La matematica delle elezioni di paradosso in paradosso: il Consiglio Comunale dei Ragazzi[1]

Antonio Bernardo, Marcello Pedone[2]

Il percorso didattico che presentiamo è pensato per ragazzi della scuola secondaria di primo grado; prende spunto dal Consiglio Comunale dei Ragazzi [3] per analizzare alcuni aspetti matematici dei sistemi elettorali. In particolare, propone riflessioni su rappresentatività e democrazia nelle scelte, con particolare riferimento ai sistemi elettorali di tipo *proporzionale puro* e *proporzionale corretto*. [4]

Premessa.

In molti comuni italiani gli alunni della scuola secondaria di primo grado eleggono i propri rappresentanti al Consiglio Comunale dei Ragazzi [2], il cui scopo è quello di dare la possibilità agli alunni di partecipare a una esperienza diretta di vita democratica, affiancando il Consiglio Comunale vero e proprio.
L'insegnamento della matematica, d'altra parte, «deve contribuire, insieme con tutte le altre discipline, alla formazione culturale del cittadino, in modo da consentirgli di partecipare alla vita sociale con consapevolezza e capacità critica».[5] Ebbene, l'elezione del Consiglio Comunale dei Ragazzi è una buona occasione per mettere in gioco

---

[1] Parte di questo lavoro è stato pubblicato su "Periodico di matematiche", 2005 (vol. 5, serie VIII) pp. 87-99.
[2] antoniobernardo@matematicamente.it; marcellopedone@matematicamente.it
[3] Il Consiglio Comunale dei Ragazzi è promosso dall'UNICEF, con il fine di rendere fruibili i diritti sanciti dalla Convenzione Internazionale sui Diritti dell'Infanzia e dell'Adolescenza.
[4] L'argomento può contribuire a rafforzare le nozioni di rapporto e di proporzione.
[5] Commissione UMI, "Ciclo secondario: la matematica del cittadino", *Progetto Alice*, Roma**,** Ed. Pagine , Vol. IV n. 10 (2003), 5-36. Anche in:
http://www.matmedia.it/Didattica/Discussione%20in%20atto/Proposte%20per%20la%20matematica/Aggregazione%20disciplinare%20matematica/aggregazione_disciplinare_matematica.htm
http://www.dm.unibo.it/umi/italiano/Matematica2003/matematica2003.html

alcune delle competenze matematiche del cittadino: esprimere adeguatamente informazioni, risolvere e porsi problemi, progettare e costruire modelli di situazioni reali, operare scelte in condizioni di incertezza.[6]

Il percorso didattico che proponiamo muove proprio in questa direzione. Trascureremo gli aspetti legati alla rappresentazione grafica dei dati e alla loro analisi statistica, aspetti che da soli rivestono un ruolo importante nel curricolo formativo dell'allievo-cittadino, per addentrarci in un tema più delicato che è quello dell'analisi in termini matematici del senso comune di rappresentatività e democrazia nelle scelte.

Il senso comune richiede che vinca le elezioni chi ha riportato più voti. Nelle elezioni presidenziali negli Stati Uniti del 2000, invece, ha vinto Bush sebbene il suo avversario Gore avesse ottenuto complessivamente più voti. Il senso comune richiede che l'aumento del numero dei seggi produca un aumento, o almeno una conservazione, dei rappresentanti che quella lista esprimerà nelle sedi decisionali. In termini matematici, la funzione di assegnazione dei seggi deve essere una funzione *debolmente crescente* (*isotona*) rispetto al numero dei seggi disponibili. Si vedrà che ciò non è semplice da realizzare[7] e che un esame matematico del problema può mettere a nudo contraddizioni e situazioni paradossali. L'allievo potrà rendersi conto in questo modo dei motivi che sottendono il complesso meccanismo delle leggi elettorali in Italia e in molte altre nazioni.

Dal punto di vista didattico, procedere per paradossi può catturare l'attenzione dei ragazzi, incuriosirli più di quanto non possa fare un percorso 'normale' e soprattutto far loro apprezzare come la matematica possa scoprire le incongruenze dell'uso del senso comune in semplici fatti della vita di tutti i giorni. Tuttavia, l'insegnante dovrà assicurarsi che i propri allievi abbiano percepito l'aspetto 'normale' dei procedimenti descritti per l'attribuzione dei seggi, cosa che, da un punto di vista del calcolo, richiede solo il saper fare le divisioni con il resto e sa-

[6] *Ivi*, p. 6.

