SULLE PROPOSIZIONI 138 E 139 DEL LIBRO VII DELLA ''COLLEZIONE MATEMATICA'' DI PAPPO

di Nazario Magnarelli [L.S. "G.B. Grassi, Latina]

Vogliamo esporre una dimostrazione del noto teorema di Pappo contenuto nelle proposizioni 138 e 139 della sua ''Collezione matematica''. Crediamo di fare cosa gradita al lettore per il fatto che la dimostrazione prende spunto dalla geometria proiettiva, parte della matematica che, sebbene oggi alquanto trascurata, emerge con prepotenza quando si vogliano affrontare le questioni delle trasformazioni lineari nel piano che vanno sotto il nome di omotetie, affinità, omologie etc.
La dimostrazione del teorema di Pappo vuole inserirsi in questo contesto culturale. Poche nozioni di geometria proiettiva permettono di dimostrare il teorema in un modo che sorprende per la sua semplicità e brevità. Ricordiamo queste nozioni.

DEFINIZIONE. Si dice rapporto semplice di tre punti A, B, C di una retta orientata r l'espressione

$$(1) \quad (ABC) = \frac{AC}{BC}$$

ove AC e BC sono misure algebriche di segmenti. L'espressione (1), quindi, è un numero reale relativo.
La retta r dicesi anche ''punteggiata''.

DEFINIZIONE. Si dice birapporto di quattro punti A, B, C, D della retta r l'espressione

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD}$$

Anche il birapporto è un numero reale relativo.
Se poi stabiliamo un sistema di ascisse sulla retta e indichiamo con a, b, c, d le ascisse dei punti considerati, ricordando l'espressione cartesiana della misura di un segmento orientato, si ha

$$(ABC) = \frac{c-a}{c-b} \qquad ; \qquad (ABCD) = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$$

Quando il punto D tende al punto improprio D_∞ della retta r si ha

$$\lim_{D \to D_\infty} (ABCD) = \lim_{d \to \infty} \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)} = \lim_{d \to \infty} \frac{(c-a)(1-\frac{b}{d})}{(c-b)(1-\frac{a}{d})} = \frac{c-a}{c-b}$$

ossia $$\lim_{D \to D_\infty} (ABCD) = (ABCD_\infty) = (ABC)$$

cioè quando il quarto punto di un birapporto tende al punto improprio della retta sulla quale i quattro punti giacciono, il birapporto dei quattro punti è uguale al rapporto semplice dei primi tre.

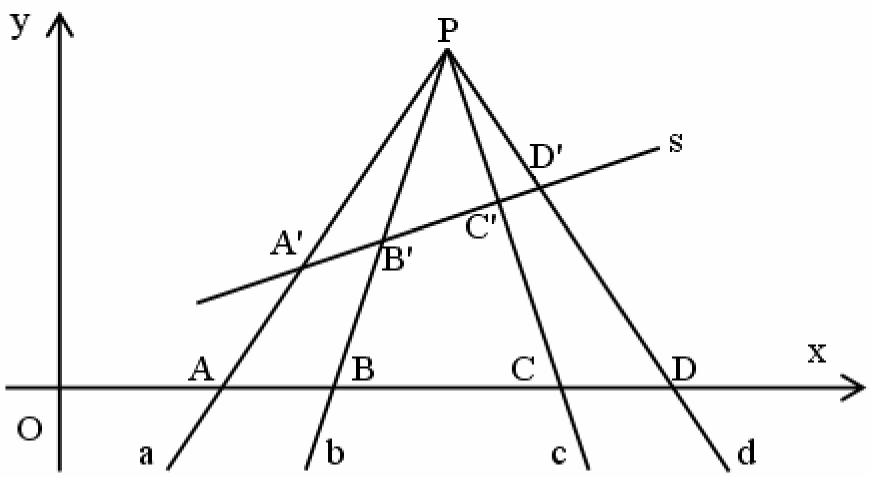
PROPRIETÀ A. Se (ABCD)=(ABCD') ne segue che $D \equiv D'$. Cioè, dati due birapporti uguali, se i punti corrispondenti di tre coppie coincidono, allora coincidono anche i punti della quarta coppia. È una proprietà abbastanza evidente.

