distribuzione della massa fissiamo in C un punto P e consideriamo le porzioni c di C che oltre a contenere P abbiano dimensioni tali da non rendere evidente la struttura atomica del corpo. È possibile fissare una lunghezza f_0 tale che c aventi diametro $f < f_0$ hanno la stessa densità media della quale si dà il nome di densità volumetrica nel punto P (μ_v).

$\mu_v(\vec{OP})$ caratterizza la distribuzione della massa nello schema continuo di un corpo e $\mu_v dC$ prende il nome di elemento del corpo. La massa di una porzione c del corpo è data da $m(c) = \int_c \mu_v(\vec{OP}) dC$ e sostituendo c con C

si ottiene M , la massa del corpo. Se la densità ha valore costante in C il corpo è omogeneo e la massa totale è data dal prodotto del volume del corpo per la sua densità. Il dominio C occupato dal corpo si chiama figura.

Se la figura è bidimensionale la massa è distribuita su una superficie e la distribuzione della massa è caratterizzata dalla densità superficiale $\mu_s [M L^{-2}]$.

Per i corpi nei quali una dim predomina sulle altre si adotta uno schema

unidimensionale (il corpo viene assimilato a una linea) e la distrib di massa e' caratterizzata dalla densita' lineare $\mu_L [ML^{-1}]$.

E' opportuno istituire dei procedimenti che permettano di determinare semplicemente il baricentro dei corpi nel loro schema continuo.

La relazione vista nel capitolo 5 definisce il baricentro di uno schema particolare. Proiettando tale relazione sugli assi di una terna di origine o si hanno 3 relazioni secondo:

$$\vec{OG} = \frac{\sum_{h=1}^N \mu_h \vec{OP}_h}{M} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{1}{M} \sum_{h=1}^N \mu_h x_h \\ y_G = \frac{1}{M} \sum_{h=1}^N \mu_h y_h \\ z_G = \frac{1}{M} \sum_{h=1}^N \mu_h z_h \end{cases}$$

Se si adotta lo schema continuo le relazioni che individuano il baricentro si ottengono sostituendo μ_h con μdc e la sommatoria con gli integrali estesi a C

$$\vec{OG} = \frac{1}{M} \int_C \mu_v \vec{OP} dc \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{1}{M} \int_C x \mu_v dc \\ y_G = \frac{1}{M} \int_C y \mu_v dc \\ z_G = \frac{1}{M} \int_C z \mu_v dc \end{cases}$$

(C)
 grande

Se il corpo e' omogeneo ($C = \frac{M}{\mu_v}$) la densita' la porta fuori dall'integrale quindi

$$\vec{OG} = \frac{1}{C} \int_C \vec{OP} dc \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{1}{C} \int_C x dc \\ y_G = \frac{1}{C} \int_C y dc \\ z_G = \frac{1}{C} \int_C z dc \end{cases}$$

- Il calcolo delle coordinate di G mediante le relazioni precedenti può risultare laborioso per questo si possono usare le proprietà di ubicazione:

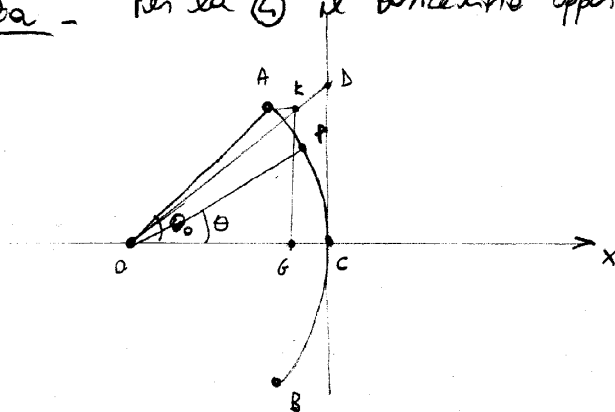
- ① Il baricentro di due elem. mat si trova sul segmento che li congiunge. G divide il segmento in due parti di lunghezza invers. prop. alle masse collocate agli estremi del segmento.
- ② Se si suddivide un corpo in parti aventi masse $m_1, m_2, m_3, \dots$ e baricentri $G_1, G_2, G_3, \dots$, il baricentro del corpo coincide con quello della schema particolare che si ottiene attribuendo a G_1 la massa m_1 , a G_2 la massa $m_2, \dots$
- ③ Se gli elementi di un corpo si trovano in un piano (retta) G si trova sul medesimo piano (retta).
- ④ Se un corpo possiede un piano (asse) di simm., G appartiene a tale piano (asse).
- ⑤ Se un corpo appartiene a una figura convessa anche G appartiene alla stessa figura.  convessa  concava
- ⑥ Se gli elementi di un corpo subiscono spostamenti paralleli a un medesimo piano (anche se verso e lunghezza differenti) o retta, la distanza di G dal piano o retta non cambia.
- ⑦ Su un corpo tridim. continuo e omogeneo di densità ρ presenta delle cavità, il baricentro $\equiv$ con quello che si ottiene attribuendo all'intero corpo la densità ρ e alla cavità $-\rho$. (lo stesso vale per corpi bidim con fori).

BARICENTRI DI LINEE OMOGENEE

segmento - per la ③ e la ④ il baricentro appartiene al segmento e al piano $\perp$ ad esso quindi $\equiv$ ed punto medio del segmento

poligono (aperto o chiuso) - Il baricentro di ogni lato e' il punto di mezzo assegnando ad ogni baricentro la massa del lato corrispondente il baricentro della poligono si ricava tramite la ②

arco di circonferenza - Per la ④ il baricentro appartiene all'asse di simmetria.



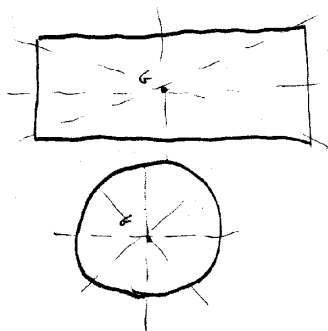
Si orienti tale asse da O a C e si istituisca su di esso un sistema di asse x con origine O. Si istituisca sull'arco CA un sistema di asse s con origine in C e verso da C ad A. La lunghezza di CA e' $R\theta_0$, dove θ_0 e' l'angolo al centro sotteso da CA. Sia P un punto di CA e θ l'angolo al centro sotteso da CP. L'ascissa di P sia $R\cos\theta$; introducendo questa espressione nella relazione $x_G = \frac{1}{L} \int_{arco} x dl$ ponendo $dl = R d\theta$ al posto di dl e la lunghezza $R\theta_0$ al posto di L si ha

$$x_G = \frac{1}{R\theta_0} \int_0^{\theta_0} R^2 \cos\theta d\theta = \frac{R \sin\theta_0}{\theta_0}$$

Dal punto di vista geometrico G si trova tracciando la tangente all'arco in C e considerando su essa il segmento $\overline{CD} = \widehat{CA}$. Dopo aver tracciato il segmento $\overline{OD}$ si condurrà la parallela all'asse x in A fino a intersecare $\overline{OD}$ in K. La proiezione di K su x e' G.

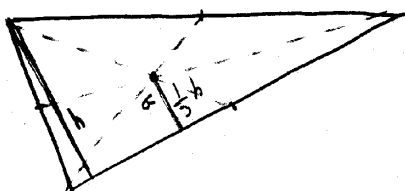
BARICENTRI DI FIGURE PIANE OMOGENEE

figure limitate da un poligono regolare o da una curva chiusa avente centro di simmetria



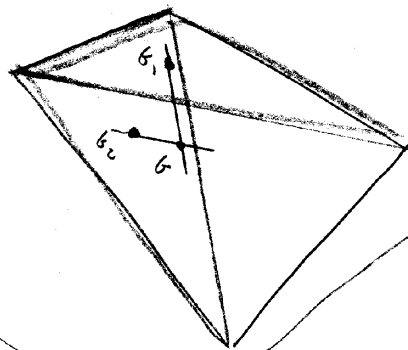
Per la ④ il baricentro $\in$ ad ogni asse di simmetria
 $\equiv$ quindi col centro di figura

figure limitate da un triangolo



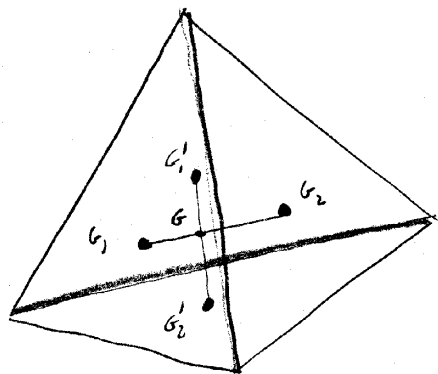
Il baricentro coincide con le intersezioni delle mediane. G divide ogni mediana in due segmenti lunghi $2/3$ e $1/3$ della mediana. G quindi dista da ogni lato del triangolo $\frac{1}{3} h$.