[7] Nel 1880 il parlamento degli Stati Uniti d'America decise di innalzare il numero dei deputati da 299 a 300. Lo Stato dell'Alabama - che aveva 8 rappresentanti quando i deputati erano 299 - passò da 8 a 7 quando il totale fu portato a 300. Questa situazione è nota con il nome "Paradosso dell'Alabama".

per operare con i numeri decimali ma ha anche evidenti relazioni con le nozioni di frazione, rapporto e proporzione.
Quando i ragazzi avranno acquisito sicurezza di calcolo in situazioni 'normali', il docente potrà guidarli a esplorare situazioni che generano paradossi e a cercare metodi più 'equi'.

OBIETTIVO: *Presentazione della situazione problematica e coinvolgimento del gruppo classe.*

Il Consiglio Comunale dei Ragazzi. Nella città immaginaria di Matematopoli il regolamento per l'elezione del Consiglio Comunale dei Ragazzi prevede:

```
  Art. 1) Il Consiglio comunale dei Ragazzi è eletto a suffragio uni-
versale dagli iscritti alla Scuola dell'obbligo, dalla classe 4ª ele-
mentare alla 3ª media, e dura in carica due anni.
  Art. 2) Il Sindaco viene eletto a maggioranza assoluta dal C.C.R.,
con votazione segreta, tra i componenti stessi ed è rieleggibile.
  Art. 3) Il Consiglio è costituito da 13 membri.
  Art. 4) I Consiglieri sono eletti con sistema proporzionale su li-
ste presentate da ragazzi iscritti alla Scuola dell'obbligo. In sede
di scrutinio si attribuiscono prima i seggi a ciascuna lista, e suc-
cessivamente si individuano i candidati eletti.[8]
```

Quest'anno si sono presentate tre liste (Ambiente, Benessere, Cultura), i voti validi sono stati 780, ciascuna lista ha preso i seguenti voti:

Ambiente 395 Benessere 283 Cultura 102

OBIETTIVO. *Rendere omogenee le conoscenze della classe su alcuni concetti dei sistemi elettorali:* ***suffragio universale****,* ***maggioranza assoluta****,* ***maggioranza relativa****,* ***attribuzione dei seggi****; acquisire i meccanismi di base dell'attribuzione dei seggi con il cosiddetto* ***metodo proporzionale puro****.*

Una giornata dal mobiliere. Al fine di individuare un modo per valutare l'equità dell'attribuzione dei seggi, consideriamo una situazione problematica più vicina all'esperienza comune, nella quale i seggi consiliari – a cui si ha diritto in conseguenza dei voti ricevuti – vengono sostituiti da un altro tipo di "seggi": delle poltrone che tre

[8] Questo regolamento per il Consiglio Comunale dei Ragazzi è stato effettivamente approvato nel comune di Jesolo (VE), con deliberazione consiliare n.108 del 30 settembre 2003. http://www.jesolo.it/content.asp?Subc=1534&idMen=159

amici acquisteranno, avendo ciascuno a disposizione una quantità di euro pari ai voti che i tre raggruppamenti consiliari hanno rispettivamente ottenuto.
Si propone preliminarmente la seguente situazione: Antonio, Domenico e Marcello hanno a disposizione rispettivamente 395€, 283€ e 102€ per comprare delle poltrone. Sperando di spuntare un buon prezzo, offrono in blocco il totale dei loro 780€ a un mobiliere, che ha 13 poltrone uguali, rimaste a lungo invendute. Il mobiliere accetta l'offerta dei tre amici, i quali ora devono dividersi le poltrone in modo equo rispetto agli euro che ciascuno ha messo a disposizione

Primo metodo. Si calcola il prezzo di ogni poltrona, che è dato da 780€:13=60€. Perciò Antonio, che ha 395€, riceve 6 poltrone e gli avanzano 35€. Domenico, che ha 283€, riceve 4 poltrone e gli avanzano 43€. Marcello, che ha 102€, ne riceve una e gli avanzano 42 €.
Finora i tre amici si sono distribuite 11 poltrone. Le 2 poltrone rimanenti vanno a Domenico e Marcello, perché hanno ancora da utilizzare delle somme maggiori rispetto ad Antonio.
Ci si può chiedere ora quanto ciascuno dei tre amici ha pagato mediamente per una poltrona. Antonio ha pagato 65,83€, Domenico ha pagato 56,60€, Marcello ha pagato 51€. Antonio, quindi, ha pagato, per lo stesso tipo di poltrona, molto di più di Marcello.
Per quanto, a prima vista, questa suddivisione possa sembrare poco equa, essa corrisponde esattamente al metodo proporzionale previsto dall'art. 4 del regolamento del Consiglio Comunale dei Ragazzi.