PROPRIETÀ B. Il birapporto di quattro punti di una punteggiata è invariante per operazioni di proiezione e sezione (conservazione dei birapporti).

Per la chiarezza, siano A, B, C, D quattro punti di una punteggiata r ed a, b, c, d le rette che li proiettano da un punto esterno O. Se intersechiamo il fascio di rette con un'altra retta s otteniamo quattro punti A', B', C', D'; applicando il teorema dei seni si dimostra che (vedi il testo di Frajese - Maracchia citato nella bibliografia)

$$(A\ B\ C\ D) = (A'\ B'\ C'\ D')\ .$$

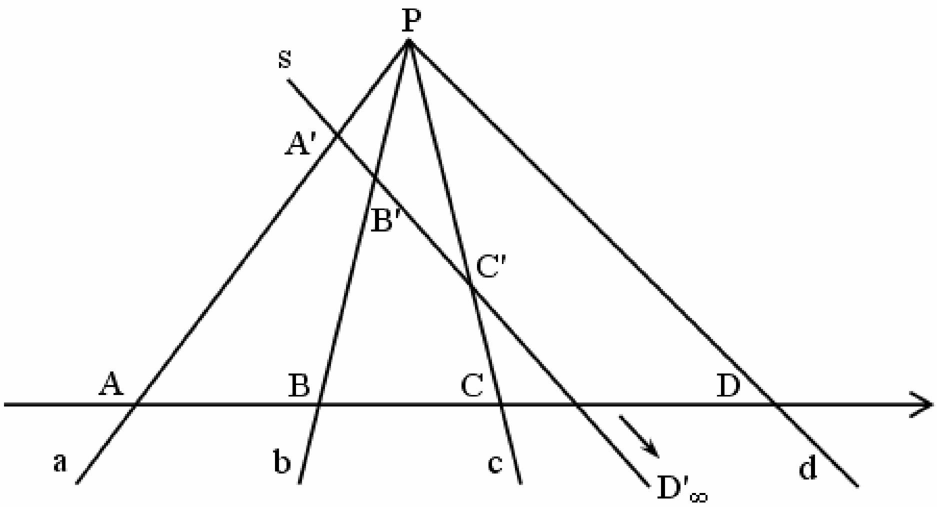
Fig. 1



Se poi la retta s è parallela alla retta d, il punto D viene proiettato nel punto improprio D'_∞ della retta s e ovviamente si ha

$$(ABCD) = (A'B'C'D'_\infty) = (A'B'C')\ .$$

Fig. 2



PROPOSIZIONE 139, dimostrazione

Dimostriamo ora il teorema di Pappo, cominciando con la proposizione 139 che il matematico alessandrino ritiene più impegnativa.

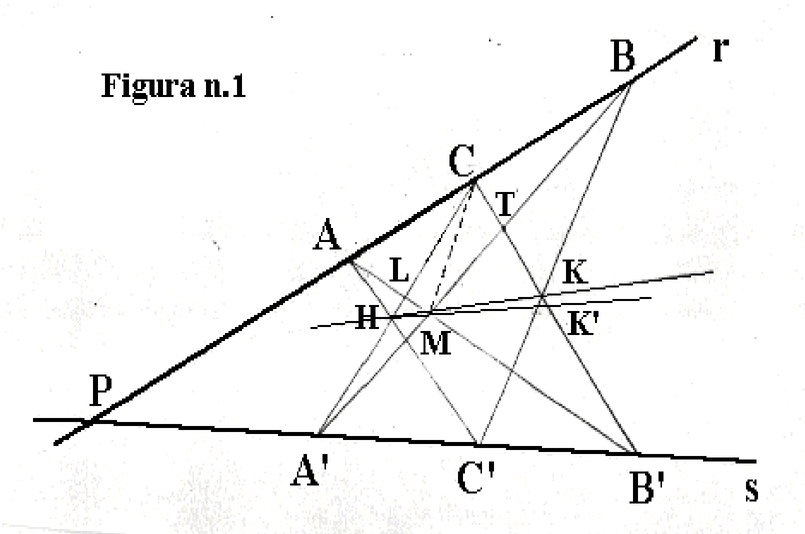
Consideriamo due rette incidenti r ed s e sia P il punto di intersezione. Prendiamo tre punti A, B, C sulla retta r e indichiamo con A', B', C' i punti corrispondenti sulla retta s.

