Tesi di laurea in Matematica

Università di Palermo

Discussa il 29.03.2007

DIDATTICA DELLE FRAZIONI

Leda Campaniolo

Prefazione

Lo scopo di questa tesi è analizzare i problemi connessi con l'introduzione dei concetti di frazioni/numeri razionali/numeri con la virgola nella scuola primaria e secondaria di primo grado. L'approccio sarà fatto da una punto di vista didattico e cercherò di valutare, per quanto possibile, i diversi aspetti e le problematiche legate alle varie possibilità di introduzione di tali concetti, il loro significato immediato relativo alle conoscenze pregresse degli alunni e alle loro convinzioni, coglierne i problemi a essi legati come gli ostacoli epistemologici ed errori frequenti di scrittura.

La grande quantità di letteratura presente su tali problemi didattici, e anche l'abitudine di molti autori di terminare le loro trattazioni con un'ipotesi di curricolo sull'insegnamento delle frazioni (dove molto spesso troviamo il suggerimento di introdurre le frazioni facendo riferimento alle "frazioni egizie"), mi consigliano l'introduzione di un preambolo storico.

Lo scopo è quello di far vedere che, così come è stato difficile nel corso dei millenni la nascita, l'evoluzione, la consapevolezza e l'assunzione di questi concetti a concetti matematici, tanto lo sarà nel processo di interiorizzazione nella mente di un allievo.

Richiami bibliografici sono segnalati durante la trattazione e riportati in bibliografia. Nella parte storica e discorsiva, le parti riguardanti le frazioni sono segnalate dal simbolo ►.

Inoltre approfondimenti, miti e leggende che ritengo possano essere utili come curiosità da portare agli studenti per attirare la loro attenzione su argomenti di fondamentale importanza come le frazioni, sono segnalati come note e riportati alla fine di ogni paragrafo come appendici.

1. Prefazione storica

Dalle prime testimonianze di millenni addietro sull'uso dei numeri e di "oggetti" assimilabili a frazioni o decimali ad oggi, da un punto di vista gnoseologico, i termini "frazioni" o "decimali" non hanno ancora un significato chiaro e generano spesso confusione. Nel tentativo di fare chiarezza terminologica, ritengo utile inserire una spiegazione sulla etimologia di queste parole.

- Frazione : viene dal latino " fractiònem" da " fràctus" (participio passato "fràngere" rompere); l'atto del frangere o frangersi, spezzamento, rottura. Non è inteso quindi nell'origine di questa parola la richiesta prettamente matematica della divisione in parti uguali.
- Il simbolo $\frac{m}{n}$ ha origine incerta, ma sicuramente cominciò ad essere usato da Leonardo Pisano (1170 -1250) nel suo Liberi Abaci del 1202 dove i numeri frazionari venivano chiamati "rupti" o anche "fracti" e il trattino orizzontale fra numeratore e denominatore (anche questi termini di origine incerta che si affermarono in Europa nel XV sec.) è chiamato "virgula" cioè "bastoncello" (da "virga", bastone). E' curioso che ancora oggi per indicare per esempio una quantità di euro compresa fra 4 e 5 si usa dire 4 euro e rotti.
- La "riduzione della frazione ai minimi termini" è molto antica ma si trova esplicitamente presentata in Luca Pacioli (1445 – 1515) e in Nicolò Tartaglia (1499 – 1557) sotto il nome di "schisare" il massimo comun divisore viene detto"schisatore".[1]
- Decimali: la derivazione etimologica è latina proviene dall'aggettivo "decimalis" che vuol dire "ripartito" o "ordinato a dieci a dieci".

In aritmetica l'uso di questo termine è svariato. Esiste infatti il

- " calcolo decimale", che è quel sistema nel quale si trattano le operazioni scritte nel sistema decimale.
- La "frazione decimale", che è una frazione avente per denominatore una potenza di dieci.
- "Unità decimale", che è una frazione decimale con numeratore uno.
- "Numero decimale", che è una frazione decimale quando viene scritta nella forma di "numero con la virgola" (es. $1{,}23 \approx \frac{123}{100}$).
- "Sistema decimale", che indica un sistema posizionale che ha come base 10.

1.1. Storia delle frazioni

Secondo Boyer, [4] il concetto di numero è uno dei più antichi concetti matematici, e, le sue origini, sono avvolte nella nebbia della preistoria.
Testimonianze scritte di significato numerico, ci pervengono da resti archeologici databili al periodo preistorico, come un osso di lupo risalente a circa 30.000 anni fa e ritrovato in Cecoslovacchia, [4] che presentava 55 tacche profondamente incise disposte in due serie la prima di 25 e la seconda di 30.
Si pensa che i segni numerici, probabilmente, abbiano preceduto le parole che indicavano i numeri e si suppone, in genere, che la matematica sia sorta in risposta ai bisogni pratici dell'uomo o addirittura in connessione con riti religiosi primitivi.

► Tornando al nostro argomento di discussione, possiamo dire che la nozione di frazione decimale si sviluppò relativamente tardi, e, in generale, non era in stretto rapporto con i sistemi numerici ideati dall'uomo per i numeri interi.

Sembra, che le tribù primitive, non avessero virtualmente bisogno di frazioni in quanto, per necessità pratiche connesse con la quantità, l'uomo primitivo poteva scegliere quantità sufficientemente piccole da renderne superfluo l'uso.

Pertanto non vi fu una evoluzione coerente dalle frazioni binarie alle frazioni quinarie e decimali: i sistemi decimali furono essenzialmente il prodotto della matematica dell'età moderna. [4]

Convenzionalmente si comincia a parlare di storia della matematica facendo riferimento alla civiltà egiziana circa nel 3000 a.C. [4]

Vaglierò a grandi linee quelle che sono le impostazioni protomatematiche[1] presenti nelle maggiori civiltà citate in ordine cronologico, usando per comodità, anche se impropriamente, alcuni termini che si riferiscono a concetti che sono stati inquadrati come concetti matematici solo in epoche recenti.

[1] Le nozioni protomatematiche sono quelle conoscenze che i matematici utilizzano senza chiamarle o definirle in termini matematici (implicite)

1.2. Gli Egiziani (3000 a.C.)

Si ritiene che gli egiziani usassero le frazioni ed avessero un loro modo di rappresentarle.[31]

Per esprimere le frazioni, gli egizi si servivano, in genere, del geroglifico della bocca

segno che si leggeva **èR**, e che, nel contesto, significava “parte”, che veniva posto sopra il numero facente funzione di denominatore:

 $= \frac{1}{3}$

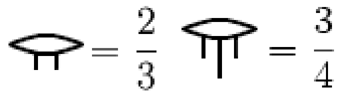
Quando il denominatore non poteva venire rappresentato tutto intero sotto il segno della “bocca”, essi scrivevano l'eccedenza di seguito:

 $= \frac{1}{331}$

Alcune frazioni, come $\frac{1}{2}$ e due frazioni non unitarie, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, erano raffigurate con segni speciali. Per $\frac{1}{2}$, usavano semplicemente il geroglifico che segue e che si leggeva **GeS** ed esprimeva l'idea della metà

 $= \frac{1}{2}$

Altri simboli venivano utilizzati per le frazioni $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$



Queste due ultime espressioni non erano affatto concepite come frazioni. Gli egizi non conoscevano, infatti, frazioni con il numeratore diverso da uno. Per esprimere, ad esempio, la quantità $\frac{3}{5}$ usavano i seguenti simboli pari a $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$.[2]

La frazione $\frac{47}{60}$ si scomponeva così $\frac{47}{60} = \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$.

Gli Egizi avevano quindi bisogno, per eseguire il calcolo con le frazioni, di "tavole" sulle quali leggere le scomposizioni di ogni frazione di uso comune in somma di frazioni con numeratore unitario, in modo che il numero di queste fosse il più piccolo possibile.[3]

1.3.La Mesopotamia (2400 a.C.)

La civiltà fiorita in Mesopotamia, viene spesso indicata come civiltà babilonese, sebbene tale designazione non sia rigorosamente corretta [4] non essendo Babilonia sempre e costantemente il centro della cultura legata alla Mesopotamia.

Parleremo quindi di "babilonesi" in maniera impropria intendendo con questo termine le civiltà dei sumeri degli assiri e babilonesi, popoli che si avvicendarono in quelle terre nel periodo che va dal 2400 a.C. al 538 a.C. quando Babilonia cadde sotto Ciro re di Persia. Non sappiamo

[2] Tali scomposizioni venivano fatte secondo tabelle complicatissime, tabelle di cui troviamo esempi nel Papiro di Rindh che è il più esteso papiro egizio di natura matematica giunto fino a noi datato 1650 a.C. contiene tabelle per scomporre le frazioni in somma di frazioni unitarie e 84 problemi aritmetici, algebrici e geometrici con le relative soluzioni.

[3] Vedi appendice 2

molto sulle origini arcaiche dei loro sistemi numerici ma restano abbondanti testimonianze del fatto che usassero un sistema posizionale con base principale 60 e base secondaria 10. [16]
Fra le innumerevoli tavolette di argilla ritrovate, in quelle risalenti all'epoca della dinastia degli Hammurabi [31] è illustrato il loro sistema sessagesimale, cioè il sistema a base 60 utilizzato non solo dai babilonesi ma anche in tutto il resto della Mesopotamia.
Si può affermare che la matematica mesopotamica fosse ad un livello molto più alto della matematica dei contemporanei Egizi. Infatti, questi ultimi, avevano grossi problemi ad effettuare già semplici calcoli mentre i Babilonesi sapevano eseguire calcoli complessi, come ad esempio la divisione, basandosi su apposite tavole dei reciproci e moltiplicando quindi il dividendo per il reciproco del divisore. La loro numerazione, però, peccava nel non possedere un simbolo per lo zero e uno strumento che separasse la parte intera di un numero dalla sua parte frazionaria.

► Non risultano esistere, dai documenti in nostro possesso, scritture speciali per le frazioni, [16] ma si suppone che si limitassero all'analogo dei nostri numeri decimali che però nel loro caso erano numeri sessagesimali.
La prevalenza del 60 nel sistema posizionale sumero/assiro/babilonese si è conservata fino ad oggi nelle misure angolari (angolo giro 360°) e nelle misure temporali (un'ora è fatta da 60 minuti) segno di un prevalere di quella aritmetica in questi due campi rispetto a tutte quelle che seguirono.

1.4. I Greci (500 a.C.)

L'inizio della storia greca risale al secondo millennio a.C. quando, incolti invasori, calarono dalle regioni settentrionali, senza portare alcuna tradizione matematica o letteraria, ma pronti ad assorbire la cultura degli altri popoli. In breve tempo realizzarono progressi che andarono al di là di ciò che avevano appreso da altre civiltà.
Assumendo come riferimento storico alla data dei primi giochi olimpici (776 a.C.), sappiamo che in quel periodo si era sviluppata una fiorente letteratura come testimoniano opere di Omero ed Esiodo, ma, non abbiamo alcuna indicazione di quella che era la matematica del tempo.
Soltanto nel VI sec. a.C. con Talete e Pitagora si cominciò a poter parlare, seppur indirettamente, di matematica greca. [4]
Il primo sistema di rappresentazione numerica greco, fu quello attico, databile attorno al 500 a.C. [16], ed era un sistema puramente additivo in cui esisteva un numero limitato di simboli di valore costante.
Il numero 1 era rappresentato con un trattino verticale, ripetuto fino a quattro volte per rappresentare, appunto, i numeri da 1 a 4. A questo simbolo, se ne aggiungevano altri appositi per il 10= - o (trattino orizzontale, cerchietto grande); il 100= ד ; il 1000= Ψ ; il 10.000= C

Nell'epoca alessandrina (III sec. a. C.), questo sistema venne sostituito dal sistema ionico o alfabetico.

