EQUAZIONI GONIOMETRICHE

1. EQUAZIONI ELEMENTARI:

A FUNZIONE SENO:

❖ $\boxed{\sin x = m}$ con $-1 \le m \le 1$

$x_1 = \arcsin m + k360°$

$x_2 = 180° - \arcsin m + k360°$

ESEMPIO:

$\sin x = \dfrac{1}{2}$

$x_1 = 30° + k360°$

$x_2 = 150° + k360°$

❖ $\boxed{\sin(f(x)) = \sin(g(x))}$

$f(x) = g(x) + k360°$ o $f(x) = 180° - g(x) + k360°$

ESEMPIO:

$\sin(2x + 30°) = \sin(x - 10°)$

$2x + 30° = x - 10° + k360°$ o $2x + 30° = 180° - (x - 10°) + k360°$

$x = -40° + k360°$ o $3x = 160° + k360°$

$x_1 = -40° + k360°$ o $x_2 = \left(\dfrac{160}{3}\right)° + k120°$

B FUNZIONE COSENO:

❖ $\boxed{\cos x = n}$ con $-1 \le n \le 1$

$x_{1/2} = \pm \arccos n + k360°$

ESEMPIO:

$\cos x = \dfrac{1}{2}$

$x_{1/2} = \pm 60° + k360°$

❖ $\boxed{\cos(f(x)) = \cos(g(x))}$

$f(x) = \pm g(x) + k360°$

ESEMPIO:

$\cos(2x + 30°) = \cos(x - 10°)$

$2x + 30° = \pm(x - 10°) + k360°$

$2x + 30° = x - 10° + k360°$ o $2x + 30° = -x + 10° + k360°$

$x = -40° + k360°$ o $3x = -20° + k360°$

$x_1 = -40° + k360°$ o $x_2 = -\left(\dfrac{20}{3}\right)° + k120°$

C FUNZIONE TANGENTE:

❖ $\boxed{\tan x = p}$ con $p \in \mathbb{R}$

$x = \arctan p + k180°$

ESEMPIO:

$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$x = 30° + k180°$

❖ $\boxed{\tan(f(x)) = \tan(g(x))}$

$f(x) = g(x) + k180°$

ESEMPIO:

$\tan(2x + 30°) = \tan(x - 10°)$

$2x + 30° = x - 10° + k180°$

$x = -40° + k180°$

2. EQUAZIONI CONTENENTI UNA SOLA FUNZIONE GONIOMETRICA:

Si effettua una sostituzione ponendo la funzione goniometrica uguale ad una nuova incognita "t".

ESEMPIO:

$\boxed{6\sin^2 x - 13\sin x + 5 = 0}$

Si pone $\boxed{\sin x = t}$ e l'equazione diventa:

$6t^2 - 13t + 5 = 0$

$\Delta = 169 - 120 = 49 = 7^2$

$t_{1/2} = \frac{13 \pm 7}{12} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{3} \end{array} \right.$

$\sin x = \frac{1}{2}$ o $\sin x = \frac{5}{3}$ (imposs.) eq. elementari.

3. EQUAZIONI RIDUCIBILI AD UNA SOLA FUNZIONE GONIOMETRICA:

Si utilizzano le relazioni fondamentali per trasformare le funzioni goniometriche presenti in una sola di esse.

Ricordiamo le relazioni fondamentali:

$$\bullet \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \rightarrow \sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x} \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \rightarrow \cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x} \end{cases}$$

$$\bullet \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\bullet \cot an x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

ESEMPIO:

$2\cos^2 x = 1 + \sin x$

Evidentemente conviene cambiare il coseno in seno utilizzando la prima relazione fondamentale della goniometria:

$2(1-\sin^2 x)=1+\sin x$

$2-2\sin^2 x=1+\sin x$

$-2\sin^2 x-\sin x+1=0$

$2\sin^2 x+\sin x-1=0 \qquad \sin x=t$

$2t^2+t-1=0 \quad \Delta=\ldots \rightarrow \; t_1=-1 \;\text{ e }\; t_2=\frac{1}{2} \rightarrow \; \sin x=-1 \;\text{ e }\; \sin x=\frac{1}{2}$ che sono eq. elementari.

4. EQ. RISOLUBILI MEDIANTE LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO:

Occorre portare tutti i termini al primo membro e scomporre in fattori. Poi si annullano i singoli fattori.

