

Appunti di Teoria dei Giochi
per il corso di
Modelli Matematici per le Scienze Sociali
 Antonio BERNARDO

1. Premessa

La **teoria dei giochi** si occupa di situazioni di interazione strategica fra decisori che si assume siano **'intelligenti'** e **'razionali'**.

Intelligenti significa che capiscono la situazione in cui si trovano e sono in grado di fare ragionamenti logici corretti. Razionali significa che hanno preferenze coerenti sugli esiti finali del processo decisionale e che hanno l'obiettivo di massimizzare queste preferenze.

Ogni individuo ha una sua **funzione di utilità** sull'insieme dei beni. Per esempio, se l'insieme dei beni è una fetta di torta, un libro, una vacanza, un diploma, ognuno è in grado di quantificare numericamente la sua utilità per ciascuno dei beni. Non è detto che le utilità di due persone distinte per lo stesso bene siano le stesse. La razionalità richiesta ai giocatori impone che valga **la proprietà transitiva nelle preferenze**: se il diploma è preferito alla vacanza e la vacanza al libro allora il diploma deve essere preferito al libro.

Una prima classificazione dei giochi è tra **giochi cooperativi** e **giochi non cooperativi**.

La teoria dei giochi cooperativi studia il formarsi di coalizioni con accordi sottoscritti e vincolanti che possono essere di vantaggio ai singoli componenti. Lo studio di questo tipo di coalizioni è stato introdotto da Neumann.

La teoria dei giochi non cooperativi si occupa dei meccanismi delle decisioni dei singoli, sulla base di ragionamenti individuali, in assenza di alleanze vincolanti. Questa teoria è stata introdotta da Nash.

La teoria dei giochi non si occupa dei **giochi contro il caso**, come il lotto, la roulette, ... I giochi di cui si occupa questa teoria devono avere almeno due individui che interagiscono.

Vediamo due esempi.

Esempio 1: pari e dispari

Primo gioco. Due giocatori, Piero e Silvia, hanno un'urna ciascuno contenente 5 palline numerate da 1 a 5. Ciascuno dei due giocatori estrae una pallina dall'urna. Se la somma dei due numeri è pari, vince Piero, se è dispari vince Silvia.

E' un gioco contro il caso. Vi sono 25 possibilità, di cui 13 a favore del primo e 12 a favore del secondo, il gioco non è equo ma i due giocatori non hanno né scelte né decisioni da prendere.

Secondo gioco. Piero e Silvia scelgono contemporaneamente un numero da 1 a 5 e lo indicano con la mano. Se la somma dei numeri è pari, vince Piero, se è dispari vince Silvia.

In questo gioco i giocatori scelgono il numero da indicare.

Un **gioco è a informazione completa** se le regole del gioco e le funzioni di utilità di tutti i giocatori sono conoscenza comune di tutti i giocatori.

Questo assunto non è molto realistico ma è una prima semplificazione per costruire una teoria; si possono comunque studiare anche i giochi a informazione incompleta ma la teoria è più complessa.

Un **gioco è finito** se ogni giocatore ha un numero finito di mosse a disposizione e il gioco si conclude dopo un numero finito di mosse.

Assioma di razionalità. L'ipotesi di base della teoria dei giochi è che tutti i giocatori si comportino razionalmente, ossia nessun giocatore sceglie un'azione se ne ha a disposizione un'altra che gli permette di ottenere risultati migliori, qualunque sia il comportamento dell'avversario.

Un'informazione è di **comune conoscenza** tra due o più giocatori se questi ne sono al corrente, sanno che gli altri ne sono al corrente, sanno che gli altri sanno che i giocatori ne sono al corrente e così via.

Un gioco è a **informazione perfetta** se entrambi i giocatori conoscono sempre tutta la storia passata del gioco, le possibili evoluzioni future e nessuna mossa è segreta per nessuno.

Gli scacchi e la dama sono tipici giochi a informazione perfetta, i giochi di carte solitamente non lo sono.

Un gioco è a **memoria perfetta** se quando è il suo turno di muovere, ogni giocatore ricorda tutto quanto già sapeva negli stadi precedenti del gioco e tutte le sue mosse passate.

Un gioco è **descritto compiutamente** quando se ne precisa lo stato iniziale, l'evoluzione, lo stato finale e il risultato.

Esempio 2: fiammiferi

Stato iniziale: 2 mucchietti di 2 fiammiferi ciascuno

Evoluzione: 2 giocatori a turno levano almeno un fiammifero, e possono farlo da un solo mucchio

Stato finale: tutti i fiammiferi sono stati tolti

Risultato: perde chi toglie l'ultimo fiammifero.

Classificazione dei giochi

- a. Le mosse di un gioco possono essere simultanee o sequenziali
 Nel gioco degli scacchi le mosse sono sequenziali, nel gioco della morra cinese le mosse sono simultanee. In una gara d'asta per un appalto le ditte fanno un'offerta simultaneamente, senza conoscere le offerte fatte dagli altri concorrenti.
- b. Gli interessi dei giocatori possono essere completamente contrapposti o parzialmente contrapposti
 Nel gioco degli scacchi gli interessi sono completamente contrapposti: se un giocatore vince, l'altro perde, oppure possono pareggiare entrambi. Nei giochi di carte, solitamente, la vittoria di un giocatore è pari alla perdita dell'altro. I giochi economici e sociali non sono quasi mai a somma zero: due imprese possono collaborare insieme per produrre di più di quanto riuscirebbero a produrre separatamente; in una guerra ci possono essere solo perdenti.
 Vi sono poi giochi di pura coordinazione nei quali i giocatori hanno esattamente gli stessi obiettivi e, senza poter collaborare, cercano di arrivare alla stessa scelta. E' il caso del dilemma dello studente bugiardo.
- c. Un gioco può essere disputato una sola volta oppure può essere ripetuto più volte.
 Un meccanico d'auto si può comportare diversamente se ha a che fare con un automobilista di passaggio o un cliente abituale. In una corsa sui cento metri non c'è possibilità di collaborazione tra i corridori ma in una maratona o una gara di ciclismo i corridori possono ritenere utile collaborare tra di loro.
- d. I giocatori possono avere informazione perfetta del gioco o no
 Nel gioco degli scacchi ciascun giocatore, nel momento in cui deve fare una mossa, conosce esattamente la situazione attuale e tutte le mosse che hanno portato a quella situazione. Nel gioco del poker, invece, un giocatore conosce le carte che ha in mano e quelle scartate dai giocatori ma non sa nulla delle carte possedute dagli altri giocatori. Tutti i giochi con mosse simultanee sono giochi a informazione incompleta.
- e. I giocatori possono sottoscrivere accordi vincolanti oppure operare indipendentemente l'uno dall'altro.

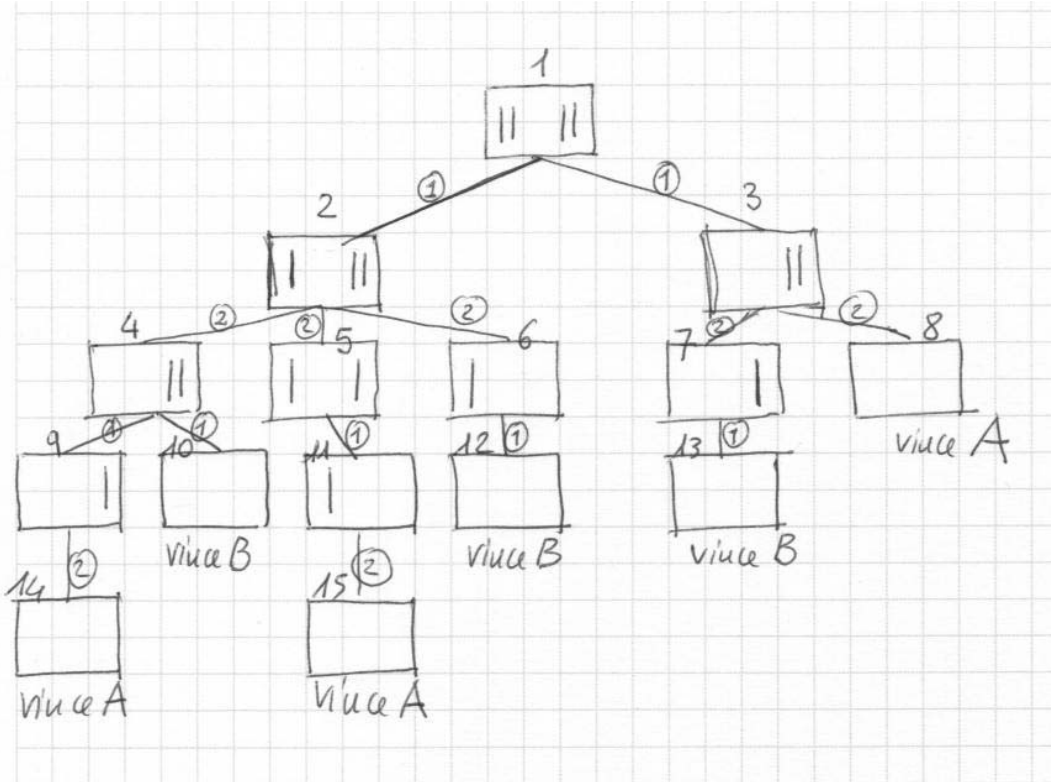
2. Giochi in forma estesa

La descrizione formale di un gioco non cooperativo si fa in due modi: in forma estesa e in forma normale o strategica.

Nella **forma estesa** la descrizione del gioco è fatta con un albero.

Un albero è un grafo connesso privo di circuiti.

Esempio 2 in forma estesa: fiammiferi



Se i giocatori si comportano razionalmente il vincitore di questo gioco sarà sempre il secondo giocatore.

Esempio 3: il dilemma dell'ombrello

Piero e Silvia stanno per uscire di casa e devono decidere se portare l'ombrello.

La vincita di ciascun giocatore è

0 se affronta la pioggia senza ombrello

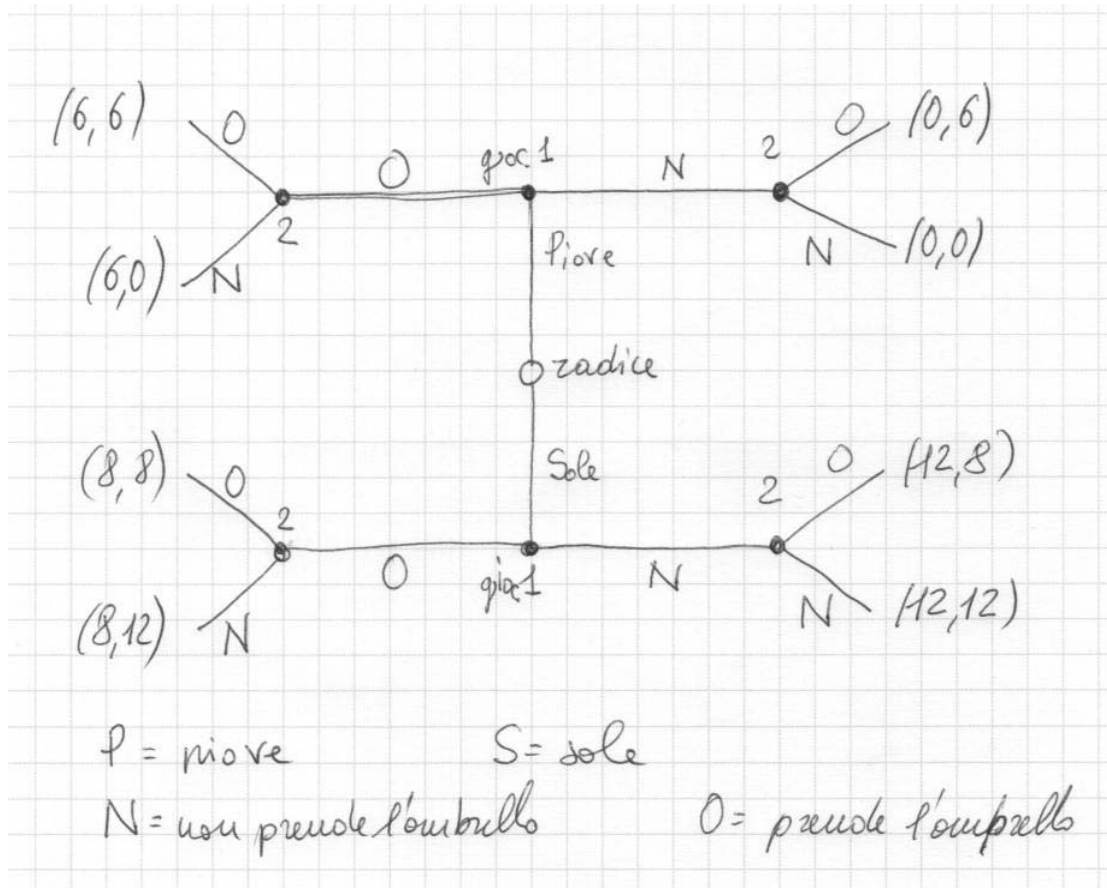
6 se affronta la pioggia con l'ombrello

8 se prende l'ombrello in una giornata di sole

12 se lascia l'ombrello in una giornata di sole

Piero apprende che tempo farà prima di uscire di casa. Silvia osserva che cosa fa Piero.