Nella numerazione ionica, si faceva uso delle lettere dell'alfabeto greco che richiedeva ben ventisette simboli, tre in più di quanti ne contenesse l'alfabeto classico, motivo per cui si utilizzavano delle lettere presenti nell'alfabeto arcaico: stigma o sigma finale (ς), qoppa (Ϙ) e sampi (ϡ).

α (alfa): 1	ι (iota): 10	ρ (rho): 100
β (beta): 2	κ (kappa): 20	σ (sigma): 200
γ (gamma): 3	λ (lambda): 30	τ (tau): 300
δ (delta): 4	μ (mu): 40	υ (upsilon): 400
ε (epsilon): 5	ν (nu): 50	φ (phi): 500
ς (stigma): 6	ξ (xi): 60	χ (chi): 600
ζ (zeta): 7	ο (omicron): 70	ψ (psi): 700
η (eta): 8	π (pi): 80	ω (omega): 800
θ (theta): 9	Ϙ (qoppa): 90	ϡ (sampi): 900

La scrittura di un numero si otteneva per giustapposizione di questi simboli, con un principio di posizione analogo a quello della numerazione decimale: ad esempio, il numero 123 si scriveva come ρκγ e non γρκ, sebbene questo potrebbe sembrare equivalente visto che i simboli hanno un valore fisso.

Era possibile anche scrivere numeri più grandi di 999: per le migliaia fino a 9000 si precedeva uno dei numeri unitari con un apostrofo ('), così ad esempio 1000 diventava 'α, mentre per le decine di migliaia si usava il simbolo M, ad esempio 320000 diventava M λβ.

► I greci rappresentavano anche le frazioni utilizzando l'apostrofo, posizionandolo però alla fine del numero anziché all'inizio. Così, per esempio, $\frac{1}{2}$ diventava β'. Questa notazione andava bene finché il numeratore era unitario, ma quando non lo era si prestava a facili ambiguità. Ad esempio, ξβ' è $\frac{60}{2}$ oppure $\frac{1}{62}$.

Per questo motivo, nel tempo, si utilizzarono altri metodi, come ad esempio porre un trattino sopra al numeratore per distinguerlo.

► I greci, al pari degli egiziani, si limitavano a considerare frazioni il cui numeratore era uno, e, soltanto a partire dal I sec. d.C. Erone e poi Diofanto, introdussero l'uso sistematico di frazioni con numeratore qualsiasi.
In particolare, Diofanto di Alessandria (II sec. d. C.)[4], introdusse una rappresentazione del tutto analoga alla nostra, scrivendo la frazione come un numero che sovrasta una linea che sovrasta un numero solo che il ruolo del numeratore e del denominatore era invertito così per esempio la frazione $\frac{3}{5}$ si scriveva $\frac{\varepsilon}{\gamma}$.
Per questo e per aver snellito notevolmente il simbolismo matematico di quel tempo, Diofanto è da alcuni ritenuto il "padre" dell'algebra [4].

Probabilmente la complicata rappresentazione greca dei numeri fu in un certo senso un freno allo sviluppo di tecniche aritmetiche a dispetto del prodigioso sviluppo che invece compirono in geometria.

Ciò nonostante i greci svilupparono una teoria delle grandezze, delle proporzioni, conobbero perfettamente i numeri razionali, il tutto sempre interpretato secondo la geometria sintetica.

4 Vedi appendice 3

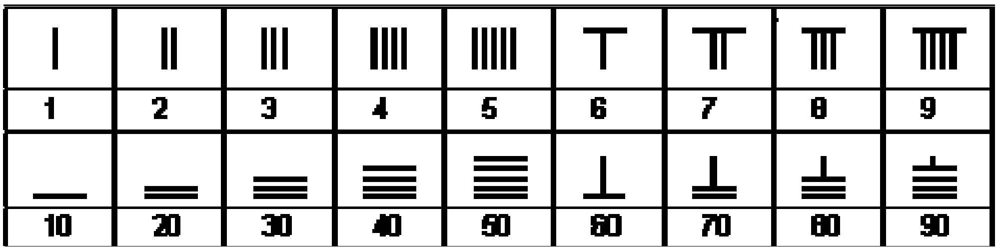
Un loro grande merito è quello di aver organizzato sistematicamente tutto il sapere matematico conosciuto fino allora [5].

1.5. I Cinesi (incerto 1200 a.C. o 300 a.C.)

Le civiltà fiorite lungo i fiumi Yangtze e Giallo sono paragonabili, per la loro antichità, a quelle sviluppatesi lungo il Nilo o tra il Tigri e l'Eufrate [32]; tuttavia, i dati cronologici nel caso della Cina sono meno attendibili di quelli relativi all'Egitto e alla Babilonia. La datazione dei documenti matematici cinesi è molto difficile; si pensi, ad esempio, che le valutazioni riguardanti il "Chou Pei Suan Ching", considerato il più antico testo di argomento matematico, differiscono tra loro di quasi un millennio, dal 1200 a.C. al 300 a.C..

La numerazione cinese era essenzialmente decimale e usava notazioni piuttosto diverse da quelle in uso in altre regioni. In Cina furono in uso fin dai primi tempi due sistemi di notazione: in uno era predominante il principio moltiplicativo, nell'altro veniva usata una forma di notazione posizionale. Nel primo schema vi erano simboli distinti per ogni cifra da uno a dieci e altri simboli per le potenze di dieci: nella scrittura dei numeri le cifre in posizioni dispari (da sinistra a destra o dal basso in alto) venivano moltiplicate per la cifra immediatamente successiva. Così il numero 678 sarebbe stato scritto come un sei seguito dal simbolo di cento, poi un sette seguito dal simbolo di dieci e infine il simbolo di otto. Nell'altro sistema di notazione numerica a "bastoncini" le cifre da uno a nove e i primi nove multipli di dieci si presentavano così:

[5] Vedi appendice 4



Usando questi simboli disposti alternativamente da destra verso sinistra, si potevano rappresentare numeri grandi quanto si voleva. E' impossibile determinare con precisione la data di nascita della numerazione a bastoncini, ma essa era certamente in uso parecchi secoli prima dell'Era cristiana.

L'uso in Cina di un sistema posizionale centesimale, invece che decimale, era particolarmente adatto ai calcoli effettuati coi bastoncini disposti su una tavoletta. Notazioni distinte per potenze contigue di dieci permettevano ai cinesi di usare una tavoletta con colonne verticali non specificate. Prima dell'VIII secolo la posizione in cui si richiedeva uno zero veniva semplicemente lasciata vuota. Sebbene in testi anteriori al 300 d.C. i numeri e le tavole di moltiplicazione compaiano in forma scritta, di fatto, i calcoli venivano effettuati con trattini o bastoncini rappresentanti i numeri e disposti su una tavoletta.

► Ai cinesi erano note le operazioni effettuate sulle frazioni comuni, in relazione alle quali essi erano in grado di trovare i minimi comuni denominatori. Come in altri campi, anche qui vedevano analogie con le differenze tra i sessi: indicavano il numeratore come "figlio" e il denominatore come "madre".

► Ben presto i cinesi scelsero per le frazioni il sistema decimale per cui diedero particolarmente impulso alle frazioni con denominatore 10 o le sue potenze. Nel XIII secolo il sistema decimale dominava tutta la Cina e si tendeva a trasformare le frazioni in frazioni decimali. [16]

1.6. I Romani (753 a.C. nascita di Roma)

Nel sistema di numerazione romano [33] , a base decimale, ci si serviva, come è noto, anche di simboli speciali per indicare 5, 50, 500.
Alcune antiche epigrafi inducono a ritenere che i segni usati fossero inizialmente segni speciali, forse di origine etrusca, che solo successivamente, in seguito a successive trasformazioni, assunsero l'aspetto e furono identificati con le lettere I, V, X, L, C, D, M.
Un segno che, in tempi recenti, prese l'aspetto di una lineetta orizzontale posta sopra le lettere, serviva per indicarne la moltiplicazione per 1000.
La scrittura dei numeri avveniva combinando additivamente i segni precedenti (numerazione a base decimale additiva). Per agevolare scrittura e lettura si ricorse in alcune epoche e facoltativamente a un sistema sottrattivo già utilizzato ad esempio dagli Assiri che ha traccia anche nelle forme verbali come ad esempio “undeviginti"”, stessa cosa di “decem et novem”: un simbolo posto alla sinistra di un simbolo di quantità maggiore viene sottratto, così IX e VIIII indicano entrambi il numero nove.

I	**V**	**X**	**L**	**C**	**D**	**M**
1	5	10	50	100	500	1000

In figura:Sistema di numerazione romano a base decimale additivo

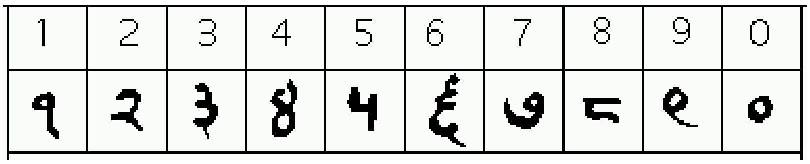
► Un fatto singolare che si riscontra osservando i sistemi di calcolo dei Romani è che quando si trattò di passare dai numeri interi alle frazioni, i Latini abbandonarono la base dieci. La loro ristretta mentalità speculativa li aveva portati a tralasciare ogni considerazione teorica sulla nuova categoria di numeri, quelli frazionari, e così si limitarono a considerare le frazioni come parti delle unità di misura in uso, le quali venivano divise in 12, 144, 288, 576. Avevano di conseguenza nomi e simboli speciali per indicare la frazione $\frac{1}{12}$ ed alcuni suoi multipli come $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ ….e i vari sottomultipli corrispondenti a varie unità monetarie (ad esempio uncia=$\frac{1}{12}$, semis= $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$, semuncia=$\frac{1}{24}$, sextans=$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$, dracma=$\frac{1}{96}$, obolus=$\frac{1}{576}$).

Per poter eseguire i calcoli con numeri composti da interi e frazioni duodecimali, si servivano di tabelle di cui ci rimangono degli esemplari tardi.

La necessità di considerare gli altri numeri frazionari si fece sentire soltanto dopo il Mille d.C.

1.7. Gli Indiani (800 a.C.)

La civiltà indiana [33], più antica di quelle greca o romana, è già documentata nel periodo egizio (3000-2000 a.C.). Sebbene un'attività matematica dovesse essere sviluppata già in questo periodo, purtroppo non abbiamo testimonianze concrete se non risalenti al V secolo d. C. Nell'anno 476 d.C. (anno della caduta dell'impero romano d'occidente) nacque infatti Aryabbhata, autore di uno dei più antichi testi matematici indiani. Agli Indiani va il merito di aver abbinato per la prima volta nella storia la base dieci ed il valore posizionale. Non è ancora chiaro esattamente dove e quando si sia sviluppato il sistema di notazione decimale posizionale che poi attraverso gli arabi si è diffuso in Europa. Tale sistema è utilizzato nell'opera di Aryabhata, dove manca però ancora l'uso del simbolo dello zero, che troviamo invece in opere del IX secolo d.C. L'idea di usare un numero limitato di simboli a cui dare valore diverso a seconda della posizione occupata può essere, secondo alcuni studiosi, arrivato agli indiani dalla conoscenza diretta o tramite i greci, del sistema sessagesimale babilonese. Gli indiani avrebbero allora iniziato ad utilizzare solamente i primi 9 simboli del loro sistema decimale in caratteri Brahmi, in uso dal III secolo a.C. Questi simboli assumono forme un po' diverse a seconda delle zone e dei periodi, ma sono comunque questi simboli che gli arabi più tardi utilizzarono e che dalla forma araba sono passati in Europa fino alla forma definitiva resa uniforme dalla stampa nel XV secolo.



