Limiti per funzioni reali di variabile reale

Definizione di limite

Sia data una funzione $f\colon E \to \mathbb{R}$ con $E \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ aderente ad E; si dice che ℓ è limite di f per x che tende ad x_0 se per ogni successione x_n in E convergente ad x_0 si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell;$$

in tal caso si scrive anche

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell.$$

La definizione di limite per funzioni è quindi scaricata sulla definizione di limite per successioni; osserviamo altresì che se x è punto isolato per E e se esiste un limite di f per x che tende ad x_0 allora si ha che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

In realtà vale un'osservazione più generale: se f ammette limite per x che tende ad x_0 e $x_0 \in E$ allora necessariamente si ha

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Proposizione (unicità del limite): Il limite se esiste è unico.

Dimostrazione. Supponiamo che f ammetta due limiti distinti ℓ_1 ed ℓ_2 per x che tende ad x_0; allora dovrebbero esistere due successioni x_n^1 ed x_n^2 entrambi convergenti ad x_0 tali per cui $f(x_n^1) \to \ell_1$ ed $f(x_n^2) \to \ell_2$. Questo contraddice l'unicità del limite di successioni. Dunque anche il limite di funzioni, se esiste, è unico.

La definizione di limite di funzioni non cambia se si assume $\ell = +\infty$ od $\ell = -\infty$; inoltre la stessa definizione si applica anche nel caso in cui $x_0 = +\infty$ od $x_0 = -\infty$, facendo attenzione, in tal caso, al fatto che $+\infty$ e $-\infty$ siano aderenti ad E: si dice che $+\infty$ è aderente ad E se per ogni $M > 0$ si ha $(M, +\infty) \cap E \neq \emptyset$. Definizione analoga vale per $-\infty$.

Definizioni equivalenti [1]: Vi sono vari modi per dare definizioni equivalenti di limite; per esempio nel caso in cui sia x_0 che ℓ sono finiti si ha che ℓ è il limite di f per $x \to x_0$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale per cui per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E$ si ha $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

[1] in molti testi non viene riportata tale definizione, bensì la stessa in cui si richiede che $x \in (x-\delta, x+\delta)\setminus\{x_0\}\cap E$; in tal caso per far valere l'unicità del limite x_0 va assunto di accumulazione per E. Inoltre va sottolineato che l'impostazione qui data appare molto più semplice concettualmente, poichè si fonda sulla definizione già data di limite per una successione reale.

Esempio: Sia data la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definta come $f(x) = x^2$; allora si ha che se $x_n \to 0$ risulta anche $x_n^2 \to 0$, da cui

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0.$$

Esempio: Sia data la funzione $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita come $f(x) = 1/x$; allora per ogni successione $x_n \to +\infty$ si ha $1/(x_n) \to 0$ da cui

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Esempio: Sia data la funzione $f\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definita nel seguente modo: $f(x) = 1$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Allora f non ammette limite per $x \to 0$. Infatti sia $x_n = 1/n$; allora $x_n \to 0$ e $f(x_n) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, da cui $f(x_n) \to 1$. Invece se $y_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $f(y_n) \to 0$, per cui il limite di f per $x \to 0$ non può esistere.

Esempio: Si consideri la funzione $f\colon (-1, 1) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 1$. Allora $x = 0$ è punto aderente al dominio di f (di accumulazione) e f ammette limite per $x \to 0$; infatti per ogni successione x_n che sta nel dominio di f si ha $f(x_n) = 1$ da cui $f(x_n) \to 1$, e quindi

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$