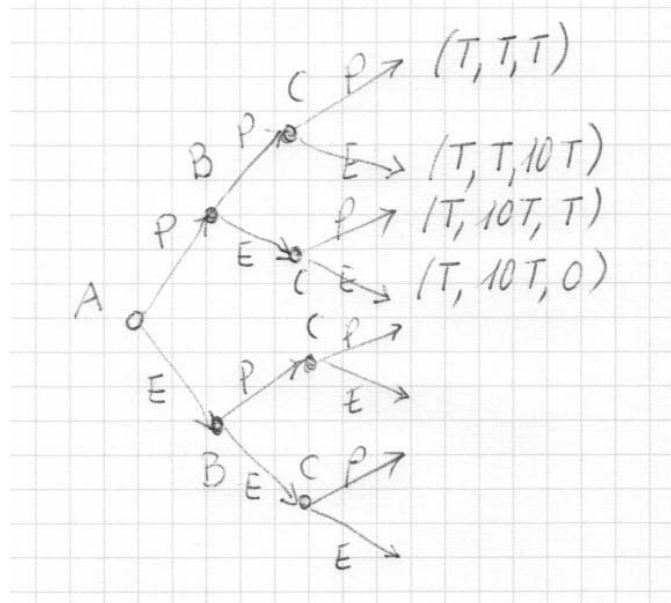
Esplicitare in forma estesa il gioco.



Esempio 4: evasione fiscale

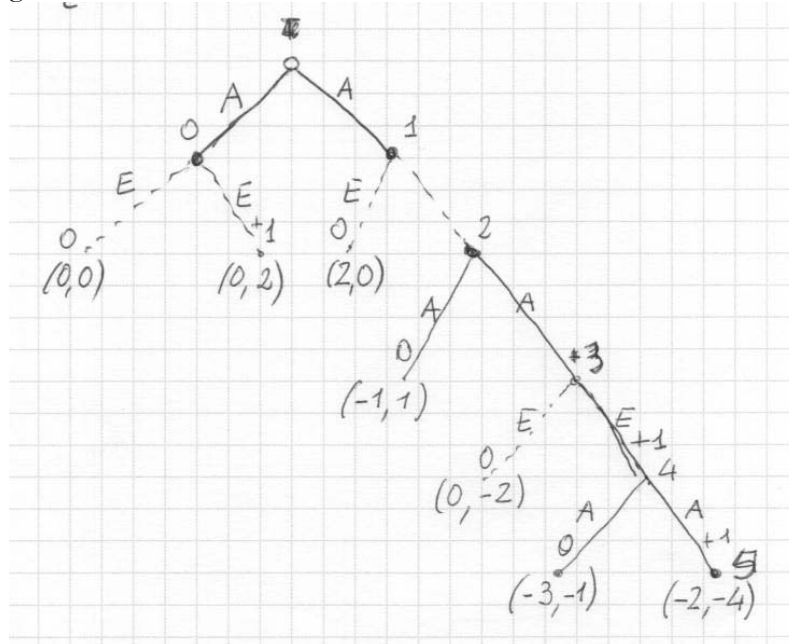
Il governo intende ridurre l'evasione fiscale. Una legge consente di punire soltanto un evasore fiscale all'anno, che dovrà pagare dieci volte la tassa dovuta. La Guardia di Finanza procede in ordine alfabetico; se il primo ha pagato le tasse passa al secondo, se il secondo è un evasore non indaga più, altrimenti passa al terzo.

Disegnare la forma estesa del gioco nell'ipotesi di tre contribuenti: Abate, Bianchi, Caroli.



Esempio 5: lavori in giardino

Il papà ha bisogno di fare alcuni lavori in giardino, propone ai figli Andrea ed Emanuele di aiutarlo in cambio di un gioco per PlayStation. I ragazzi stimano che il gioco valga 3 ore di lavoro, inoltre hanno al massimo 5 ore disponibili. Il padre propone il seguente meccanismo di decisione: Andrea, il più grande comincia, se vuole, a offrire un'ora di lavoro, poi viene il turno di Emanuele che può aggiungere un'altra ora di lavoro o rinunciare. Se Emanuele rilancia, tocca ad Andrea decidere se aggiungere ancora un'ora o rinunciare. Chi rinuncia perde il premio ma deve comunque pagare la sua ultima offerta. Questo metodo permetterà al padre di ottenere di più di quanto vale il gioco in premio? La forma estesa del gioco è



Partiamo dalla fine del gioco.

Quando Andrea si trova nell'ultimo nodo e deve scegliere se rilanciare o rinunciare è ovvio che deciderà di rilanciare, in questo modo perderà 2 invece di perdere 3.

Per cui, quando Emanuele si trova al penultimo nodo dovrà decidere tra le alternative $(0,-2)$ e $(-2,-4)$, ossia deve decidere se perdere 2 o perdere 4, quindi sceglierà di perdere 2.

Ma quindi al nodo precedente Andrea deve scegliere tra la soluzione $(-1,1)$ e $(0,-2)$ perciò sceglierà $(0,-2)$.

Allora, al nodo precedente Emanuele dovrà scegliere tra $(0,0)$, $(0,2)$, se Andrea rinuncia e tra $(2,0)$ e $(0,-2)$ se Andrea offre 1 ora. Nel primo caso Emanuele sceglie $(0,2)$, nel secondo sceglie $(2,0)$.

Al primo nodo Andrea sa che se rinuncia la soluzione sarà $(0,2)$ se offre 1 ora la soluzione sarà $(2,0)$.

Quindi sceglie di offrire 1 ora ed Emanuele sceglie di ritirarsi dal gioco.

Il padre quindi avrà un'ora di lavoro in cambio di un premio del valore di 3.

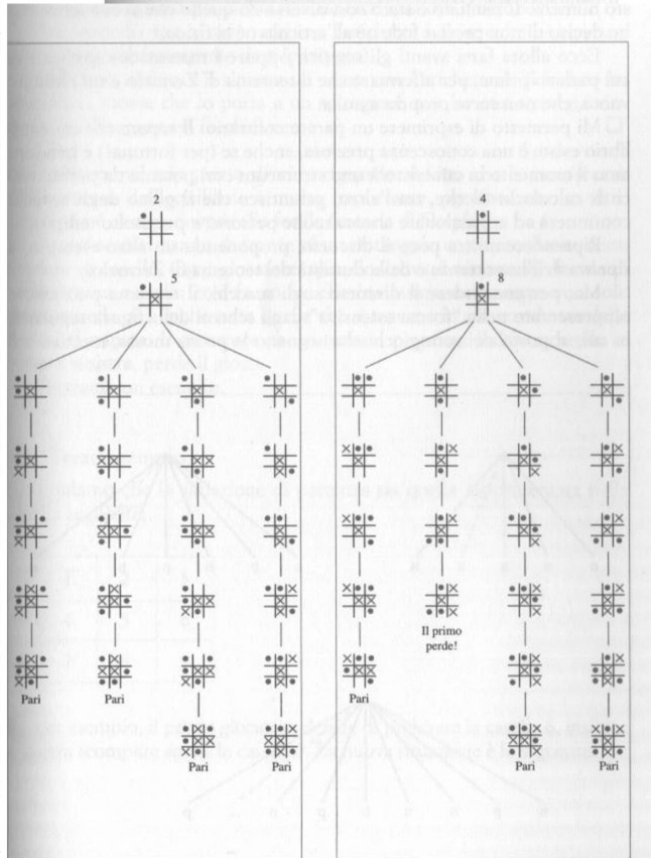
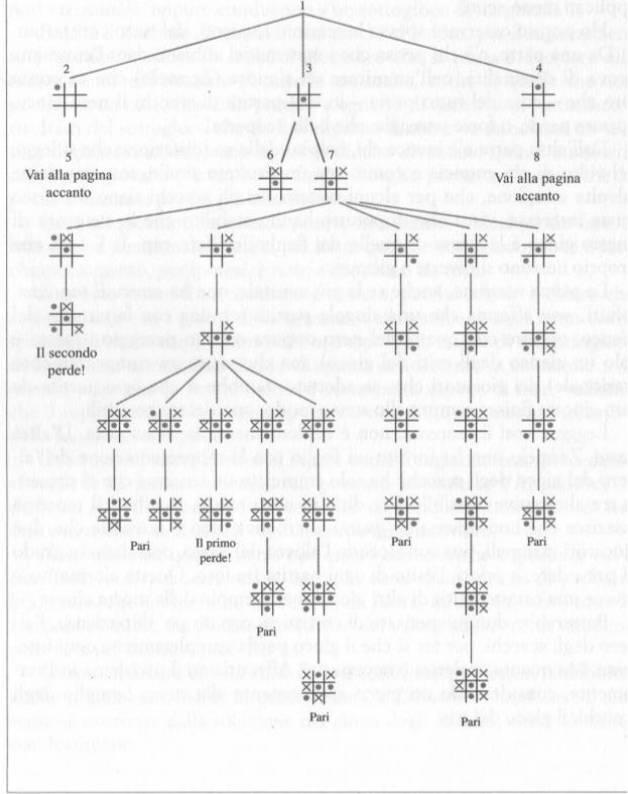
Questo procedimento si chiama **induzione a ritroso**.

Esempio 6: gioco del tris

In un quadrato 3×3 due giocatori selezionano a turno una casella, scrivendoci sopra "O" o "X". Vince chi per primo completa con il proprio simbolo una riga, una colonna o una diagonale.

Data la simmetria della figura l'albero è

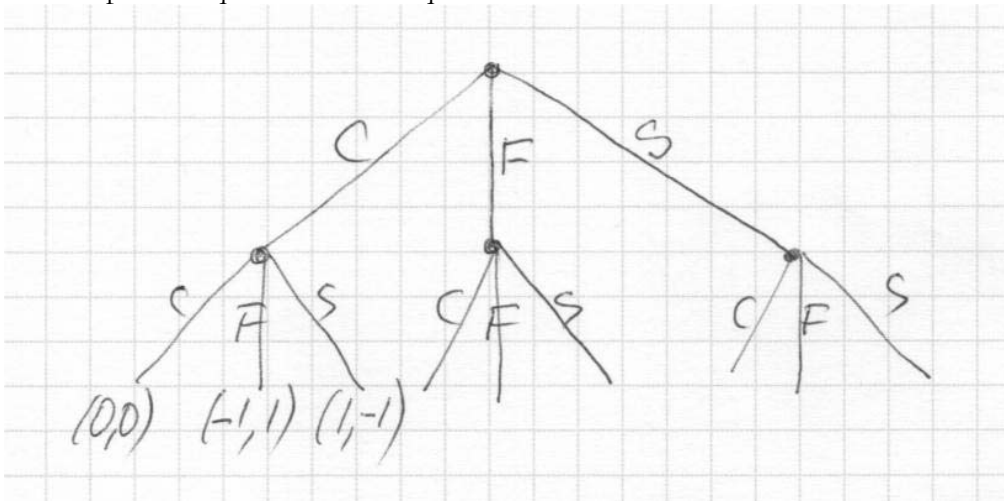
Lucchetti, Di duelli, ...