In figura: Simboli Indiani (XI sec. d.C.) numerazione posizionale a base decimale

► Per quanto riguarda le frazioni [16], venne adottata la scrittura alessandrina: denominatore fratto numeratore ma senza trattino in mezzo. Ma, mentre per i numeri naturali adottarono un sistema posizionale decimale, per le frazioni la cosa non avvenne, anzi si usarono sistemi complicati e poco funzionali.

1.8. Gli Arabi (750 d.C.)

Per diversi secoli, Indiani ed Arabi convissero nella creazione di matematica fino a che, gli arabi, presero nettamente il sopravvento. [16]
Furono gli Arabi a concepire in modo definitivo le cifre da 0 a 9 (anche se piuttosto diverse da quelle usate oggi che ebbero origine solo nel XVI sec. d.C.), ad applicare definitivamente i sistemi posizionali anche alle frazioni, a strutturare algoritmi di calcolo sui numeri naturali e sui frazionari per come li conosciamo oggi.
Gli arabi hanno il merito di essere stati degli ottimi divulgatori sin da quando nel 786 d.C. in Siria, a Damasco, il califfo Harun-al Rashid promosse la nascita di scuole, la diffusione delle conoscenze di matematica degli Indiani e la traduzione dei testi scientifici greci.
Suo figlio fece di Bagdad sua capitale e poi il più rinomato centro scientifico mondiale e sono di quel periodo le opere di Al-Khwarismi.[6]

► Le testimonianze pervenuteci sull'uso delle frazioni da parte degli arabi, riguardavano soprattutto i problemi di eredità, e le esecuzioni testamentarie a cura di notai che redigevano in dettaglio la volontà testamentaria. [7]
Di solito si considera che, l'ultimo matematico arabo di una certo valore prima della successiva decadenza, sia stato Ghiyath ad-Din Jamshid Mas`ud al-Kashi detto al Kashi perchè nativo di Kashan (Iran) nel 1380 [16]. Egli si autodefinisce in una sua opera "inventore delle frazioni decimali", forse perché le aveva davvero concepite all'interno del sistema posizionale decimale cosa che non era riuscita a nessuno in modo completo.

---

[6] Vedi appendice 5
[7] Vedi appendice 6

► Al-Kashi elaborò una trattazione esauriente e sistematica delle operazioni con frazioni decimali. Egli fece uso, oltre che della linea di frazione (che si diffuse in Europa solo nel tardo medioevo ad opera di Leonardo Pisano), di una scrittura numerica superiore che specificava il numero delle cifre decimali; ad esempio, 36^2 avrebbe indicato 0,36.
Questo metodo di rappresentazione delle frazioni decimali si diffuse nel mondo islamico col nome di "metodo turco". La conoscenza di questo metodo si diffuse a Vienna dove apparve nel 1562 in una raccolta di problemi bizantini.
Probabilmente l'ingegnere Simone Stevino (1548-1620) imparò il metodo turco da questo testo e sostituì la scrittura numerica superiore con una numerazione delle cifre decimali posta tra le cifre stesse; ad esempio 5,912 viene scritto come 50911223 oppure come $5{,}9'1''2'''$.
Al suo contemporaneo Nepero, [4] dobbiamo invece, la convenzione odierna della virgola per separare il numero intero dalla parte decimale.
Da Stevino, i numeri decimali e le frazioni, assunsero il ruolo di nozione matematica e cominciarono ad essere insegnati nel 1600 circa. [27]

1.9. Il Medioevo in Europa

La cultura greca fu ereditata non solo dal mondo arabo ma anche dall'Europa, tanto che per secoli i cosiddetti "enciclopedisti" europei non fecero altro che tramandare per iscritto conoscenze dei greci. La numerazione a volte è quella greca, a volte quella romana e le frazioni non ricevono particolare impulsi.
Dal IX sec. vi furono però contatti stretti tra i matematici del mondo arabo e quelli latini (specialmente quelli della penisola italica, visti i

commerci cui erano dedite le repubbliche marinare). Il più antico trattato europeo nel quale si fa menzione delle 10 cifre indo-arabe è del 967.

Un fatto nuovo si ebbe con Leonardo figlio di Bonaccio da Pisa (1180-1250). [16]

Leonardo Pisano [34] scrisse due opere di fondamentale importanza: il Liber Abaci (1202, revisionata nel 1228) e il Liber Quadratorum (1225). L'obiettivo del Liber Abaci, cioè il "libro dell'abaco", era introdurre in Europa il sistema di numerazione indo-arabico e i metodi di calcolo indiani di cui Fibonacci era venuto a conoscenza durante i viaggi d'affari col padre in Africa settentrionale ed ebbe modo di studiare con un maestro musulmano e di viaggiare in Egitto Siria e Grecia.

Il Liber Abaci si apre con una idea che suona quasi moderna ma che era caratteristica del pensiero medievale sia islamico che cristiano, e cioè che algebra e geometria fossero strettamente connesse. [4]

Il Liber Abaci si interessava tuttavia più di numeri che di geometria e la descrizione del sistema di numerazione indo-arabica svolse un ruolo importante nel processo di trasmissione della cultura matematica. Questa opera fu utilizzata per lungo tempo ed esercitò un'enorme influenza sul popolo, perché presentava procedimenti aritmetici molto più semplici di quelli fondati sul sistema romano.

Il Liber Quadratorum, cioè il "libro dei numeri quadrati", contiene importantissimi risultati sulla teoria dei numeri. Per tale motivo, alcuni autori ritengono che è "...l'opera che per l'originalità del metodo e l'importanza dei risultati faceva di Leonardo il più grande genio della teoria dei numeri, apparso nei quindici secoli trascorsi dal tempo di Diofanto a quello di Fermat".

► In Fibonacci [16] compaiono dunque le frazioni per come noi oggi le conosciamo, assieme alle regole delle operazioni sulle frazioni, ai calcoli dei massimi comuni denominatori, alla trasformazione delle frazioni in somma di frazioni a numeratore uno, alla risoluzione delle equazioni trovando radici intere, razionali e irrazionali, all'uso delle frazioni sessagesimali. Fra le curiosità presenti in quel libro c'è quella di una particolare scrittura della moltiplicazione di un intero per una frazione: se oggi noi volessimo scrivere 3 interi e una metà scriveremmo $3\frac{1}{2}$, Fibonacci invece utilizza la scrittura inversa $\frac{1}{2}3$.

Le sue opere e le sue competenze matematiche lo portarono alla corte di Federico II dove più volte partecipò come paladino del cristianesimo a sfide matematiche che lo opponevano ai grandi matematici del mondo arabo, a loro volta paladini del mondo islamico, riportando grandi trionfi. Con Fibonacci la matematica era approdata in Europa. Le forme eleganti delle cifre indiano-arabe furono artisticamente disegnate soprattutto nel corso del XVI secolo e diffuse in Europa in modo definitivo nel 1450 circa grazie all'invenzione della stampa da parte del tedesco Johann Gutenberg .

Per secoli e secoli [36] non furono fatti passi avanti nel calcolo, anzi durante il Medioevo ed oltre, nelle Università, venivano disprezzati o ignorati i problemi di ordine pratico, per cui, i figli dei mercanti, se volevano imparare a destreggiarsi nelle permute, negli sconti, ecc. dovevano frequentare le "scuole d'abaco" che nascevano al di fuori delle Università.

► Nel XVI secolo troviamo ancora i contabili alle prese con il calcolo delle frazioni, essi disponevano di "regole" e trucchi più efficaci di quelli degli antichi Egizi, ma il calcolo con le frazioni restava complicato,

richiedeva un addestramento particolare e quindi non era alla portata di tutte le persone che dovevano eseguire calcoli tecnici e commerciali.
In questo stesso periodo stavano avvenendo profonde trasformazioni: si scoprivano terre nuove, si lottava per la libertà religiosa e di pensiero, si sviluppavano nuove tecnologie. Si sentiva quindi la necessità di snellire i calcoli per migliorare il commercio, intralciato tra l'altro dalle differenti misure nelle monete e nei pesi, diversi da paese a paese.

► Simone Stevino, che visse tra il 1548 e il 1620 in Olanda, fu ingegnere delle dighe, scienziato, patriota (combatté per liberare i Paesi Bassi dal dominio spagnolo) e, nel suo trattato "LA DISME" (la decima), pubblicato nel 1585, propose un sistema di scrittura dei numeri frazionari basato su una particolare scrittura delle frazioni decimali (aventi denominatore 10 o 100 o 1000….) già usata da altri matematici.

1 e $\frac{3}{5}$ diventa 1 e $\frac{1}{60}$ che Stevino scrive 1(int) 6(dec)

2 e $\frac{3}{4}$ diventa 2 e $\frac{75}{100}$ che Stevino scrive 2(int) 7(dec) 5(cent)

2 e $\frac{1}{3}$ (decimale periodico $0,\bar{3}$) diventa 2 e $\frac{3}{10}$ e $\frac{3}{100}$ e $\frac{3}{1000}$…….

che Stevino scrive 2(int) 3(dec) 3(cent) 3(mil)…..
Altri autori introdussero, subito dopo Stevino, notazioni simili, Stevino stesso in una successiva edizione de "LA DISME" rese le sue notazioni più efficienti.

Stevino [4] non fu assolutamente l'inventore delle frazioni decimali ma fra la gente comune e persino fra i matematici pratici, la conoscenza delle frazioni decimali si diffuse solo quando Stevino si assunse il compito di spiegare il sistema decimale nella sua completezza e in tutti i dettagli più elementari.

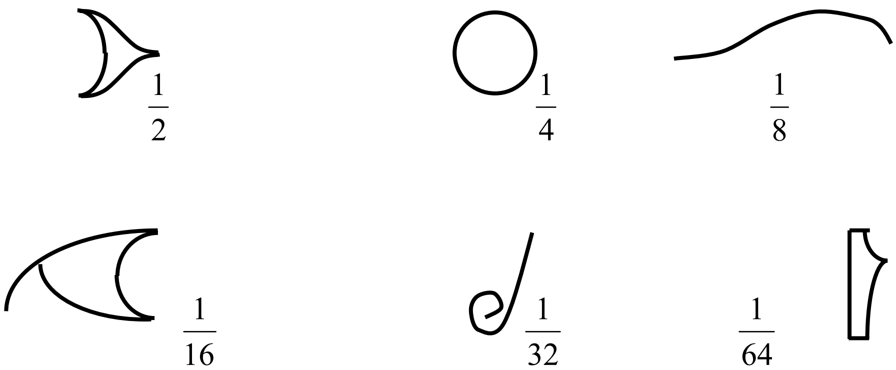
Stevino era un matematico dalla mentalità pratica, che non trovava alcun interesse negli aspetti più speculativi della matematica.

Nella traduzione inglese della Descriptio di Nepero, pubblicata nel 1616, le frazioni decimali comparivano scritte come lo sono oggi: cioè la parte intera e frazionaria erano separate da una virgola. Nel 1617, nella sua Rabdologia, Nepero faceva riferimento all'aritmetica decimale di Stevino e proponeva l'uso di un punto o di una virgola per separare le cifre decimali. Nella Costruptio neperiana del 1619 viene adottato il punto decimale, che diventò ed è ancora di uso comune in Inghilterra.

Appendice 1

L'occhio di Horus: Un esempio significativo dell'importanza che, presso gli Egizi aveva chi sapeva eseguire i calcoli con le frazioni, e, più in generale del collegamento tra magia, religione e matematica, è rappresentato dalla leggenda relativa al dio Horus.