figure limitate da un quadrilatero



Se il quadrilatero non è intrecciato tracciano le due diagonali e individuano i baricentri G_1 e G_2 di due triangoli non aventi base in comune con la diagonale. G è dato dalle intersezioni delle rette per G_1 e G_2 // alle diagonali.

tetraedro

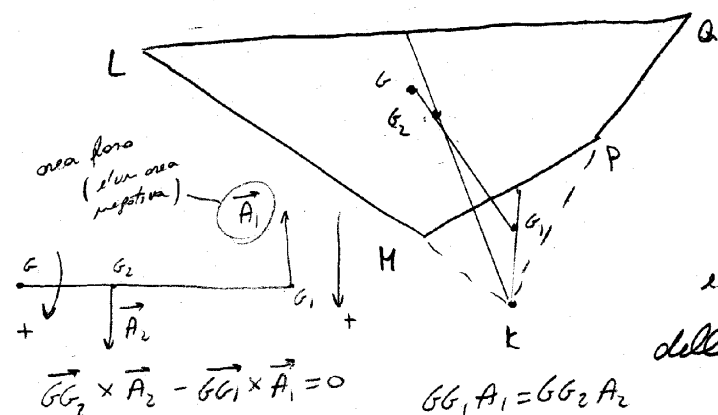


Se i due triangoli hanno base in comune con una diagonale considerano i baricentri dei due triangoli considerati G_1 e G_2 ; $\overline{G_1 G_2}$ è parallelo alla diagonale comune alle basi dei triangoli. Considero ora i triangoli aventi basi in comune con l'altra diagonale e siano G'_1 e G'_2 i loro baricentri. Anche $\overline{G'_1 G'_2}$ è // alla diagonale in comune con le basi dei triangoli considerati. G è dato da $\overline{G_1 G_2} \cap \overline{G'_1 G'_2}$

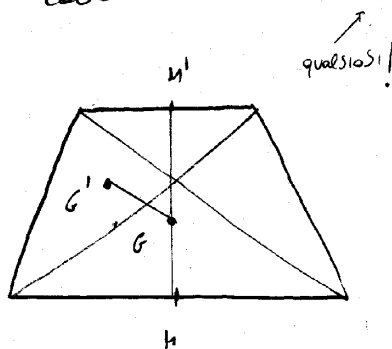
Se il quadrilatero ha due lati opposti non paralleli $\overline{LM}$ e $\overline{PA}$, prolungandoli essi si intersecano in K . Troviamo i baricentri G_1 e G_2 relativi,

rispettivamente ai triangoli PKM e

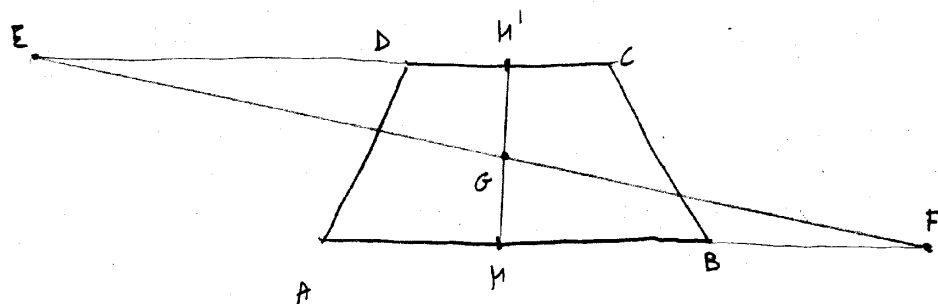
QKL . G è alla retta per G_1 e G_2 ed è esterno al segmento $\overline{G_1G_2}$. Il rapporto tra le lunghezze dei segmenti $\overline{GG_1}$ e $\overline{GG_2}$ è l'inverso del rapporto tra le misure assolute delle aree dei corrispondenti triangoli.



Nel caso di un trapezio $G \in \overline{HM'}$. Dopo aver trovato il



baricentro G' di uno dei due triangoli in cui una diagonale divide il trapezio, G è dato dall'intersezione di $\overline{HM'}$ con la retta // a tale diagonale per G' .

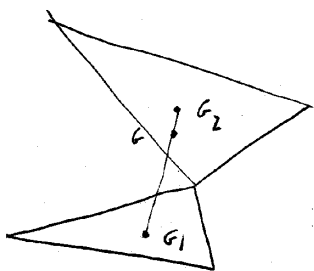


Il baricentro può anche essere determinato prolungando in versi opposti le due basi di un segmento di lunghezza uguale all'altra base e unendo

gli estremi $\overline{EF}$. G è dato da $\overline{EF} \cap \overline{HM'}$.

Quadrilatero intrecciato

Dopo aver trovato G_1 e G_2 , G si trova mediante la ①



Per $ds \rightarrow 0$ il baricentro del settore elementare tende a quello del triangolo avente base la corda dell'arco. Tutti i baricentri degli infinitesimi settori circolari, appartenenti all'arco di circ. di centro O e raggio $\frac{2}{3}R$. Il baricentro del settore circolare è poi a quello di quest'arco di circonferenza.

figure forate

Dopo aver trovato i baricentri delle due figure G_1 e G_2 , G è esterno al segmento $\overline{G_1 G_2}$

della parte della figura non forata. Il rapporto tra le lunghezze $\overline{GG_1}$ e $\overline{GG_2}$ è inverso al rapporto tra le misure assolute delle aree delle figure. *

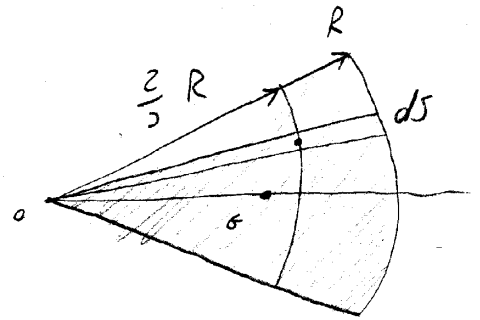
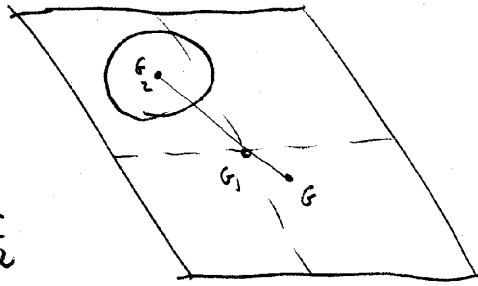
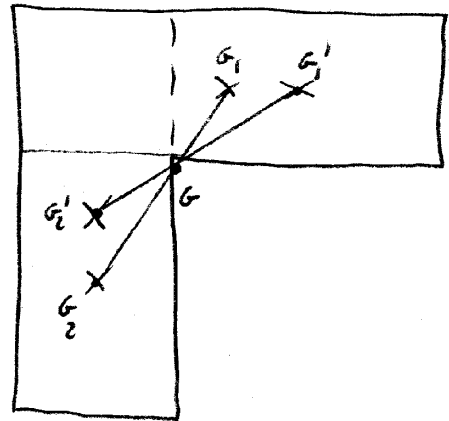


figure ad L o T

Possono essere decomposte in vari modi nell'unione di rettangoli. Trovati i baricentri di questi G si trova tramite la ① e la ②



BARICENTRO DI FIGURE TRID. OMOGENEE

figure limitate da una sup poliedrica regolare o da una sup curva avente un centro di simmetria - $G \equiv$ centro della figura

prismi e cilindri - G è il segmento che unisce il baricentro delle due basi, $G \equiv$ col punto di mezzo di tale segmento

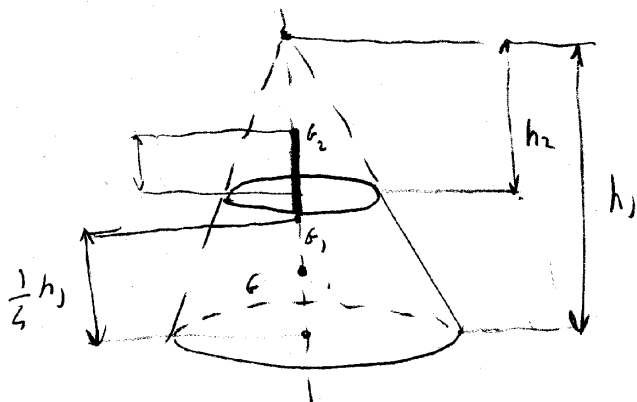
tetraedro - G è dell'intersezione dei 6 piani mediani e ha distanza pari a $\frac{1}{4}h$ da ciascuna base.