Esempio 7: morra cinese

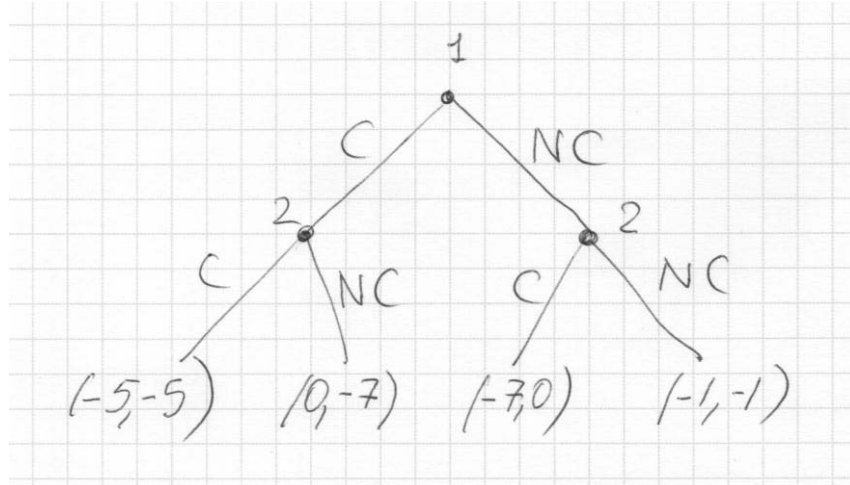
Due giocatori devono scegliere contemporaneamente tra Sasso, Forbice, Carta. Se i due giocatori scelgono lo stesso segno, la partita è pari. Altrimenti, sasso vince su forbice, forbice vince su carta e carta vince su sasso.

Il gioco della morra cinese, a differenza dei giochi precedenti, non è a informazione perfetta. Poiché i due giocatori scelgono contemporaneamente il segno, il secondo giocatore in realtà non sa cosa ha scelto il primo e quindi non sa in quale nodo del ramo si trova.



Esempio 8: Il dilemma del prigioniero

Due individui sospettati di un crimine vengono arrestati e interrogati separatamente. Se uno denuncia l'altro sarà liberato e l'altro sconterà 7 anni di prigionia. Se entrambi si denunciano a vicenda saranno condannati entrambi a 5 anni con una riduzione della pena. Se nessuno dei due parla saranno entrambi condannati a 1 anno per reati minori.



3. Giochi in forma strategica

Nella **forma normale o strategica** (introdotta da Morgenstern e Nemann) si precisa il numero di giocatori, lo spazio delle strategie e la funzione di utilità di ciascuno giocatore.

DEF: Si chiama gioco in forma strategica l'insieme $\{N, X_i, f_i : \prod X_i \rightarrow \mathbb{R}, i \in N\}$

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ è l'insieme dei giocatori

X_i è l'insieme delle scelte possibili, dette strategie, del giocatore i

$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è il guadagno del giocatore i se il giocatore 1 usa la strategia x_1 , il giocatore 2 usa la strategia x_2 , ..., il giocatore n usa la strategia x_n .

Esempio 2 (fiammiferi) in forma strategica

Proponiamoci ora di scrivere il gioco dei fiammiferi in forma strategica.

Elenchiamo tutte le strategie

Giocatore 1

strategia 1: sceglie 2, se si trova in 4 sceglie 9

strategia 2: sceglie 2, se si trova in 4 sceglie 10

se si trova in 5 o in 6 non ha strategie possibili da scegliere, il suo gioco è forzato dalle scelte dell'avversario

strategia 3: sceglie 3

Giocatore 2

strategia 1: se si trova in 2, sceglie 4; se si trova in 3, sceglie 7

strategia 2: se si trova in 2, sceglie 4; se si trova in 3, sceglie 8

strategia 3: se si trova in 2, sceglie 5; se si trova in 3, sceglie 7

strategia 4: se si trova in 2, sceglie 5; se si trova in 3, sceglie 8

strategia 5: se si trova in 2, sceglie 6; se si trova in 3, sceglie 7

strategia 6: se si trova in 2, sceglie 6; se si trova in 3, sceglie 8

	1 (4+7)	2 (4+8)	3 (5+7)	4 (5+8)	5 (6+7)	6 (6+8)
1 (2+9)	(1,-1)	(1,-1)	(-1,1)	(1,-1)	(1,-1)	(-1,1)
2 (2+10)	(-1,1)	(1,-1)	(-1,1)	(-1,1)	(1,-1)	(-1,1)
3 (3)	(-1,1)	(-1,1)	(-1,1)	(1,-1)	(1,-1)	(1,-1)

Poiché il giocatore 1 sceglie le righe non potrà mai scegliere una riga nella quale vince sempre. Il giocatore 2, invece, indipendentemente dalla riga scelta dal primo giocatore può sempre scegliere la colonna 3 e vincere in ogni caso.

Esempio 7 (morra cinese) in forma strategica

A differenza da quello che può far pensare l'albero del gioco, il giocatore 2 non può scegliere la strategia in base alla scelta del giocatore 1; il giocatore 2 infatti non sa in quale nodo dell'albero si trova.

La forma strategica prevede 3 strategie per il primo e 3 strategie per il secondo giocatore:

	C	F	S
C	0,0	-1,1	1,-1
F	1,-1	0,0	-1,1
S	-1,1	1,-1	0,0

Esempio 8: dilemma del prigioniero

Anche in questo caso il secondo giocatore non sa in quale nodo si trova quando sceglie la propria strategia

	C	NC
C	-5,-5	0,-7
NC	-7,0	-1,-1

Osservazione

Il passaggio dalla forma estesa alla forma strategica è sempre possibile nei giochi finiti, ossia si possono sempre elencare tutte le combinazioni di strategie possibili. Il passaggio inverso invece non è sempre possibile, e in ogni caso presenta complicazioni non semplici.

4. Giochi a somma zero o di puro antagonismo

DEF.: Un gioco a somma zero consiste in un tripla $(X, Y, f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R})$

X rappresenta lo spazio delle strategie del primo giocatore

Y rappresenta lo spazio delle strategie del secondo giocatore

f è la funzione di pagamento, definita come la quantità $f(x,y)$ (positiva o negativa) che il secondo giocatore paga al primo quando il primo giocatore gioca la strategia x e il secondo giocatore gioca la strategia y.

Un gioco a somma nulla tra due persone si rappresenta comunemente mediante una matrice le cui righe sono intestate al primo giocatore e le cui colonne sono intestate al secondo giocatore. In corrispondenza alla riga i e alla colonna j, la matrice riporta soltanto la vincita $f_1(i,j)$, perché la corrispondente vincita del secondo giocatore è data da $f_2(i,j) = -f_1(i,j)$.

Eliminazione di strategie dominate

Esempio 1

Consideriamo il gioco rappresentato dalla seguente matrice

2	3	3
0	7	1
1	0	2

L'assioma di razionalità permette di affermare che il secondo giocatore non sceglierà mai la terza colonna, perciò la terza colonna può essere eliminata (passo 1). Analogamente il primo giocatore non sceglierà mai l'ultima riga, perciò può essere eliminata (passo 2). A questo punto il secondo giocatore non sceglierà più la seconda colonna, che può essere eliminata (passo 3). Il primo giocatore non sceglierà più la seconda riga, che può essere eliminata (passo 4).

2	3	3
0	7	1
1	0	2
passo 1		

2	3	
0	7	
1	0	
passo 2		

2	3	
0	7	
passo 3		

2		
passo 4		

Siamo arrivati alla soluzione del gioco con il metodo detto di **eliminazione successiva di strategie dominate**. Il primo giocatore vince 2, il secondo paga 2.

Il metodo è consistito nell'eliminazione di righe e/o colonne **strettamente dominate**, ossia nelle quali ogni elemento della riga o colonna era più conveniente di ogni corrispondente elemento dell'altra riga o colonna.

E' possibile anche eliminare strategie che sono soltanto **debolmente dominate**. Vediamo un esempio

2	4	2
1	0	0
2	5	2

4	2	
0	0	
5	2	

4	2	
5	2	

5	2	

	2	

In questo caso, è stata preferita la riga 5,2 alla riga 4,2 sebbene $5 > 4$ ma 2 non è maggiore di 2. La riga 2 dunque domina debolmente la riga 1. Questo tipo di eliminazione può far sospettare che in alcuni casi si vadano ad eliminare potenziali situazioni di equilibrio. In realtà si può far vedere che, nei giochi a somma zero, l'eliminazione di strategie debolmente dominate non porta alla perdita di equilibri significativi del gioco.

DEF

Sia M una matrice $m \times n$. Una riga i domina una colonna k se $m_{ij} \geq m_{kj} \forall j$. Una colonna j domina una colonna l se $m_{ij} \leq m_{il} \forall i$.

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

MAXMIN / MINMAX

Vediamo un altro procedimento per trovare l'equilibrio di un gioco. Consideriamo il gioco descritto dalla seguente matrice

2	4	6
1	7	0
1	0	7

Il primo giocatore, quello che sceglie le righe, ragiona in questo modo:

Se seleziono la prima riga, il secondo giocatore sceglierà tra i valori che ha a disposizione (2, 4, 6) quello per il quale paga meno, ossia 2.

Se seleziono la seconda riga, il secondo giocatore sceglierà 0.

Se seleziono la terza riga il secondo giocatore sceglierà 0.

Il primo giocatore sa quindi di potersi garantire almeno un guadagno 2.

Passiamo al punto di vista del secondo giocatore.

Se gioca la prima colonna il primo giocatore sceglierà 2, quindi secondo dovrà pagare 2 a primo.

Se gioca la seconda colonna il primo sceglierà 7, quindi secondo dovrà pagare 7 a primo.

Se gioca la terza colonna il primo sceglierà 7, quindi secondo dovrà pagare 7 a primo.

Il secondo giocatore sa quindi di poter fare in modo che al massimo paghi 2.

2 è quindi l'equilibrio del gioco.

Vediamo di formalizzare meglio il procedimento.

Il primo giocatore individua per ogni riga il valore minimo, quindi sceglie il valore massimo dei minimi ottenuti.

gioco			MIN	MAXMIN
2	4	6	-> 2	2
1	7	0	-> 0	
1	0	7	-> 0	

Il secondo giocatore esamina le colonne. Per ogni colonna vede il massimo, quindi sceglie il minimo dei massimi ottenuti.

2	4	6	
1	7	0	
1	0	7	
2	7	7	MAX
2			MINMAX

Se il MAXMIN del primo giocatore coincide con il MINMAX del secondo giocatore il gioco ha equilibrio.

TEOREMA

In un gioco a somma zero si ha equilibrio se e solo se

$$\begin{matrix} \text{MAX} & \text{MIN} & = & \text{MIN} & \text{MAX} \\ \text{riga} & \text{colonna} & & \text{colon.} & \text{riga} \end{matrix}$$

Giochi a strategie infinite

Nel caso in cui gli insiemi delle strategie X e Y non siano insiemi infiniti, invece di considerare massimi e minimi si considerano estremi superiore e estremi inferiori. Infatti, non è detto che un insieme infinito abbia massimo e/o minimo. In questo caso il ragionamento si modifica in questo modo.