Tracciamo le coppie di segmenti

$$AB', A'B \quad ; \quad AC', A'C \quad ; \quad BC', B'C$$

e siano rispettivamente M, H, K i punti di intersezione di ciascuna coppia (vedi figura 1). Quindi

$$M \equiv AB' \cap A'B \quad ; \quad H \equiv AC' \cap A'C \quad ; \quad K \equiv BC' \cap B'C$$



Vogliamo dimostrare che questi punti sono allineati.

Consideriamo anche i punti di intersezione

$$T \equiv A'B \cap CB' \qquad\qquad L \equiv A'C \cap AB'$$

PRIMA PROIEZIONE E SEZIONE

Dal punto B proiettiamo i punti B', C', A', P sulla retta CB'. Per la conservazione dei birapporti si ha

$$(1)\ (B'\ C'\ A'\ P) = (B'\ K\ T\ C)$$

SECONDA PROIEZIONE E SEZIONE

Dal punto A proiettiamo i punti B', C', A', P sulla retta CA'. Per la stessa proprietà si ha:

$$(2)\ (B'\ C'\ A'\ P) = (L\ H\ A'\ C)$$

Dalle relazioni (1) e (2) , eguagliando membro a membro, si ha:

$$(3)\ (B'\ K\ T\ C) = (L\ H\ A'\ C)$$

TERZA PROIEZIONE E SEZIONE

Dal punto M proiettiamo i punti L, H, A', C della retta CA' sulla retta CB' e supponiamo per un momento che al punto H corrisponda un punto K' diverso da K

$$K' \neq K.$$

Notare che in virtù dell'operazione di proiezione i punti H, M, K' sono evidentemente allineati.

Per la conservazione dei birapporti si ha:

$$(4)\ (L\ H\ A'\ C) = (B'\ K'\ T\ C)$$

Dalle relazioni (3) e (4) per la proprietà transitiva dell'eguaglianza si ha:

$$(5)\ (B'\ K\ T\ C) = (B'\ K'\ T\ C)$$

Ma se questi birapporti sono uguali, i punti K e K' coincidono.
Ne segue che i punti M, H, K sono allineati perchè tali erano i punti M, H, K'. **C.V.D.**

PROPOSIZIONE 138 - Dimostrazione

Si tengano ancora presenti le proprietà a) e b) del birapporto di quattro punti di una retta, già viste in precedenza.
Consideriamo in questo caso due rette r ed s, parallele.
Prendiamo tre punti A, B, C sulla retta r, e siano A', B', C' i punti corrispondenti sulla retta s.
Tracciamo l'esagono intrecciato AB'CA'BC'A e consideriamo i punti di intersezione

$$M = AB' \cap A'B \quad ; \quad H = AC' \cap A'C \quad ; \quad K = BC' \cap B'C \quad \text{(vedi figura n.2)}$$