G è individuato dall'intersezione dei segmenti che uniscono due vertici con i baricentri delle facce opposte.

piramidi e coni

G è al segmento che unisce il vertice ed baricentro della base e si trova a una distanza pari a $\frac{1}{4}h$ dalla base.

Tronchi di piramide e di cono



Vale la (7)

Si completa il cono fino al vertice e si calcola G_1 del cono intero

poi si calcola G_2 del cono vuoto. G

si trova dalle considerazioni (sul volume)

viste in *

Si consideri un sistema S che si muove di moto rotatorio intorno a un asse a fisso rispetto al rif adottato. La velocità $\vec{v}_h$ di ogni elemento del sistema S è ortogonale al piano per E_h e per a ed ha intensità $v_h = \omega \delta_h$ dove δ_h è il braccio di $\vec{v}_h$ cioè la dist di E_h da a .

Comunque si orienti a il verso della q da a rispetto ad a è dato da $K_a^h = m_h v_h \delta_h = \pm \omega m_h \delta_h^2$ (NB moto rigido!) dove il segno $+$ o $-$

si ha a seconda che il verso di $\vec{\omega}$ sia concorde o meno con quello di a .

Sommando rispetto all'indice h si ha $K_a = \pm \omega \sum_h m_h \delta_h^2$. Tenendo presente

che $v_h = \omega \delta_h$ l'energia cinetica dell'intero sist. è data da $T = \frac{\omega^2}{2} \sum_h m_h \delta_h^2$

$$NB \quad T = \frac{1}{2} \sum_h m_h v_h^2$$

Si chiama momento d'inerzia J_a di un corpo rispetto alla retta a la grandezza scalare:

$$* \quad J_a = \underbrace{\sum_h m_h \delta_h^2}_{\text{ nello schema particellare }} = \underbrace{\int \mu \delta^2 dc}_C \quad [J_a] = [ML^2]$$

nello schema continuo

- esso ha misura non negativa che si annulla solo per gli elementi dell'asse.
- Se il corpo è rigido e l'asse è solido ad esso. J_a individua una caratteristica strutturale del corpo.

UB NOTAZIONE

$$R^P(\xi' \eta' \zeta') \text{ terra fisica} \quad R^P(\xi \eta \zeta) \text{ terra principale d'inerzia}$$

Per calcolare J_a conviene sovrapporre uno degli assi coordinati con l'asse a se per si prende $\zeta' \equiv a$ la * si ottiene

$$J_{\zeta'} = \sum_h m_h (\xi_h'^2 + \eta_h'^2) = \int_C \mu (\xi'^2 + \eta'^2) dC$$

Si dà il nome di raggio di gyrazione della grandezza definita da

$$\rho_a = \sqrt{\frac{J_a}{M}} > 0 \quad \text{da cui} \quad J_a = M \rho_a^2$$

esso rappresenta la distanza da a cui deve essere posto un elemento di massa M affinché il suo momento d'inerzia risulti = a quello del corpo.

Se un corpo è omogeneo nella * la densità si può portare fuori dall'integrale

$$* \quad J_a = \bar{\mu} \int_C \delta^2 dC = \bar{\mu} j_a$$

j_a si chiama momento d'inerzia della figura geometrica C . A seconda che la fig. sia uni-, bi- o tri-dimensionale il momento d'inerzia della figura si indica con (riporto pure le dim.)

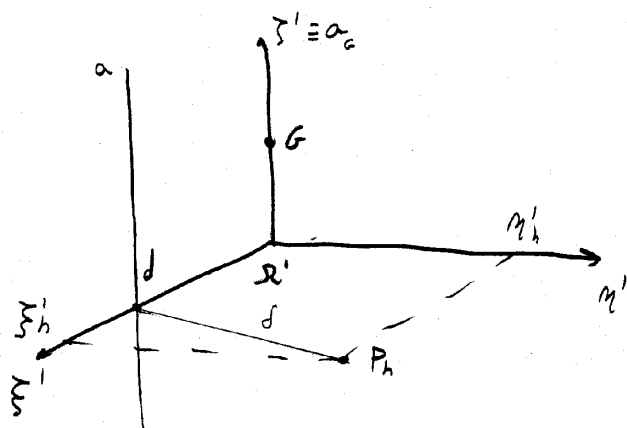
$$[j_a^L] = [L^2] \quad [j_a^S] = [L^4] \quad [j_a^V] = [L^5] \quad \begin{matrix} \mu & [ML^{-3}][L^5] = [ML^2] \\ \mu_s & [ML^{-2}][L^6] = [ML^4] \\ \mu_v & [ML^{-1}][L^7] = [ML^6] \end{matrix} \quad J_a$$

Si ha in questo modo l'unificazione del calcolo dei momenti d'inerzia di tutti i corpi omogenei aventi stessa forma e stessa dim. Per la * tale calcolo si riduce al prodotto tra j_a comune a tutti i corpi per la densità $\bar{\mu}$ propria del particolare corpo. Dividendo ambo i membri della *

per M ed estraendo la radice si ha $\rho_a = \sqrt{\frac{J_a}{M C}} = \sqrt{\frac{J_a}{C}}$

quindi il raggio giroscopico di un corpo omogeneo non dipende dalla sua densità.

Indichiamo con d la distanza di una retta a da G di un corpo di massa M e sia a_G una retta per $G \parallel a$. Per esprimere il momento d'inerzia J_a del corpo rispetto ad a si consideri una terna $R P' \mid \xi' \equiv a_G$ ed ξ' intersechi a nel punto di ascissa $d \geq 0$.



$$J_a = \sum_h^N m_h \left[(\xi_h' - d)^2 + \eta_h'^2 \right] = \sum_h^N m_h \left[\xi_h'^2 - 2d \xi_h' + d^2 + \eta_h'^2 \right] =$$

$$= \sum_h^N m_h (\xi_h'^2 + \eta_h'^2) + d^2 \underbrace{\sum_h^N m_h}_{=M} - 2d \sum_h^N m_h \xi_h'$$

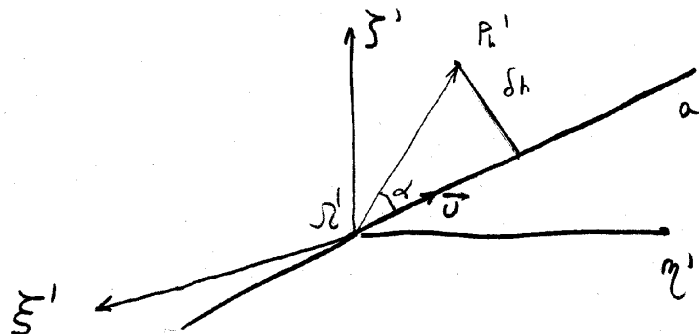
dalla relazione $\xi_G' = \frac{1}{M} \sum_h^N m_h \xi_h'$ si ha che la sommatoria

del 3° termine è nulla (è uguale a $M \xi_G'$ ma $\xi_G' = 0$). La prima sommatoria al secondo membro è uguale a J_{a_G} quindi

$$* \quad J_a = J_{a_G} + M d^2$$

TEO DI HUYGHENS - Il momento d'inerzia di un corpo rispetto ad un asse a si ottiene aggiungendo al momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrico $a_G \parallel a$ il prodotto $M d^2$ dove d è la distanza di a da a_G .] Dividendo la * per M si ha $\rho_a^2 = \rho_{a_G}^2 + d^2$

Consideriamo un punto proprio $\mathcal{R}'$ nello spazio solido a un corpo rigido e sia $RP'(\xi' \eta' \zeta')$ una terna definita in tale spazio e avente origine in $\mathcal{R}'$. Indichiamo con a la generica retta della stella di centro $\mathcal{R}'$, $\vec{U}$ un vettore // ad essa e con α', β', γ' i coseni direttori di $\vec{U}$ rispetto a RP'