Il primo giocatore si aspetta che, utilizzando la strategia x, guadagnerà $\inf_y f(x, y)$. A questo punto vaglierà tutte le strategie e sceglierà quella che gli dà $\sup_x \inf_y f(x, y)$.

Del tutto simmetricamente il secondo giocatore farà in modo di pagare $\inf_x \sup_y f(x, y)$.

TEOREMA

$$\inf_x \sup_y f(x, y) \leq \sup_x \inf_y f(x, y)$$

Ossia, quello che il primo giocatore è sicuro di guadagnare è minore o al più uguale a quello che il secondo giocatore è sicuro di dover perdere.

DEF

La coppia (\bar{x}, \bar{y}) risulta di equilibrio per il gioco se $\forall x, \forall y: f(x, \bar{y}) \leq f(\bar{x}, \bar{y}) \leq f(\bar{x}, y)$.

Un punto di questo tipo si chiama **sella** della funzione f.

TEOREMA

$$\left. \begin{aligned} \sup_x \inf_y f(x, y) &= \inf_y \sup_x f(x, y) \\ \sup_x \inf_y f(x, y) &= \inf_y f(\bar{x}, y) \\ \inf_y \sup_x f(x, y) &= \sup_x f(x, \bar{y}) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \text{ è un equilibrio per il gioco}$$

Questo teorema indica le condizioni da aggiungere alla relazione MAXMIN=MINMAX nel caso di giochi non finiti.

Strategie miste

Esempio 1: giochi del pari e dispari

		Silvia	
		P	D
Piero	P	1	-1
	D	-1	1

Il gioco evidentemente non ha equilibrio, ogni giocatore può decidere di affidare al caso la scelta della sua strategia. Non necessariamente la probabilità di scegliere pari deve essere uguale alla probabilità di scegliere dispari. Ciascun giocatore può far dipendere la scelta dal verificarsi di un certo evento con probabilità p qualsiasi. Naturalmente, se p è la probabilità di scegliere la prima strategia, risulta $p \in [0, 1]$, la probabilità di scegliere la seconda strategia è 1-p. Per esempio può scegliere di giocare Pari al 40% e dispari al 60%. In questo caso si parla di strategia mista e si indica con $0.4P \oplus 0.6D$.

Esempio 9: gioco

A gioca a tennis contro B. A ha inviato una volée a fondo campo e va sotto rete. B sta per eseguire un colpo passante, deve farlo lungo linea LL oppure incrociare il colpo (IN)? Il giocatore A deve aspettarsi un colpo lungo linea LL e restare sullo stesso lato o un colpo incrociato e andare dall'altro lato? La risposta tipica in questo caso è un lungo linea perché la traiettoria è più breve e l'avversario ha meno tempo per prepararsi, tuttavia se B gioca sempre con un lungo linea A se ne accorge e va sempre dallo stesso lato riducendo il tempo di risposta. Per cui il giocatore B deve usare di tanto in tanto il colpo

incrociato in modo da lasciare nel dubbio l'altro giocatore, deve quindi usare una strategia mista, deve scegliere in modo casuale e non è detto che la percentuale migliore per B sia il 50%.

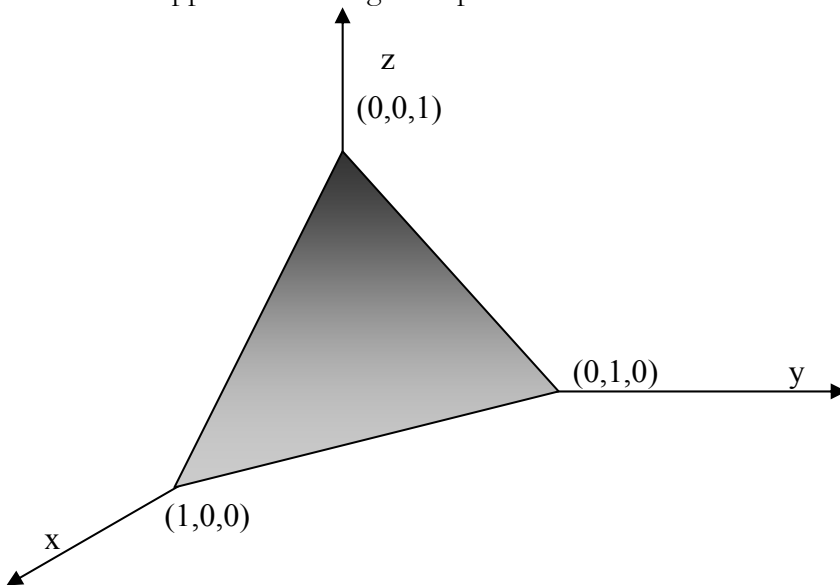
Estendiamo quest'idea a un numero finito qualsiasi di strategie. Un giocatore sceglie una distribuzione di probabilità sulle strategie pure.

Premettiamo la definizione di simpleso

DEF

Si chiama m -simpleso $S_m = \left\{ x \in \mathbb{R}^m / x_i \geq 0 \forall i, \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}$.

Diamo una rappresentazione grafica per $m=3$



DEF

Si chiama **strategia mista** di un giocatore che ha m strategie pure un qualsiasi elemento di S_m .

DEF

Un gioco finito a somma zero con strategie miste è un gioco (X,Y,f) , dove X e Y sono semplici e $f(x,y)$ indica il valore atteso.

Esempio

	B	I	II	
A				
I		3	1	x_1
II		2	6	x_2
		y_1	y_2	

In questo gioco, x_1 rappresenta la probabilità che il giocatore A giochi la strategia I e x_2 la probabilità che A giochi la strategia II. Analogamente, y_1 la probabilità che B giochi I e y_2 la probabilità che B giochi II.

La vincita attesa di A è $3x_1+2x_2$ se B gioca I, altrimenti, se B gioca II, la vincita attesa di A è $1x_1+6x_2$.

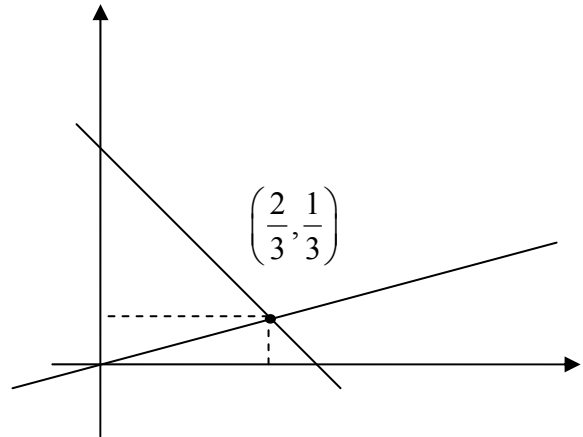
La vincita attesa di B è $3y_1+1y_2$ se A gioca I, altrimenti, se A gioca II, la vincita attesa di A è $2y_1+6y_2$.

Il problema di A è quello di scegliere la distribuzione (x_1,x_2) che gli assicuri la massima vincita v , indipendentemente da come gioca B. Il problema di A, trovare $maxv$, si traduce nel modello

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq v \\ x_1 + 6x_2 \geq v \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{che si può risolvere prendendo le}$$

uguaglianze al posto delle disequazioni

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = x_1 + 6x_2 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}x_1 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$



La soluzione è quindi $x_1 = \frac{2}{3}; x_2 = \frac{1}{3}; v = \frac{8}{3}$.

Il giocatore B deve trovare la distribuzione (y_1, y_2) che gli garantisca la minima perdita, comunque giochi A, ossia deve minimizzare una funzione w con i seguenti vincoli:

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 \leq w \\ 2y_1 + 6y_2 \leq w \\ y_1 + y_2 = 1 \\ y_1 \geq 0; y_2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{. Sostituendo le disequazioni con equazioni si ha la seguente soluzione del problema}$$

$$y_1 = \frac{5}{6}; y_2 = \frac{1}{6}; w = \frac{8}{3}$$

Poiché $\max v = \min w = 8/3$, questo valore è il punto di sella nelle strategie miste, cioè una coppia di distribuzioni di probabilità che assicurano a entrambi i giocatori lo stesso risultato ottimale.

TEOREMA di von Neumann

Ogni gioco finito a somma zero a due giocatori ammette equilibrio in strategie miste.

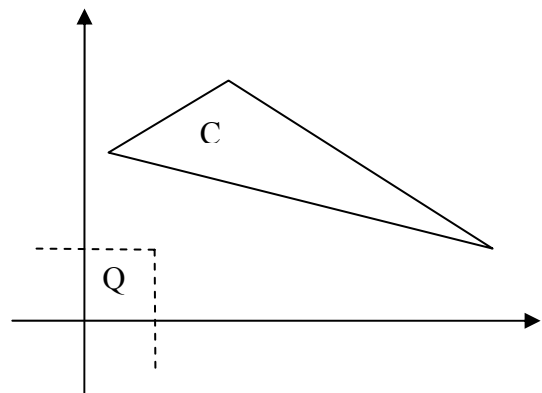
Esempio

1	3	5	6
4	5	3	2

Rappresentiamo nel piano cartesiano i punti $(1,4)$, $(3,5)$, $(5,3)$, $(6,2)$. L'insieme C , sottoinsieme chiuso, limitato e convesso di \mathbb{R}^2 , rappresenta l'insieme dei pagamenti possibili, quando il secondo giocatore usa strategie miste. Per esempio, se il secondo giocatore sceglie la prima colonna con probabilità $\frac{1}{2}$, la seconda con probabilità $\frac{1}{2}$, la terza e la quarta con probabilità 0, il vettore pagamento è dato da

$$f(1, y) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 2; \quad f(2, y) = \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{9}{2} \quad \text{. Il}$$

punto $\left(2, \frac{9}{2}\right) \in C$. Se il secondo giocatore ha scelto



questa strategia mista, il primo deve ottimizzare la funzione pagamento scegliendo una probabilità p per la prima strategia e la probabilità $1-p$ per la seconda strategia, ossia deve massimizzare la funzione

$2p + \frac{9}{2}(1-p)$. Il primo giocatore sceglierà allora $p=0$, in modo da ottenere come pagamento $9/2$. Il secondo giocatore deve allora scegliere un punto di C che abbia entrambi le coordinate quanto più piccole possibile, perché il primo giocatore sceglierà sempre la coordinata maggiore. Il secondo giocatore sceglierà quindi punti del segmento che unisce (1,4) con (6,2).

L'idea che è alla base della dimostrazione di von Neumann è di trovare il punto di minimo allargando il quadrato Q finché il suo vertice in alto a destra tocca l'area C.

Esempio 10: il problema del colonnello Blotto

Il colonnello Blotto dispone di 3 compagnie di soldati con cui deve difendere due valichi. Blotto può difendere con successo un valico solo se vi ha dislocato un numero di compagnie non inferiore a quelle con cui il nemico, colonnello Attila, attacca quel valico. Il nemico dispone di 2 divisioni, gli è sufficiente sfondare solo uno dei due valichi per vincere la battaglia. Le decisioni sulla dislocazione delle divisioni vengono prese simultaneamente.

- costruire la matrice dei pagamenti
- eliminare le strategie dominate
- cercare i punti di max-min e min-max in strategie pure
- se non ci sono punti di sella nelle strategie pure, risolvere il problema nelle strategie miste.

		Attila		
		2-0	1-1	0-2
Blotto	3-0	1	-1	-1
	2-1	1	1	-1
	1-2	-1	1	1
	0-3	-1	-1	1

Rimangono le strategie

	2-0	0-2	
2-1	1	-1	p
1-2	-1	1	$1-p$
	q	$1-q$	

Il dilemma di Blotto si risolve con strategie miste.

