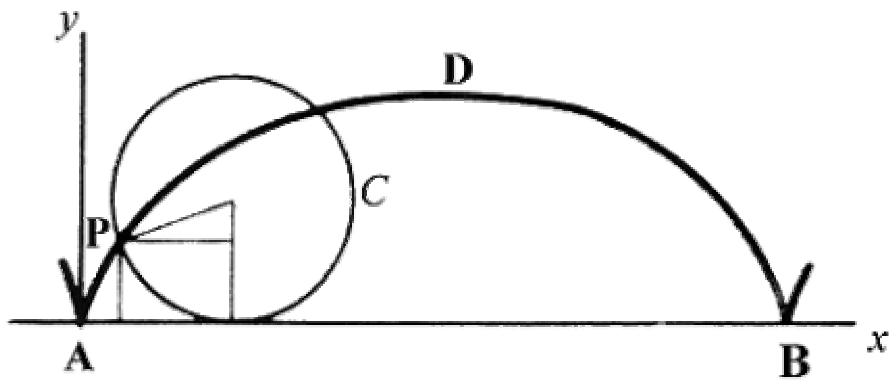
M-4

LA CICLOIDE



La bella Elena

della matematica

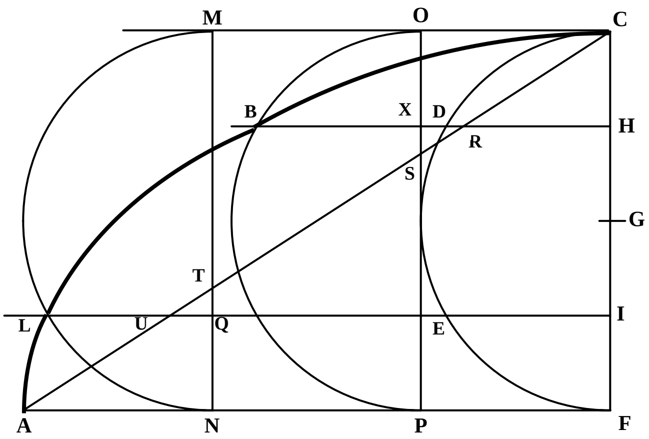
[edr - Dicembre 2000]

Quella curva arcuata, sono piu' di cinquant' anni che mi venne in mente il descriverla, e l'ammirai per una curvita' graziosissima per adattarla agli archi di un ponte.

[Galileo Galilei]

Premessa

Immaginiamo una ruota che rotola senza strisciare su una linea retta, ad es. la ruota di un treno su un binario o la ruota di una bicicletta che si muove su un rettilineo. Ci chiediamo: Un punto sul bordo esterno della ruota che curva descrive nel moto di rotolamento della ruota? Istintivamente si è portati a rispondere: “una circonferenza!”, ma riflettendo un pò ci si accorge che forse è così per un osservatore sul treno (o per il ciclista), ma non per un osservatore a terra; il punto dal momento che tocca terra si solleva quasi in verticale, quindi curva nella direzione del moto fino ad arrivare ad un’ altezza massima pari al diametro del cerchio muovendosi in quel momento in orizzontale, quindi ridiscende quasi rallentando orizzontalmente ed accelerando verticalmente verso il basso fino a toccare terra in verticale per riprendere ciclicamente la stessa traiettoria.
Questa curva è detta “cicloide” definita come *la traiettoria di un punto fisso su una circonferenza che rotoli senza slittamento su una retta.*
All’ apparenza è una curva come tante altre, ma ad attenta analisi rivela, come vedremo, proprietà sorprendenti.
Storicamente, di essa non v’ è traccia nella geometria classica; in questo senso può essere considerata una curva “nuova”, uno dei primi frutti cioè della rifioritura della Matematica nel XVII° secolo, e studiata da tutti i matematici di quel secolo.
Difficile dire chi per primo l’ abbia considerata. Certamente la studiò Nicola Cusano (1401-1464) nei suoi tentativi di “quadratura del cerchio” e Mersenne (1588-1648) la definì rigorosamente stabilendone la prima ovvia proprietà, che la lunghezza della sua base è pari alla circonferenza generatrice. Cercò quindi di trovare l’ area sotto la curva senza riuscirvi.
Galileo le diede il nome (nel 1599) e cercò anch’ Egli di misurarla teoricamente, senza però riuscirvi. Da buon fisico qual’ era però non si scoraggiò e cominciò a ritagliarla da superfici di noto peso specifico, sperando così di trovarne l’ area attraverso il peso della parte ritagliata; trovò così che il rapporto dei pesi con il cerchio generatore era di circa **3** a **1**, ma decise che non era esattamente **3** ma probabilmente un numero irrazionale molto prossimo. Evidentemente la soluzione **3** gli era apparsa incredibilmente semplice. Ma la prima sfida era ormai lanciata ed in due, indipendentemente l’ uno dall’ altro, riuscirono a dimostrare che l’ area sotto la curva era esattamente tre volte quella del cerchio generatore. Uno dei due fu Roberval che lo risolse nel 1634; l’ altro fu Evangelista Torricelli, allievo di Galileo che giunse allo stesso risultato quasi contemporaneamente. Riportiamo nel seguito una delle tre dimostrazioni del Torricelli, forse la più bella e complessa, a testimonianza delle difficoltà in cui si dibatteva la Matematica di quei tempi, quando non erano state ancora messe a punto le tecniche dell’ analisi.
La formulazione originaria recitava così: “*Lo spazio* (= l’ area) *compreso fra la cicloide e la sua retta di base è triplo del circolo generatore. Ovvero è sesquialtero* (= una volta e mezza) *del triangolo avente la sua stessa base ed altezza.”*



Consideriamo allora mezzo arco di cicloide $\overset{\frown}{\mathbf{AC}}$, il suo cerchio generatore in **C** e di questo il diametro **CF** ed il centro **G**. Congiungiamo **A** con **C** ed osserviamo che il triangolo **ACF** ha l' area uguale a quella del cerchio generatore essendo $\mathbf{b \cdot h / 2 = \pi \cdot r \cdot 2 \cdot r / 2 = \pi \cdot r^2}$.