La distanza δ_h tra la retta a e un elemento generico E_h del corpo rigido che occupi il punto P_h di coordinate $\xi'_h, \eta'_h, \zeta'_h$ è data da

$$\delta_h = |\vec{U} \times \vec{R}'P_h| = |\vec{R}'P_h| \sin \alpha$$

Le componenti di questo prodotto vettoriale sono i minori della matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \xi'_h & \eta'_h & \zeta'_h \end{pmatrix}$$

da cui

$$\delta_h^2 = (\alpha' \eta'_h - \xi'_h \beta')^2 + (\beta' \zeta'_h - \gamma' \eta'_h)^2 + (\gamma' \xi'_h - \alpha' \zeta'_h)^2$$

Moltiplicando ambo i membri per m_h e sommando per $h=1 \dots N$

si ottiene una relazione che lega il momento d'inerzia J_a del corpo ai coseni direttori α', β', γ' del vettore $\vec{U} // a$. Sviluppando i quadrati e raccogliendo i termini che hanno a fattore i quadrati e i prodotti dei coseni direttori di $\vec{U}$ (VEDI APPUNTI) si ottiene la relazione:

$$* J_a = A' \alpha'^2 + B' \beta'^2 + C' \gamma'^2 - 2D' \alpha' \beta' - 2E' \beta' \gamma' - 2F' \gamma' \alpha'$$

$$\mu_h \delta_h^2 = \mu_h (\alpha' \eta'_h - \beta' \xi'_h)^2 + \mu_h (\beta' \zeta'_h - \gamma' \eta'_h)^2 + \mu_h (\gamma' \xi'_h - \alpha' \zeta'_h)^2$$

$$\sum_1^N \mu_h \delta_h^2 = \sum_1^N \mu_h (\alpha'^2 \eta_h'^2 - 2 \alpha' \eta'_h \beta' \xi'_h + \beta'^2 \xi_h'^2) + \sum_1^N \mu_h (\beta'^2 \zeta_h'^2 - 2 \beta' \zeta'_h \gamma' \eta'_h + \gamma'^2 \eta_h'^2) +$$

$$+ \sum_1^N \mu_h (\gamma'^2 \xi_h'^2 - 2 \gamma' \xi'_h \alpha' \zeta'_h + \alpha'^2 \zeta_h'^2)$$

$$J_a = \alpha'^2 \sum_1^N \mu_h (\eta_h'^2 + \zeta_h'^2) - 2 \alpha' \beta' \sum_1^N \mu_h \eta'_h \xi'_h + \beta'^2 \sum_1^N \mu_h (\xi_h'^2 + \zeta_h'^2) +$$

$$+ \gamma'^2 \sum_1^N \mu_h (\eta_h'^2 + \xi_h'^2) - 2 \beta' \gamma' \sum_1^N \mu_h \zeta'_h \eta'_h - 2 \gamma' \alpha' \sum_1^N \mu_h \xi'_h \zeta'_h$$

$$J_a = \alpha'^2 \underline{A'} - 2 \alpha' \beta' \underline{D'} + \beta'^2 \underline{B'} + \gamma'^2 \underline{C'} - 2 \beta' \gamma' \underline{E'} - 2 \gamma' \alpha' \underline{F'}$$

- momenti d'inerzia rispettivamente rispetto agli assi ξ, η, ζ
- prodotti d'inerzia (il primo, D' , rispetto agli assi $\eta' \xi'$)

Se consideriamo per $\underline{D'}$ il prodotto d'inerzia D' , ci affrettiamo a dire che esso si annulla se e solo se almeno uno dei piani coordinati $\xi'=0$ oppure $\eta'=0$ sia piano di simmetria ortogonale per il corpo

Il modo di trovare di J_a quando l'asse descrive la stella di centro S' è determinato quando si conoscano i 3 momenti d'inerzia A', B' e C' e i 3 prodotti d'inerzia relativi agli assi di RP' .

J_a non dipende dal verso di $\vec{u}$.

Per dare una rappresentazione più espressiva della dipendenza di J_a dalla direzione dell'asse consideriamo su ciascuna semiretta uscente da S' un punto Λ | $|S'\Lambda| = \sqrt{\frac{\chi}{J_a}}$. χ è un coefficiente che è

indipendente dalla direzione di a ed ha dim di un momento d'inerzia per una lunghezza al quadrato (corpo $[ML^2]$, figura $[L^5] \circ [L^6] \circ [L^7]$). S' è centro di simmetria per la superficie descritta da Λ quando a assume tutti i possibili orientamenti attorno a S' . I casi diretti che individuano l'orientamento di $S'\Lambda$ rispetto RP' sono uguali al rapporto tra le coordinate di Λ e la lunghezza di $S'\Lambda$:

$$\alpha' = \xi' \sqrt{\frac{J_a}{\chi}} \quad \beta' = \eta' \sqrt{\frac{J_a}{\chi}} \quad \gamma' = \zeta' \sqrt{\frac{J_a}{\chi}}$$

e sostituendoli nell'equazione * del par precedente si ha l'eq cartesiana della sup descritta da Λ .

$$A' \xi'^2 + B' \eta'^2 + C' \zeta'^2 - 2D' \xi' \eta' - 2E' \eta' \zeta' - 2F' \zeta' \xi' = \chi$$

Questa quadrica è un ellissoide di centro S' : l'ellissoide d'inerzia. I suoi assi e i suoi piani si chiamano assi e piani principali d'inerzia e ogni terna RP' avente origine in S' e assi $\equiv$ con quelli dell'ellissoide si dice terna principale d'inerzia. Adottando come terna cartesiana RP' (terna principale d'inerzia) l'eq cartesiana dell'ellissoide diventa $A \xi^2 + B \eta^2 + C \zeta^2 = \chi$ dove A, B, C sono i momenti principali d'inerzia rispetto ai 3 assi principali; si ha quindi:

$$A \alpha^2 + B \beta^2 + C \gamma^2 = J_a$$

$$NB \quad \xi = \alpha \sqrt{\frac{\chi}{J_a}} \quad \dots$$

la dipendenza di J_a dall'orientamento di a risulta quindi determinata quando si conoscano i 3 momenti principali d'inerzia A, B, C e dei parametri che individuano l'orientamento di a rispetto EN .

I punti di intersezione degli assi dell'ellissoide con la SUP si chiamano vertici; si chiamano semiasse, segmenti a, b, c che hanno come primo estremo O' e secondo estremo il punto di intersezione tra la SUP dell'ellissoide e risp gli assi ξ, η, ζ . Tali semiasse sono legati ai relativi momenti principali d'inerzia dalle relazioni:

$$*') \quad a^2 = \frac{X}{A} \quad b^2 = \frac{X}{B} \quad c^2 = \frac{X}{C}$$

Se 2 momenti d'inerzia (relativi a 2 assi) sono uguali l'ellissoide si dice rotondo attorno al terzo asse. Se per $A=B$ (A è il mom. d'inerzia relativo a ξ , B è quello relativo a η) l'ellissoide è rotondo attorno a ζ . C.N.S. affinché un ellissoide sia rotondo è che due assi siano non ortogonali. Un ellissoide d'inerzia rotondo è schiacciato se $A=B < C$, risulta allungato se $A=B > C$.

Se $A=B=C$ l'ellissoide d'inerzia diventa una sfera e ogni linea mette origine in O' il principale d'inerzia.

L'ellissoide d'inerzia relativo a G si chiama centrale (gli assi, i piani, i momenti principali d'inerzia e i loro raggi di pirazione si dicono centrali anch'essi).

Nota M è l'ellissoide centrale d'inerzia di un corpo il suo mom. d'inerzia rispetto a un qualsiasi asse a distanza d da G è dato da: (la dir di a rispetto alla terna centrale è individuata dai coseni direttori α, β e γ)

$$J_a = A^G \alpha^2 + B^G \beta^2 + C^G \gamma^2 + M d^2$$

(passa per G e)

Dalle $*')$ si ricorresse che la retta di minimo momento d'inerzia ha la stessa dir. del semiasse maggiore dell'ellissoide centrale relativo al corpo considerato infatti, $A = \frac{X}{a^2}$ ($a > b$ e $a > c$). Se l'ellissoide ha 3 semiasse diversi tra loro o è rotondo e allungato la retta di minimo mom. d'inerzia s'è unica. Se l'ellissoide centrale è sferico o rotondo e schiacciato

$\exists$ risp ∞^2 e ∞' rette di minimo mom. d'inertia. Quando un ellissoide si rotando attorno a un asse tale asse si chiama asse giroscopico e il corpo si chiama giroscopio.