Strategia di Blotto $p[2-1] + (1-p)[1-2]$

Strategia di Attila $q[2-0] + (1-q)[0-2]$

$$v(p,q) = 1pq - 1p(1-q) - 1(1-p)q + 1(1-p)(1-q) = 1 - 2p - 2q + 4pq.$$

Blotto deve fissare p e trovare $\underset{0 \leq q \leq 1}{MIN} v(\bar{p}, q) = \underset{0 \leq q \leq 1}{MIN} (1 - 2\bar{p} - 2q + 4\bar{p}q)$

dove $v(\bar{p}, q) = 2(2\bar{p} - 1)q - 2\bar{p} + 1$ nel piano v, p sono rette con coefficiente angolare $2p-1$.

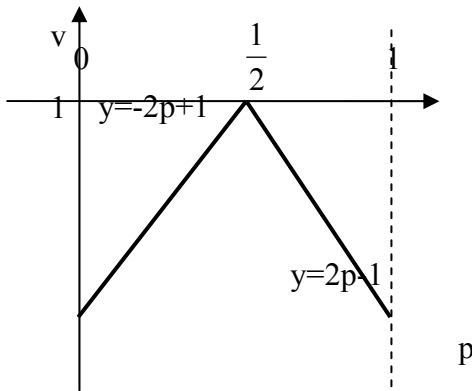
$p > 1/2$ coefficiente angolare positivo, retta crescente, valore minimo per $q=0$ cioè $MIN v = -2p + 1$;

$p = 1/2$ coef. ang. nullo, si ha una retta costante $v = -2p + 1$, tutti i punti sono di minimo $MIN v = 0$;

$p < 1/2$ coef. ang. negativo, retta decrescente, valore minimo per $q=1$ cioè $MIN v = 2p - 1$.

$$MIN_{0 \leq q \leq 1} v(p, q) = \begin{cases} -2p + 1, & p < \frac{1}{2} \\ 0, & p = \frac{1}{2} \\ 2p - 1, & p > \frac{1}{2} \end{cases} = 0$$

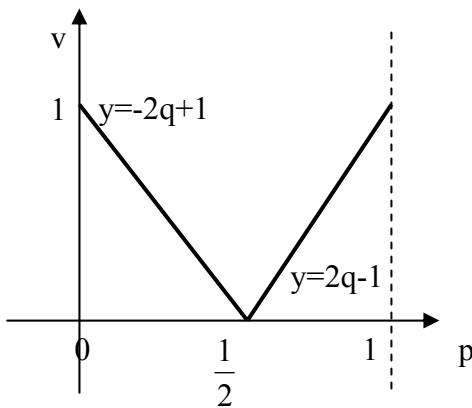
Il grafico che si ottiene è il seguente:



Dal grafico si vede che il massimo dei minimi è $\frac{1}{2}$. Scegliendo $p = \frac{1}{2}$ $\underset{0 \leq p \leq 1}{\text{MAX}} \underset{0 \leq q \leq 1}{\text{MIN}} v(p, q) = 0$

Poniamoci nel punto di vista del “nemico”.

$$\underset{0 \leq p \leq 1}{\text{MAX}} v(p, q) = \begin{cases} 1 - 2q, & q > \frac{1}{2} \\ 0, & q = \frac{1}{2} \\ 2q - 1, & q < \frac{1}{2} \end{cases} = 0$$



$$\underset{0 \leq q \leq 1}{\text{MIN}} \underset{0 \leq p \leq 1}{\text{MAX}} v(p, q) = 0.$$

Il punto di equilibrio si ottiene per $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, il valore del gioco è 0.

Esempio: altro problema del colonnello Blotto

Due contendenti sono interessati a conquistare due roccaforti. Blotto ha in dotazione quattro compagnie di soldati, Attila ha due compagnie. Ogni comandante deve decidere quante, delle sue compagnie, deve inviare in ciascuna delle due roccaforti. Chi invia più compagnie in una certa posizione vince la roccaforte e cattura le compagnie nemiche che si trovavano in quella posizione, ottiene un'utilità pari a 1 per la roccaforte e 1 per ogni compagnia catturata. L'avversario perde esattamente la stessa utilità.

Esempio 11: aiuto strategico ai paesi in via di sviluppo

Due paesi, A e B, hanno sovrabbondanza di beni rapidamente reperibili o privi di un mercato economicamente vantaggioso. Decidono allora di evolvere questi beni in aiuti a Paesi in via di sviluppo con lo scopo di ottenere un'influenza politica ed una posizione strategica in quei Paesi. Supponiamo che i possibili beneficiari degli aiuti siano due: I e II. Siano 4 e 3 le quantità di beni a disposizione rispettivamente del paese A e del paese B da evolvere in aiuti. I paesi A e B devono decidere come evolvere i loro beni. Se un paese evoluto dà a un paese emergente una quantità di beni superiore a quella dell'altro paese evoluto si assicura il controllo politico di quel paese emergente e ha un'utilità pari a 1, l'altro paese evoluto perde il controllo e riceve un'utilità -1. A parità di aiuti a uno stesso paese in via di sviluppo l'utilità è nulla.

Finora abbiamo visto due categorie di giochi. Per i giochi in forma estesa a informazione perfetta abbiamo cercato una 'soluzione' basandoci sull'assioma di razionalità, per il quale nessun giocatore prende una decisione se ne può prendere un'altra che per lui è più utile. Questo ragionamento ci ha consentito di eliminare le strategie che abbiamo chiamato dominate.

Nei giochi a somma zero l'eliminazione di strategie dominate non porta necessariamente alla soluzione del gioco. Abbiamo allora introdotto il concetto di strategia conservativa (maxmin – minimax). Nel caso in cui le strategie conservative dei due giocatori portano allo stesso valore del gioco la 'soluzione' è data da questo valore.

5. Giochi a somma variabile ed equilibrio di Nash

DEF

In un gioco in forma strategica $(X, Y, f, g : X \times Y \rightarrow \mathbb{R})$, si dice **equilibrio di Nash** ogni coppia di strategie $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ tali che

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}), \forall x \in X \quad g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y), \forall y \in Y$$

Esempio

	x	y	z	min
a	(1,8)	(12,1)	(3,0)	1
b	(4,2)	(0,7)	(10,10)	0
min	2	1	0	

La coppia di strategie (a, x) che porta a utilità (1, 8) è di maxmin per entrambi i giocatori ma non ci sono elementi per dire che i due giocatori si metteranno d'accordo per giocare le strategie (a, x). Infatti se il secondo giocatore annuncia di voler giocare la strategia x, il primo preferirà giocare la strategia b, piuttosto che la a. D'altra parte se fosse possibile un accordo sarebbe utile per entrambi convergere per la strategia (b, z) che porta a un guadagno (10, 10).

La coppia (b, z) soddisfa infatti le condizioni di equilibrio di Nash. Infatti, il primo giocatore, che guarda le righe, nota che nella riga b non ci sono soluzioni migliori. Analogamente il secondo giocatore, che guarda le colonne, nota che nella colonna z non ci sono soluzioni migliori. Perciò (b,z) è una situazione di equilibrio.

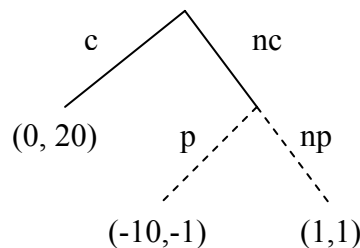
Esempio 12: piangere per il gelato

Un bambino vuole il gelato. La madre deve decidere se comprarglielo. Il bambino ha la possibilità di piangere per ottenerlo. Gli piace il gelato ma non ama molto piangere. Da parte sua, la madre detesta sentire il figlio piangere.

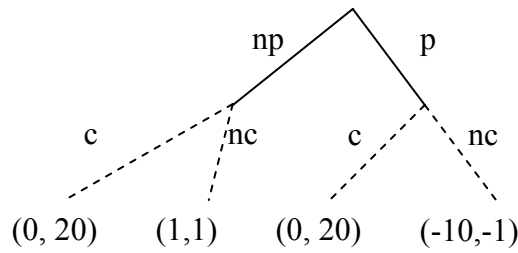
Costruiamo un modello numerico

bambino \ madre	Piange	Non piange
Compra	(0,20)	(0,20)
Non compra	(-10,-1)	(1,1)

Vediamo il gioco in forma estesa



Procedendo con induzione a ritroso la soluzione di equilibrio del gioco è (1,1). Se la madre annuncia che non comprerà il gelato, al bambino non conviene piangere. Ma se è il bambino che muove per primo, il gioco cambia. Se annuncia che piangerà se non avrà il gelato, alla madre conviene comprare il gelato.



Se il secondo giocatore annuncia che giocherà una strategia \bar{y} , oppure il primo sa, o immagina, che secondo giocherà \bar{y} il primo cercherà i punti di massima della sua funzione di utilità $f : X \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x, \bar{y})$.

DEF

Dati due insiemi A e B, si chiama **multifunzione** (corrispondenza punto-insieme) una legge $f : A \rightarrow B$ che a ogni elemento di A, invece di associare un solo elemento di B, associa un sottoinsieme di B. Si tratta quindi di una funzione $f : A \rightarrow \wp(B)$.

Consideriamo la multifunzione $MR : Y \rightarrow X$ costruita in questo modo

$$MR_1(y) = \{ \bar{x} \in X / f(\bar{x}, y) \geq f(x, y), \forall x \in X \}$$

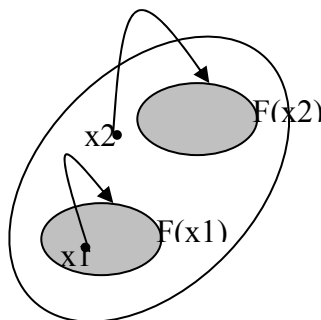
$$MR_2(x) = \{ \bar{y} \in Y / g(x, \bar{y}) \geq g(x, y), \forall y \in Y \}$$

$$MR(x, y) = (MR_1(y), MR_2(x))$$

(\bar{x}, \bar{y}) è il punto di equilibrio di Nash se appartiene a $MR(\bar{x}, \bar{y})$. In questo caso infatti \bar{x} è la miglior risposta a \bar{y} e viceversa \bar{y} è la miglior risposta a \bar{x} .

DEF

Data una multifunzione $F : Z \rightarrow Z$, z si dice **punto fisso** se $z \in F(z)$.



Nella figura x1 è un punto fisso, x2 non lo è

Un equilibrio di Nash è un punto fisso per MR.

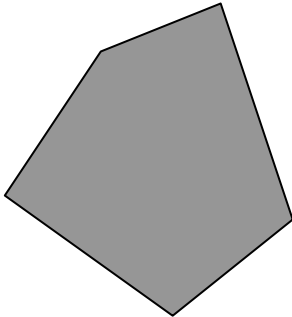
DEF

Una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **quasi concava** se, per ogni a, l'insieme $\{x / f(x) \geq a\}$ è convesso.

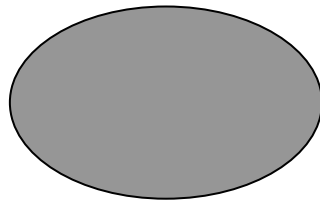
DEF

Un sottoinsieme C di \mathbb{R}^n si dice convesso se $\forall \bar{x}, \bar{y} \in C, \forall t: 0 \leq t \leq 1$ si ha $t\bar{x} + (1-t)\bar{y} \in C$.