Prima di procedere con il calcolo dei seggi, il docente avvia la discussione ponendo agli allievi le seguenti domande, al fine di verificare se le conoscenze da loro possedute siano adeguate a proseguire il percorso didattico:
A) *Che significa avere la maggioranza assoluta dei voti? Che significa avere la maggioranza relativa dei voti? E' corretto dire che la maggioranza assoluta è data dalla metà del totale dei voti aumentata di uno?*
B) *La lista che ha riportato più voti ha avuto la maggioranza assoluta o relativa dei voti?*

Quindi invita a calcolare quanti seggi avrà ciascuna lista, secondo il sistema proporzionale previsto dall'art. 4 del regolamento.
Si calcola il "valore" in voti di un seggio, valore che è dato dal rapporto tra il totale di voti validi (780) e il numero dei seggi da assegnare (13). Quindi si effettua una prima distribuzione dei seggi, assegnando a ciascuna lista un numero di seggi pari alla parte intera della divisione tra i voti ricevuti e il valore di un seggio. I seggi non assegnati in questa prima fase saranno distribuiti in base ai resti delle divisioni, cominciando dalla lista che ha il resto maggiore[9].
Nel caso in esame, poiché i votanti sono stati 780 e i seggi disponibili sono 13, il valore di ciascun seggio è 780:13=60.

Lista	**Ambiente**	**Benessere**	**Cultura**
voti	395	283	102
divisioni per 60	395:60 = **6** resto 35	283:60 = **4** resto 43	102:60 = **1** resto 42
seggi	**6**	**4**	**1**

A questo punto i seggi assegnati sono solo 11. Gli altri due vengono assegnati – come nel caso delle poltrone – alle liste che hanno i resti maggiori: uno alla lista Benessere e uno alla lista Cultura. In definitiva, risultano eletti 6 consiglieri della lista Ambiente, 5 della lista Benessere, 2 della lista Cultura.

OBIETTIVO. *Consolidamento dei concetti di maggioranza assoluta, maggioranza relativa e ballottaggio; verifica dell'esistenza di paradossi.*

La discussione prosegue ponendo agli allievi le seguenti domande:
A) *Quanti seggi sono necessari per avere la maggioranza assoluta?*
B) *La lista che nel caso in discussione ha più seggi ha la maggioranza assoluta o la maggioranza relativa?*

---

[9] Questo metodo di assegnazione dei seggi è noto con i nomi "proporzionale pura", "metodo di Hamilton", "metodo di Vinton". E' chiaro che se a una lista si potesse attribuire un numero "virtuale" di seggi anche non intero, questo numero si otterrebbe semplicemente dalla proporzione: $v/V = s/S$ (v è il numero di voti della lista, V il numero dei voti totali, s il numero di seggi della lista, S il numero dei seggi disponibili).

Il docente illustra i due paradossi che seguono.

Paradosso. La lista Ambiente, che aveva avuto la maggioranza assoluta dei voti (395 su 780), non ha più la maggioranza assoluta dei seggi nel consiglio comunale (6 su 13), pertanto non può esprimere un proprio sindaco. Il sindaco, infatti, secondo l'art. 2 del regolamento elettorale deve essere eletto con la maggioranza assoluta del consiglio comunale.

Paradosso. La situazione è ancora più paradossale se si pensa che le due liste meno votate avrebbero potuto formare un'unica lista Benessere-Cultura. Supponendo che la lista Benessere-Cultura prenda la somma dei voti delle due singole liste, la situazione sarebbe stata la seguente:

	Totale	Ambiente	Benessere-Cultura
Voti	780	395	385
Rapporto Voti/Seggi	60	395:60 = 6 resto 35	385:6 = 6 resto 25
Seggi assegnati		**6+1**	**6**

La lista Ambiente avrebbe così avuto la maggioranza assoluta[10].

L'elezione del Sindaco. Torniamo alla situazione precedente: Ambiente 6 consiglieri, Benessere 5 consiglieri, Cultura 2 consiglieri. Si prospetta ora il problema dell'elezione del sindaco: ciascuna lista presenta un proprio candidato sindaco. La situazione che ne consegue è espressa dalla seguente tabella:

Lista	Ambiente	Benessere	Cultura
Candidato Sindaco	Agnesi Gaetana	Beltrami Eugenio	Cavalieri Bonaventura
Voti su cui contare	**6**	**5**	**2**

Obiettivo. *Consolidamento dei concetti di maggioranza assoluta, maggioranza relativa, ballottaggio.*

[10] Nelle elezioni a sistema proporzionale puro le alleanze tra i partiti minori possono penalizzare i partiti coalizzati.