Si vuole dimostrare che l' area compresa tra il segmento **AC** e l' arco di cicloide $\overset{\frown}{\mathbf{AC}}$ è equivalente a quella di un semicerchio generatore.

Sul diametro **AF** si prendano allora due punti **H** ed **I** equidistanti dal centro e da essi si traccino le parallele alla base **AF** individuando così le intersezioni **D** ed **E**, rispettivamente, con la circonferenza generatrice, le intersezioni **B** ed **L**, risp., con la cicloide e le intersezioni **R** ed **U**, con il segmento **AC**.

Si traccino le circonferenze generatrici in **B** ed in **L** individuando cosi i loro punti di “appoggio” **P** ed **N**, rispettivamente, sulla base **AF**, le intersezioni **X** e **Q**, risp., dei loro diametri con le parallele alla base e le intersezioni **S** e **T**, risp., dei loro diametri con il segmento **AC**.

Si può dimostrare che la somma dei segmenti $\overline{\mathbf{BR}}$ ed $\overline{\mathbf{LU}}$ è uguale alla somma delle semicorde $\overline{\mathbf{HD}}$ ed $\overline{\mathbf{EI}}$.

Infatti è evidente che: $\overset{\frown}{\mathbf{OB}} = \overset{\frown}{\mathbf{LN}}$, da cui $\overset{\frown}{\mathbf{PO}} - \overset{\frown}{\mathbf{PB}} = \overset{\frown}{\mathbf{LN}}$ e da cui $\overline{\mathbf{AF}} - \overline{\mathbf{AP}} = \overline{\mathbf{AN}}$ ed infine $\overline{\mathbf{AT}} = \overline{\mathbf{CS}}$.

Per altra via si ha che $\overline{\mathbf{IF}} = \overline{\mathbf{CH}}$ da cui $\overline{\mathbf{CR}} = \overline{\mathbf{AU}}$, che con la precedente implica che $\overline{\mathbf{AT}} - \overline{\mathbf{AU}} = \overline{\mathbf{CS}} - \overline{\mathbf{CR}}$ da cui $\overline{\mathbf{UT}} = \overline{\mathbf{SR}}$ ed infine $\overline{\mathbf{XR}} = \overline{\mathbf{UQ}}$

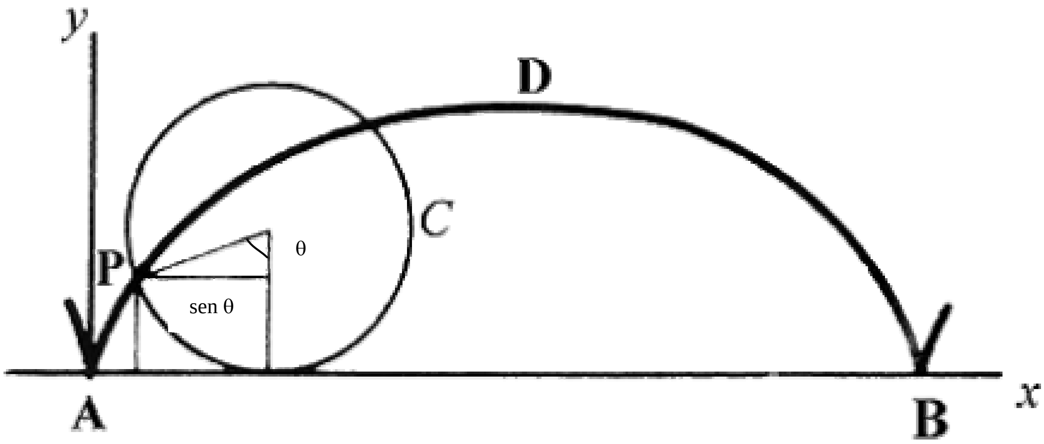
Ora le semicorde $\overline{\mathbf{HD}}$, $\overline{\mathbf{IE}}$, $\overline{\mathbf{XB}}$ e $\overline{\mathbf{QL}}$ sono tutte uguali (**Euclide – libro III –pr.14**), quindi:

$$\overline{\mathbf{HD}} + \overline{\mathbf{EI}} = \overline{\mathbf{BX}} + \overline{\mathbf{LQ}} = \overline{\mathbf{BX}} + \overline{\mathbf{LQ}} + \overline{\mathbf{XR}} - \overline{\mathbf{UQ}} = \overline{\mathbf{BR}} + \overline{\mathbf{LU}}$$

Quindi per ogni coppia di segmenti del semicerchio $\overset{\frown}{\mathbf{CDEF}}$ vi è una coppia di segmenti di egual somma della figura $\overset{\frown}{\mathbf{ALBC}}$. Ciò implica l' eguaglianza delle aree. Essendo l' area del semicerchio $\boldsymbol{\pi \cdot r^2/2}$, tale sarà anche l' area della figura, che, sommata a quella del triangolo $\boldsymbol{\pi \cdot r^2}$, ci dà l' area di mezza cicloide $\mathbf{3 \cdot \pi \cdot r^2 / 2}$.

Quindi l' area dell' intera cicloide sarà $\mathbf{A = 3 \cdot \pi \cdot r^2}$, tre volte quella del cerchio generatore.