Se in un corpo $\exists$ un piano di simmetria Π esso contiene per la proprietà di ubicazione $\textcircled{3}$ il baricentro. La normale a Π in G è l'asse centrale d'inertia.

Se $\exists$ 2 piani di simmetria Π_1 e Π_2 , entrambe centrali, la loro intersezione è l'asse centrale d'inertia*. Se $\Pi_1 \neq \Pi_2$ l'ellissoide centrale si rotando attorno all'intersezione dei due piani e il corpo è un giroscopio. CS affinché un corpo sia un giroscopio si deve tutti i piani passanti per l'asse siano piani di simmetria per il corpo.

* Se Π_1 e Π_2 sono mutuamente ortogonali la terza centrale d'inertia è data dalla retta intersezione e dalle due rette ad essi $\perp$.

Se tutti gli elementi di un corpo $\in$ ad uno stesso piano Π per il calcolo dei momenti d'inertia prendiamo il piano coordinato $\xi\eta \equiv \Pi$ in modo tale che $\forall$ elemento $dS = 0$. I momenti d'inertia rispetto agli assi ξ, η, ζ sono dati nel caso di sezione particolare e di distrib. continua di massa dalle:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = J_{\xi} = \sum_h m_h \eta_h^2 = \int_S \mu_S \eta^2 dS \\ B = J_{\eta} = \sum_h m_h \xi_h^2 = \int_S \mu_S \xi^2 dS \\ C = J_{\zeta} = \sum_h m_h (\xi_h^2 + \eta_h^2) = \int_S \mu_S (\xi^2 + \eta^2) dS \end{array} \right.$$

dato che la figura è
bidimensionale
sostituito

$C \rightarrow S$

$dC \rightarrow dS$

ζ è l'asse principale d'inertia che interseca il piano di simmetria $\xi\eta$ in R . Si ha $C = A + B$ cioè per un corpo piano il mom d'inertia rispetto a un asse ortogonale a esso per R è alla somma dei mom d'inertia rispetto a due assi mutuamente ortogonali passanti per R . Se l'ellissoide si rotando attorno ζ si ha

$$A = B = \frac{C}{2}$$

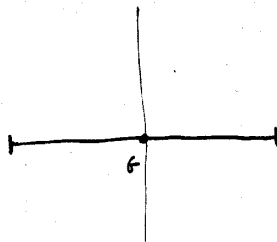
La conoscenza dei momenti centrali d'inerzia consente di calcolare mediante l'eq $J_G = A^2 \alpha^2 + B^2 \beta^2 + C^2 \gamma^2 + M d^2$ il mom d'inerzia rispetto ad ogni asse a distanza d da G e il cui orientamento rispetto agli assi centrali sia dato da α, β, γ .

Ci riferiamo a momenti d'inerzia non di un corpo omogeneo ma della sua figura ($j^2 = \frac{J_G}{A}$).

✓ MOMENTI CENTRALI D'INERZIA DI LINEE OMOGENEE

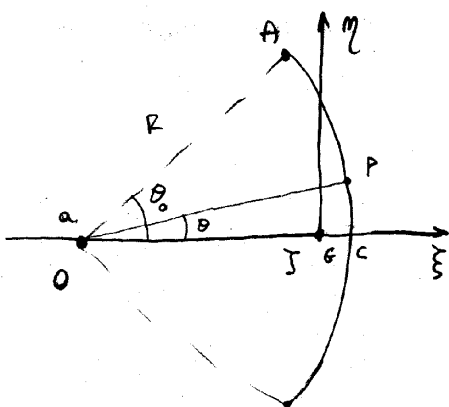
segmento - Sia l la lunghezza del segmento e il suo punto medio ($\equiv G$) sia l'origine delle S . Indichiamo con s^2 il quadrato della distanza di un generico punto del segmento dalla retta $\perp$ ad esso per G ; si ha $s^2 = S^2$. Il momento d'inerzia del segmento rispetto a ogni retta per $G \perp$ ad esso e':

$$j^2 = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} s^2 ds = l \frac{l^2}{12}$$



Le rette $\perp$ al segmento in G non sono assi centrali. Il termine $\frac{l^2}{12}$ è il quadrato del raggio di gyrazione.

arco di circonferenza -



Sono assi centrali la normale al foglio in G : η e ξ , retta per O e G .

Sia R il raggio dell'arco di arco $\theta_0 > 0$ l'angolo al centro sotteso a $\widehat{CA}$. Abbiamo già visto in precedenza che $|\vec{OG}| = \frac{R \sin \theta_0}{\theta_0}$.

Il momento d'inerzia dell'arco AB rispetto ξ e' il doppio rispetto a quello di AC sempre rispetto ξ .

Il quadrato della distanza di un generico punto $P \in \hat{AB}$ da ξ è dato da $\delta^2 = R^2 \sin^2 \theta$. L'area $\hat{CP}$ è data da $ds = R d\theta$. Il momento centrale d'inerzia di $\hat{AB}$ rispetto a ξ è quindi dato da

$$* \quad j_{\xi}^L = 2R^3 \int_0^{\theta_0} \sin^2 \theta \, d\theta = 2\theta_0 R \left[\frac{R^2}{2} - R^2 \frac{\sin 2\theta_0}{4\theta_0} \right]$$

dove i termini tra parentesi quadra sono il quadrato del raggio centrale di girazione. Il momento centrale d'inerzia rispetto a ξ lo si può ricavare dalla relazione che lega i raggi di girazione $\rho_a^2 = \rho_{\xi}^2 + d^2$.

ρ_a è il raggio di girazione della retta $\parallel \xi$ per O . d è pari a

$$|\overrightarrow{OG}| = \frac{R \sin \theta_0}{\theta_0} \quad \text{quindi nella relazione } *, \text{ per trovare il}$$

momento centrale d'inerzia rispetto all'asse centrale ξ , basta sostituire

i termini tra parentesi con ρ_{ξ}^2 . Dato che $\rho_a = R$ si ha

$$\rho_{\xi}^2 = R^2 - R^2 \frac{\sin^2 \theta_0}{\theta_0^2}$$

$$j_{\xi}^L = 2\theta_0 R \left[R^2 - R^2 \frac{\sin^2 \theta_0}{\theta_0^2} \right]$$

quindi

$$J_a = \int_L \delta^2 dl = \int_{0 \text{ a } \theta_0} R^2 dl =$$

$$= R^2 \int_{0 \text{ a } \theta_0} dl = 2\theta_0 R (R^2)$$

ρ_a^2

Dalla relazione $C = A + B$ (con $C = J_{\xi}$ $A = J_{\xi}$ $B = J_m$) si ha

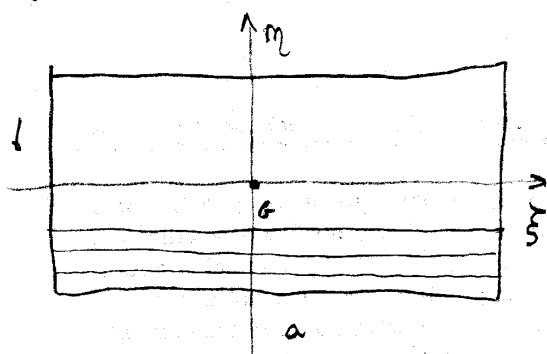
che $j_m^L = j_{\xi}^L - j_{\xi}$

MOMENTI CENTRALI D'INERZIA DI FIG PIANE OMOGENEE

figura limitata da rettangolo - Sono assi centrali d'inerzia le mediane

e la normale al foglio mg . RT sia la terna I

ξ sia sovrapposto alla mediana di a ed η a quella di b .



Suddividendo il rettangolo in strisce // a ξ di lunghezza a e altezza dm il quadrato della distanza della periferia striscia da ξ e' dato da $\delta^2 = \eta^2$. Ponendo nella relazione η^2 al

$$J_a = \int_C \delta^2 dC$$
 posto di δ^2 e dm a al posto di dC si ha

$$J_{\xi}^S = a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \eta^2 d\eta = ab \left(\frac{b^2}{12} \right)$$

quadrato del raggio pivote rispetto a ξ

che e' il momento centrale

d'inertzia del rettangolo rispetto a ξ . Sostituendo a con b si ha

$$J_{\eta}^S = ab \left(\frac{a^2}{12} \right)$$

quadrato del raggio pivote rispetto a η

momento centrale d'inertzia rispetto η .