Il docente prosegue la discussione ponendo agli allievi le seguenti domande:
A) *Quanti seggi sono necessari per avere la maggioranza assoluta?*
B) *La lista che ha più seggi ha la maggioranza assoluta o la maggioranza relativa?*
C) *Quale candidato sarebbe stato eletto sindaco se fosse stata sufficiente la maggioranza relativa dei voti?*
C) *Come funziona il metodo del ballottaggio?*

Qualora per eleggere il sindaco fosse stata sufficiente la maggioranza relativa, sarebbe stata eletta Gaetana Agnesi, il candidato del gruppo Ambiente. Il docente illustra il metodo del **ballottaggio** e mette in evidenza il paradosso che segue.

Paradosso. Con il sistema del ballottaggio, passerebbero il primo turno i candidati Agnesi e Beltrami; i quali nel secondo turno dovrebbero chiedere l'appoggio dei consiglieri del gruppo Cultura, i cui voti sarebbero decisivi. Si potrebbe avere allora la seguente situazione. I consiglieri del gruppo Ambiente temendo un'intesa tra gli altri due gruppi concordano con i consiglieri della lista Cultura quanto segue: Agnesi, il candidato sindaco del loro gruppo farà il vicesindaco, mentre Cavalieri farà il sindaco. In cambio i consiglieri del gruppo Ambiente vogliono che si modifichi il regolamento per l'assegnazione dei seggi, dato che quello vigente li ha penalizzati.
Bonaventura Cavalieri diviene sindaco di Matematopoli e Gaetana Agnesi diviene vicesindaco. Il paradosso in questo caso consiste nel fatto che la lista che ha avuto il minor numero di voti assume l'incarico più importante[11].

Cambiare il regolamento. Il primo argomento che viene discusso dal nuovo consiglio comunale è quello di trovare un sistema elettorale che sia equo è rispetti i principi di base di una votazione democratica.

[11] In una situazione in cui i componenti del gruppo consigliare sono costretti a cooperare per giungere alla soluzione del problema, l'equilibrio tra le decisioni è imprevedibile. La volontà degli elettori non ha più nessuna influenza; la scelta, dal punto di vista dell'elettore, appare pressoché casuale o dettata da ambizioni di potere.

I consiglieri del gruppo Ambiente sono per il rinnovo totale del regolamento, in alternativa sarebbero disposti ad accettarne una modifica parziale. I consiglieri del gruppo Benessere desiderano confermare il regolamento vigente, in alternativa preferiscono rinnovarlo del tutto. I consiglieri del gruppo Cultura preferiscono modificare il regolamento o in alternativa vogliono che resti così com'è. In sintesi la situazione è:

Partito	Ambiente	Benessere	Cultura
consiglieri	6	5	2
preferenza	**R**innovare	**C**onfermare	**M**odificare
alternativa	**M**odificare	**R**innovare	**C**onfermare
contrari a	**C**onfermare	**M**odificare	**R**innovare

Dopo le dichiarazioni di voto si passa alla votazione vera e propria. In prima votazione si decide se Rinnovare o Confermare il regolamento vigente. Per la Conferma votano solo i consiglieri del gruppo Benessere, per il Rinnovo votano i consiglieri del gruppo Ambiente. I consiglieri del gruppo Cultura non potendo votare per il Rinnovo votano per la Modifica, che è la loro seconda preferenza. In definitiva 7 consiglieri votano per la Conferma e 6 per il Rinnovo.
In seconda votazione si decide se Modificare o Confermare il regolamento: votano per la Conferma i consiglieri del gruppo Benessere, votano per la Modifica i consiglieri dei gruppi Ambiente e Cultura. Il consiglio delibera quindi di modificare il regolamento.
In definitiva l'ordine di preferenza è

Modificare > Confermare > Rinnovare

Paradosso. E se si fosse votato anche tra Modificare e Rinnovare? Paradossalmente avrebbe vinto Rinnovare con 11 voti contro 2. L'ordine delle scelte quindi non è transitivo ma ciclico:

Modificare > Confermare > Rinnovare > Modificare.

Paradosso (paradosso di Condorcet[12]). E se si fosse votato con un ordine differente? Votando prima se Rinnovare o Modificare, avrebbe

[12] M. de Condorcet, *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendus à la pluralité des voix*, Parigi, 1785.

vinto Rinnovare per 11 voti contro 2. Votando poi se Rinnovare o Confermare, avrebbe vinto Confermare per 7 voti contro 6.
L’ordine di preferenza in questo caso sarebbe stato

Confermare > Rinnovare > Modificare.

In altre parole, cambiando l’ordine della votazione, la decisione non sarebbe stata la stessa[13].

Paradosso (paradosso di Borda[14]). Infine, si poteva votare mettendo ai voti le tre proposte contemporaneamente, ciascun votante avrebbe espresso una sola preferenza e avrebbe vinto la scelta che avesse ottenuto il maggior numero di voti. In questo caso il risultato sarebbe stato:

Rinnovare (6 voti) > Confermare (5 voti) > Modificare (2 voti).