Horus, figlio di Iside e di Osiride, volle vendicare la morte del padre, ucciso dal fratello Seth. Nella lotta Horus perse un occhio le cui parti vennero ritrovate e ricomposte dal dio Toth a meno di una piccola parte. Ad ogni parte si fecero corrispondere le sei frazioni unitarie più frequenti, quelle corrispondenti agli inversi delle prime sei potenze di due:

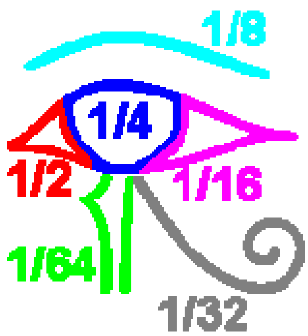


In figura sono rappresentate le parti dell'occhio di Horus. Da notare che la somma di queste parti differisce dall'unità di $\frac{1}{64}$.

Ad ogni parte dell'occhio si fece corrispondere un senso; nell'ordine: il tatto ($\frac{1}{64}$), il gusto ($\frac{1}{32}$), l'udito ($\frac{1}{16}$), il pensiero ($\frac{1}{8}$), la vista ($\frac{1}{4}$) e l'olfatto ($\frac{1}{2}$). La costruzione del simbolo segue una precisa regola. I sensi erano ordinati quindi secondo l'importanza loro attribuita, a seconda cioè dell'energia "utilizzata" per ricevere una particolare sensazione.

Tutti i dati ricevuti erano l'alimento della conoscenza.

Narra la leggenda che la parte mancante per formare l'unità ($\frac{1}{64}$), veniva data dal dio Thot al contabile che si poneva sotto la sua protezione come portafortuna nell'esecuzione dei calcoli…



In figura la ricomposizione dell'occhio di Horus

Un'altra curiosità è che le frazioni: $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ erano sottomultipli dell' heqat (unità di misura delle capienze, pari, secondo la stima tradizionale fatta da G. Lefebvre, a circa 4,785 litri).

Appendice 2

La scomposizione delle frazioni egizie: Nel Papiro di Rhind sono magistralmente esposte le regole per il calcolo delle frazioni . Il fatto di operare con frazioni unitarie è una caratteristica singolare della matematica egizia. Per questo motivo quando si fa riferimento alle frazioni egizie, si parla in genere di una frazione scritta come somma di distinte frazioni unitarie, e la cosa più interessante e "strana" che ancora oggi viene studiata, è che il numero di frazioni nella quale la frazione di origine non unitaria viene scomposta è il più piccolo possibile.

Un esempio di scomposizione di una frazione in somma di frazioni unitarie può essere la seguente: considero la frazione $\frac{35}{8}$. La sua scomposizione egizia è:

	1	8
	2	16
*	4	32
	$\frac{1}{2}$	4
*	$\frac{1}{4}$	2
*	$\frac{1}{8}$	1
	___	__
	$4+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$	35

Come si vede, oltre ai "raddoppi" dell'8, si riportano anche i suoi "dimezzamenti", e si utilizzano anch'essi per ottenere la somma 35 (a destra), mentre a sinistra si ottiene il risultato, la cui parte frazionaria è espressa tramite le frazioni del tipo $\frac{1}{2^n}$. Quindi: $\frac{35}{8}=4+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

Appendice 3

L'epitaffio di Diofanto: A Diofanto si deve un famoso problema, che egli stesso volle venisse scritto sulla propria tomba sotto forma di epitaffio:

> "Hunc Diophantus habet tumulum qui tempora vitae illius, mira denotat arte tibi. Egit sex tantem juvenie; lanugine malas vestire hinc coepit parte duodecima. Septante uxori post haec sociatur, et anno formosus quinto nascitur inde puer. Semissem aetatis postquam attigit ille paternae, infelix subita morte peremptus obit. Quator aestater genitor lugere superstes cogitur, hinc annos illius assequere".

Traduzione:

Questa tomba racchiude Diofanto e, meraviglia! Dice matematicamente quanto ha vissuto. Un sesto della sua vita fu l'infanzia, aggiunse un dodicesimo perché le sue guance si coprissero della peluria dell'adolescenza. Inoltre per un settimo ebbe moglie, e dopo cinque anni di matrimonio ebbe un figlio. L'infelice morì improvvisamente quando raggiunse la metà dell'età paterna. Il genitore sopravvissuto fu in lutto per quattro anni e raggiunse infine il termine della propria vita.

La soluzione dell'enigma sta nella seguente equazione:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$$

da cui si ricava l'età di Diofanto, $x=84$.

Appendice 4

Euclide e la matematica greca: Euclide, formulò la prima rappresentazione organica e completa della geometria nella sua fondamentale opera, gli Elementi, divisa in 13 libri. Ogni libro inizia con un gruppo di proposizioni che possono essere considerate come una specie di definizioni che servono a chiarire i concetti successivi; esse sono seguite da altre proposizioni che sono invece veri e propri problemi o teoremi: questi si differenziano fra di loro per il modo con cui vengono enunciati e per la frase rituale con cui si chiudono: "come dovevasi fare" per i problemi, "come dovevasi dimostrare" per i teoremi.

Questo testo è stato tramandato grazie alla prima ricostruzione che ne fece Teone di Alessandria, circa 700 anni dopo Euclide, e alle traduzioni arabe (ad esempio quelle di Alhazen, ossia Ibn al-Haytham, nato nel 965). Intorno al 1120, una copia del testo arabo (o una copia di una copia) fu tradotta in latino da Adelardo di Bath. Nel 1270, la traduzione di Adelardo fu riveduta, anche alla luce di altre fonti arabe (a loro volta derivate da altre versioni greche del manoscritto di Teone) da Campano di Novara. Questa versione (o una copia di una copia) venne stampata a Venezia nel 1482. Sono passati circa 1800 anni.

Secondo alcune fonti, gli Elementi non è tutta opera del solo Euclide: egli ha raccolto insieme, rielaborandolo e sistemandolo assiomaticamente, lo scibile matematico disponibile nella sua epoca. La sua opera è stata considerata per oltre 20 secoli un testo esemplare per chiarezza e rigore espositivo, e può considerarsi il testo per l'insegnamento della matematica e per la precisione argomentativa di maggior successo della storia, ovvero il testo più letto dopo la Bibbia. Gli Elementi non sono un compendio della matematica dell'epoca, bensì

un manuale introduttivo che abbraccia tutta la matematica "elementare", cioè l'aritmetica (la teoria dei numeri), la geometria sintetica (dei punti, delle linee, dei piani, dei cerchi e delle sfere) e l'algebra (non nel senso moderno dell'algebra simbolica, ma di un equivalente in termini geometrici).
Di quest'opera non ci sono pervenute copie dirette; nella versione che ci è pervenuta, il trattato euclideo si limita a presentare una sobria e logica esposizione degli elementi fondamentali della matematica elementare. Molte edizioni antiche contengono altri due libri che la critica più recente attribuisce rispettivamente a Ipsicle (II secolo a.C.) e a Isidoro di Mileto (IV secolo d.C.).

Nel VII libro degli Elementi, troviamo la prima definizione di numero

> "Unità è secondo cui ogni cosa è detta uno.
> Numero è la moltitudine composta da unità."

Appendice 5

Al-Khowârizmî: Mohammed ibn Musa al-Khowârizmî (c.780-c.850) compose un trattato di aritmetica intitolato "Algorithmi de numero indorum". Il vocabolo "Algoritmo" è venuto dall'alterazione dell'appellativo al-Khowârizmî attribuito a Mohammed. Questo termine dopo aver subito numerose variazioni, sia di significato sia di denominazione, fu utilizzato per esprimere una costante procedura di calcolo [22]. Al-Khowârizmî scrisse anche un libro di algebra: Al-jabr w'al muqâbala ed, in questo titolo, indicò precisamente le due operazioni fondamentali della risoluzione di equazioni di primo grado, la parola al-jabr significa "ristabilire", cioè ristabilire l'equilibrio tra i membri di un'equazione mediante il trasporto di termini e il vocabolo al muqâbala significa

"semplificazione", cioè la riduzione dei termini simili. La parola al-jabr si trasformò in algebrista in Spagna, si convertì algebrae tradotta in latino ed, infine, fu abbreviata in algebra per indicare il nome della disciplina.

Appendice 6

L'eredità dei 17 cammelli: Può essere curioso sapere che, di solito, si attribuiscono al mondo arabo certi indovinelli matematici che si sono tramandati nei secoli.

Uno dei più affascinanti è il seguente

"Un arabo morendo lasciò in eredità ai suoi tre figli rispettivamente $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$ dei suoi cammelli con la raccomandazione di non uccidere animali nella spartizione. Ma quando muore lascia 17 cammelli.

Come andranno suddivisi fra i tre figli?"

I figli si rivolsero per la divisione al cadì, il quale venne col proprio cammello che unì agli altri. Diede la metà dei 18 cammelli cioè 9 al primo figlio, un terzo cioè 6 al secondo, un nono cioè 2 al terzo figlio,e poi, ripreso il suo cammello se ne andò ringraziato dai tre figli ognuno dei quali aveva ricevuto più di quanto gli spettava.

Si noti che $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}<1$, dunque in realtà il padre non aveva diviso tutta l'eredità quella somma da invece $\frac{17}{18}$ il che spiega il ruolo del cammello del cadì.

Questo singolare indovinello ha avuto molte varianti, riprese poi in Europa dai maestri d'abaco ed è stato oggetto di studi anche più recenti. [16]

2.Introduzione ai numeri razionali

E' fuor di dubbio che le frazioni siano costantemente presenti nella vita e nel linguaggio di ogni giorno, basti pensare alla lettura dell'orologio, agli sconti, alle percentuali, alle ricette di cucina, ai dosaggi dei medicinali e così via.

Di contro, le ricerche effettuate da vari gruppi di studio nel corso degli anni, evidenziano che, quando nella scuola si introduce il concetto di frazione (in genere questo avviene in terza primaria), non si è mai fatto notare prima, la frequenza con la quale esse vengono usate nel linguaggio quotidiano. Inoltre, ci si è resi conto che, spesso, convinzioni errate o limitate degli insegnanti, generano misconcezioni[8] negli allievi, e, che uno dei problemi sostanziali dell'insegnamento è la mancanza di una adeguata e consapevole trasposizione didattica.[9]

Infatti, quando si parla di frazioni, in genere, si è convinti che quella torta divisa in tante fette tutte "uguali" sia un'immagine efficace, perché "fa capire bene il rapporto tra l'intero e le sue parti, si fissa subito nella mente degli allievi e si può passare subito alla definizione che cristallizza il "concetto" di frazione". [37]

La discrasia[10] esistente tra un'unica definizione dell'idea di frazione e diverse interpretazioni possibili di tale termine nella matematica, nella pratica matematica, nella pratica sociale, nel linguaggio quotidiano viene messa bene in evidenza da Martha Isabel Fandiño Pinilla [15], la quale, fa questa asserzione:

---

[8] Una misconcezione è un concetto errato e dunque costituisce genericamente un evento da evitare; essa però non va vista come una situazione del tutto o certamente negativa: non è escluso che, per poter raggiungere la costruzione di una concetto, si renda necessario passare attraverso una misconcezione momentanea, ma in corso di sistemazione.Si può notare come,almeno in alcuni casi, alcune immagini possono essere delle vere e proprie misconcezioni, cioè interpretazioni errate delle informazioni ricevute. [12]

[9] Il sapere della disciplina "matematica" è il medesimo per il matematico e per l'allievo?
Per molto tempo non ci si è posti la questione. Poi la ricerca in didattica se ne è interessata e ha esplicitato il fenomeno della trasposizione didattica che descrive l'evoluzione dei saperi, da quello del matematico a quello dell'allievo[11]

[10] Discrasia dal greco dys-krasia vuol dire cattiva mescolanza

“I numeri frazionari non esistono nel sapere accademico, al loro posto esistono i numeri razionali, definiti come classe di equivalenza. Nel sapere scolastico le frazioni “riempiono i libri di testo”, ma cosa sono le “frazioni”?