Dalla relazione $A+B=C$ si ha $J_{\xi}^S = ab \frac{a^2+b^2}{12}$

Se il rettangolo si riduce a un quadrato i momenti rispetto alle mediane $\equiv$ quindi l'asse ξ e' giroscopico.

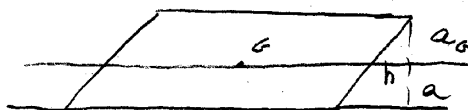
figure limitate da un parallelogramma - Le mediane non sono all'centrali d'inertzia. Se si divide il parallelogramma in strisce // a un lato,

facendo scorrere le strisce da una sulle altre e facendo tendere a zero la loro altezza si puo' trasformare il parallelogramma in un rettangolo

senza mutare i suoi momenti d'inertzia rispetto a ogni retta parallela al lato. Per un parallelogramma di altezza h , quindi, il quadrato

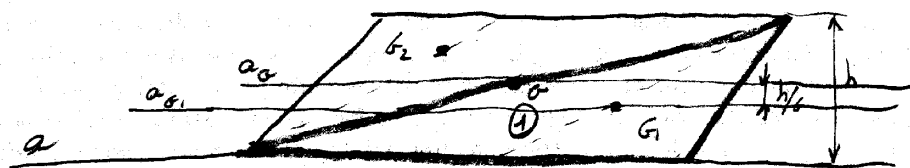
del raggio pivote rispetto a una retta per G // alle basi e' $\rho_{aG}^2 = \frac{h^2}{12}$.

Rispetto alla retta che contiene una delle basi si ha $\rho_a^2 = \frac{h^2}{12} + \frac{h^2}{4} = \frac{h^2}{3}$



quindi $J_a = bh \left(\frac{h^2}{3} \right)$

Figura limitata da un triangolo - Ogni parallelogramma può essere diviso da una diagonale in due triangoli uguali che per motivi di simmetria hanno lo stesso raggio di proiezione rispetto all'asse a_G per G e // a una coppia di lati.



distanza del baricentro di un triangolo da ogni base

La distanza di G_1 e G_2 da a_G è pari a $\frac{h}{2} - \left(\frac{h}{3}\right) = \frac{h}{6}$. Dato che se due o più corpi hanno ugual raggio di proiezione rispetto a uno stesso asse l'iniziale dei corpi ha lo stesso raggio di proiezione rispetto a tale asse, ^(viceversa si ha) il raggio di proiezione dei due triangoli rispetto ad a_G è uguale a quello del parallelogramma rispetto ad a_G che è pari a $\rho_{a_G}^2 = \frac{h^2}{12}$. Applicando Huyghens si può trovare il raggio di proiezione di un triangolo (per G_1) rispetto all'asse // alla base per G_1 : $\rho_{a_{G_1}}^2 = \rho_{a_G}^2 + d^2$ da cui,

$$\rho_{a_{G_1}}^2 = \frac{h^2}{12} - \frac{h^2}{36} = \frac{h^2}{18}$$

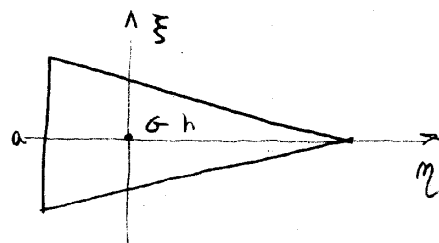
Il quadrato del raggio di proiezione del triangolo $\textcircled{1}$ rispetto alla retta che contiene la

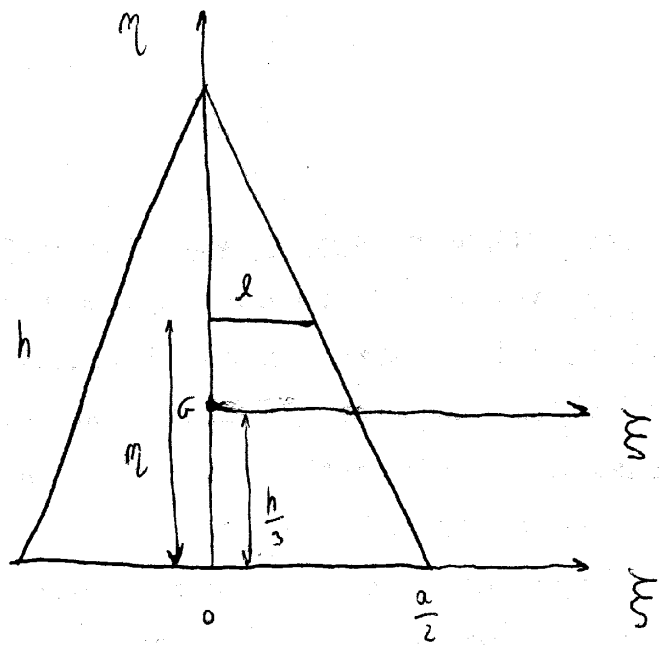
base (retta a) è: $\rho_a^2 = \rho_{a_{G_1}}^2 + d^2 = \frac{h^2}{18} + \left(\frac{h}{2} - \frac{h}{6}\right)^2 = \frac{h^2}{18} + \frac{h^2}{9} = \frac{h^2}{6}$

Se il triangolo è isoscele la retta per G $\perp$ alla base è l'asse di simmetria e quindi asse centrale. Se questo asse lo chiamiamo ξ e quello ad esso $\perp$ per G lo chiamiamo η (dato che passano per i baricentri), se a è la base e h l'altezza si ha

$$j_{\xi}^S = \frac{ah}{2} \left(\frac{h^2}{18} \right) \leftarrow j_{\eta}^S = \frac{ah}{2} \left(\frac{a^2}{24} \right)$$

$$j_{\xi}^S = \frac{ah}{2} \left[\frac{h^2}{18} + \frac{a^2}{24} \right] \leftarrow \text{quadrati dei raggi centrali di proiezione}$$





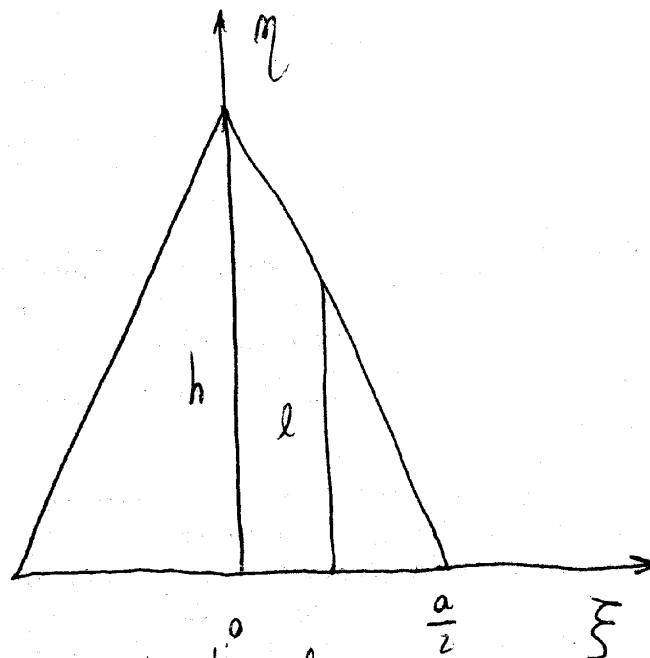
$$l : (h - y) = \frac{a}{2} : h$$

$$J_x = 2 \int_0^h y^2 \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{2} \frac{y}{h} \right) dy = 2 \int_0^h \frac{a y^2}{2} dy - 2 \int_0^h \frac{a y^3}{2h} dy =$$

$$= 2 \left[\frac{a y^3}{6} \right]_0^h - 2 \left[\frac{a y^4}{8h} \right]_0^h = \cancel{2} \frac{a h^3}{6} - 2 \frac{a h^4}{8h} =$$