Naturalmente questa ed altre caratteristiche possono essere trovate col calcolo infinitesimale. Procuriamoci allora gli strumenti.
Anzitutto le equazioni; con riferimento alla figura si ottengono le equazioni:



parametrica: $$\begin{cases} \mathbf{x = r \cdot \theta - r \cdot sen\,\theta = r \cdot (\theta - sen\,\theta)} \\ \mathbf{y = r - r \cdot \cos\theta = r \cdot (1 - \cos\theta)} \end{cases}$$

e cartesiana: $$\mathbf{x = r \cdot arcos \left[\frac{r-y}{r}\right] \mp \sqrt{2xy - y^2}}$$

quindi: $$\left.\begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta} = r\cdot(1 - \cos\theta) \quad ; \quad \left[\dfrac{dx}{d\theta}\right]^2 = r^2\cdot(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta) \\ \dfrac{dy}{d\theta} = r \cdot sen\,\theta \quad ; \quad \left[\dfrac{d^2y}{d\theta^2}\right]^2 = r^2 \cdot sen^2\,\theta \end{cases}\right\} \frac{dy}{dx} = cotg\,\theta/2$$

Possiamo ora ricalcolare l' area:

$$A = \int_0^{2\pi r} y\,dx = \int_0^{2\pi} r \cdot (1-\cos\theta) \cdot r \cdot (1-\cos\theta)\,d\theta = r^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)^2\,d\theta =$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cdot\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta = r^2 \int_0^{2\pi} [1 - 2\cdot\cos\theta + ½\cdot(1+\cos 2\theta)]\,d\theta =$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} (3/2 - 2\cdot\cos\theta + ½\cdot\cos 2\theta)\,d\theta = r^2 \left[\int_0^{2\pi} 3/2\,d\theta - \int_0^{2\pi} 2\cdot\cos\theta\,d\theta + \right.$$

$$\left. + \int_0^{2\pi} ½ \cdot \cos 2\theta\,d\theta \right] = r^2 \cdot 3/2 \cdot 2\pi = 3\,\pi\,r^2 \quad \text{cioè} \quad \boxed{A = 3\,\pi\,r^2} \quad \textbf{C.V.D.}$$

Si può agevolmente calcolare anche la lunghezza dell' arco:

$$\mathbf{L} = \int_A^B \mathbf{ds} = \int_A^B \sqrt{(\mathbf{dx})^2 + (\mathbf{dy})^2} = \mathbf{r} \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{(\mathbf{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta) + sen^2\theta}}\ \mathbf{d\theta} =$$

$$= \mathbf{r} \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{(\mathbf{2 - 2\cos\theta})}\ \mathbf{d\theta} = \mathbf{2 \cdot r} \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{\mathbf{1 - \cos\theta}}{\mathbf{2}}}\ \mathbf{d\theta} = \mathbf{2 \cdot r} \cdot \int_0^{2\pi} \mathbf{sen\ \theta/2\ \ d\theta} =$$

$$= \mathbf{4 \cdot r} \cdot \int_0^{\pi} \mathbf{sen\ \omega\ \ d\ \omega} = \mathbf{4 \cdot r} \cdot \Big[\mathbf{-\cos\omega}\Big]_0^{\pi} = \mathbf{8 \cdot r} \quad \text{cioè} \quad \boxed{\mathbf{L = 8\ r}}$$

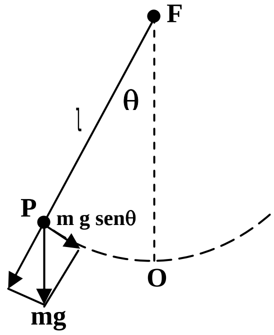
Ci troviamo quindi di fronte ad un curva dall' equazione non semplice ma con una derivata, un' area sottesa ed una lunghezza esprimibili molto semplicemente.
Ma ciò che più sorprende sono le proprietà che ora andremo a scoprire.

Isocronismo o Tautocronismo

La sfida lanciata da Mersenne sull' area aveva incuriosito un pò tutti i matematici di quel tempo e tutti presero a studiarla. Un notevole contributo lo diede Blaise Pascal che da qualche tempo aveva abbandonato gli studi scientifici per seguire la fede religiosa, finché una notte in preda ad un violento mal di denti si ricordò della cicloide; poco dopo il dolore passò ed Egli interpretò questo come un segno del cielo che gli indicava di riprendere gli studi abbandonati partendo proprio dalla quella curva. Pascal riscoprì molte delle cose che aveva già appreso in precedenza ed ottenne nuovi risultati. Decise quindi di lanciare una nuova sfida con una serie di quesiti con la promessa di premi per i lavori più meritevoli. Come giudice fu invitato anche l' amico Roberval. Ma la sfida di Pascal fu raccolta solo da pochi e con lavori non degni di premio. Allora si decise a pubblicare le proprie soluzioni in un lavoro intitolato "Storia della Cicloide" in cui tra l' altro prende le parti di Roberval nella disputa con Torricelli sulla priorità della scoperta dell' area.
Il lavoro non piacque a molti, ma ebbe un utile effetto: ravvivare l' interesse sulla curva. Christiaan Huyghens stava studiando come migliorare il progetto dell' orologio a pendolo Galileano che, come è noto, ha il difetto per cui le oscillazioni non sono perfettamente indipendenti dall' ampiezza.
Per ottenere un moto armonico perfetto occorre un punto materiale **P** di massa **m** vincolato senza attrito su una retta, soggetto ad una forza di richiamo verso un punto **O** della retta, proporzionale alla distanza da quel punto (coefficiente di proporzionalità **k**). Infatti assumendo questo come origine ed indicando con **s** la distanza dall' origine, si ha che il punto materiale subisce un' accelerazione data

da: $\mathbf{a = - k \cdot s / m}$ cioè $\mathbf{d^2s / dt^2 + k \cdot s / m = 0}$. Questa è una equazione differenziale omogenea a coefficienti costanti che ha come soluzione la funzione $\mathbf{s(t) = A\ sen\ (\omega t + \varphi)}$, con $\mathbf{A}$ e φ dipendenti dalle condizioni iniziali e la pulsazione $\omega = \mathbf{2\ \pi\ f = (k / m)^{1/2}}$.

