Appunti di Calcolo delle Probabilità per il corso di Modelli Matematici per le Scienze Sociali

Calcolo combinatorio

DEFINIZIONE
Si dice **disposizione semplice** di n oggetti di classe K (con $k \leq n$) ogni allineamento di k oggetti scelti fra gli n. Due allineamenti si distinguono per l'ordine con cui sono disposti gli elementi o per aere almeno un oggetto diverso.

ESEMPIO
Alcune disposizioni semplici di classe 4 delle lettere dell'alfabeto

a,c,f,h	a,f,c,h	sono due disposizioni che si differiscono per l'ordine
a,n,m,r	a,b,n,p	differiscono per due elementi

PROPOSZIONE
Il numero delle disposizioni semplici di n oggetti di classe k è

$$\boxed{D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}.$$

ESEMPIO
Quante bandiere di tre colori si possono formare con 5 colori?
$D_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

DEFINIZIONE
Si dice **combinazione semplice** di n oggetti di classe k (con $k \leq n$) ogni raggruppamento di k oggetti scelti fra gli n, indipendentemente dall'ordine con cui vengono presi.

ESEMPIO
Alcune combinazioni semplici di classe 5 delle 21 lettere dell'alfabeto
a,e,i,o,u, e,f,g,h,i a,b,c,d,e l,m,o,q,t

PROPOSZIONE
Il numero delle combinazioni semplici di n oggetti di classe k è

$$\boxed{C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}}$$

ESEMPI
Un barman ha a disposizione 4 liquori di base; quanti cocktail può ottenere mescolandone 3 alla volta?

$$C_{4,3} = \binom{4}{3} = \frac{D_{4,3}}{3!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$$

Quante cinquine si possono fare a tombola?
$C_{90,5} = 43949268$

Un'assemblea di genitori decide di costituire una commissione di 3 persone che controlli la qualità della mensa scolastica. Per farne parte si candidano 10 genitori. Se una commissione dura in carica una settimana, per quante settimane si possono avere commissioni diverse? (due commissioni sono diverse se differiscono per almeno un membro)

$$\binom{10}{3} = 120$$

DEFINIZIONE
Si dice **disposizione con ripetizione** di classe k ogni allineamento di k oggetti scelti fra gli n dati, in modo che uno stesso oggetto possa essere ripetuto più volte.

ESEMPIO
Alcune delle parole di 5 lettere che si possono formare con le 21 lettere dell'alfabeto
aaaaa ababa amore cuore

PROPOSZIONE
Il numero delle disposizioni con ripetizione di n oggetti di classe k è

$$\boxed{D'_{n,k} = n^k}$$

ESEMPIO
Tutte le parole di 5 lettere che si possono formare con le 21 lettere sono $D'_{21,5} = 21^5$

DEFINIZIONE
Si dice **combinazione con ripetizione** di classe k ogni raggruppamento di k oggetti scelti fra gli n dati, in modo che uno stesso oggetto si possa essere preso più volte.

PROPOSZIONE
Il numero delle combinazioni con ripetizione di n oggetti di classe k è dato da

$$\boxed{C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}}$$

DEFINIZIONE
Si dicono **permutazioni** di n elementi tutti i possibili allineamenti che si possono ottenere scambiando di posto gli n oggetti. Esse coincidono con le disposizioni semplici di n elementi di classe n.

$$\boxed{P_n = D_{n,n} = n!}$$

PROPOSZIONE
Il numero di permutazioni di n oggetti di cui h sono uguali fra loro, k sono uguali fra loro e distinti dai precedenti è

$$P^*_{n,h,k} = \frac{n!}{h! \cdot k!}$$

ESEMPIO
Quanti anagrammi si possono formare con la parola MATEMATICA

$$P^*_{10,2,3,2} = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}$$

Calcolo delle probabilità

Definizione classica
La probabilità di un evento è data dal rapporto fra il numero f dei casi favorevoli al verificarsi dell'evento e il numero n degli eventi possibili, equiprobabili

$$P(E) = \frac{f}{n}.$$

Definizione statistica o frequentista
Per valutare la probabilità di un evento si calcola la frequenza relativa osservata su un numero, possibilmente grande), di eventi quanto più possibile analoghi a quello che interessa e si utilizza tale valore come probabilità.

Valutazione soggettiva
La probabilità di un evento E è rappresentata dal rapporto fra il prezzo P che un individuo ritiene giusto pagare e la somma S che ha diritto ad avere in cambio se l'evento si verifica.

$$P(E) = \frac{P}{S}.$$

La persona che accetta di pagare P per ricevere S deve essere disposto a ricevere P pagando S.