Possono essere pensate come l’insieme delle diverse rappresentazioni

- *relazione parte/tutto*
- *rapporto (scale, percentuali, proporzionalità)*
- *divisione (numeri decimali)*
- *numero*
- *espressione della probabilità.*

Una volta stabilito che i punti precedenti costituiscono un sapere da insegnare sorge il problema: come insegnare questi concetti?

Ma soprattutto, come far si che gli studenti apprendano?”

Nel testo “Le frazioni aspetti concettuali e didattici” della stessa autrice, vengono presentati ed esaminati diverse interpretazioni del concetto di frazione, e, seguendo questo schema, elencherò nelle prossime pagine dodici fra i possibili metodi di rappresentazione delle frazioni, gli ostacoli e gli errori più frequenti che tali rappresentazioni possono creare e proposte didattiche per evitare possibili interpretazioni erronee che frenano l’acquisizione del concetto di numero razionale e quindi in seguito del numero reale.

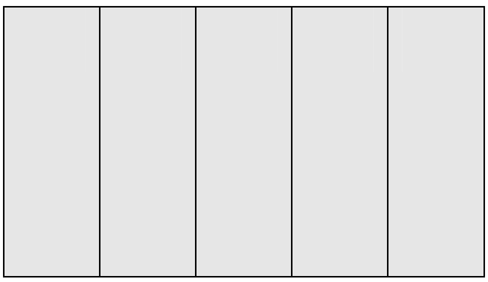
2.1. La frazione come parte di un tutto a volte continuo a volte discreto

Nel linguaggio comune, la parola “frazione” indica generalmente una parte di un tutto, invece nel linguaggio matematico il termine “frazione” è applicabile solo alle diverse parti di una grandezza ottenute dividendo quella grandezza in parti uguali.

Mettiamoci ora nell’ipotesi di un insieme “continuo” e facciamo degli esempi:

Consideriamo un intero (un rettangolo)

Dividiamolo in 5 parti uguali



Ognuna di queste parti rappresenta “un quinto” del rettangolo

Diamo a questo numero $\frac{1}{5}$ il nome di unità frazionaria e diciamo che:

l'unità frazionaria $\frac{1}{n}$ con $n \neq 0$, rappresenta una sola delle n parti uguali in cui si divide l'intero.

Quindi possiamo formulare una prima definizione di frazione dicendo che

La frazione unitaria è un operatore, cioè un simbolo, che ci permette di dividere l'intero in parti uguali e di considerare una di esse.

Passando alla frazioni non unitarie di genere $\frac{m}{n}$ diciamo invece che esse sono formate da due numeri naturali (m ed n con $n \neq 0$) separati da una linea che si chiama linea di frazione; i due numeri sono i termini della frazione e precisamente il numero che sta sotto la linea si chiama denominatore e indica in quante parti uguali deve essere diviso l'intero, mentre, quello che sta sopra si chiama numeratore e indica quante di queste parti si devono considerare.

A questo punto possiamo dire che :

La frazione $\frac{m}{n}$ è un operatore sull'intero, in quanto ci permette di dividerlo in n parti uguali e considerarne m parti .

Essa indica quindi una certa parte di tutto l'intero.

In generale si dice che la frazione $\frac{m}{n}$ è un operatore su una grandezza in quanto indica due successive operazioni sulla grandezza stessa:

-divisione in n parti uguali

-riunione in m delle parti uguali ottenute con la precedente divisione.

Inoltre abbiamo che

- se $0<m<n$ la frazione si dice propria
- se $m>n$ e m non è un multiplo di n allora la frazione si dice impropria

- se m è multiplo di n allora la frazione si dice apparente.

Quindi se l'intero o il tutto da dividere è una unità continua (torte, pizze fogli di carta ...) e stiamo lavorando con frazioni proprie è anche facile trovarne la frazione $\frac{m}{n}$, ma sorgono problemi quando ci troviamo a dovere considerare frazioni improprie.

Infatti dovendo per esempio individuare i $\frac{7}{4}$ di una torta, ecco che immediatamente ci troviamo davanti a una difficoltà: come si fa a dividere una torta in 4 parti e prenderne 7? Allora, in tal caso, molti rispondono che basta prendere due torte e che in realtà le torte sono due e non una. Ma allora l'unità da dividere è una torta o due torte? E ovviamente una cosa del genere non può non creare confusione.

Mettiamoci ora nel caso di un insieme discreto[11].

Consideriamo come intero da dividere un insieme di 15 biciclette.

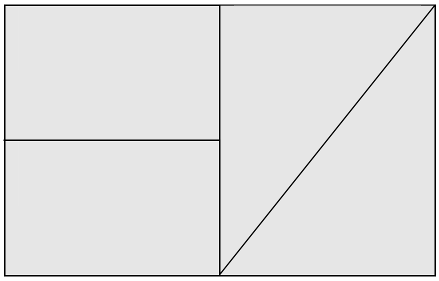
Anche in questo caso la frazione impropria presenta le stesse difficoltà del caso precedente, inoltre anche le frazioni proprie presentano difficoltà intuitive non indifferenti.

Infatti mentre risulta più facile calcolare i $\frac{3}{5}$ del suddetto insieme andarne invece a trovare i $\frac{3}{7}$ risulta complicato (come si fa a dividere 15 biciclette in 7 parti?).

Altro problema riguarda la definizione di "uguale" sulla quale si insiste tanto quando si parla di frazione. Cosa vuol dire uguale? Per un adulto

[11] In topologia, un punto x_0 appartenente ad un insieme S è detto **punto isolato** di S se esiste un intorno di x_0 non contenente altri punti di S. Un insieme costituito esclusivamente di punti isolati è detto **insieme discreto**, ad esempio, un insieme finito. Un sottoinsieme discreto di uno spazio Euclideo è numerabile; comunque, un insieme può essere numerabile ma non discreto, ad esempio l'insieme Q dei numeri razionali.

forse è intuitivamente più semplice capirne il significato mentre per un bambino alle prime prese con le frazioni il concetto di dividere una torta in n parti uguali può essere un problema. Proviamo a vederla come se noi stessi fossimo dei bambini. Chi ha figli o buona memoria sa perfettamente che le fette di torta non sono MAI tutte uguali!
Così come presentando un rettangolo diviso in questa maniera

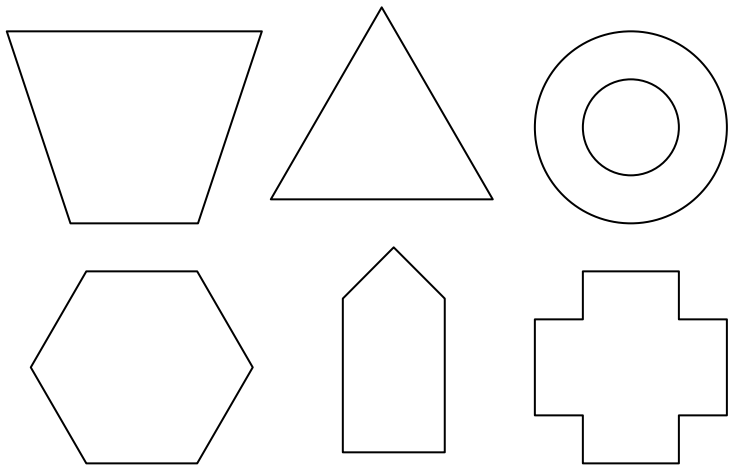


Noi diciamo che è stato diviso in quattro parti uguali mentre un bambino avrebbe difficoltà a vedere l'uguaglianza delle quattro parti fra loro e probabilmente cercherebbe di dirci che sono uguali a due a due. Dunque [37] l'uso generalizzato dell'aggettivo "uguale", che sembra essere il cardine di tale definizione, dà luogo più ad equivoci e malintesi, che non a certezze.
Viene usato infatti con troppa disinvoltura in modo generico e improprio, dando per scontato che i bambini considerino l'attributo che l'insegnante ha in mente, senza preoccuparsi di esplicitarlo, intendendo talvolta "uguale" per "congruente", altre volte per "equinumeroso", "equiesteso", "equivolumetrico"...
Dall'esperimento di Piaget [26], si evince che le risposte dei bambini sono influenzate negativamente dal modello concreto proposto, infatti per sua natura un bambino a cui viene proposto un modello concreto basato su fatti reali, punterà su quello la sua attenzione e non sulla astrazione alla quale l'adulto sta facendo un riferimento implicito.

Attente riflessioni e ricerche hanno fatto comprendere quanto sia importante discuterne in maniera chiara con gli alunni e coinvolgerli sin dall'inizio in questa problematica.

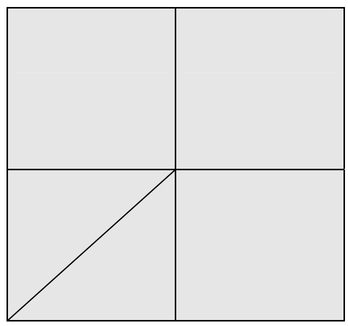
Dunque, prestando una maggiore attenzione all'uso del linguaggio, è possibile migliorare e semplificare l'apprendimento dei bambini fin da molto piccoli, mettendo in evidenza che le frazioni sono presenti nel quotidiano di ciascuno di noi e quindi nel linguaggio comune, ed andando ad esplorare i diversi usi e significati dei termini. D'altra parte, all'età in cui la frazione viene introdotta, parole come equiestese congruenti o sovrapponibili sono per lo più sconosciute (anche se esistono ricerche che dimostrano che l'uso di questi aggettivi non solo è possibile, ma semplifica e migliora l'apprendimento, perfino nella scuola dell'infanzia) [17].

Analogamente, quando si vuol proporre attività di frazionamenti in contesti continui, si presentano in genere solo figure "facili" che, ovviamente, finiscono con l'appartenere sempre alla solite tipologie. Così facendo, però, si rischia di generare la convinzione che non si possono trovare frazioni di tutte le figure piane e solide.
Quindi potrebbe essere più costruttivo usare indistintamente cerchi, rettangoli, quadrati, cubi e parallelepipedi (che sono quelle figure che generalmente si trovano sui testi scolastici), ma anche presentare forme stravaganti o anche figure geometriche che non siano sempre le solite come cerchi quadrati o rettangoli. Usare per esempio figure del tipo mostrato in figura:



e proponendo di trovare strategie adeguate per frazionarle.

E anche di frazionarle in parti tali che non siano lo standard della classica torta divisa in parti multiple di 2 (ché è più comodo usare piuttosto che dividere la torta in 3 parti….) perché si rischia di trovarsi di fronte a casi in cui per esempio la divisione non "standard" di un quadrato in 5 parti "uguali" potrebbe venire rappresentata all'incirca così:



Chiara dimostrazione del misconcetto che si è venuto a formare (dividere sempre a metà). L'idea di semplificare e trovare modelli concreti ad ogni costo a volte si rivela una strategia didattica non ottimale; l'immagine concettuale che il bambino si fa della nuova proposta cognitiva si trasforma molto presto in modello e nascono ostacoli didattici alla formazione della conoscenza. Da qui nascono quindi problemi legati

- all'erronea convinzione che tutte le frazioni siano comprese nell'intervallo (0,1) e la conseguente difficoltà nel comprendere le frazioni negative o maggiori di 1
- alla difficoltà di accettare il fatto che lo stesso simbolo possa assumere valori diversi se applicato a grandezze diverse. Ad esempio $\frac{1}{2}$ pur rappresentando sempre la metà di qualcosa assume valori diversi a seconda della grandezza a cui viene applicata.