Nel caso del pendolo galileano, costituito da un punto materiale di massa **m** soggetto alla sola forza di gravità, vincolato ad un filo inestendibile di lunghezza ℓ vincolato all' altro estremo ad un punto fisso **F** detto fulcro, il peso in parte è contrastato dalla reazione del filo ed in parte funge da forza di richiamo che con riferimento alla figura, detto **s** l' ascissa curvilinea lungo la traettoria del punto **P**, vale: $\mathbf{R = m \cdot g \cdot sen\ \theta}$, che per angoli piccoli può essere approssimata a:



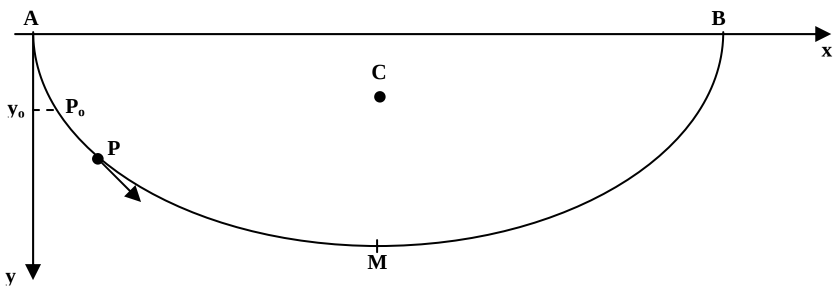
Pendolo di Galileo

$$\mathbf{R = m \cdot g \cdot \theta = m \cdot g \cdot s / \ell}$$

Quindi il punto oscillerà con una pulsazione: $\omega = \sqrt{\mathbf{g} / \ell}$ cioè con un periodo:

$$\boxed{\tau = \mathbf{2}\ \pi / \omega = \mathbf{2}\ \pi \sqrt{\frac{\ell}{\mathbf{g}}}}$$

Stimolato dall' opera di Pascal, Huyghens prese in considerazione l' ipotesi di far oscillare un pendolo anzicchè lungo una circonferenza, come nel caso del pendolo semplice galileano, lungo una cicloide e così scoprì che questa è la curva isocrona o tautocrona, cioè la curva lungo la quale un punto materiale **P** vincolato ad essa senza attrito e sotto l' azione della sola forza di gravità impiega sempre lo stesso tempo per raggiungere il punto mediano **M** partendo da fermo, quale che sia il punto di partenza $\mathbf{P_o}$. Ci si riferisce ovviamente alla cicloide rovesciata, cioè con la concavità rivolta verso l' alto.



In ogni punto **P** della curva/traiettoria indichiamo con **s** l' ascissa curvilinea, cioè, con riferimento alla figura, la lunghezza dell' arco $\widehat{\mathbf{AP}}$ della cicloide; la velocità rispetterà sempre il principio di conservazione dell' energia per cui in ogni punto l' energia cinetica sarà pari all' energia potenziale perduta dal punto di partenza $\mathbf{P_o}$ di ordinata $\mathbf{y_o}$, corrispondente al valore $\theta_\mathbf{o}$ del parametro:

$$\mathbf{½ \cdot m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot (y - y_o)}$$

Partendo dal punto **A**, cioè se $\mathbf{y_o = 0}$ ($\theta_\mathbf{o} = \mathbf{0}$), sarà:

$$\tfrac{1}{2}\cdot \mathbf{m}\cdot \mathbf{v}^2 = \mathbf{m}\cdot\mathbf{g}\cdot\mathbf{y} \longrightarrow \mathbf{v} = \sqrt{2\cdot\mathbf{g}\cdot\mathbf{y}} = \mathbf{ds/dt} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathbf{dt} = \mathbf{ds/v} = \frac{\mathbf{r}\cdot\sqrt{2\cdot(1-\cos\theta)}}{\sqrt{2\cdot\mathbf{g}\cdot\mathbf{r}\cdot(1-\cos\theta)}}\, d\theta = \sqrt{\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{g}}}\, d\theta$$

Quindi partendo dal punto **A** per arrivare al punto **M** impiegherà un tempo:

$$\tau = \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{g}}}\, d\theta = \pi \sqrt{\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{g}}}$$

Partendo da un punto diverso da **A**, ad es. dal punto $\mathbf{P_o}$ di ordinata $\mathbf{y_o \neq 0}$ ($\theta_o \neq \mathbf{0}$), sarà:

$$\tfrac{1}{2}\cdot \mathbf{m}\cdot \mathbf{v}^2 = \mathbf{m}\cdot\mathbf{g}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{y_o}) \longrightarrow \mathbf{v} = \sqrt{2\cdot\mathbf{g}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{y_o})} = \mathbf{ds/dt} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathbf{dt} = \mathbf{ds/v} = \frac{\mathbf{r}\cdot\sqrt{2\cdot(1-\cos\theta)}}{\sqrt{2\cdot\mathbf{g}\cdot\mathbf{r}\cdot(\cos\theta_o-\cos\theta)}}\, d\theta = \sqrt{\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{g}}}\left[\frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{\cos\theta_o-\cos\theta}}\right] d\theta$$

In parentesi il fattore per il quale differisce dal caso precedente; quindi partendo da $\mathbf{P_o}$ per arrivare al punto **M** si impiegherà un tempo dato da:

$$\tau = \sqrt{\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{g}}}\int_{\theta_o}^{\pi}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta_o-\cos\theta}}\, d\theta = \sqrt{\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{g}}}\int_{\theta_o}^{\pi}\frac{\mathbf{sen}\ \theta/2}{\sqrt{\cos^2\theta_o-\cos^2\theta}}\, d\theta =$$

$$= \sqrt{\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{g}}}\int_{\theta_o}^{\pi}\frac{-2}{\sqrt{1-u^2}}\, du = 2\cdot\sqrt{\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{g}}}\Big[\mathbf{arcsen\ u}\Big]_0^1 = \pi\cdot\sqrt{\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{g}}}$$