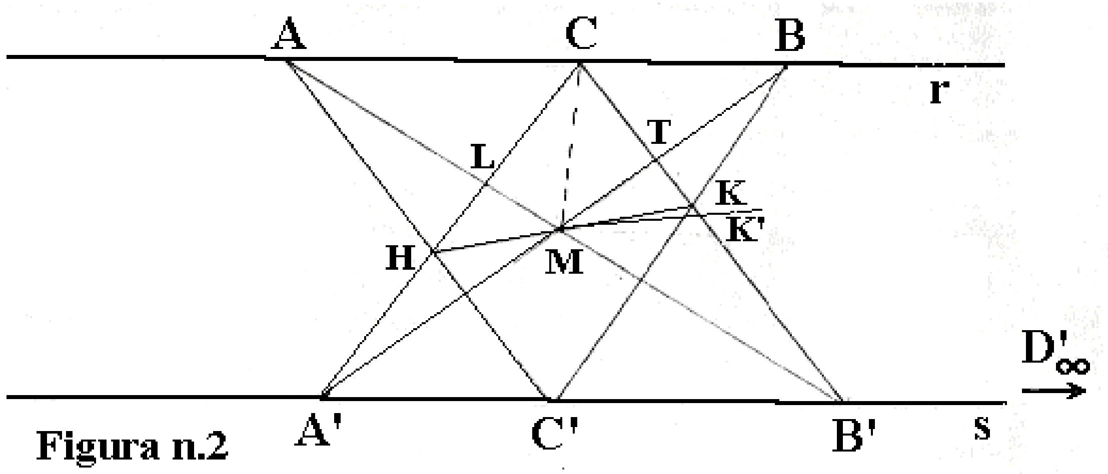


Figura n.2

Abbiamo ripetuto la costruzione della figura n.1, ma con le rette r ed s parallele. Vogliamo dimostrare che i punti M, H, K sono allineati. Consideriamo anche i due punti di intersezione

$$L = AB' \cap A'C \quad ; \quad T = CB' \cap A'B$$

PRIMA PROIEZIONE E SEZIONE

Dal punto A proiettiamo i punti A', H, L, C della retta A'C sulla retta s. Tenendo presente che il punto C viene proiettato nel punto improprio D'_∞ della retta s, si ha:

$$(1) \qquad (A'HLC) = (A'C'B'D'_\infty) = (A'C'B')$$

SECONDA PROIEZIONE E SEZIONE

Dal punto B proiettiamo i punti T, K, B', C della retta CB' sulla retta s. Tenendo presente ancora una volta che il punto C viene proiettato nel punto improprio D'_∞
della retta s, si ha

$$(2) \qquad (TKB'C) = (A'C'B'D'_\infty) = (A'C'B')$$

Dalle relazioni (1) e (2) , eguagliando membro a membro , si ha

$$(3) \qquad (A'\ H\ L\ C) = (T\ K\ B'\ C)$$

TERZA PROIEZIONE E SEZIONE

Dal punto M proiettiamo ora la quaterna di punti A’, H, L, C della retta CA’ sulla retta CB’ e supponiamo per un momento che al punto H corrisponda un punto $K' \neq K$. Notare che in virtù dell’operazione di proiezione i punti H, M, K’ sono allineati.

Per la conservazione dei birapporti si ha

$$(4) \qquad (A'\ H\ L\ C) = (T\ K'\ B'\ C)$$

Dalle relazioni (3) e (4) , eguagliando membro a membro , si ha

$$(5) \qquad (T\ K\ B'\ C) = (T\ K'\ B'\ C)$$

Ma poichè i due birapporti della (5) sono uguali, i punti K e K’ coincidono.

Ne segue che i punti M, H, K sono allineati perchè tali erano i punti M, H, K’.. **C.V.D.**

BIBLIOGRAFIA

1) Frajese – Maracchia, Geometria razionale vol. 1°, Le Monnier
(Nozioni fondamentali di geometria proiettiva: proiettività, omologie e una interessante dimostrazione della proposizione 129 del libro VII della Collezione matematica di Pappo).

2) Luigi Campedelli, Lezioni di Geometria, vol. 1°, parte III, cap. II, Cedam
(Birapporto e proiettività).

3) Luigi Campedelli, Esercitazioni di Geometria analitica e proiettiva, Parte III, capp. III e IV, Cedam (Proiettività e omologie).

4) Guido Castelnuovo, Lezioni di geometria analitica, parte III, cap. III, n.179.

Chi voglia accostarsi all’opera di Pappo potrà consultare
5) Pappus Alexandrinus, La collection Mathématique, Oevre traduite avec une introduction par P. Ver Eecke, Parigi, Bruges 1933. (Testo reperibile presso la Biblioteca Nazionale di Roma).