2.2. La frazione come quoziente

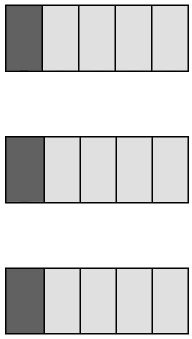
In questo caso è possibile vedere la frazione $\frac{m}{n}$ come una divisione non necessariamente effettuata ma solo indicata ma, a questo punto, l'interpretazione intuitiva non è come quella descritta prima cioè che prendiamo un uno-tutto lo dividiamo in n parti e ne prendiamo m, bensì una vera e propria divisione dove prendiamo il numeratore/dividendo costituito da m oggetti e lo dividiamo per il denominatore/divisore ad n persone.

Poi nel caso in cui si dovesse trovare la frazione $\frac{m}{n}$ di un insieme discreto formato da un certo numero x di oggetti, una tecnica è quella di dividere ciascuno degli x oggetti per n e prenderne m parti sempre se questo sia possibile (cioè se x è divisibile per n) altrimenti ricadiamo in una complicazione concettuale.

Potremmo anche <u>effettuare</u> da divisione indicata dalla frazione $\frac{m}{n}$ e quindi prendendo per comodità di rappresentazione la frazione $\frac{3}{5}$ essa potrebbe essere interpretata sia come

- una frazione parte/tutto,

- una divisione indicata (3 oggetti da distribuire a 5 persone),



- ma anche un numero cioè il quoziente 0,6 se tale divisione viene effettuata, e, in questo caso non produce l'effetto operatorio che produce invece la frazione $\frac{3}{5}$ che l'ha originato e ovviamente non si può neanche dare una "rappresentazione concreta" di questo numero 0,6. Dunque la divisione "indicata ma non effettuata" e la divisione "solo effettuata" hanno ruoli completamente diversi rispetto al concetto di frazione presentato all'inizio.

2.3. La frazione come rapporto (proporzioni)

A volte la frazione $\frac{a}{b}$ si usa esplicitamente per indicare il rapporto tra a e b ed allora si scrive a:b dove il segno " : " sostituisce il segno " $-$ " sia nell'indicare l'operazione di divisione (che può essere solo indicata o da effettuare), ma anche nell'esplicitare una relazione fra due grandezze che stanno tra loro come a "sta a" b.

Per esempio: se abbiamo un segmento AB lungo 20 cm. e uno CD lungo 25 cm., diciamo che il primo è i $\frac{4}{5}$ del secondo, il che può essere scritto sia come $\overline{AB} = \frac{4}{5}\overline{CD}$ oppure $\overline{AB} : \overline{BC} = 4:5$.

La scrittura 4:5 indica il rapporto tra le lunghezze dei due segmenti.

Questo rapporto di proporzionalità è anche applicabile agli insiemi discreti considerando due raccolte di oggetti che siano in rapporto fra loro (due insiemi A e B contenenti uno x e l'altro y elementi stanno fra loro nel rapporto di $\frac{x}{y}$ da cui A:B=x:y[12] o anche $\frac{A}{B} = \frac{x}{y}$ e il rapporto che c'è fra loro è appunto "di x a y").

Intuitivamente,però, ci si allontana da quella che era la definizione originaria di frazione, e, anche se prendessimo il segmento o l'insieme di oggetti in esempio come unitari, il fatto di esprimere $\frac{a}{b}$ e $\frac{x}{y}$ a primo acchito sembra riferirsi a oggetti completamente diversi dalle frazioni.

Una modellizzazione matematica di questa interpretazione chiama in causa la proporzionalità.; se G_1 e G_2 sono due grandezze variabili che possano assumere valori diversi ma reciprocamente legati sempre dallo stesso rapporto esprimibile con una tavola numerica tipo:

[12] Ci riferiamo al rapporto fra la cardinalità dei due insiemi A e B .

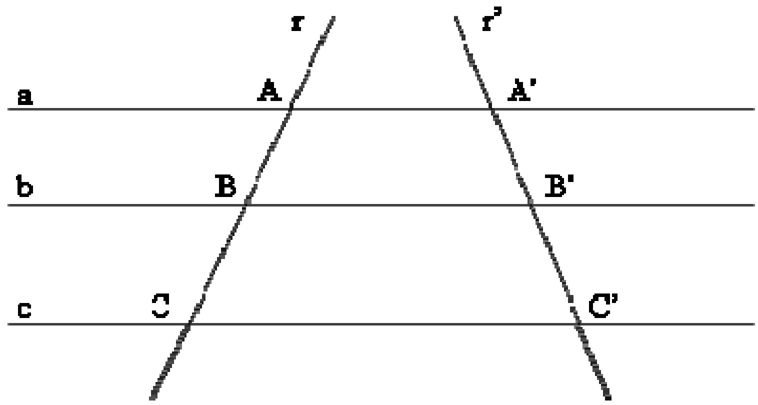
G_1	G_2
8	10
12	15
16	20
…	…
a	b

appare abbastanza chiaro che il rapporto che lega G_1 e G_2 è di 4 a 5 che è meglio esprimibile secondo la scrittura $G_1:G_2=4:5$ che non come $\frac{G_1}{G_2}=\frac{4}{5}$.

D'altra parte, ricordando che una proporzione altro non è che l'uguaglianza di due rapporti per esempio 4:5=12:15 possiamo affermare che le due frazioni $\frac{4}{5}$ e $\frac{12}{15}$ sono due scritture diverse dello stesso numero razionale. In altre parole le coppie di naturali (4;5) e (12;15) appartengono alla stessa classe di equivalenza.

Questo è un altro uso semantico del termine frazione che ha la particolarità dell'interscambiabilità fra numeratore e denominatore, in quanto se il rapporto che lega G_1 e G_2 è di 4 a 5 (e quindi $\frac{4}{5}$) quello che legherà G_2 a G_1 sarà di 5 a 4 (cioè $\frac{5}{4}$).

Una visione grafia, molto efficace, si ha nel caso del teorema di Talete:



dove è indifferente scrivere $AB: A'B' = BC: B'C'$ oppure $AB: BC = A'B' : B'C'$ cioè $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$ oppure $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

Quindi il rapporto di proporzionalità è comunque in entrambi i casi espresso bene ma questa intercambiabilità fra numeratore/antecedente/estremo e denominatore/conseguente/medio può, se non compreso bene, creare misconcezioni.

2.4. La frazione come operatore

La frazione può anche essere considerata un operatore moltiplicativo, e con tale significato la frazione è spesso usato nella scuola, perché, agendo sui numeri puri piuttosto che su insiemi continui o discreti è intesa col significato di una nuova operazione che combina la divisione e la moltiplicazione.

Per esempio trovare $\frac{m}{n}$ di un insieme di x oggetti significa immediatamente operare come segue: (x:n)×m in quanto “l’operatore frazione” agisce sul <u>numero</u> x e non sull’insieme costituito da x oggetti. La situazione problematica per gli studenti si presenta quando il numero di elementi non è divisibile per il denominatore della frazione, ma, superato quell'ostacolo intuitivo e dedotto che è possibile eseguire (se questo può esserci utile nel calcolo) prima la moltiplicazione e poi la divisione allora la frazione è acquisita come operatore e non come relazione parte/tutto.

2.5. La frazione in probabilità

Esaminiamo il ruolo della frazione in questo caso con un esempio: valutiamo ora la probabilità secondo la quale, gettando due dadi, uscirà un multiplo di 4… I casi possibili sono 36, gli eventi favorevoli sono 9 (che esca 4 si presenta in tre casi, 8 si presenta in cinque casi, 12 si presenta solo in un caso). Dunque, la probabilità di quell'evento è esprimibile con la scrittura $\frac{9}{36}$, cioè il numero dei casi favorevoli all'evento rispetto al numero dei casi possibili.

$\frac{9}{36}$ esprime una misura, una probabilità e il fatto che tale frazione sia, da un punto di vista aritmetico, equivalente a $\frac{1}{4}$ ci dice ben poco. Dice assai più un'altra frazione equivalente $\frac{25}{100}$ specie se la scriviamo sotto la forma usuale 25%. Se poi esprimiamo le frazioni dette in un'altra equivalente per esempio $\frac{27}{108}$ questa frazione perde proprio senso,e non rappresenta più il problema che si stava discutendo.

Ci siamo in questo modo allontanati molto da quella intuitiva definizione che all'inizio avevamo dato di frazione.

2.6. La frazione nei punteggi

Se due amici andassero al luna park, e giocassero al tiro al bersaglio, si potrebbe ipotizzare li situazione in cui il primo dei due che chiameremo A voglia colpire un bersaglio e avesse solo 5 tiri a disposizione. Supponiamo che faccia centro 2 volte; nella seconda manche ha a disposizione 3 tiri e fa centro ancora 2 volte.

Il secondo amico B fa centro 3 volte su 5 nella prima manche e poi solo una volta su 3 nella seconda manche.

A ha fatto centro 4 volte su 8 ed anche B ha fatto 4 su 8.

Esprimendo matematicamente quello che è avvenuto si ha che:

A I	A II	A TOT	B I	B II	B TOT
$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{8}$

Ci troviamo di fronte "all'addizione" di frazioni : $\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\approx\frac{4}{8}$ [13] equivalente ad $\frac{1}{2}$ che ci dice che A e B hanno colpito il bersaglio la metà delle volte che hanno tirato.

Le frazioni nei punteggi sono un oggetto matematico che ha peculiarità proprie, intuitive ma assai poco vicine alla definizione che era stata data all'inizio.

[13] Da notare che non si tratta di somma di frazioni nel senso classico l'uguale scritto non coincide con l'uguale a cui siamo abituati in aritmetica.

2.7. La frazione come numero razionale

Alla domanda cos'è un numero razionale un matematico risponderebbe subito: il rappresentante di una classe di equivalenza.

Infatti una volta stabilita la relazione di equivalenza $(\approx)$ tale che $(a;b) \approx (c;d) \leftrightarrow ad = bc$, il numero razionale $(a;b)$ non è altro che il rappresentante della classe di equivalenza $[(a,b)]$ costituita da tutte le infinite coppie di numeri$\{(a;b)$con $a \in N$ e $b \in N - (0)\}$ che sono equivalenti fra loro. Solo per comodità si evita di scrivere un numero razionale come rappresentante di una classe di equivalenza e lo si presenta sotto la forma $(a;b)$ o lo si scrive sotto forma di frazione $\frac{a}{b}$.

Quindi quando parliamo per esempio del numero razionale $[(1,5)]$ questi trova una ottima rappresentazione nella scrittura $\frac{1}{5}$ o anche $0{,}2$ (anche se le due rappresentazioni hanno all'origine un significato profondamente diverso) ma in realtà sappiamo benissimo che si porta dietro tutte le infinite coppie di numeri ad esso equivalenti rappresentate ottimamente da "una frazione ridotta ai minimi termini".

Il fatto di poter rappresentare un numero razionale attraverso una frazione è estremamente di aiuto quando ci troviamo a dovere operare addizioni o moltiplicazioni fra numeri razionali periodici o misti. Se volessimo fare un esempio dover eseguire l'addizione $3{,}\overline{4} + 2{,}3$ o la moltiplicazione fra gli stessi numeri, è ovvio che la scrittura frazionaria ci viene in aiuto perché trasformando la scrittura $3{,}\overline{4} + 2{,}3$ in somma di frazioni $\frac{31}{9} + \frac{23}{10} = \frac{310 + 207}{90} = \frac{517}{90} = 5{,}7\overline{4}$ si evita allo studente di trovarsi in una situazione di imbarazzo. Per lo stesso motivo conviene eseguire la moltiplicazione utilizzando lo "strumento" frazione che come si è visto e poco utile per rappresentare i numeri razionali e gestirne la teoria, mentre risulta di fondamentale importanza per gestire le operazioni fra essi.

In altre parole la frazione $\frac{a}{b}$ non è un numero razionale ma lo rappresenta abbastanza bene.

Osservando che $\forall n \in N$ sia la frazione $\frac{n}{1}$ che la scrittura decimale n,0 riescono bene a rappresentare il razionale $[(n,1)]$ vediamo facilmente che i razionali assoluti Q^a possono essere pensati come una estensione dei naturali.