---

[13] Affinché si verifichi questo paradosso è necessario che ogni alternativa sia considerata la peggiore da qualcuno. Infatti, se A vince su B, almeno la metà più uno dei votanti preferisce A a B. Se B vince su C, almeno la metà più uno dei votanti preferisce B a C. Quindi, almeno uno dei votanti preferisce A a B e B a C, cioè considera C l’alternativa peggiore. Per simmetria, si verifica la stessa cosa per B e per A.
In generale, all’aumentare del numero delle scelte la situazione di indeterminazione o di casualità nella scelta aumenta. Riportiamo una tabella tratta da [7] pag. 42. La tabella è riprodotta anche in [3] pag. 226.

VOTANTI		3	5	7	9	11	∞
SCELTE	3	5,6%	6,9%	7,5%	7,8%	8,0%	8,8%
	4	11,1%	13,9%	15,0%	15,6%	16,0%	17,6%
	5	16,0%	20,0%	21,5%	23,0%	25,1%	25,1%
	6	20,2%	25,5%	25,8%	28,4%	29,4%	31,5%
	7	23,9%	29,9%	30,5%	34,2%	34,3%	36,9%
	∞	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

La probabilità di avere situazioni di intransitività aumenta all’aumentare del numero dei votanti e all’aumentare del numero di scelte. Per qualsiasi numero di votanti la probabilità del paradosso diventa certezza quando il numero delle scelte aumenta indefinitamente. Se si fissa il numero delle scelte a tre, la possibilità del paradosso aumenta di poco all’aumentare dei votanti, passa da 5,6% con tre votanti a 8,8% con infiniti votanti.

[14] J.C. de Borda, “Mémoire sur les élections au scrutin”, *Mémoire de l’Académie Royale des Sciences*, 1781, pp. 657-665.

Da questo esempio si deduce che in alcune situazioni non sono importanti le preferenze degli elettori ma il metodo di votazione scelto.

Obiettivo. *Verificare l'esistenza dei precedenti paradossi attraverso un esperimento in classe.*
Attuare una votazione concreta su tre scelte. Per esempio, decidere se andare in gita a Firenze, Roma o Rimini.
Si suddivide la classe in gruppi omogenei in base all'ordine di preferenza.

	Primo gruppo	**Secondo gruppo**	**Terzo gruppo**	**Quarto gruppo**	**Quinto gruppo**	**Sesto gruppo**
compenti	…	…	…	…	…	…
1a preferenza	Roma	Roma	Firenze	Firenze	Rimini	Rimini
2a preferenza	Firenze	Rimini	Roma	Rimini	Firenze	Roma
3a preferenza	Rimini	Firenze	Rimini	Roma	Roma	Firenze

Si vota contrapponendo le scelte a due a due e richiedendo che ciascuno rispetti l'ordine di preferenza espresso. Si ripete la votazione cambiandone l'ordine. Si ripete ancora la votazione presentando tutte le alternative simultaneamente.

Paradosso. I consiglieri del gruppo Cultura propongono di rinnovare il regolamento e adottarne uno simile a quello usato dal Consiglio Comunale dei Ragazzi del Comune di Mantova, nel quale il Cap. 1° recita:

> Composizione
> Il Consiglio Comunale dei Ragazzi (C.C.d.R.) è composto da 34 consiglieri, di cui 24 rappresentano le tre scuole medie, secondo l'ordine di consistenza numerica, e 10 i tre circoli didattici della città (1 per ogni plesso)[15].

---

[15] Regolamento Del Consiglio Comunale Dei Ragazzi del Comune di Mantova approvato DCCR n.135 del 10.11.1998, modificato con DCCR n.5 del 9.06.1999 e con DCCR n.2 del 17.12.2001.
http://www.comune.mantova.it/ccr/download/reg_agg2001.pdf

Secondo questo regolamento, sostengono i ragazzi del gruppo Cultura, sarebbero rappresentate tutte le scuole del comune e tutti i plessi scolastici.
Nel comune di Matematopoli esistono 13 plessi scolastici tra scuole primarie e secondarie di primo grado. I consiglieri del gruppo Ambiente studiano il caso e trovano la seguente situazione paradossale, nella quale in ogni plesso ci sono 100 elettori e ogni plesso esprime 1 consigliere:

	lista A	lista B	lista C	votanti	eletti
plesso A	75	5	20	100	A
plesso B	75	5	20	100	A
plesso C	75	5	20	100	A
plesso D	75	5	20	100	A
plesso E	75	5	20	100	A
plesso F	75	5	20	100	A
plesso G	30	40	30	100	B
plesso H	30	40	30	100	B
plesso I	30	40	30	100	B
plesso L	30	40	30	100	B
plesso M	30	40	30	100	B
plesso N	30	40	30	100	B
plesso O	30	40	30	100	B
voti tot	660	310	330	1300	

Con questi risultati la lista A, pur avendo ottenuto la maggioranza assoluta (660 voti su 1300) non ha la maggioranza dei seggi in consiglio comunale; la lista C pur avendo preso più voti della lista B (330 contro 310) non prende nessun seggio; la lista B pur essendo quella che ha preso meno voti ha la maggioranza assoluta dei seggi (7 su 13)[16].