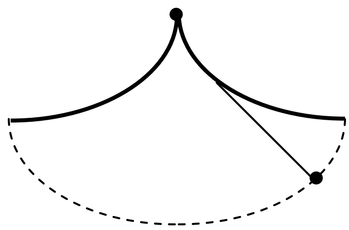
quindi lo stesso tempo. Per la simmetria del sistema lo stesso tempo impiegherà per raggiungere la posizione simmetrica dall' altro lato. In conclusione, quale che sia l' elongazione un punto oscillerà intorno al punto **M** con un periodo $\mathbf{T = 4}\ \tau$:

$$\boxed{\mathbf{T} = 4\,\pi\sqrt{\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{g}}}}$$

Pari al periodo di un pendolo galileano di lunghezza $\mathbf{L} = \sqrt{2}\cdot\mathbf{r}$ (fulcro nel punto **C** della figura), ma con la differenza che ora non occorre più l' ipotesi di angoli piccoli, cioè l' approssimazione $\theta \approx$ **sen** θ

Utilizzando questa proprietà della cicloide Huyghens ideò un pendolo perfettamente isocrono indipendentemente dall' ampiezza della oscillazione, costringendo il punto materiale a muoversi su una cicloide. Per ottenere questo si

avvalse di un’ altra proprietà della cicloide di avere come evoluta, e quindi come involuta, la cicloide stessa, costringendo il filo del pendolo tra due ganasce cicloidali. Si ricorda che l’ evoluta di una curva è l’ insieme dei centri di curvatura.
Purtroppo gli inevitabili attriti di questo sistema lo resero praticamente inutilizzabile.



Pendolo di Huyghens

Brachistocronismo

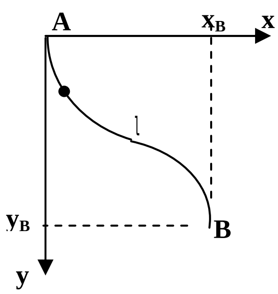
Parlando della cicloide non si può tacere una delle più importanti dispute della matematica: “Il problema della Brachistocrona” che annovera tra i protagonisti i **Bernoulli**. Il problema fu infatti posto da Johann Bernoulli e risolto oltre che da lui stesso anche dal fratello Jacob, da Leibniz, da Newton e da l’ Hospital.
Necessita a questo punto una piccola digressione sui Bernoulli.
La famiglia Bernoulli, di fede protestante, era di origine belga. Per sfuggire alle guerre di religione che in quel tempo insanguinavano l’ Europa, il capostipite Nicolaus si stabili’ a Basilea dove divenne uno dei cittadini più in vista divenendo perfino membro del consiglio cittadino. Ebbe tre figli: **Jacob** (nota anche come Jacques o James), **Johann** (noto anche come John o Jean) e Nicolaus (come il padre).
Jacob fu avviato dalla famiglia agli studi filosofici e teologici, ma contemporaneamente studiava di nascosto matematica e astronomia. E questa è storia comune nella famiglia Bernoulli, di essere avviati in carriere che non corrispondevano alle loro aspirazioni.
Dopo il conseguimento della laurea in teologia girò l’ Europa incontrando le più brillanti menti matematiche del tempo. Tornato a Basilea prese ad insegnare meccanica alla locale Università; ma il suo vero amore era la matematica e la fisica teorica.
Nel 1687 fu nominato professore di Matematica sempre all’ Università di Basilea. Già dal 1684 insieme al fratello Johann stava studiando un testo rivoluzionario per quei tempi, il “Nova Methodus pro Maximis et Minimis …” di Leibniz; i fratelli Bernoulli furono i primi ad intuire le immense possibilità di applicazione del calcolo infinitesimale.
Jacob diede importanti contributi al calcolo risolvendo tra l’ altro prima l’ equazione differenziale del moto armonico, poi l’ equazione che porta il suo nome: $\mathbf{y' = p(x) \cdot y + q(x) \cdot y^n}$ detta appunto “**Equazione di Bernoulli**”. Studiò anche le curve, in particolare la parabola e la spirale logaritmica, trovando un metodo per determinarne le evolute; porta il suo nome anche una famosa curva “**la lemniscata di Bernoulli**”.
Morì nel 1705 e sulla cattedra di Matematica gli successe il fratello **Johann**; anche questi era stato convinto a studiare medicina, ma anch’ egli mentre studiava medicina prendeva lezioni di Matematica dal fratello maggiore. Naturalmente si

laureò con una tesi di laurea in Iatromatematica (matematica applicata alla medicina).
Anch' egli dopo la laurea girò a lungo in Europa incontrando tra gli altri anche il marchese de l' Hospital al quale diede lezioni di matematica. Pare che la famosa "**regola di de l' Hospital**" sia in realtà frutto di Johann, suggerita all' allievo, che poi l' inserì nel suo lavoro. Di queste dispute la Matematica ne è piena.
Fu raggiunto dalla notizia della morte del fratello mentre era in viaggio per l' Europa e colse subito l' occasione per proporsi ed ottenerne la cattedra. I rapporti con il fratello non erano mai stati buoni; dopo avergli infatti dato lezioni Jacob non accettava che gli fosse pari in Matematica e quando successe che Johann ebbe a risolvere un complesso problema prima del fratello maggiore, questi ebbe a dire che in fondo Johann era un suo allievo ed ogni suo successo era da attribuire ai propri insegnamenti. Johann non gradì questa affermazione ed i due presero a criticarsi anche in pubblico e ferocemente. Altra caratteristica comune ai Bernoulli fu l' invidia, la faziosità, la facile irritabilità, la tendenza alla critica e la difficoltà ad ammettere le sconfitte, che li portarono spesso l' uno contro l' altro.
Parimenti importante fu il contributo di Johann allo sviluppo del calcolo; studiò la funzione $\mathbf{y = x^x}$ e scoprì quelle che poi furono dette "**le serie di Bernoulli**".
Morì nel 1748 a Basilea, città che non aveva mai lasciato nonostante gli fossero state offerte prestigiose cattedre in tutta l' Europa.
Ebbe tre figli, due dei quali, Nicolaus (II o III) e **Daniel**, seguirono le orme paterne. Mentre però a Nicolaus fu consentito di studiare Matematica, per il giovane Daniel fu programmata, come consuetudine in casa Bernoulli, un' altra carriera. Dapprima le discipline economiche, quindi Filosofia e Logica ed infine Medicina. Mentre però lo costringeva ad altre discipline, il padre, ma anche il fratello maggiore, gli impartivano lezioni di Matematica e Fisica. I guai cominciarono quando Daniel partecipò ad un concorso dell' Accademia Francese delle Scienze al quale aveva partecipato anche il padre. L' Accademia aveva assegnato il premio ad entrambi, ma la cosa non fu digerita da Johann che montò su tutte le furie accusando l' Accademia di non aver distinto il maestro dall' allievo ed il figlio di non riconoscere i giusti meriti del padre. In realtà era invidioso del figlio che in così giovane età era stato considerato suo pari. Finì col cacciarlo da casa.
Di lì a poco il giovane Bernoulli ottenne la cattedra all' Università di S.Pietroburgo dove ebbe la possibilità di proseguire nei sui studi scientifici fino alla formulazione della famosa legge sulla dinamica dei fluidi che porta il suo nome: "*Nel moto stazionario di un liquido la somma dell' altezza geografica, dell' altezza di arresto e dell' altezza piezometrica resta costante*". In formule:

$$\boxed{\mathbf{h} + \frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{2 \cdot g}} + \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{g \cdot \delta}} = \text{costante}}$$

Ma torniamo alla nostra curva. Fu Johann Bernoulli nel 1697 a porre un curioso problema: Dati due punti **A** e **B** su un piano verticale in un campo gravitazionale

uniforme, trovare la curva tra essi sulla quale un punto materiale, vincolato a scorrervi senza attrito, vada da quello più in alto a quello più in basso nel minor tempo possibile.
Nel porre il problema Johann lo chiosò pressappoco così: “... Vi sono pochissimi in grado di risolvere problemi eccellenti, si!, pochissimi!, anche tra i tanti matematici che si vantano di aver esteso meravigliosamente i loro confini mediante teoremi che (essi dicono) non erano noti ad alcuno, ma che in realtà erano stati in precedenza pubblicati da altri.”
Era evidente l’ intento di colpire Newton che qualche anno prima aveva pubblicato il suo lavoro sul calcolo infinitesimale tre anni dopo la pubblicazione di un analogo lavoro di Leibniz. Presto era nata la disputa sulla paternità della scoperta e Bernoulli parteggiò per Leibniz. Ma Newton accettò la sfida e dopo qualche tempo pervennero a Johann tre risposte, una da Leibniz, una da l’ Hospital ed una anonima dall’ Inghilterra, di cui Bernoulli disse di riconoscerne l’ autore “come il leone si riconosce dall’ orma”; l’ autore era Newton. Il problema fu poi risolto anche dal fratello Jacob e come al solito i due fratelli non si risparmiarono reciproche accuse di plagio.
Ma torniamo al nostro problema. E’ noto che la distanza più breve tra due punti è il segmento di retta che lo congiunge per cui si sarebbe tentati a rispondere che questa è la traiettoria che assicura il minor tempo. Ma non è così perché conviene partire puntando il più possibile verso il basso per acquisire la massima velocità iniziale. Galileo aveva già affrontato questo problema molti anni prima ed aveva creduto di risolverlo indicando come traettoria ottimale l’ arco di cerchio. Ma la risposta corretta è “la cicloide” che per questo è detta anche curva brachistocrona (dal greco βραχιστος, superlativo di βραχυς = breve, e da χρονος = tempo) cioè “dal tempo più breve”.



La dimostrazione non è immediata. Consideriamo per semplicità solo il caso di partenza da fermo (velocità iniziale nulla), sebbene nulla cambi nei risultati se questa ipotesi viene rimossa. Con riferimento alla figura a fianco, il tempo impiegato per cadere da **A** a **B** lungo ℓ è dato da:

$$\mathbf{T} = \int_{\ell} \mathbf{dt} = \int_{A}^{B} \frac{\mathbf{ds}}{\mathbf{v}} = \int_{A}^{B} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2\,g\,y}} = \int_{A}^{B} \mathbf{F\,(y,y')\,dx}$$

con $\mathbf{F\,(y,y')} = \sqrt{\dfrac{1+y'^2}{2\,g\,y}}$

Si tratta allora di trovare una funzione **y(x)** (equazione della curva) che renda minimo quell’ integrale essendo $\mathbf{y(0) = 0}$ e $\mathbf{y(x_B) = y_B}$.
Dal calcolo delle variazioni si sa che la funzione **F(x, y, y’)** che rende minimo l’ integrale:

$$\int_{A}^{B} \mathbf{F(x,\,y,\,y')\,dx}$$

soddisfa l' equazione di Eulero-Lagrange: $$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\right]-\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

e nel caso in cui **F(x, y, y')** non dipendesse da **x**, come nel nostro caso, la più semplice identità Beltrami:

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C$$

Per la ns funzione vale quindi:

$$\frac{\partial}{\partial y'}\,F(y, y') = \frac{\partial}{\partial y'}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2\,g\,y}} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}\,\sqrt{2gy}}$$

Quindi per l' identità Beltrami:

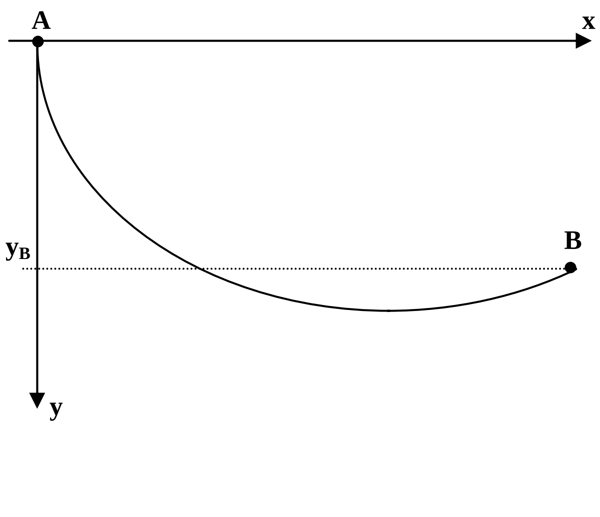
$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{2\,g\,y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}\,\sqrt{2gy}} = C \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}\,\sqrt{2gy}} = C \longrightarrow$$

$$\longrightarrow y\,(1 + y'^2) = \frac{1}{2\,g\,C^2} = K^2$$

La nostra funzione quindi soddisfa questa equazione differenziale con le condizioni iniziali sopra indicate. Questa equazione ha come soluzione proprio la cicloide che quindi è la curva brachistocrona.
Dati allora i due punti **A** e **B** di coordinate risp. ($x_A=0$, $y_A=0$) e (x_B, y_B) la cicloide che li congiunge avrà equazione parametrica: $x = r\,(\theta - \text{sen}\,\theta)$; $y = r\,(1 - \cos\theta)$, con **r** soluzione dell' equazione:

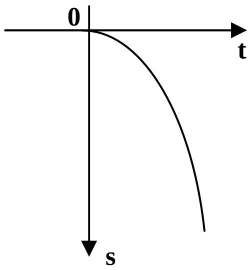
$$x_B = r \arccos\frac{r - y_B}{r} + \sqrt{2ry_B - y_B^2}$$

di non facile soluzione. In figura è riportato, come esempio, la soluzione in grafico e da questa si può notare che, talvolta, il tempo più breve si ottiene scendendo sotto la quota del punto di arrivo e ciò per acquisire maggiore velocità. Questo ben lo sanno gli sciatori che spesso applicano questo criterio; ora sappiamo che questo si verifica quando il punto di arrivo dista orizzontalmente più di $\pi/2$ volte la sua quota rispetto alla partenza.



La caduta libera

Non si può concludere un discorso sulla cicloide senza fare cenno ad una sua notevole applicazione: La caduta libera, ovvero l' equazione oraria di un corpo che cade partendo da fermo senza vincoli.
Le normali esperienze di caduta libera avvengono in ambiti ristretti rispetto alle dimensioni del campo gravitazionale terrestre, per cui questo viene considerato uniforme, cioè l' accelerazione viene assunta come costante. In queste condizioni è noto che l' equazione oraria è del tipo $\mathbf{k \cdot t^2}$ cioè il diagramma è una parabola.

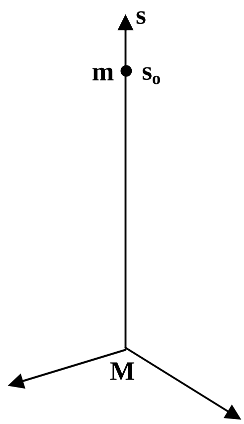


$$\mathbf{a = d^2s / dt^2 =} \text{ cost.}$$

$$\mathbf{v = ds / dt = \int a\, dt = a \cdot t}$$

$$\mathbf{s = \int v\, dt = \tfrac{1}{2}\, a \cdot t^2}$$

Quando l' ambito in cui avviene la caduta libera è molto ampio di tal che il campo gravitazionale non può più considerarsi uniforme, la trattazione si complica. Ci proponiamo quindi di trovare l' equazione oraria di un corpo libero puntiforme di massa **m** attratto gravitazionalmente da un corpo fisso di massa **M** partendo da fermo.



Stabiliamo un sistema di coordinate con l' origine nella posizione del corpo fisso **M** e con un asse **s** nella congiungente l' origine con la posizione iniziale del corpo mobile **m**. Evidentemente la traiettoria coinciderà con l' asse **s** non agendo forze fuori di questo. Diciamo $\mathbf{s_o}$ l' ascissa nella posizione iniziale e fissiamo l' origine dei tempi nell' istante di inizio della caduta libera con velocità iniziale nulla:

$$\mathbf{s(0) = s_o} \quad \text{e} \quad \mathbf{v(0) = 0}$$

Ci proponiamo di trovare **s(t)** (o **t(s)**). L'accelerazione

sarà $\mathbf{a(t) = d^2s/dt^2 = -\,GM/s^2}$ indipendente da **m**.

Integrando questa in **s** si ha:
$$\int_{s_o}^{s} \frac{d^2s}{dt^2}\, ds = -\int_{s_o}^{s} \frac{GM}{s^2}\, ds$$

Al primo membro può essere operato un cambio di variabile :

$$\int_{s_o}^{s} \frac{d}{dt}\left[\frac{ds}{dt}\right] ds = \int_{v_o}^{v} \frac{ds}{dt}\, d\left[\frac{ds}{dt}\right] = \int_{v_o}^{v} v\, dv = \tfrac{1}{2}\cdot(v^2 - v_o^2) = G\cdot M \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s_o}\right]$$

L' ultimo passaggio si giustifica con il principio di conservazione dell' energia, per il quale in ogni istante sarà:

$$\tfrac{1}{2}\, \mathbf{m \cdot v^2 - G \cdot M / s} = \tfrac{1}{2}\, \mathbf{m \cdot v_o^2 - G \cdot M / s_o} = \text{cost.}$$

che per la condizione iniziale $\mathbf{v_o = 0}$ diventa:

$$\mathbf{v^2 - 2\, G \cdot M / s = -2\, G \cdot M / s_o} = \text{cost.} \qquad \text{cioè} \qquad \mathbf{v^2 = 2 \cdot G \cdot M \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s_o} \right)}$$

quindi:

$$\mathbf{v(t) = ds/dt} = \sqrt{\frac{\mathbf{2\,G\,M}}{\mathbf{s}} - \frac{\mathbf{2\,G\,M}}{\mathbf{s_o}}}$$

da cui:

$$\mathbf{dt = ds / v(t)} = \frac{\mathbf{ds}}{\sqrt{\mathbf{2\,G \cdot M} \left(\frac{\mathbf{s_o - s}}{\mathbf{s \cdot s_o}} \right)}} = \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\,G \cdot M}}} \sqrt{\frac{\mathbf{s \cdot s_o}}{\mathbf{s - s_o}}}\ \mathbf{ds}$$

in cui ponendo $\mathbf{r = s / s_o}$:

$$\boxed{\mathbf{dt} = \sqrt{\frac{\mathbf{s_o^3}}{\mathbf{2\,G \cdot M}}} \sqrt{\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{1 - r}}}\ \mathbf{dr}}$$