2.7.1. Numeri razionali e numeri decimali

Abbiamo visto che il numero razionale [(m;n)] può essere rappresentato sia da una frazione che da un numero decimale periodico[14], e la loro scrittura è intercambiabile nel senso che è possibile passare dalla frazione al decimale e viceversa.

A partire da una frazione $\frac{m}{n}$ con m ed n interi ed n≠0, ed eseguendo la divisione, a seconda che la divisione abbia termine o meno, otteniamo un quoziente decimale periodico che può essere un numero decimale finito (se il periodo è zero) o decimale periodico (se il periodo è $\neq 0$).

A partire invece da una rappresentazione decimale periodica (di periodo 0 o $\neq 0$) possiamo sempre risalire alla frazione generatrice di quell'allineamento di cifre.

[14] Se il numero decimale è finito lo si può vedere come un numero decimale periodico di periodo zero. Ritengo utile definire il rappresentate di un razionale un numero decimale sempre e comunque decimale periodico per evitare confusioni quando nell'introduzione dei numeri irrazionali ci troveremo davanti ad allineamenti decimali infiniti, che però, a differenza di questi, non sono periodici affatto.

a. Numeri decimali finiti

Una frazione avente per denominatore una potenza di 10 è detta frazione decimale.

- Se il numero razionale assegnato è espresso da una frazione decimale con il numeratore multiplo del denominatore, esso corrisponde ad un numero intero;
- Se invece la frazione decimale assegnata non ha il numeratore multiplo del denominatore, è possibile trasformarla in un numero formato da una parte intera e una decimale, separate da virgola, detto numero decimale finito. Infatti basta dividere il numeratore per il denominatore della frazione:

$$\frac{14}{100} = 14:100=0{,}14$$

Se una qualsiasi frazione ridotta ai minimi termini e non decimale $\frac{m}{n}$ determina un numero decimale finito, essa è equivalente ad una frazione decimale $\frac{1}{4} = 0{,}25 = \frac{25}{100} \approx \frac{1}{4}$.

Inoltre, una frazione irriducibile non decimale si può trasformare in un numero decimale finito e viceversa, se la scomposizione in fattori primi del denominatore della frazione presenta unicamente i numeri 2 o 5 oppure 2 e 5.

b. Numeri decimali periodici

Le frazioni irriducibili non decimali non originano un numero decimale finito. In tali casi la divisione tra numeratore e denominatore non da mai resto zero e il numero che si ottiene è un numero decimale periodico: da un certo punto in poi, dopo la virgola, le cifre si ripetono all'infinito singolarmente o per gruppi di cifre uguali. La cifra o il gruppo di cifre che si ripetono si chiama periodo, mentre l'insieme delle cifre dopo la virgola, ma prima del periodo, costituisce l'antiperiodo.

Esempio:

Considero il numero $2,\overline{345}$ questo può essere scritto come

$$2,\overline{345} = 2 + 3\frac{1}{10} + 4\frac{1}{100} + 5\frac{1}{1000} + ... = 2 + 345\frac{1}{10^3} + 345\frac{1}{10^6} + 345\frac{1}{10^9} + ... =$$
$$= 2 + 345\frac{1}{10^3}\left(1 + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + ...\right) = 2 + \frac{345}{10^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{10^{3k}} = 2 + \frac{345}{10^3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10^3}\right)^k =$$
$$= 2 + \frac{345}{10^3}\frac{10^3}{10^3 - 1} = 2 + \frac{345}{10^3 - 1} = 2 + \frac{345}{999.}$$

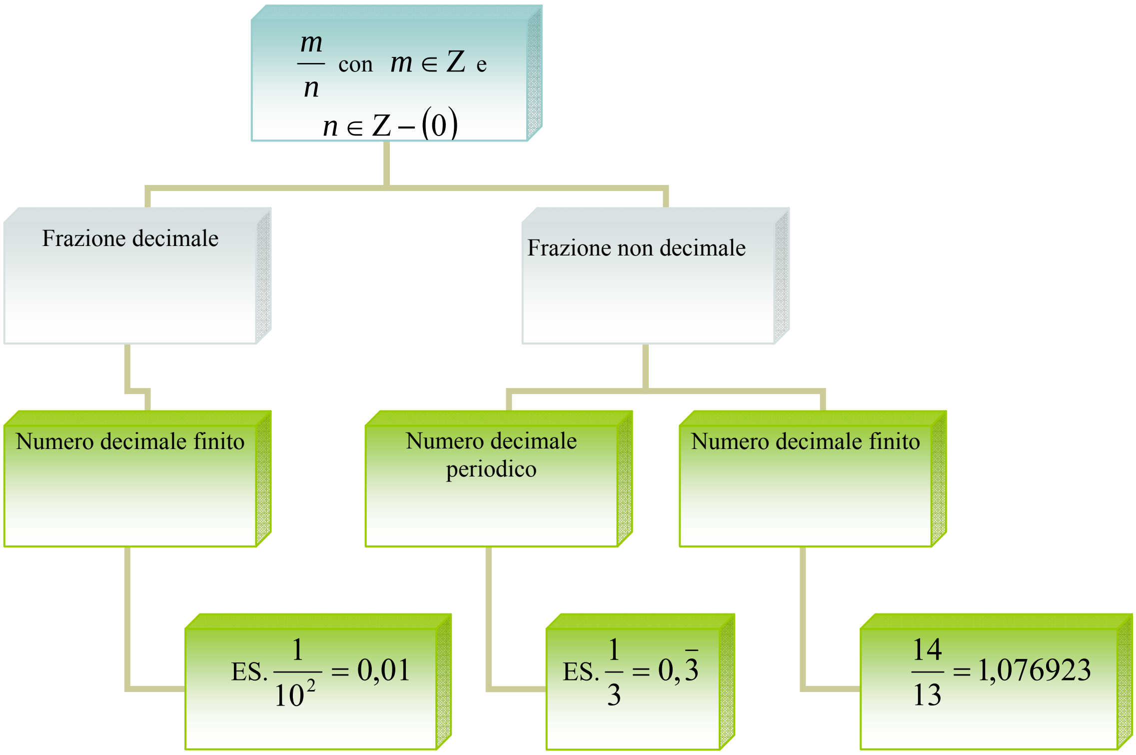
[15]

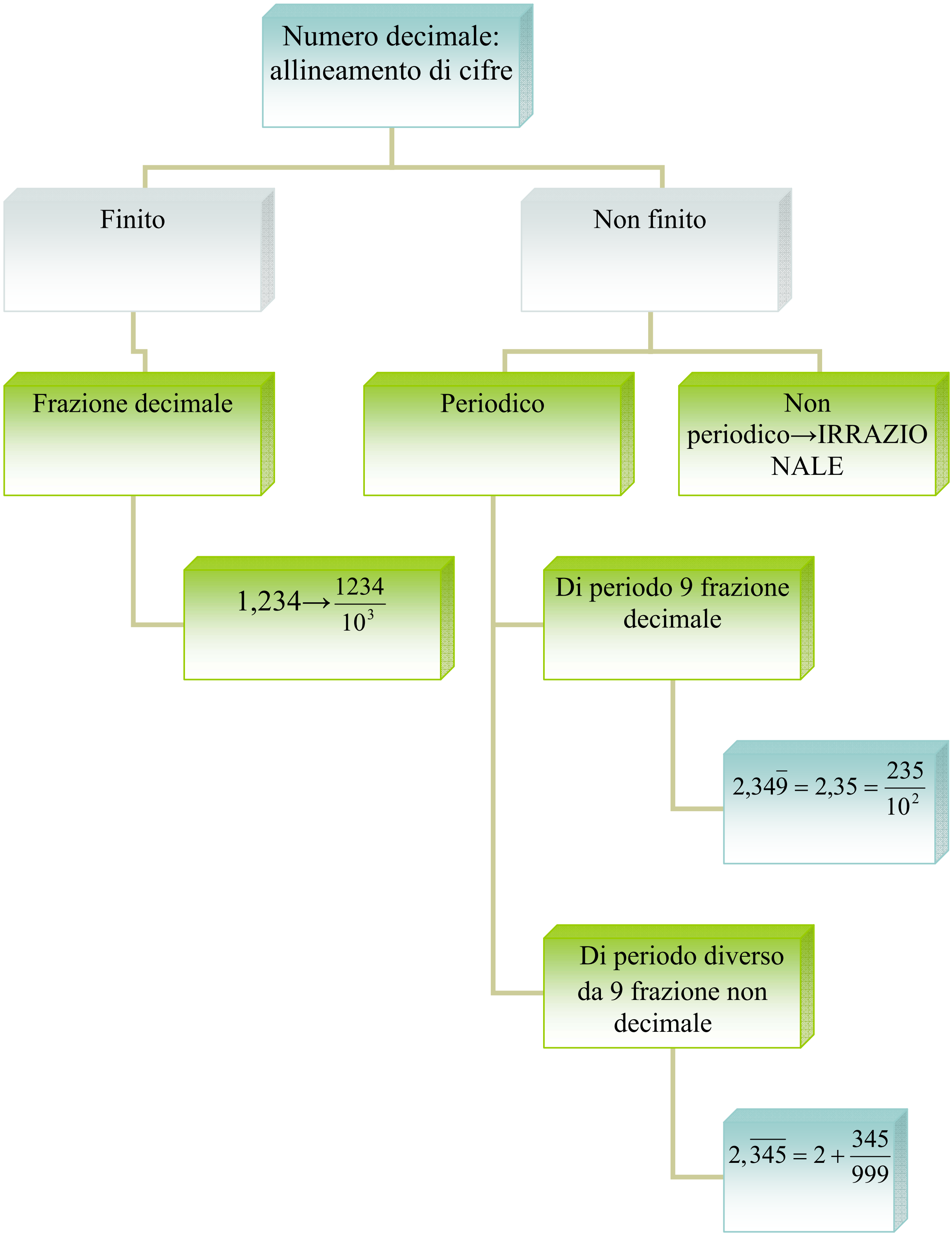
Analogamente

$$0,\bar{9} = 0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + ... = \frac{9}{10}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{9}{10}\frac{10}{9} = 1$$

Volendo riassumere in uno schema quello che è stato detto finora

[15] $\sum_{k=}^{\infty}\left(\frac{1}{10^3}\right)^k$ è una serie geometrica di ragione $\frac{1}{10^3}$ la cui somma vale $\frac{1}{1 - \frac{1}{10^3}} = \frac{10^3}{10^3 - 1}$


$\frac{m}{n}$ con $m \in Z$ e $n \in Z-(0)$
Frazione decimale
Frazione non decimale
Numero decimale finito
Numero decimale periodico
Numero decimale finito
ES. $\frac{1}{10^2} = 0,01$
ES. $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$
$\frac{14}{13} = 1,076923$


Numero decimale: allineamento di cifre
Finito
Non finito
Frazione decimale
Periodico
Non periodico→IRRAZIONALE
$1,234 \to \frac{1234}{10^3}$
Di periodo 9 frazione decimale
$2,34\overline{9} = 2,35 = \frac{235}{10^2}$
Di periodo diverso da 9 frazione non decimale
$2,\overline{345} = 2 + \frac{345}{999}$

I numeri decimali periodici e le frazioni generatrici, creano molte difficoltà fra studenti e sono fonti di molti misconcetti come ad esempio che il numero periodico semplice $0,\overline{9}$ sia più piccolo di 1, e quindi approssimabile ad 1. Si può superare l'ostacolo portando alcuni esempi per fa comprendere che i numeri periodici semplici (senza antiperiodo) di periodo 9 non siano altro che numeri decimali finiti. Così come parlare di frazione generatrice di un numero decimale periodico[16] permette di poter lavorare meglio fra numeri razionali che presentandosi in forma diversa di come si è abituati a vederli, spesso non vengono riconosciuti come tali.