OBIETTIVO. *Ricerca di un metodo più equo per l'assegnazione dei seggi e verifica dell'esistenza di ulteriori paradossi.*

[16] Una situazione di questo tipo si è verificata nelle recenti elezioni presidenziali americane: ha vinto Bush ma il suo avversario Gore aveva ottenuto complessivamente più voti.

Paradosso dell'Alabama. I consiglieri del gruppo Benessere propongono di modificare il regolamento aumentando semplicemente il numero dei consiglieri. Ma i consiglieri del gruppo Cultura si oppongono poiché conoscono il Paradosso dell'Alabama[17]: aumentando il numero di consiglieri il partito più piccolo rischia di perdere un seggio.
Le due tabelle che seguono mostrano un esempio nel caso di una particolare distribuzione di 110 voti. Il paradosso si verifica quando si aumentano i seggi da 10 a 11: la Lista C passa da 2 seggi a 1 seggio[18] .

	Lista A	Lista B	Lista C	Totale	Seggi	Rapporto
voti	57	37	16	110	10	110/10=11
seggi	**5**	**3**	**1**		**9**	
resti	2	4	5			
seggi dai resti	0	0	**1**			
totale seggi	**5**	**3**	**2**		**10**	

	Lista A	Lista B	Lista C	Totale	Seggi	Rapporto
voti	57	37	16	110	11	110/11=10
seggi	**5**	**3**	**1**		**9**	
resti	7	7	6			
seggi dai resti	**1**	**1**	0			
totale seggi	**6**	**4**	**1**		**11**	

Il caso del cioccolatino aggiunto. La situazione problematica che si presenta di seguito permette di verificare il paradosso dell'Alabama in un situazione concreta più vicina all'esperienza dei ragazzi.

L'insegnante di matematica ha assegnato degli esercizi a piacere per casa. Solo Marcello, Antonio e Domenico hanno fatto degli esercizi. L'insegnante decide di premiarli con i sei cioccolatini che ha nella borsa; distribuisce i cioccolatini secondo il metodo della proporzionalità pura, rispetto agli esercizi che hanno svolto.

---

[17] Cfr. nota 6.
[18] Non viene, cioè, rispettata l'isotonia. Mentre ci si aspetta che aumentando il numero dei seggi ogni lista abbia un numero di seggi maggiore o uguale a quello precedente.

Marcello ha fatto 23 esercizi, Antonio ne ha fatti 16, Domenico ne ha fatti 3. In tutto sono 42 esercizi, i cioccolatini sono 6; siccome 42 diviso 6 fa 7, l'insegnante darà un cioccolatino ogni 7 esercizi.
Perciò preliminarmente Marcello riceve 3 cioccolatini per i primi 21 esercizi svolti, Antonio ne riceve 2 per i primi 14 esercizi svolti e Domenico non ne riceve alcuno, avendo fatto meno di 7 esercizi.
In questo modo l'insegnante ha distribuito 5 cioccolatini. Per attribuire il sesto cioccolatino conteggia gli esercizi che sono rimasti esclusi:
Marcello ha fatto 23 esercizi; 21 sono stati premiati, rimangono ancora 2 esercizi da premiare. Antonio ha fatto 16 esercizi, di questi 14 sono stati premiati, rimangono 2 esercizi da premiare. Domenico ha fatto 3 esercizi e non ha ricevuto nessun premio, gli devono essere premiati 3 esercizi. L'insegnante assegna quindi il cioccolatino a Domenico che ha il maggior numero di esercizi non ancora premiati.

Marcello	Antonio	Domenico
esercizi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 → 1 cioccolat. 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 → 1 cioccolat. 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 → 1 cioccolat. 22, 23 esercizi non premiati	esercizi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 → 1 cioccolat. 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 → 1 cioccolat. 15, 16 esercizi non premiati	esercizi 1, 2, 3 esercizi non premiati

Dopo aver fatto tutti i conti, l'insegnante si accorge di avere un altro cioccolatino: ora i cioccolatini da distribuire sono 7 e bisognerà rifare i conti. Provare per credere: Domenico dovrà restituire il cioccolatino ricevuto!
Si noti che facendo corrispondere gli esercizi svolti ai voti e i cioccolatini ai seggi, il metodo applicato dall'insegnante corrisponde al metodo proporzionale puro.