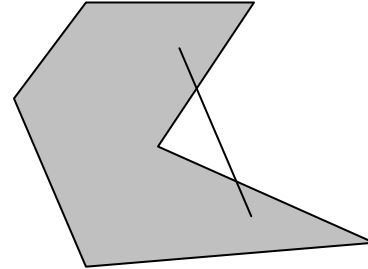
In altre parole C è convesso se comunque presi due punti di C , il segmento che unisce i due punti è interamente contenuto in C



convesso



convesso



non convesso

TEOREMA di esistenza di equilibrio di Nash

Siano X e Y insiemi chiusi, convessi, limitati di uno spazio euclideo

$f, g : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue	}	\Rightarrow esiste almeno un equilibrio di Nash
$x \mapsto f(x, y)$ funzione quasi concava $\forall y \in Y$		
$y \mapsto f(x, y)$ funzione quasi concava $\forall x \in X$		

COROLLARIO

Ogni gioco finito ha equilibrio in strategie pure e/o miste.

Il teorema di von Neumann è quindi una semplice conseguenza del teorema di Nash.

6. Ricerca di equilibri di Nash

Metodo del flusso di frecce

Si può applicare ai giochi 2×2 . Si guarda ai guadagni del primo giocatore e si disegna su ciascuna colonna una freccia che va dalla possibilità meno favorevole a quella più favorevole, essa rappresenta infatti un possibile miglioramento della propria strategia. Si considera poi la tabella dei pagamenti del secondo giocatore e si dispongono delle frecce analoghe lungo le righe. Gli eventuali punti verso cui convergono le frecce sono gli equilibri di Nash.

Esempio

	II	S	D
I			
A		2,1	0,0
B		0,0	1,2

I due equilibri di Nash sono (A, S) e (B, D).

Esempio: giochi non collaborativi a due giocatori

Esempio 13: caccia al cervo

Nel discorso sulla disuguaglianza tra gli uomini J. J. Rousseau sostiene che le società umane siano l'evoluzione delle temporanee alleanze rese necessarie dalla caccia agli animali sui quali un solo individuo non avrebbe potuto avere ragione. Due cacciatori partecipano alla caccia al cervo, uno di essi vede una lepre che potrebbe catturare da solo: benché un cervo sia meglio di una lepre, una lepre è meglio che niente. La tentazione di abbandonare la caccia al cervo per catturare la lepre è rafforzata dalla paura che l'altro cacciatore potrebbe abbandonare anche lui la caccia al cervo per catturare una lepre. In questo caso se il primo cacciatore continua a inseguire il cervo non riuscirebbe a prendere né il cervo né la lepre.

Indichiamo con C la scelta di continuare a collaborare a cacciare il cervo, con N la scelta di non collaborare e cacciare la lepre per proprio conto.

Per il primo cacciatore,

CC è la soluzione migliore perché permette di cacciare il cervo

NC viene dopo, perché se lui si dedica alla caccia della lepre è meglio che l'altro continui a cacciare il cervo, in questo modo se lui fallisce la caccia alla lepre può riprendere la caccia al cervo.

NN è la terza preferenza, perché se l'altro ha abbandonato la caccia la cervo è meglio che anche il primo abbandoni la caccia al cervo, perché da solo non riuscirà a catturarla.

CN è la peggiore delle possibilità perché se il secondo ha abbandonato la caccia al cervo mentre il primo continua è certo che non catturerà niente.

Fissiamo come esempio la seguente tabella di pagamenti

	II	C	C
I			
C		3, 3	0, 2
N		2, 0	1, 1

Si hanno due equilibri di Nash (C, C) e (N, N). La scelta tra i due dipende dalla fiducia e dal dubbio nella collaborazione altrui.

Esempio 14: la corsa del coniglio

In una scena del film Gioventù bruciata (1955) alcuni teenagers si sfidano a guidare auto rubate a tutta velocità verso un precipizio. I due giocatori si trovano nella stessa auto, chi salta fuori per primo è un coniglio (chicken nella terminologia anglosassone).

In ordine ciascun giocatore preferisce

NC primo non collabora, secondo sì: secondo salta dall'auto ed è un coniglio, primo può fermare o buttarsi dall'auto e vincere

CC se primo collabora è meglio che anche secondo collabori, entrambi si gettano dall'auto e nessuno fa la figura del coniglio

CN se secondo non collabora è meglio che io collabori e mi getti dall'auto, meglio fare la figura del coniglio che cadere nel burrone

NN se nessuno collabora muoiono entrambi.

Una tabella di pagamenti potrebbe essere

	II	C	C
I			
C		2, 2	1, 3
N		3, 1	0, 0

Gli equilibri sono NC e CN.

Esempio 8: dilemma del prigioniero

Le preferenze sono nell'ordine $NC > CC > NN > CN$, dove C sta per collaborare e quindi non confessare, N sta per non collabora, quindi confessa

	II	C	N
I			
C		-1, -1	-7, 0
N		0, -7	-5, -5

Il punto di equilibrio è NN. Il dilemma consiste nel fatto che la soluzione migliore per entrambi è CC ma se ognuno sceglie il meglio per sé, secondo l'assioma di razionalità finiscono entrambi nella situazione (-5, -5).

La situazione si presenta nella Tosca di Puccini. Scarpia ricatta Tosca: se gli si concederà, potrà salvare il suo amante Cavaradossi e lasciare Roma con lui. Tosca chiede a Scarpia, in cambio di ciò che egli pretende, un salvacondotto per Cavaradossi e per sé. Scarpia acconsente ma precisa che, non avendo egli la facoltà di ringraziare Cavaradossi, occorrerà simulare la fucilazione con un plotone che sparirà a salve. Quando Scarpia compila il salvacondotto, Tosca impugna il coltello e lo uccide. Tosca esorta Cavaradossi a fingersi colpito quando il plotone di esecuzione sparirà a salve ma Scarpia l'ha ingannata, la scarica dei soldati uccide Cavaradossi. Tosca disperata si getta nel Tevere.

Esempio 15: inquinare o no

La situazione è analoga al dilemma del prigioniero

	gi altri	inquinano	non inquinano
io			
inquinano		vivo in un mondo inquinato ma non pago il costo di non inquinare	vivo in un mondo non inquinato e pago il costo di non inquinare
non inquinano		vivo in un mondo inquinato e pago il costo di non inquinare	vivo in un mondo non inquinato senza pagare il costo di non inquinare

Esempio 16: lotta dei sessi

Due coniugi decidono di passare la serata fuori di casa, LUI preferisce lo stadio S, Lei preferisce il cinema C, tuttavia preferiscono passare la serata insieme piuttosto che stare separati. Per ciascuno i

separarsi = -1; adeguarsi all'altro = 0; imporre la propria volontà = 5

La tabella dei pagamenti è allora

	LEI	C	S
LUI			
C		0, 5	-1, -1
S		-1, -1	5, 0

Gli equilibri sono CC e SS.

Ci si può chiedere se esiste un ulteriore punto di equilibrio in strategie miste. Se la soluzione migliore in questo caso consista nel lanciare una moneta e scegliere CC o SS in base all'esito del lancio della moneta, ossia scegliere al 50%.

Esempio 16: il giudizio di re Salomone

Due donne si presentano al Re Salomone con un bambino, entrambe sostengono di essere la vera madre. Il re decide di tagliare il bambino in due e assegnare a ciascuna madre metà bambino. Di fronte a questa possibilità la vera madre rinuncia alla spartizione mentre la falsa madre accetta la divisione.

Preferenze per la madre vera:

NR l'altra rinuncia, io non rinuncio

RR rinunciamo entrambe è il bambino non muore

RN se l'altra non vuole rinunciare è meglio che rinunci io affinché il bambino non muoia

NN se nessuna rinuncia il bambino muore

Preferenze per la madre falsa:

RN la cosa migliore è che lei rinunci e io no

NN se non posso averlo è meglio che muoia

RR è meglio che rinunciamo entrambe piuttosto che lasciarlo alla madre vera

RN la soluzione peggiore è che io rinunci e la madre vera tenga il bambino

Una possibile tabella di pagamenti

	FALSA	R	N
VERA			
R		2, 1	1, 3
N		3, 0	0, 2

Il punto di equilibrio RN permette a Re Salomone di individuare la vera madre e consegnargli il bambino.

Metodo della segnatura dei pagamenti

Questo metodo si applica a un qualunque gioco con bimatrice $m \times n$. Il metodo consiste nel marcare in ogni colonna il miglior pagamento per il giocatore delle righe e in ogni riga il miglior pagamento per il giocatore delle colonne. Una cella che contiene entrambi i pagamenti marcati è un equilibrio di Nash del gioco.

	II	S	C	D
I				
A		4, 3	5, 1	6, 2
M		2, 1	8, 4	3, 6
B		5, 9	9, 6	2, 8

L'unico equilibrio di Nash è (B, S).

7. Giochi cooperativi ad utilità trasferibile

In un gioco cooperativo i giocatori possono stipulare accordi vincolanti tra di loro.

I giochi a utilità trasferibili, detti anche giochi a pagamenti laterali o TU-games, sono giochi nei quali una coalizione può procurarsi un guadagno e dividerlo tra i soci della coalizione.

Esempio 17: il sorpasso

Due automobilisti viaggiano in direzioni opposte su una strada a tre corsie. Ognuno ha dinanzi a sé un'auto da superare. Se nessuno sorpassa, ciascuno perde 10 secondi di tempo. Se uno sorpassa e l'altro no, chi sorpassa non perde nulla, mentre l'altro resta a -10. Se entrambi sorpassano guadagnano $-\infty$.

	N	S
N	-10,-10	-10,0
S	0,-10	$-\infty, -\infty$

Il gioco ha un punto di equilibrio maxmin nelle strategie pure (-10,-10), che non può essere migliorato se l'utilità non è trasferibile. Se la strada fosse suddivisa in due parti con divieto alternativo di sorpasso





l'utilità sarebbe trasferibile e entrambi gli automobilisti otterrebbero un ritardo medio di 5 secondi.

DEF

Un **gioco a pagamenti laterali** è una coppia (N,v) , dove $N = \{1, 2, \dots, n\}$ è un insieme finito e $v: \wp(N) \rightarrow \mathbb{R}$, dove $\wp(N)$ è l'insieme delle parti di N , tale che $v(\emptyset) = 0$.

N è l'insieme dei giocatori. Un sottoinsieme S di N si dice **coalizione**, v si chiama funzione caratteristica del gioco, $v(S)$ l'utilità che i membri della coalizione S possono ottenere se si coalizzano fra loro.

Esempio 18: gioco dei pirati

Tre pirati sono alla ricerca di un tesoro, il cui valore è 1 per raggiungerlo devono attraversare un fiume di larghezza 6 metri, ciascuno possiede un asse di 4 metri. Per raggiungere l'altro lato del fiume devono quindi formare una coalizione di almeno due di loro. $N = \{1, 2, 3\}$, la funzione caratteristica del gioco è $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$, $v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = v(\{1,2,3\}) = 1$.

DEF

Un gioco a pagamenti laterali $G = (N,v)$ si dice **superadditivo** se

$$\forall S, T \in \wp(N) \text{ tali che } S \cap T = \emptyset \text{ si ha } v(S \cup T) \geq v(S) + v(T).$$

In altre parole, se S e T sono due coalizioni disgiunte, unendo le loro forze, ottengono di più di quanto potevano ottenere separatamente.

DEF

Un gioco si dice **semplice** se

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall S \subseteq N, v(S) = 0 \text{ oppure } v(S) = 1 \\ v(N) = 1 \end{array} \right.$$

In altre parole una coalizione S è una coalizione vincente e non ha bisogno di altri giocatori per migliorare la propria utilità.

DEF

Sia (p_1, p_2, \dots, p_n) un vettore di componenti non negative e q numero reale tale che $0 < q < \sum_{i=1}^n p_i$. Un gioco di maggioranza pesata $[q; p_1, p_2, \dots, p_n]$ il gioco semplice (N, v) definito da

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{se } \sum_{i \in S} p_i \leq q \\ 1 & \text{se } \sum_{i \in S} p_i > q \end{cases}$$

Un'interpretazione è che i giocatori sono n partiti con numero di parlamentari p_1, p_2, \dots, p_n , mentre q è il quorum, ossia il numero di voti necessario per far approvare una legge.