Questa equazione può essere risolta integrando ambo i membri. L' integrale al secondo membro può essere risolto col cambio di variabile:

$$\mathbf{u} = \sqrt{\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{1 - r}}} \longrightarrow \mathbf{r} = \sqrt{\frac{\mathbf{u^2}}{\mathbf{1 - u^2}}} \longrightarrow \mathbf{dr} = \frac{\mathbf{2\,u}}{\mathbf{(1+u^2)^2}}\ \mathbf{du}$$

Quindi:

$$\int \sqrt{\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{1 - r}}}\ \mathbf{dr} = \int \frac{\mathbf{2\,u^2}}{\mathbf{(1+u^2)^2}}\ \mathbf{du}$$

che può essere integrata per parti ($\int \mathbf{f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'}$) ponendo:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{f} = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1 + u^2}} \longrightarrow & \mathbf{f'} = \dfrac{\mathbf{2u}}{\mathbf{(1+u^2)^2}} \\ \mathbf{g = u} \longrightarrow & \mathbf{g' = 1} \end{array} \right\} \longrightarrow \int \frac{\mathbf{2\,u^2}}{\mathbf{(1+u^2)^2}}\ \mathbf{u\,du} = -\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{1+u^2}} - \int \left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+u^2}} \right) \mathbf{du}$$

In definitiva:

$$\boxed{\int \sqrt{\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{1 - r}}}\ \mathbf{dr} = -\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{1+u^2}} - \mathbf{arcotg\ u}} \qquad \text{con} \qquad \mathbf{u} = \sqrt{\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{1 - r}}}$$

Posto $\varphi = \textbf{arctg}\sqrt{\dfrac{r}{1-r}}$ per l' identità trigonometrica : $\textbf{sen}\,\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1+\cot g^2\varphi}}$

si ha:

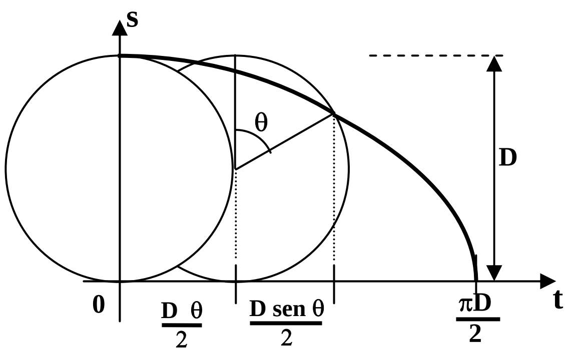
$$\textbf{sen}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{r}{1-r}}} = \sqrt{1-r} \quad \text{cioè} \quad \textbf{arctg}\sqrt{\frac{r}{1-r}} = \textbf{arcsen}\sqrt{1-r}$$

Quindi:

$$\boxed{t = K\int\sqrt{\frac{r}{1-r}}\,dr = K\left[-\sqrt{r-r^2} - \text{arcsen}\sqrt{1-r}\right]} \qquad (\#)$$

Si vuole mostrare che questa è l' equazione di una cicloide; infatti dalla figura è evidente che:

$$\begin{cases} t = \dfrac{D\,\theta}{2} + \dfrac{D}{2}\,\text{sen}\,\theta \\ s = \dfrac{D}{2} + \dfrac{D}{2}\cos\theta \end{cases}$$



da cui: $\cos\theta = \dfrac{2s-D}{D}$

da cui: $\theta = \text{arcos}\left[\dfrac{2s-D}{D}\right]$

e quindi: $t = \dfrac{D}{2}\,\text{arcos}\left[\dfrac{2s-D}{D}\right] + \dfrac{D}{2}\,\text{sen arcos}\left[\dfrac{2y}{D}-1\right]$

per l' identità: $\text{sen}\,\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$ per cui: $\alpha = 2\,\text{arcsen}\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

posto: $\alpha = 2\,\text{arcos}\left[\dfrac{2s-D}{D}\right]$

si ha: $\text{arcos}\left[\dfrac{2s-D}{D}\right] = 2\,\text{arcsen}\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{2s-D}{D}}{2}} = 2\,\text{arcsen}\sqrt{1-\dfrac{s}{D}}$

Essendo: $\mathbf{sen\ arcos\ x} = \sqrt{1 - x^2}$ posto: $\mathbf{x} = \left(\frac{2s}{D} - 1\right)$ il secondo addendo sarà:

$$\mathbf{sen\ arcos} \left(\frac{2s}{D} - 1\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{2s}{D} - 1\right)^2} = \sqrt{1 \quad \frac{4s^2}{D^2} - 1 + \frac{4s}{D}} = 2\sqrt{\frac{s}{D} - \frac{s^2}{D^2}}$$

Allora sostituendo:

$$t = D \ \mathrm{arcsen} \sqrt{1 - \frac{s}{D}} + D \sqrt{\frac{s}{D} - \frac{s^2}{D^2}} = D\sqrt{r - r^2} + D \ \mathrm{arcsen} \sqrt{1 - r}$$

avendo posto **r = s / D**. Questa equazione coincide (a meno di un coefficiente di proporzionalità) con l’ equazione oraria trovata (#).

cicloide.doc