Teoria assiomatica
L'insieme di tutti i risultati possibili si indica con Ω, detto spazio campionario.
Un qualsiasi evento può essere visto come un sottoinsieme di Ω.
Ω e ϕ possono essere visti come eventi, il primo corrisponde all'evento certo, il secondo all'evento impossibile.
Se $A \subseteq B$ si dice che l'evento A implica l'evento B.
$\overline{A}$, l'insieme complementare di A, è la negazione dell'evento A, è vero quando A è falso e viceversa è falso quando A è vero.
$C = A \cap B$ è l'evento che si verifica se si verifica sia l'evento A sia l'evento B, ossia è vero se sono veri A e B.
$D = A \cup B$ è l'evento che si verifica se si verifica almeno uno dei due eventi A o B, ossia è vero se almeno uno tra A e B è vero.
Se $A \cap B = \phi$ i due eventi si dicono **incompatibili**, ossia se il verificarsi di uno esclude il verificarsi dell'altro.
DEFINIZIONE
Dato uno spazio campionario Ω, un insieme *I* di sottoinsiemi di Ω, si dice algebra se
1) $\Omega \in I$
2) $A \in I \to \overline{A} \in I$
3) $A, B \in I \to A \cup B \in I$

DEFINIZIONE
La **probabilità** è una funzione $P : I \to [0,1]$ tale che
1) $P(\Omega) = 1$
2) $\forall A, B \in I$ tali che $A \cap B = \phi$ si ha $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Teorema della probabilità contraria
Dato un evento E di probabilità p, la probabilità dell'evento contrario di E è 1-p:

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

Teorema
La probabilità dell'evento impossibile è 0

$$P(\phi) = 0$$

Teorema delle probabilità totali

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ESEMPIO
Su 100 pezzi prodotti da una macchina, 10 sono stati controllati dal controllore A e 12 dal controllore B, fra questi 3 pezzi sono stati controllati da A e da B. Qual è la probabilità che, scegliendo a caso un pezzo, questo sia stato controllato?
E = "pezzo controllato"

$$P(E) = \frac{10}{100} + \frac{12}{100} - \frac{3}{100} = \frac{23}{100} = 23\% .$$

DEFINIZIONE
Dati due eventi si dice **probabilità condizionata** di B rispetto ad A la probabilità che si verifichi B supposto che si sia già verificato A.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

ESEMPIO
Da un mazzo di 40 carte viene estratta una carta di denari. Qual è la probabilità che sia anche asso?
A = "la carta estratta è asso"
D = "la carta estratta è denari"

$$P(A/D) = \frac{1}{10}$$

DEFINIZIONE
Due eventi A e B si dicono indipendenti se il verificarsi di uno non influenza il verificarsi dell'altro.

Teorema della probabilità composta
Dati due eventi A e B si ha che

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$$

Nel caso di eventi indipendenti

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Teorema di Bayes
Dati uno spazio campionario Ω, una sua partizione in sottoinsiemi A_1, A_2, A_3, …, A_n che chiamiamo 'cause', un evento B non impossibile che chiamiamo effetto, la probabilità che l'evento B sia stato prodotto dalla causa A_i è

$$P(A_i / B) = \frac{P(B / A_i) \cdot P(A_i)}{P(B / A_1) \cdot P(A_1) + P(B / A_2) \cdot P(A_2) + \ldots + P(B / A_n) \cdot P(A_n)}$$

ESEMPI

1. *La produzione industriale di biscotti è legata a tre forni, F1, F2, F3. Di ognuna si conosce la probabilità P_{Fi} di produrre biscotti bruciati:*

$P_{F1}=0.05$ $P_{F2}=0.02$ $P_{F3}=0.07$.

Per produrre una scatola di 1000 biscotti si sono utilizzate tutti e tre i forni; in particolare F1 ha prodotto 350 biscotti, F2 ne ha prodotti 520, F3 ne ha prodotti 130.
Calcola la probabilità che scegliendo a caso un biscotto fra i 1000 prodotti e vedendo che è bruciato, esso sia stato cotto nel forno F1. Calcola la probabilità che, avendo riscontrato che il pezzo è buono, esso sia stato prodotto da F1.

A1 = "il pezzo è stato prodotto da F1"
A2 = "il pezzo è stato prodotto da F2"
A3 = "il pezzo è stato prodotto da F3"
B = "il pezzo è difettoso"
P(A1)=350/1000=0.35 P(A2)=250/1000=0.25 P(A3)=130/1000=0,13
P(B/A1)=P_{A1}=0.05 P(B/A2)=P_{A2}=0.02 P(B/A3)=P_{A3}=0.07

$$P(A1/B) = \frac{P(B/A1) \cdot P(A1)}{P(B/A1) \cdot P(A1) + P(B/A2) \cdot P(A2) + P(B/A3) \cdot P(A3)} \simeq 47\%$$

$$P(A1/\overline{B}) = \frac{P(\overline{B}/A1) \cdot P(A1)}{P(\overline{B}/A1) \cdot P(A1) + P(\overline{B}/A2) \cdot P(A2) + P(\overline{B}/A3) \cdot P(A3)} \simeq 35\%$$

2. *In un esperimento si deve verificare una certa ipotesi. Si è invece trovato un risultato che sembra confutare questa ipotesi. Il risultato negativo dell'esperimento può essere dovuto a due fattori:*

1) *errori di procedura*
2) *ipotesi teoriche errate*

Si stima che gli errori di procedura ricorrano con frequenza doppia rispetto agli errori nelle ipotesi.
Si stima, da ricerche precedenti, che gli strumenti utilizzati sono inaffidabili al 15%, l'equipe di ricercatori fa ipotesi errate al 30%.
Calcola la probabilità che il fallimento dell'esperimento sia imputabile alle ipotesi errate.