Esempio 19: commissione elettorale

Una commissione parlamentare è formata da tre senatori $\{x, y, z\}$ e tre deputati $\{a, b, c\}$. Per approvare una mozione occorre il consenso di almeno due senatori e di almeno due deputati. E' possibile trovare una struttura di pesi per ciascun giocatore e un quorum per rappresentare questo sistema di votazione?

$$\begin{cases} px + py + pa + pb > q \\ px + pz + pa + pc > q \\ pz + py + pc + pb > q \\ px + py + pz + pa \leq q \\ px + py + pz + pb \leq q \\ px + py + pz + pc \leq q \\ pa + pb + pc + px \leq q \\ pa + pb + pc + py \leq q \\ pa + pb + pc + pz \leq q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2px + 2py + 2pz + 2pa + 2pc > 3q \\ 4px + 4py + 4pz + 4pa + 4pb + 4pc \leq 6q \end{cases}$$

Le due relazioni sono incompatibili, la risposta è negativa.

DEF

Siano M_1, M_2, \dots, M_n , n insiemi disgiunti e non vuoti di giocatori. Siano inoltre $(M_1, w_1), (M_2, w_2), \dots, (M_n, w_n)$ n giochi semplici. Sia (N, v) un gioco su N con funzione caratteristica v . Allora la v -composizione dei giochi $(M_1, w_1), (M_2, w_2), \dots, (M_n, w_n)$ denotata con $u = v[w_1, w_2, \dots, w_n]$ è il gioco

con insiemi di giocatori $M = \bigcup_{j=1}^n M_j$ e funzione caratteristica

$$u(S) = v\left(\left\{j / w_j(S \cap M_j) = 1\right\}\right), \forall S \subseteq M.$$

Esempio 20: Il collegio elettorale

Sia $G = (N, v)$, con $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, il gioco a maggioranza pesata $[60; 40, 25, 21, 6, 5, 5]$. I sei giocatori sono le regioni di uno statiche vengono rappresentate nel collegio con un numero di seggi pari a quelli indicati sopra. Il quorum per far approvare una legge è 60. Per ogni j di N , M_j è l'insieme dei votanti nella j -esima regione; w_j è la funzione caratteristica del gioco di maggioranza pesata con quorum del 50% con insieme dei giocatori M_j . $G' = (M, u)$ è un gioco semplice sull'insieme dei giocatori

$M = \bigcup_{j=1}^6 M_j$ che consiste di tutti gli aventi diritto al voto nello stato costituito dalle 6 regioni. In

quest'ultimo gioco, una coalizione è vincente se contiene un sottoinsieme $S' = \bigcup_{j \in T} S_j$ dove $w_j(S_j) = 1$

per ogni j di T e $v(T) = 1$. Quindi una coalizione è vincente se ha almeno metà dei voti popolari in regioni che totalizzano almeno 60 voti elettorali. In altre parole è sufficiente, in questo esempio, che

metà più uno degli elettori della regione 1 si coalizza con metà più uno degli elettori della regione 3 per far passare delle leggi.

Esempio 21: Consiglio di Sicurezza delle Nazioni Unite

Il Consiglio di Sicurezza delle Nazioni Unite consiste di cinque stati permanenti e dieci altri membri. Chiamiamo M_1 l'insieme degli stati permanenti e M_2 l'insieme degli altri membri. Le mozioni devono essere approvate da almeno nove membri, tra i quali ci devono essere tutti e cinque i membri permanenti.

Il gioco $G_1=(M_1, w_1)$ degli stati permanenti è $\forall S \subseteq M_1, w_1(S) = \begin{cases} 0 & \text{se } S \neq M_1 \\ 1 & \text{se } S = M_1 \end{cases}$.

Il gioco $G_2=(M_2, w_2)$ degli stati membri è $\forall S \subseteq M_2, w_2(S) = \begin{cases} 0 & \text{se } |S| \leq 3 \\ 1 & \text{se } |S| > 3 \end{cases}$.

La funzione caratteristica è $v(\{1\})=v(\{2\})=0; v(\{1,2\})=1$.

Le coalizioni vincenti di questo gioco sono del tipo $M_1 \cup \tilde{S}$ con $|\tilde{S}| \geq 4$.

L'esempio del Consiglio dell'ONU conduce alla definizione di giocatore di veto.

DEF

Sia $G=(N, v)$ un gioco semplice. Un giocatore i è **giocatore di veto** nel gioco G se

$$\forall S \subseteq N : i \notin S \Rightarrow v(S) = 0.$$

Arriviamo ora alla questione di come dividere gli utili ottenuti da una coalizione.

DEF

Sia $G=(N, v)$ un gioco a utilità trasferibile. Un elemento $x \in \mathbb{R}^n$ si dice **allocazione** per il gioco G .

Un'allocazione x si dice **pre-imputazione** se $\sum_{i=1}^n x_i = v(N)$. Questa condizione si dice condizione di

razionalità collettiva ed è data dall'unione della condizione di fattibilità $\sum_{i=1}^n x_i \leq v(N)$, e dalla

condizione di efficienza $\sum_{i=1}^n x_i \geq v(N)$.

Una pre-imputazione si dice **imputazione** se $x_i \geq v(\{i\}), \forall i \in N$, condizione di razionalità individuale,

nessun giocatore sarà mai d'accordo ad entrare in una coalizione se la quota di potere decisionale assegnatagli all'interno della coalizione è inferiore a quella che è in grado di garantirsi da solo.

Con $I(v)$ si indica l'insieme di tutte le imputazioni del gioco G .

Esempio 22: società per azioni

Una società è formata da quattro azionisti $N=\{1,2,3,4\}$, che possiedono tutte le azioni secondo le percentuali 10%, 20%, 30%, 40%. Ogni decisione deve essere approvata dal consiglio degli azionisti a maggioranza semplice (50%) delle quote azionarie.

Si tratta di un gioco semplice con quattro giocatori. Le coalizioni vincenti sono

$$\{4,2\}, \{4,3\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}$$

Una imputazione potrebbe essere $(1/10, 2/10, 3/10, 4/10)$. Tuttavia, la differenza tra la quota assegnata a 2 e quella assegnata a 3 non ha ragione di essere, poiché i due giocatori hanno lo stesso numero di opportunità di formare una coalizione vincente. Il giocatore 2 potrebbe quindi ritenersi insoddisfatto dalla imputazione che si ottiene assegnando un potere proporzionale al numero di azioni possedute.

Questa situazione è ancora più evidente se si ha una distribuzione delle azioni di questo tipo: 10%, 21%, 30%, 39%. Il primo azionista è del tutto inutile a qualsiasi coalizione. Le coalizioni vincenti sarebbero ...

L'indice di Shapley assegna le seguenti ripartizioni degli utili

Azionisti	Azioni possedute	Ripartizione degli utili	Azioni possedute	Ripartizione degli utili
A	10%	1/12	10%	0
B	20%	1/4	21%	1/3
C	30%	1/4	30%	1/3
D	40%	5/12	39%	1/3

DEF

Sia $G=(N,v)$ un gioco a utilità trasferibile. L'insieme $C(v) = \{x \in I(v) : \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \forall S \subseteq N\}$ si dice **nucleo** del gioco.

Il nucleo è l'insieme delle imputazione che a nessuna coalizione conviene vietare.

Esempio 18: gioco dei pirati

Calcoliamo il nucleo del gioco dei pirati: $N=\{1, 2, 3\}$, la funzione caratteristica del gioco è $v(\{1\})=v(\{2\})=v(\{3\})=0$, $v(\{1,2\})=v(\{1,3\})=v(\{2,3\})=v(\{1,2,3\})=1$.

In questo gioco l'insieme delle imputazioni $I(v)$ non è nullo. Affinché un elemento $x \in \mathbb{R}^3$ appartenga al nucleo $C(v)$ si deve avere

$$x_1 + x_2 \geq v(\{1,2\}) = 1$$

$$x_1 + x_3 \geq v(\{1,3\}) = 1$$

$$x_2 + x_3 \geq v(\{2,3\}) = 1$$

Sommando membro a membro si ha $2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 3 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 \geq 3/2$. Ciò è incompatibile con la condizione $v(\{1,2,3\})=1$.

TEOREMA

Dato un gioco semplice $G=(N,v)$, il suo nucleo $C(v)$ è non vuoto se e solo se c'è almeno un giocatore di veto.

8. Indici di potere

Un indice di potere è una funzione ψ che associa ad ogni gioco semplice $G=(N,v)$ un vettore

$$\psi(v) = (\psi_1(v), \psi_2(v), \dots, \psi_n(v)).$$

La componente i di questo vettore è interpretata come una misura dell'influenza che il giocatore i può esercitare sull'esito. Il significato dell'indice di potere non è l'indicazione sulla spartizione del guadagno ottenuto dalla coalizione ma una misura del potere dei singoli giocatori.

Un indice di potere può essere interpretato come misura o stima a priori della probabilità di giocare un ruolo rilevante nella scelta di una decisione in modo collettivo.

Se S è una coalizione vincente per un gioco semplice $G=(N,v)$ il giocatore i gioca un ruolo rilevante se il suo voto è necessario per far passare una decisione che preferisce, ossia se ritirandosi dalla coalizione S , si ha una coalizione $S - \{i\}$ che è perdente.

Data allora una distribuzione di probabilità $P_i(S)$ che indica la probabilità di formarsi della coalizione S , riconoscendola giocatori i il ruolo rilevante, un indice di potere potrebbe essere del tipo:

$$\psi_i(v) = \sum_{S \subseteq N, i \in S} P_i(S) (v(S) - v(S - \{i\})).$$

Indice di Shapley

Assioma 1 (efficienza)

Un indice di potere è efficiente se $\sum_{i \in N} \psi_i(v) = v(N)$.

Assioma 2 (anonimità)

Un indice di potere $\psi(v)$ è anonimo se per ogni gioco (N,v) di una certa classe di giochi su N e per ogni permutazione σ di N tale che $(N, \sigma v)$ appartiene alla stessa classe

$$\psi_{\sigma(i)}(v) = \psi_i(\sigma v) \quad \forall i \in N,$$

dove il gioco $(N, \sigma v)$ è definito da $\sigma v(S) = v(\sigma(S)) \quad \forall S \subseteq N$.

Il potere di un giocatore non dipende da chi è ma da quanto il giocatore è in grado di ottenere da solo o con altri.

Esempio

Abbiamo il seguente gioco a tre giocatori: $N = \{1, 2, 3\}$, v è tale che $v(1) = v(2) = v(3) = v(1, 2) = v(1, 3) = 0$; $v(2, 3) = v(1, 2, 3) = 1$. Consideriamo poi un altro gioco w tale che $w(1) = w(2) = w(3) = w(2, 3) = w(1, 3) = 0$; $w(1, 2) = w(1, 2, 3) = 1$. Nel gioco (N, w) il giocatore 3 si trova nella stessa situazione in cui si trovava il giocatore 1 nel gioco (N, v) . L'assioma di anonimità richiede che il giocatore 3 riceva nel gioco w lo stesso che riceva il giocatore 1 nel gioco v .

Si definisce la permutazione in questo modo $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 2, \sigma(3) = 1$.

DEF.

La differenza $v(S) - v(S - \{i\})$ è detto **contributo marginale** di i alla coalizione S .

Un giocatore i è detto **giocatore fantoccio** se il suo contributo marginale è nullo in ogni coalizione. Ossia se a una coalizione S si aggiunge il giocatore i , ciò non contribuisce a migliorare o peggiorare la situazione di S .

Assioma 3 (giocatore fantoccio)

Se in un gioco (N, v) il giocatore i è un giocatore fantoccio il suo valore è 0: $\psi_i(v) = 0$.