$$= \frac{(4-2) a h^3}{12} = \frac{a h^3}{12} = \frac{a h}{2} \frac{h^2}{6}$$

$$\frac{h^2}{6} - \frac{h^2}{9} = \frac{(3-2) h^2}{18} = \frac{h^2}{18}$$



Dalla similitudine dei due triangoli

$$l : \frac{a}{2} - \xi = h : \frac{a}{2}$$

$$J^S = \int_S \delta^2 dS \quad \text{con} \quad dS = l d\xi$$

$$\delta^2 = \xi^2$$

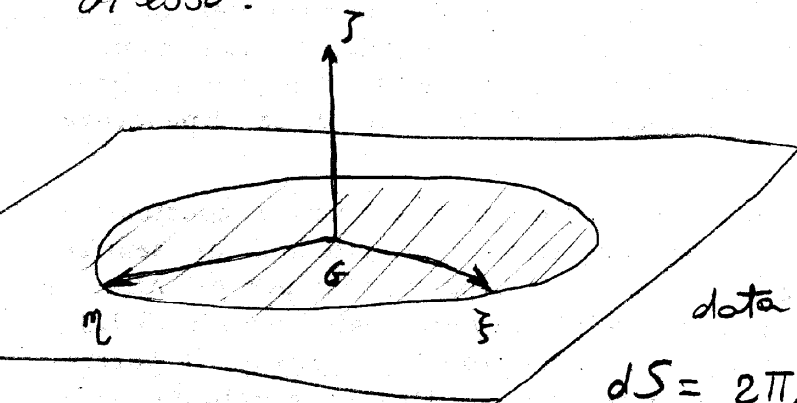
$$J_\eta = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} \xi^2 \left(h - \frac{2\xi h}{a} \right) d\xi = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} \xi^2 h d\xi - 2 \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{2\xi^3 h}{a} d\xi =$$

$$= 2 \left[\frac{1}{3} \xi^3 h \right]_0^{\frac{a}{2}} - 2 \left[\frac{2\xi^4 h}{4a} \right]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{2}{3} \frac{a^3 h}{8} - \frac{a^3 h}{16} =$$

$$= \frac{a^3 h}{12} - \frac{a^3 h}{16} = \frac{a^3 h}{48} = \frac{a h}{2} \frac{a^2}{24}$$

Se il triangolo è equilatero i momenti d'inerzia rispetto agli assi ξ e η sono uguali tra loro e l'asse ζ è asse principale perché il triangolo possiede 3 piani di simmetria per ζ non mutuamente ortogonali.

Cerchio - La normale al piano in G è asse principale quindi ogni retta diametrica è asse centrale. Per la relazione $A = B = C$ ($A = J_\xi$ $B = J_\eta$ $C = J_\zeta$) si ha che, noto il momento d'inerzia rispetto all'asse principale, il momento d'inerzia rispetto a qualsiasi retta diametrica è la metà di esso.



Suddividendo il cerchio in corone circolari concentriche di spessore dp si ha che la distanza al quadrato di tali corone dall'asse principale è data da $d^2 = \rho^2$. Sostituendo

$dS = 2\pi\rho dp$ e integrando tra 0 e R si ha

$$J_\zeta^S = 2\pi \int_0^R \rho^3 d\rho = 2\pi \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^R = \frac{2\pi}{4} R^4 = \frac{\pi R^4}{2} = \pi R^2 \left(\frac{R^2}{2} \right)$$

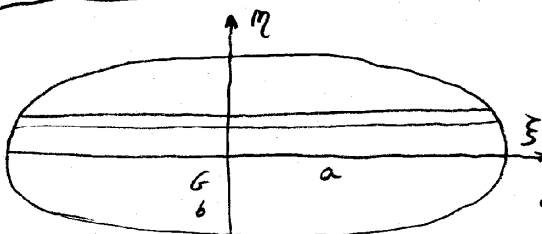
quadrato del raggio di girazione rispetto ζ

Dalla relazione $A = B = C$

si ha $J_\eta^S = J_\xi^S = \pi R^2 \left(\frac{R^2}{4} \right)$

quadrato del raggio di girazione rispetto a una qualsiasi retta diametrica

figura limitata da un'ellisse



gli assi centrali in questo caso sono: la normale al foglio in G e gli assi di simmetria dell'ellisse; chiamiamo questi 3 assi risp. ζ , ξ , η .

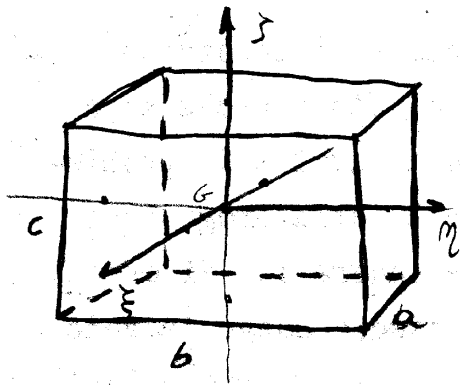
Suddividiamo l'ellisse in strisce // ξ e di altezza dm e moltiplichiamo la lunghezza di ogni striscia per $\frac{b}{a}$; l'ellisse si trasforma in una circonferenza di raggio b quindi avrà raggio di gyrazione uguale a $\frac{b}{2}$ rispetto a ξ

$$j_{\xi}^S = \pi ab \frac{b^2}{4} \quad \text{sostituendo } b \text{ con } a \text{ ho } j_{\eta}^S = \pi ab \frac{a^2}{4} \quad e$$

dalla relazione $A+B=C$ ottengo $j_z^S = \pi ab \left[\frac{a^2+b^2}{4} \right]$

MOMENTI CENTRALI D'INERZIA DI FIGURE TRID. OMOGENEE

parallelepipedo rettangolo - Gli assi centrali sono le rette che uniscono i centri delle facce perché sono assi di simmetria ortogonale. Sia RP una terna i cui assi ξ, η, z sono // rispettivamente ad a, b, c . Il raggio di gyrazione relativo ad un asse $\equiv$ con quella di una delle facce $\perp$ all'asse per cui:

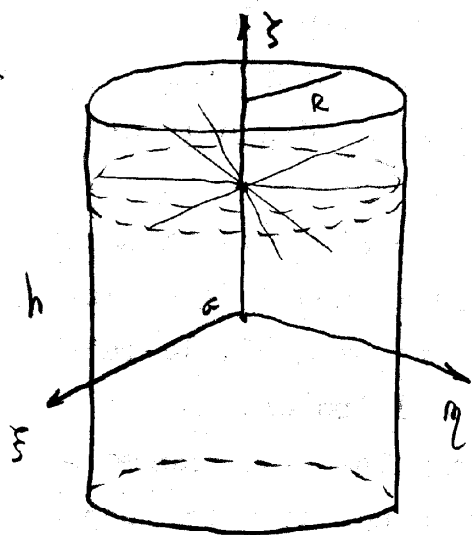


$$j_{\xi}^V = abc \frac{b^2+c^2}{12}$$

$$j_{\eta}^V = abc \frac{a^2+c^2}{12}$$

$$j_z^V = abc \frac{b^2+a^2}{12}$$

cilindro circolare retto - L'asse di simmetria è giroscopico e per cui retta ad esso ortogonale in G è l'asse centrale. Se R è il raggio del cilindro e h è la sua altezza. Il raggio di gyrazione rispetto all'asse giroscopico è pari a $\frac{R}{\sqrt{2}}$ come nel cerchio quindi $j_z^V = \pi R^2 h \frac{R^2}{2}$



Supponiamo di dividere il cilindro in dischi
 $\perp$ all'asse di spessore $d\xi$. Il quadrato della
 distanza del diametro del disco considerato dall'
 asse ξ e' $d^2 = \xi^2$ si ha inoltre $dC =$
 $= \pi R^2 d\xi$. Dato che il raggio di proiezione
 di ogni disco rispetto a un qualsiasi asse
 diametricale e' $\frac{R}{2}$ si ha

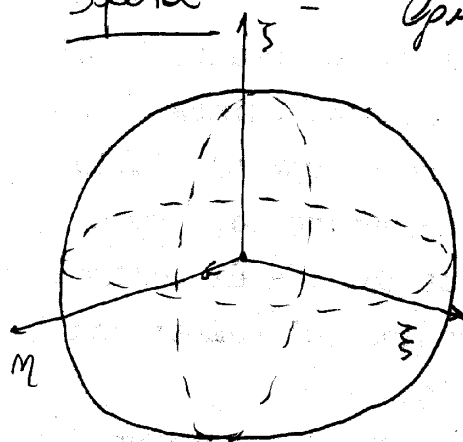
$$j_{\eta}^{\nu} = j_{\xi}^{\nu} = \pi R^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\xi^2 + \frac{R^2}{4} \right) d\xi = \pi R^2 h \left[\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right]$$

teo di Huygens

$$\rho_{\xi}^2 = \rho_G^2 + \xi^2$$

del disco non del cilindro!