A1 = "nell'esperimento ci sono errori di procedura"
A2 = "nell'esperimento ci sono ipotesi errate"
B = "l'esperimento è fallito"
P(A1)=0.66 P(A2)=0.33 P(B/A1)=0.15 P(B/A2)=0.30

$$P(A2/B) = \frac{P(B/A2) \cdot P(A2)}{P(B/A1) \cdot P(A1) + P(B/A2) \cdot P(A2)} = 50\%$$

3. *Uno dei celebri problemi del Cavaliere de Méré (1610-1685) presentati al suo amico Blaise Pascal è il seguente: giocando a dadi è più probabile ottenere almeno una volta 6 con 4 lanci di un dado oppure almeno un doppio 6 con 24 lanci di due dadi?*

E = "ottenere almeno una volta 6 con quattro lanci di un dado"
$\overline{E}$ = "non ottenere mai 6 con quattro lanci di un dado"

$$P(\overline{E}) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} \qquad P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 51,77\%$$

E = "ottenere almeno un doppio 6 con 24 lanci di due dadi"
$\overline{E}$ = "non ottenere mai un doppio 6 con 24 lanci di due dadi"
E1 = "non ottenere mai un doppio 6 con 1 lancio di due dadi"

$$P(E1) = \frac{35}{36} \qquad P(\overline{E}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \qquad P(E) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 49\%$$

4. *Tre scatole A, B, C contengono lampade prodotte da una certa fabbrica, alcune di queste lampade sono difettose.*
A contiene 2000 lampade con il 5% difettose
B contiene 500 lampade con il 20% difettose
C contiene 1000 lampade con il 10% difettose
Si sceglie a caso una scatola e si estrae a caso una lampada. Qual è la probabilità che essa sia difettosa?

A = "la lampada è stata estratta dalla scatola A"
B = "la lampada è stata estratta dalla scatola B"
C = "la lampada è stata estratta dalla scatola C"
D = "la lampada è difettosa"

$$P(D) = P(D/A)\cdot P(A) + P(D/B)\cdot P(B) + P(D/C)\cdot P(C) = \frac{1}{20}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{3} = 11.67\%$$

5. *A un esame il professore sceglie 10 domande tra le 20 che ha preparato. Lo studente, per superare l'esame, deve rispondere bene almeno a 3 quesiti su 10. Studiando 6 argomenti dei 20 dell'esame che probabilità ha lo studente che superi l'esame?*

$$P = \frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{14}{7}}{\binom{20}{10}} + \frac{\binom{6}{4}\cdot\binom{14}{6}}{\binom{20}{10}} + \frac{\binom{6}{5}\cdot\binom{14}{5}}{\binom{20}{10}} + \frac{\binom{6}{6}\cdot\binom{14}{4}}{\binom{20}{10}}.$$

6. *Un paziente che accusa disturbi gastrici si presenta dal medico per avere una diagnosi. Per il tipo di disturbo manifestato le cause possibili sono*
A = "il paziente soffre di ulcera"
B = "il paziente soffre di gastrite"
C = "il paziente non ha né ulcera né gastrite"

Si sa che tra gli individui che manifestano questi disturbi si ha P(A)=0.25, P(B)=0.35, P(C)=0.40.
Il medico sottopone il paziente a un test T. Il test dà esito positivo "+" nel 90% dei casi di ulcera. nel 40% dei casi di gastrite e nel 10% di tutti gli altri casi.
Il test del paziente ha avuto esito positivo. Calcola la probabilità che il paziente abbia ulcera, la probabilità che abbia la gastrite, la probabilità che non abbia né ulcera né gastrite.

P(A)=0.25	P(B)=0.35	P(C)=0.40
P(+/A)=0.9	P(+/B)=0.4	P(+/C)=0.9

$$P(A/+) = \frac{P(+/A)\cdot P(A)}{P(+/A)\cdot P(A) + P(+/B)\cdot P(B) P(+/C)\cdot P(C)} = 55\%$$

$$P(B/+) = \frac{P(+/B)\cdot P(B)}{P(+/A)\cdot P(A) + P(+/B)\cdot P(B) P(+/C)\cdot P(C)} = 35\%$$

$$P(C/+) = \frac{P(+/C)\cdot P(C)}{P(+/A)\cdot P(A) + P(+/B)\cdot P(B) P(+/C)\cdot P(C)} = 10\%$$

C.Rossi, *La matematica dell'incertezza*, Zanichelli, 1999
M. Re Fraschini, G. Grazzi, *Statistica e probabilità*, Atlas, 2004