Assioma 4 (additività)

Per tutti i giochi (N, v) e (N, w) di una classe di giochi tale che anche $(N, v+w)$ è un gioco di quella classe risulta: $\psi_i(v+w) = \psi_i(v) + \psi_i(w)$, $\forall i \in N$.

TEOREMA (Shapley, 1953)

Dato N esiste ed è unica una funzione $\Phi: G^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ che soddisfa gli assiomi 1, 2, 3, la sua espressione

$$\Phi_i(v) = \sum_{\substack{s \subseteq N \\ i \in S}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} (v(S) - v(S - \{i\})).$$

Un significato intuitivo della formula è il seguente: $v(S) - v(S - \{i\})$ è il contributo che il giocatore i porta alla coalizione S .

s è la cardinalità di S ; $s-1$ è la cardinalità di $S - \{i\}$; $n-s$ la cardinalità di $N-S$, cioè i giocatori che non fanno parte della coalizione S .

Supponiamo che i giocatori entrino uno dopo l'altro nella stanza dove si forma la coalizione. Se il giocatore i , quando arriva, trova presenti i giocatori $S - \{i\}$, riceve la quantità $v(S) - v(S - \{i\})$. Che probabilità ha di trovare la coalizione $S - \{i\}$?

Tutti i possibili ordini di arrivo sono le permutazioni degli n giocatori, quindi $n!$.

Tutti i possibili ordini di arrivo dei giocatori $S - \{i\}$ sono $(s-1)!$

Tutti i possibili ordini di arrivo dei giocatori fuori dalla coalizione sono $(n-s)!$.

$\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$ è allora la probabilità che arrivando nella stanza della coalizione il giocatore i trovi esattamente $S - \{i\}$ giocatori ad aspettarlo.

Nel caso di giochi semplici la formula diventa $\Phi_i(v) = \sum_{\substack{s \subseteq N \\ i \in S}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$, che viene indicata con il

nome di Shapley-Shubik (1954).

Esempio 22: società per azioni

Una società per azioni è costituita da tre azionisti $N = \{1, 2, 3\}$, che possiedono rispettivamente il 20%, 30% e 50% delle azioni. Ogni decisione può essere approvata dal consiglio degli azionisti solo se in possesso della maggioranza semplice delle quote azionarie, ossia 50% più una. Si tratta quindi di un gioco semplice di maggioranza pesata a tre giocatori. Le coalizioni vincenti sono $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$.

permutazioni	guadagni		
	1	2	3
123	0	0	1
132	0	0	1
213	0	0	1
231	0	0	1
312	1	0	0
321	0	1	0
totale	1	1	4
indice Shaple	1/6	1/6	2/3

9 Paradossi nei sistemi elettorali e nelle scelte sociali

In molte situazioni della vita reale si richiede che i benefici ottenuti siano ‘equamente’ distribuiti tra gli individui che partecipano al ‘gioco’. In molti casi, in particolare, nell’assegnazione della rappresentatività nelle sedi decisionali il bene è indivisibile. Nei paesi che usano sistemi di rappresentazione di tipo proporzionale, l’obiettivo è quello di allocare i seggi tra i vari partiti politici in proporzione ai loro voti totali. Per effetto dei meccanismi di approssimazione, tuttavia, si possono generare situazioni in cui a parità di voti si ha una diversità di seggi.

DEF

Si chiama **quota di rappresentatività** di uno Stato la frazione che la popolazione dello Stato rappresenta del totale della popolazione, moltiplicato per il numero totale di seggi. Siano p_1, p_2, \dots, p_n le popolazioni di n Stati, a_0 i seggi che devono essere distribuiti, la quota di rappresentatività di uno

$$\text{Stato } i \text{ è } q_i = \frac{a_0 p_i}{\sum_{j=1}^n p_j}.$$

Esempio 23: seggi

Tre Stati devono dividersi 21 seggi:

Stato	popolazione	quota
A	7270000	14.24
B	1230000	2.41
C	2200000	4.35
totale	10720000	21

A riceverà almeno 4 seggi, B almeno 2 e C almeno 4. Quale stato riceverà il 21° seggio? La questione non è di poco conto per lo stato B o C che aumenterebbero notevolmente il loro livello di rappresentatività.

DEF: metodo di Hamilton (Alexander Hamilton, Segretario del Tesoro Stati Uniti, 1791)

Ogni stato prende tanti seggi quanti indicati dalla parte intera della propria quota

Se un certo numero di seggi t non sono stati assegnati con il metodo precedente si assegnano agli Stati che hanno la parte frazionaria più grande.

Esempio 23: seggi

Nell’esempio precedente vengono assegnati 14 seggi a A, 3 a B, 4 a C.

Esempio 24: paradosso dell’Alabama

Il metodo di Hamilton è stato abbandonato negli Stati Uniti per via di un paradosso che si verificò nel 1880. In seguito al censimento del 1880, infatti, il calcolo della distribuzione dei seggi fu effettuato con il metodo di Hamilton, mentre il numero di seggi passava da 275 a 350.

Quando i seggi erano 299 lo stato dell’Alabama aveva 8 rappresentanti, mentre a parità di popolazione, quando i seggi furono portati a 300 i seggi dell’Alabama divennero 7.

Nell’esempio precedente, per esempio, se si portano i seggi da 21 a 22 il metodo di Hamilton attribuisce 15 seggi a A, 2 a B, 5 a C, quindi B perde un seggio a favore di A.

Scelte sociali

DEF preferenze deboli

Dato un insieme Γ , un **sistema di preferenze** su Γ è definito come un preordine totale su Γ , cioè una relazione riflessiva, transitiva e totale. (per un ordine totale deve essere anche la relazione deve essere anche antisimmetrica: $x \geq y, y \geq x \Rightarrow x = y$).

DEF preferenze strette

Dato un insieme Γ e un preordine totale \geq (sistema di preferenze deboli) su Γ , definiamo la relazione $>$ di **preferenze strette** su Γ in questo modo: $\forall x, y \in \Gamma: x > y \Leftrightarrow (x \geq y \text{ e } y \not\geq x)$. In altre parole, non esistono due elementi che siano indifferenti.

DEF preferenza collettiva

Dato un insieme di scelte Γ , un insieme di individui N , l'insieme dei preordini totali P , una regola di determinazione delle scelte collettive è una funzione $p: P \times P \times \dots \times P \rightarrow P$.

Esempio 25: Paradosso di Condorcet

Un gruppo di tre individui $N = \{a, b, c\}$ deve scegliere tra tre alternative $\Gamma = \{x, y, z\}$. I sistemi di preferenze sono

	a	b	c
1°	x	y	z
2°	y	z	x
3°	z	x	y

In questo caso la votazione a maggioranza tra coppie di alternative produce il ciclo x vince su y , y vince su z , z vince su x .

Questo metodo non è utile per ordinare le scelte collettive. Un metodo spesso utilizzato è quello dell'Agenda, che soddisfa la DEF di preferenza collettiva. L'Agenda può prevedere una prima votazione tra x e y , e una seconda votazione tra il vincente e z . Nell'esempio precedente vince sempre l'alternativa che viene votata per ultima. Quindi la scelta dell'Agenda determina l'esito della scelta.

Il giocatore a , mentendo sulle sue preferenze può votare y in prima votazione e impedire così che venga votata la scelta z a lui meno gradita.

DEF (Metodo del conteggio di Borda)

Dato un insieme di alternative Γ e un consesso decisionale N , nel metodo del conteggio di Borda ogni decisore ordina le proprie preferenze e si attribuisce 1 all'ultima alternativa, 2 alla penultima e così via. La somma dei punteggi ottenuti dalle varie scelte di Γ dà la classifica delle preferenze del gruppo N su Γ .

Il metodo del conteggio di Borda soddisfa la definizione di preferenza collettiva.

Applicando il metodo di Borda all'esempio precedente si ha

	x	y	z
a	3	2	1
b	1	3	2
c	2	1	3
tot	6	6	6

Il metodo di Borda non è in grado di ordinare le scelte, il gruppo di decisori è indifferente rispetto alle tre alternative x, y, z .

Se il giocatore a cambiasse l'ordine di preferenza delle su alternative meno preferite, scambiando z con y , imporrebbe un ordine alle scelte

	x	y	z
a	3	1	2
b	1	3	2
c	2	1	3
tot	6	5	7

Sebbene nessun votante abbia cambiato l'ordine di preferenza delle alternative x e y, ora la x risulta preferita a y.

DEF indipendenza dalle alternative irrilevanti.

Si può richiedere allora che il sistema di scelta soddisfi la proprietà per la quale la classificazione collettiva di due alternative dipenda solo dalla posizione relativa di queste due alternative nei sistemi di preferenze individuali e non da altre alternative, ossia cambiando l'ordine di scelta delle altre alternative l'ordine di preferenza di quelle due deve restare inalterato.

Dato un insieme N di decisori, un insieme di alternative Γ e una regola di scelta collettiva P, diciamo che tale regola è **indipendente dalle alternative irrilevanti** se

$\forall x, y \in \Gamma, \forall \geq_h, \sqsupseteq_h$, per qualsiasi coppia di alternative, e qualsiasi coppia di sistemi di preferenze si ha $\forall h \in N, (x \geq_h y \Leftrightarrow x \sqsupseteq_h y) \Rightarrow (x \geq_N y \Leftrightarrow x \sqsupseteq_N y)$.

Il metodo del conteggio di Borda non soddisfa questa indipendenza.

DEF Unanimità

Dato un insieme di decisori N, un insieme di alternative Γ , una regola di scelta collettiva P rispetta la **condizione di unanimità** se $\forall x, y \in \Gamma, \forall \geq_h$ risulta che $\forall h \in N, x \geq_h y \Rightarrow x \geq_N y$. Ossia se in ogni ordinamento individuale x è preferito a y anche nell'ordinamento collettivo x deve essere preferito a y.

DEF Dittatorialità

Nelle condizioni della definizione precedente, una regola di scelta collettiva P è **dittatoriale** se

$\exists \bar{h} \in N$ tale che $\forall \geq_h: P(\geq_1, \geq_2, \geq_3, \dots, \geq_n) = \geq_{\bar{h}}$. Ossia c'è un decisore le cui preferenze coincidono con l'ordinamento collettivo.

Ovviamente ogni scelta dittatoriale è una scelta a unanimità. Il teorema di Arrow (1951) afferma che ogni scelta unanime implica la condizione di dittatorialità

TEOREMA di Arrow (1951)

Dato un insieme N di decisori e un insieme di alternative Γ con almeno tre elementi, una regola di determinazione della scelta collettiva P che rispetti la condizione di indipendenza dalle alternative irrilevanti e la condizione dell'unanimità è anche dittatoriale.

Bibliografia

R. Lucchetti, *Di duelli, scacchi e dilemmi. La teoria matematica dei giochi*, Mondadori, 2001

M. Li Calzi, *Teoria dei giochi*, Etas libri, 1995

G. Gambarelli, *Giochi competitivi e cooperativi*, Giappichelli editore, 2003

P. Morris, *Introduction to Game Theory*, Springer, 1994

S. Moretti, F. Patrone, *Giochi semplici, indici di potere e scelte sociali*,

<http://www.collegioborromeo.it/files/TdG5.pdf> (verificato il 1/1/2006)

A. Torre, *Matematica per lo studio delle interazioni strategiche: teoria dei giochi*

<http://www.collegioborromeo.it/files/TdG1.pdf>

<http://www.collegioborromeo.it/files/TdG2.pdf>

<http://www.collegioborromeo.it/files/TdG3.pdf> (verificati il 1/1/2006)

E. Santi, *Teoria dei giochi*

<http://web.unife.it/utenti/ettore.santi/AppuntiTdG/> (verificato il 1/1/2006)