OBIETTIVO. *Saper applicare un secondo metodo per la distribuzione dei seggi, il* ***sistema proporzionale corretto****; messa in atto di strategie risolutive.*

La proporzionale corretta. I consiglieri del gruppo Ambiente propongono di adottare il sistema Proporzionale corretto, noto anche con

il nome di **Metodo d'Hondt**, adottato in Italia per l'assegnazione dei consiglieri nei comuni con più di 15000 abitanti[19].
Il Metodo d'Hondt prevede che per ogni lista si divida progressivamente il numero dei suoi voti per numeri naturali crescenti 1, 2, 3, …, fino al numero massimo di seggi disponibili. Con i quozienti ottenuti dalle varie liste (quozienti elettorali) si fa un elenco decrescente: i seggi si distribuiscono alle varie liste nell'ordine in cui si susseguono i quozienti elencati [20].
Il docente propone di calcolare i seggi con il metodo della proporzionale corretta (Metodo D'Hondt) in base ai risultati delle precedenti elezioni. I calcoli sono sintetizzati nella tabella seguente:

	Voti/1	**Voti/2**	**Voti/3**	**Voti/4**	**Voti/5**	**Voti/6**	**Voti/7**	**Seggi**
Ambiente	**395**	**197,5**	**131,6**	**98,7**	**79**	**65,8**	**56,4**	7
Benessere	**283**	**141,5**	**94,3**	**70,7**	**56,6**	47,1	40,4	5
Cultura	**102**	51	34	25,5	20,4	17	14,5	1
Totale	780							13

Col Metodo d'Hondt gli stessi voti avrebbero dato come esito 7 consiglieri per la lista Ambiente, 5 consiglieri per la lista Benessere, 1 consigliere per la lista Cultura.

Il docente chiede: *il metodo della proporzionale corretta favorisce le alleanze tra i partiti?*

Per un'analisi corretta della questione, l'insegnate, se lo riterrà necessario, darà le seguenti indicazioni: supporre che le liste Benessere e Cultura formino un'unica lista e prendano la somma dei voti presi in

---

19 Per un numero di abitanti inferiore a 15000, i seggi vengono assegnati in modo tale che al raggruppamento che consegua la maggioranza relativa dei voti riceva la maggioranza assoluta dei seggi.
AA.VV., *Il Governo Comunale, brevi note per l'Amministratore Locale*, in "Strategie Amministrative", Mensile di notizie e commenti per amministratori e funzionari degli Enti Locali, Anno III, n° 7, novembre/dicembre, 2004.
http://www.risorsecomuni.it/2005/materiali/GuidaAnci.pdf

20 Nel caso che più liste abbiano uno stesso quoziente elettorale, a ognuna sarà attribuito un seggio, purché ci siano seggi a sufficienza; se i seggi non sono sufficienti si attribuiscono in base a un criterio prefissato.

precedenza dalle singole liste; ridurre o aumentare i voti riportati dalle singole liste, mantenendo inalterato il totale dei voti.
In generale, si può dimostrare che il Metodo d'Hondt tende a favorire le alleanze ma lasciamo che gli allievi giungano alla conclusione sulla base di esempi specifici.

Tornando alle 13 poltrone. Vediamo ora un secondo criterio con il quale i tre amici, Antonio, Domenico e Marcello, possono dividersi le poltrone acquistate dal mobiliere.

1) Antonio afferma che la 1ª poltrona spetta a lui, dato che per essa potrebbe offrire 395€.
2) Domenico afferma che la 2ª poltrona tocca a lui, in quanto per essa potrebbe offrire 283€.
3) Antonio esige anche la 3ª poltrona, dato che per ciascuna delle due poltrone può pagare 395€:2 = 147,5€;
4) Domenico pretende che la 4ª poltrona vada a lui, poiché potrebbe pagare le due poltrone 283€:2 = 141,5€.
5) Antonio vuole anche la 5ª poltrona, dato che per ciascuna delle tre poltrone ha a disposizione 395€:3 = 131,6€;
6) a questo punto Marcello reclama la 6ª poltrona, poiché per quella può offrire i suoi 102€.
7) …

Proseguendo in questo modo, Antonio e Domenico si aggiudicheranno le altre 7 poltrone. Alla fine l'assegnazione sarà la seguente: Antonio 7 poltrone, Domenico 5 poltrone, Marcello 1 poltrona.
Se raggruppiamo i calcoli che ciascuno dei tre amici deve svolgere per stabilire il prezzo che può pagare per ogni poltrona, otteniamo una tabella che coincide con quella utilizzata per l'assegnazione dei seggi con il Metodo d'Hont.