Sfera



Ogni retta per G e' asse proscopico. Il quadrato
 della dist di un generico punto della sfera da
 ξ e' $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$ quindi

$$j_{\xi}^{\nu} = \int_C \eta^2 + \xi^2 dC \quad \text{per motivi di}$$

simmetria si ha $\int_C \eta^2 + \xi^2 dC = \frac{2}{3} \int_C \xi^2 + \eta^2 + \xi^2 dC = \frac{2}{3} \int_C \rho^2 dC$

Dividendo la sfera in gusci concentrici di volume $dC = 4\pi \rho^2 d\rho$ si ha

$$j_{\xi}^{\nu} = \frac{2}{3} 4\pi \int_0^R \rho^4 d\rho = \frac{8}{3} \pi \left[\frac{1}{5} \rho^5 \right]_0^R = \frac{8}{15} \pi R^5 = \frac{4}{3} \pi R^3 \left(\frac{2}{5} R^2 \right)$$

quadrato del
 raggio proiettato rispetto
 a qualsiasi retta per G

Si ha:

$$I_{\xi} = \int_C (\eta^2 + \zeta^2) dC$$

$$I_{\eta} = \int_C (\zeta^2 + \xi^2) dC$$

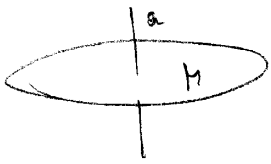
$$I_{\zeta} = \int_C (\xi^2 + \eta^2) dC$$

Sommando:

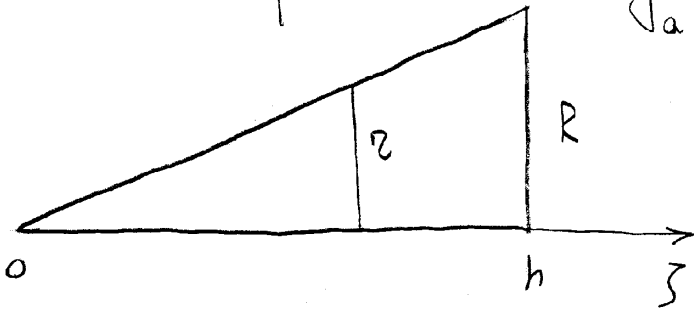
$$(1) \quad I_{\xi} + I_{\eta} + I_{\zeta} = 2 \cdot \int_C (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) dC$$

Per evidenti ragioni di simmetria e' $I_{\xi} = I_{\eta} = I_{\zeta}$ e quindi la (1) diventa:

$$3 \cdot I_{\xi} = 2 \cdot \int_C \rho^2 dC \text{ da cui } I_{\xi} = \frac{2}{3} \cdot \int_C \rho^2 dC = \dots$$

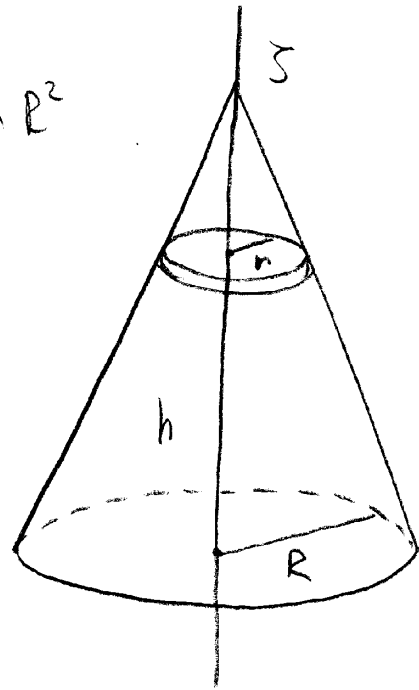


$$J_a = \frac{1}{2} M R^2$$



$$R : h = z : z$$

$$z = \frac{R}{h} z$$



$$dm_{\text{disk}} = \mu^v \pi z^2 dz = \mu^v \pi \frac{R^2}{h^2} z^2 dz$$

$$dJ_z = \frac{1}{2} dm z^2$$

$$J_z = \frac{1}{2} \int_0^h \mu^v \pi \frac{R^2}{h^2} z^2 dz$$

$$= \frac{1}{2} \mu^v \pi \left[\frac{R^2}{5h^2} z^5 \right]_0^h = \frac{1}{2} \mu^v \pi \frac{R^2 h}{5} = 3 \left(\frac{1}{3} \mu^v \pi R^2 h \right) \frac{R^2}{10} =$$

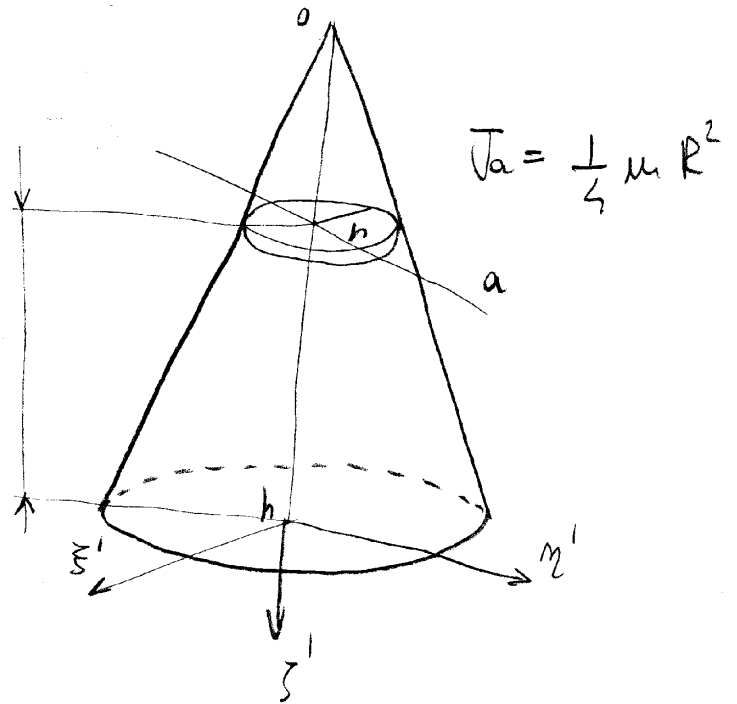
$$= \frac{3}{10} M R^2$$

$$dM_{\text{disco}} = \mu^v \pi R^2 d\zeta = \mu^v \pi \frac{R^2}{h^2} \zeta^2 d\zeta$$

$$dJ_a^{\text{disco}} = \frac{1}{4} dM R^2$$

$$dJ_a^{\text{disco}} = \frac{1}{4} \mu^v \pi \frac{R^4}{h^4} \zeta^4 d\zeta \quad h-\zeta$$

$$dJ_{\zeta}^{\text{disco}} = dJ_a^{\text{disco}} + \mu^v \pi \frac{R^2}{h^2} \zeta^2 d\zeta (h-\zeta)^2$$



$$J_{\zeta}^{\text{disco}} = \frac{1}{4} \mu^v \pi \frac{R^4}{h^4} \int_0^h \zeta^4 d\zeta + \mu^v \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h \zeta^2 (h^2 - 2h\zeta + \zeta^2) d\zeta =$$

$$= \frac{1}{4} \mu^v \pi \frac{R^4}{h^4} \frac{h^5}{5} + \mu^v \pi \frac{R^2}{h^2} \left(h^2 \frac{h^3}{3} - \frac{2h^4}{4} + \frac{h^5}{5} \right) =$$

$$= \frac{1}{20} \mu^v \pi R^4 h + \mu^v \pi \frac{R^2}{h^2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) h^5 =$$

$$= \frac{3}{20} \left(\frac{1}{3} \mu^v \pi R^2 h \right) R^2 + \frac{1}{30} \mu^v \pi R^2 h^3 =$$

$$= \frac{3}{20} M R^2 + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{3} \mu^v \pi R^2 h \right) h^2 =$$

$$= \frac{3}{20} M R^2 + \frac{1}{10} M h^2 =$$

$$= \frac{M}{10} \left(\frac{3}{2} R^2 + h^2 \right) = J_{\eta}^{\text{disco}}$$