ESEMPIO:

$1+2\cos x-\sin x-2\cos x\sin x=0$

$(1-\sin x)+2\cos x(1-\sin x)=0$

$(1-\sin x)(1+2\cos x)=0$

$1-\sin x=0 \vee 1+2\cos x=0$ che sono due eq. elementari:

$\sin x=1 \rightarrow x=90°+k360°$

$\cos x=-\frac{1}{2} \rightarrow x=\pm 120°+k360°$

5. FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE:

Si applicano quando le funzioni goniometriche hanno argomenti diversi. Ricordiamo le formule:

$$\boxed{\begin{array}{l}\bullet \sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y\\ \bullet \cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y\end{array}}$$

ESEMPIO:

$\cos(30°+x)+\cos(30°-x)=\frac{3}{2}$

$\cos 30°\cos x\underline{-\sin 30°\sin x}+\cos 30°\cos x+\underline{\sin 30°\sin x}=\frac{3}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{3}{2}$

$\sqrt{3}\cos x=\frac{3}{2}$

$\cos x=\frac{3}{2\sqrt{3}}$

$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x=\pm 30°+k360°$

6. FORMULE DI DUPLICAZIONE:

Ricordiamo le formule:

- $\sin 2x = 2\sin x\cos x$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

ESEMPIO:

$2\sin^2 x + 2\cos 2x - 1 = 0$

$2\sin^2 x + 2\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) - 1 = 0$

$\underline{2\sin^2 x} + 2\cos^2 x \underline{-2\sin^2 x} - 1 = 0$

$2\cos^2 x - 1 = 0 \rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{2} \rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} \rightarrow \cos x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \cos x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \pm 45° + k360°$
- $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \pm\left(180° - 45°\right) + k360° \leftrightarrow x = \pm 135° + k360°$

7. FORMULE DI PROSTAFERESI:

Si utilizzano quando è conveniente trasformare somme o differenze di funzioni goniometriche in prodotti.

Ricordiamo le formule:

- $\sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$
- $\sin p - \sin q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$
- $\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$
- $\cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$

ESEMPIO:

$\sin 4x + \sin 8x = 2\cos 2x$

$2\sin 6x\cos 2x = 2\cos 2x$

$\sin 6x\cos 2x - \cos 2x = 0$

$\cos 2x\left(\sin 2x - 1\right) = 0$

si risolve con l'applicazione della legge di annullamento del prodotto:

- $\cos 2x = 0 \rightarrow 2x = \pm 90° + k360° \rightarrow x = \pm 45° + k180°$
- $\sin 2x - 1 = 0 \rightarrow \sin 2x = 1 \rightarrow 2x = 90° + k360° \rightarrow x = 45° + k180°$

8. FORMULE DI WERNER:

Si utilizzano quando è conveniente trasformare prodotti di funzioni goniometriche in somme o differenze.
Ricordiamo le formule:

$$\bullet \sin\alpha \sin\beta = -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right]$$
$$\bullet \cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$
$$\bullet \sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$$

ESEMPIO:

$$\cos x \cos 3x = \cos 4x \cos 2x$$
$$\frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x)$$
$$\cos 4x + \underline{\cos 2x} = \cos 6x + \underline{\cos 2x}$$
$$\cos 4x = \cos 6x$$

questa è un'eq. elementare:

$$4x = \pm 6x + k360°$$
$$\bullet 4x = -6x + k360° \rightarrow 10x = k360° \rightarrow x_1 = k36°$$
$$\bullet 4x = 6x + k360° \rightarrow -2x = k360° \rightarrow x_2 = -k180° = h180°$$

Nota: la seconda soluzione è già contenuta nella prima!

9. EQUAZIONI LINEARI IN SENO E COSENO:

La forma canonica di tale equazione è:

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x + c = 0$$

Distinguiamo due casi a seconda che $c = 0 \vee c \neq 0$.

$\underline{c = 0}$

In tal caso, basta dividere tutta l'equazione per cosx ottenendo un'equazione nella sola funzione tangente.
ESEMPIO:

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$$
$$\frac{\sin x}{\cos x} - \sqrt{3}\frac{\cos x}{\cos x} = 0$$
$$\tan x - \sqrt{3} = 0$$
$$\tan x = \sqrt{3} \rightarrow x = 60° + k180°$$

$\underline{c \neq 0}$

In questo caso invece, dopo aver verificato se $x = 180° + k360°$ è una possibile soluzione (e per questo basterà osservare se i coefficienti b e c sono uguali), occorre utilizzare le formule parametriche:

$$\boxed{\begin{array}{l}\bullet \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \bullet \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \bullet \tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}\end{array}} \qquad \text{dove } \boxed{t = \tan\frac{x}{2}}$$

ESEMPIO:

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x - \sqrt{3} = 0$$

$b \neq c$

quindi non c'è la soluzione $x = 180° + k360°$.