	Euro/1	Euro/2	Euro/3	Euro/4	Euro/5	Euro/6	Euro/7	Poltrone
Antonio	**395**	**197,5**	**131,6**	**98,7**	**79**	**65,8**	**56,4**	7
Domenico	**283**	**141,5**	**94,3**	**70,7**	**56,6**	47,1	40,4	5
Marcello	**102**	51	34	25,5	20,4	17	14,5	1
Totale	780							13

Anche in questo caso i tre amici hanno pagato prezzi diversi per comprare le stesse poltrone. Questa volta, è stato favorito Antonio che ha pagato per ciascuna poltrona 56,4€, mentre Marcello è stato penalizzato perché ha dovuto pagare 102€ per una poltrona. A prima vista può sembrare poco corretto che ci sia una tale differenza di costi, tuttavia per comprare due poltrone Marcello non poteva offrire più di 51€.

Conclusioni. Dopo aver visto l'iniquità dei due principali metodi di assegnazione dei seggi, la domanda spontanea è se sia possibile trovarne un altro che sia equo e non generi situazioni paradossali. La risposta a questa domanda è tutt'altro che semplice. Alcuni ricercatori hanno individuato i limiti dei sistemi democratici di assegnazione dei seggi[21]; gli enunciati dei principali risultati matematici si possono trovare sul sito *Mathworld* di Eric Weissten:
http://mathworld.wolfram.com/topics/GameTheory.html.
Per un approfondimento rinviamo alla Bibliografia.

[21] Per i risultati originali vedere: a) K. May, "A Set of Independent Necessary and Sufficient Conditions for Simple Majority Decision", *Econometrica,* 20 (1952); b) K. Arrow, *Social Choice and Individual Values*, New Haven, Yale University Press, 1963; c) L. Balinsky, Michel, and H. Peyton Young, *Fair Representation: Meeting the Ideal of One Man, One Vote*. New Haven, Yale University Press, 1982.

BIBLIOGRAFIA

[1] BERNARDI C., "Il parere della maggioranza ed i sistemi elettorali", *Progetto Alice*, Roma, Pagine, Vol. V n. 15 (2004), 581-594.

[2] BARRA M., "Coordinate ternarie, 'ennarie' e coordinate proiettive omogenee. Tassellazioni, Elezioni con la legge elettorale proporzionale pura e suoi paradossi. La situazione italiana e il caso asintotico di n partiti", *Progetto Alice*, Roma, Pagine, vol. II n. 4 (2001), 3-24.

[3] BELOTTI F., GAMBARELLI G., "Sistemi elettorali e teoria dei giochi", *Progetto Alice*, Roma, Pagine, vol. II n. 4 (2001), 25-34. Anche in http://matematica.uni-bocconi.it/archivio/sistemi-elettorali.htm

[4] P. ODIFREDDI, C'era una volta un paradosso, Einaudi (2001), Torino. Una parte del capitolo sui paradossi elettorali si trova anche in: http://www.pbmstoria.it/leggere_fonti.php?ID=1601

[5] HOFFMAN P., *La vendetta di Archimede*, Milano, Bompiani, 1990.

[6] BERNARDI C., MENEGHINI M., "Sistemi elettorali proporzionali. La "soluzione" italiana", *Bollettino Unione Matematica Italiana*, vol. IV (1990), 271-293.

[7] VILLANI V., "Leggi elettorali", Cultura e Scuola, n. 101 (1987), 175-186.

[8] DALL'AGLIO G., "Decisioni di gruppo: il paradosso di Arrow", Archimede, vol. XXXIV n. 1-2 (1982), 3-14.

[9] D'ALEMBERT R., RIDDLE A., SILVERBRAHMS P.R., *La matematica delle elezioni*, http://www.aromatic.com/rudi/La_Matematica_delle_Elezioni.pdf

[10] MORETTI S., PATRONE F., GIOCHI SEMPLICI, INDICI DI POTERE E SCELTE SOCIALI, http://www.collegioborromeo.it/files/TdG5.pdf

[11] PALLADINO D., *Sistemi elettorali, Leggi proporzionali pure*. http://www.dif.unige.it/epi/hp/pal/Votazioni83W8.pdf

[12] ASTEGGIANO F., I paradossi, ovvero ordinarie storie di verità rovesciate …, . http://www2.polito.it/didattica/polymath/htmlS/Studenti/Ricerche/Asteggiano/APPUNTI.HTM

[13] Eric WEISSTEN, Mathworld, Game Theory. http://mathworld.wolfram.com/topics/GameTheory.html