Applichiamo le formule parametriche:

$$\sqrt{3}\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} - \sqrt{3} = 0$$

$$2\sqrt{3}t + 1 - t^2 - \sqrt{3}\left(1+t^2\right) = 0$$

$$2\sqrt{3}t + 1 - t^2 - \sqrt{3} - \sqrt{3}t^2 = 0$$

$$-t^2 - \sqrt{3}t^2 + 2\sqrt{3}t + 1 - \sqrt{3} = 0$$

$$\left(\sqrt{3}+1\right)t^2 + 2\sqrt{3}t + \left(\sqrt{3}-1\right) = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right) = 3 - (3-1) = 1$$

$$t_{1/2} = \frac{-\sqrt{3} \pm 1}{\sqrt{3}+1}$$

$$t_1 = \frac{-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = -1$$

$$t_2 = \frac{-\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\left(-\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)} = \frac{-\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{3-1} = \ldots = \sqrt{3} - 2$$

$$\bullet \tan\frac{x}{2} = -1 \rightarrow \frac{x}{2} = 135° + k180° \rightarrow x_1 = 270° + k360°$$

$$\bullet \tan\frac{x}{2} = \sqrt{3} - 2 \rightarrow \frac{x}{2} = -15° + k180° \rightarrow x_2 = -30° + k360°$$

10. EQUAZIONI OMOGENEE DI 2° GRADO IN SENO E COSENO:

Un'equazione omogenea in seno e coseno è della forma:

$$\boxed{a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0}$$

Se uno dei coefficienti è nullo, l'equazione si risolve riconducendosi ai casi precedenti. Ad esempio, se a=0 mancherà il primo termine e si potrà scomporre in fattori il primo membro; quindi si applicherà la legge di annullamenti del prodotto.

ESEMPIO:
$$\sqrt{3}\cos^2 x + 3\sin x\cos x = 0$$
$$\cos x\left(\sqrt{3}\cos x + 3\sin x\right) = 0$$
$$\bullet \cos x = 0$$
$$\bullet \sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0$$
di cui, la prima è elementare e la seconda lineare senza termine noto.

Se invece i tre coefficienti sono tutti diversi da zero, si divide tutta l'equazione per $\cos^2 x$ (divisione che <u>in questo caso</u> si può sempre fare), ottenendo un'equazione nella sola funzione tangente:
$$a\cdot\sin^2 x + b\cdot\sin x\cos x + c\cdot\cos^2 x = 0$$
$$\frac{a\cdot\sin^2 x + b\cdot\sin x\cos x + c\cdot\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$$
$$a\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + b\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x} + c\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$
$$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$$

ESEMPIO:
$$3\sin^2 x - 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$$
$$3\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 2\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$
$$3\tan^2 x - 2\tan x - 1 = 0$$
$$\frac{\Delta}{4} = 1 + 3 = 4$$
$$\tan x_{1/2} = \frac{1 \pm 2}{3} = \langle \begin{array}{l} \tan x = -\frac{1}{3} \rightarrow \ldots \\ \tan x = 1 \rightarrow \ldots\ldots \end{array}$$

11. EQUAZIONI RICONDUCIBILI AD OMOGENEE DI 2° GRADO IN SEN E COS:

Si differenziano dalle precedenti perché in questo caso compare un termine noto e ciò rende impossibile dividere tutta l'equazione per $\cos^2 x$, a meno che non si operi una semplice trasformazione. La forma tipica con cui si presenta è:

$$\boxed{a\cdot\sin^2 x + b\cdot\sin x\cos x + c\cdot\cos^2 x = d}$$

Ricordando la prima relazione fondamentale della goniometria $\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$, moltiplichiamo il termine noto per $\sin^2 x + \cos^2 x$ (che vale appunto 1) ottenendo:

$$a\cdot\sin^2 x + b\cdot\sin x\cos x + c\cdot\cos^2 x = d\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$$
$$a\cdot\sin^2 x + b\cdot\sin x\cos x + c\cdot\cos^2 x = d\sin^2 x + d\cos^2 x$$
Portando tutti i termini al primo membro e riducendo quelli simili, ci si è ricondotti ad una equazione omogenea di secondo grado.

ESEMPIO:

$$6\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 2$$

$$6\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$$

$$6\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$$

$$4\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$$

$$2\sin^2 x - 4\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$$

$$2\tan^2 x - 4\tan x + 1 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = \ldots$$