2.8. La frazione come punto di una retta orientata

Sui libri di testo o nelle attività in aula la seguente proposta " porre $\frac{3}{4}$ sulla retta numerica". Rispondere a questa domanda significa applicare una relazione d'ordine in Q^a e segnare il punto tra l'origine 0 e l'unità 1. In tal caso la frazione è vista come un valore-punto sulla retta orientata assai più vicina ad essere un numero razionale che non una frazione (intesa come strumento di calcolo). Quando scriviamo infatti $\frac{3}{4}<\frac{6}{7}$ non stiamo sfruttando il concetto standard di frazione in quanto non prendiamo l'uno-tutto lo dividiamo in n parti e ne prendiamo m ma consideriamo la frazione come un numero e ne stiamo cercando una collocazione sulla retta. Per rifarci al concetto uno/tutto forse potremo

[16] La frazione generatrice è una frazione avente come numeratore il numero scritto senza la virgola, diminuito del numero formato da tutte le cifre che precedono il periodo; come denominatore il numero costituito da tanti 9 quante sono le cifre del periodo e, se esiste l'antiperiodo, seguito da tanti zeri quante sono le sue cifre.

considerare le frazioni $\frac{21}{28}$ e $\frac{24}{28}$ prendendo come uno-tutto il segmento indicato ma si tratta comunque di una forzatura.

In questo caso la frazione assume quindi il significato di distanza dall'origine al punto/frazione, distanza ovviamente relativa, dato che dipende dall'unità di misura che stiamo considerando.

2.9. La frazione come misura

Sulle bottiglie si legge spesso 0,75 l, il che sta ad indicare una quantità, una misura, nella unità decimale litro.

Chiunque è in grado di capire che si tratta di $\frac{3}{4}$ di un litro.

Ma neanche in questo caso si tratta di una frazione . Non pigliamo infatti un uno-tutto da dividere in 4 parti e prenderne tre, ma di una quantità ($\frac{3}{4}$ o $0{,}75$) che indica la capacità della bottiglia.

In questo caso allora abbiamo delle misure; a volte conviene pensarle espresse come numeri razionali, a volte come frazioni, ma non conviene in genere fare riferimento alla definizione originaria di frazione.

2.10. La frazione come indicazione di quantità di scelta in un tutto

Se durante una promozione un negoziante volesse premiare i suoi clienti scegliendo di dare un omaggio ogni dieci di essi, a quanti clienti sarà dato il premio? Pensandoci un attimo se il primo cliente verrà premiato, poi toccherà all'undicesimo al ventunesimo e così via, quindi supponendo che i clienti di quella giornata sono stati 100, di questi cento ne saranno stati premiati 10 quindi $\frac{1}{10}$ dei clienti della giornata.

D'altro canto il negoziante stesso aveva pensato di premiarne uno su dieci o uno ogni dieci il che potrebbe essere sempre espresso come $\frac{1}{10}$ ma la scrittura frazionaria in questo caso ha poco a che vedere con la definizione di frazione.

2.11. La frazione e la percentuale

Come nella frazione in probabilità, a volte conviene esprimere la percentuale come frazione o come decimale a seconda dei casi.

Un 25% può essere indicato come $\frac{25}{100}$ o $\frac{1}{4}$ o come $0{,}25$, e, anche se le scritture risultano formalmente equivalenti, spesso il significato in alcune di esse non è immediato, il che significa che ci sono significati distinti che ciascuno di noi riconosce alle diverse scritture formali.

La maggior parte degli studenti incontra difficoltà nel comprendere che il passaggio dalle frazioni al numero percentuale non è altro che un cambio di rappresentazione, cioè l'espressione di uno stesso oggetto matematico attraverso simboli e notazioni differenti. A questo scopo sarebbe utile esplicitare agli studenti lo schema operativo

FRAZIONE $\Leftrightarrow$ NUMERO PERCENTUALE $\Leftrightarrow$ NUMERO DECIMALE

del passaggio dall'una all'altra rappresentazione per renderli consapevoli dell'equivalenza fra esse e apportare esempi che chiariscano l'applicazione concreta di questo schema

- $\frac{2}{5}$=2:5=0,4=$\frac{0.4 \cdot 100}{100}$ =40%
- 40%=40:100=$\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$

- 40%=40:100=0,4
- 0,40=$\frac{0.4 \cdot 100}{100}=\frac{40}{100}$=40%

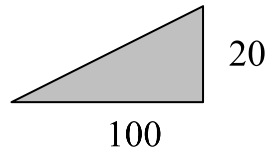
2.12. La frazione nel linguaggio quotidiano

Dunque come abbiamo potuto vedere nella pratica quotidiana le frazioni sono presenti un po' dovunque. Oltre agli esempi riportati basti pensare all'orologio alle frasi tipo "sono le otto e un quarto" quel quarto vuol dire 15 minuti visto che si tratta di un quarto di una unità che vale 60 minuti e neanche se l'idea del "quarto" come frazione viene bene rappresentata dalle lancette dell'orologio sul quadrante a ben pochi verrebbe in mente di associarlo al concetto di frazione come divisione dell'uno-tutto in 60 parti uguali delle quali ne abbiamo preso 15.

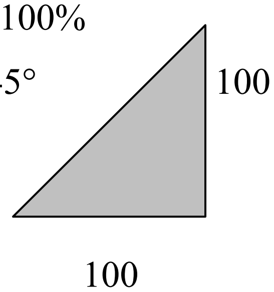
In musica, le frazioni hanno un ruolo determinante, si pensi alla terminologia adottata per esempio alla "ottava". L'ingresso delle frazioni nella musica è antichissimo c'è chi lo fa risalire a Pitagora.
Le durate relative alle note musicali si indicano di solito coi seguenti nomi: intero o semibreve, metà o minima,quarto o semiminima, ottavo o croma, sedicesimo o biscroma ecc.

Nella vita quotidiana si sente spesso parlare di sconto e intuitivamente capiamo che se lo sconto è del 50% pagheremo metà del prezzo intero così come se fosse del 25% pagheremmo il prezzo originario scontato di un quarto. Il viceversa è più complicato, se una cosa costava 80 e ora costa 100 è aumentata di $\frac{1}{4}$ cioè del 25%; se ora cala di $\frac{1}{4}$ non torna a 80 come molti sarebbero portati rispondere ma arriva a 75.

Ritroviamo ancora la percentuale sui cartelli stradali per indicare la pendenza del terreno per esempio una pendenza del tipo mostrato in figura è del 20% perché rispetto a 100m. di distanza frontale piana fa alzare di 20m; dunque ci si alza di $\frac{1}{5}$



Oppure una pendenza come la seguente è del 100%
Perché ci si alza di 1 e l'angolo di salita è di 45°



Nelle misure spesso ricorrono frazioni percentuali numeri razionali non sempre fra loro interscambiabili. Mezzo chilogrammo di pasta, 0,50 litri, 50% di acqua per una miscela e così via: non sempre si vede che si tratta in realtà dello stesso numero razionale.
Nelle ricette di cucina quando le indicazioni per 4 persone devono essere modificate perché i commensali sono 6 e ovviamente non si tratta di aggiungere 2 unità a ogni misura bensì modificare la quantità aggiungendo il 50%, cioè moltiplicandola per $\frac{3}{2}$ (il che non è proprio immediatamente visibile).

In medicina capita spesso che si debba ridurre a metà una dose riempire un flacone per i suoi $\frac{3}{4}$, fare una soluzione al 10% e così via si possono fare tantissimi esempi dell'uso quotidiano che facciamo delle frazioni.

2.13. Quanti sono i numeri razionali?

A prima vista potrebbero sembrare di più dei naturali ma in realtà l'insieme Q è un insieme numerabile cioè ha la stessa cardinalità $\aleph_0$ dell'insieme dei naturali.

Per dimostrare che l'insieme dei numeri razionali è numerabile (ci limitiamo ai razionali positivi, sebbene la generalizzazione sia banale), osserviamo che tutti i razionali positivi si possono scrivere nella forma $\frac{a}{b}$ con a e b interi positivi. Possiamo creare la seguente tabella delle frazioni $\frac{a}{b}$:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \ldots$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$$

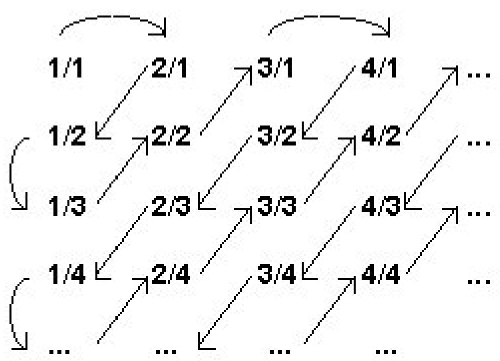
$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \ldots$$

$$\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \ldots$$

$$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}, \ldots$$

E così via.

Tramite la cosiddetta diagonalizzazione



si può quindi ottenere la lista:

$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}$.....ecc.

Se da questa lista cancelliamo le frazioni che non sono ridotte ai minimi termini ci rimane la seguente successione:

$1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3, 4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, 5, \ldots\ldots$

che contiene esattamente tutti i numeri razionali.

Non è superfluo osservare che questa sequenza non è ordinata (nel senso numerico di "ogni numero è maggiore del precedente") e, anzi, è impossibile costruire una lista ordinata dei numeri razionali.

2.14.Gli errori frequenti

Nell'educazione matematica i numeri occupano un posto di rilievo sia come strumento per affrontare e risolvere i problemi, sia come oggetti del sapere matematico da considerare per se stessi.

L'idea di numero naturale è complessa e richiede un approccio che si avvale di diversi punti di vista (ordinalità, cardinalità, misura ecc.) e la sua acquisizione avviene a livelli sempre più elevati di interiorizzazione e di astrazione durante l'intero corso degli studi.

Secondo la teoria dei modelli intuitivi un tale tipo di modello continua ad agire indisturbato nel tempo ed è ragionevole pensare che esso diventi inadeguato qualora si volesse ampliare il sistema numerico usato introducendo "oggetti" più complicati che assumono anch'essi il nome di numero. Come abbiamo visto, uno degli esempi più significativi, è proprio quello di numero razionale, che non è una banale estensione del concetto primitivo di numero naturale ma richiede un vero e proprio riassettamento concettuale. L'adattarsi di questo modello primitivo alle diverse situazioni problematiche e ai diversi contesti scolastici mette in luce un aspetto molto importante che è quello dell'identificazione del numero e della sua scrittura. Da qui scaturiscono conseguenze interessanti come quella che riguarda il sistema di classificazione dei diversi numeri e porta a determinare classi diverse in relazione a scritture diverse. E ciò denota che nella mente degli studenti non è consolidata l'idea che scritture diverse possano essere equivalenti.

► Le frazioni a loro volta sono spesso rifiutate come numeri, se scritti in forma frazionaria, ma sono accettati come numeri se riportati in forma decimale. Sembra allora di poter dire che il modello di numero naturale si adatti con una certa immediatezza alla rappresentazione decimale in cui i ragazzi colgono spontaneamente il significato di numero essendo i decimali "i naturali con la virgola", ma ciò presenta difficoltà quando gli alunni devono confrontare e ordinare i numeri decimali e quindi ad errori del tipo 3,15>3,7 perché 15>7 : istintivamente si tratta la parte decimale come se fosse un numero naturale e con conseguente evidenza di come ci sia una scarsa comprensione del valore posizionale delle cifre nella scrittura decimale[17].

Conseguenza diretta di questa difficoltà si riscontra nel tentativo, segnalato da numerosissimi casi nel contesto internazionale, di trovare il "successivo" alle frazioni e ai numeri decimali col risultato che il successivo di $\frac{3}{5}$ è $\frac{4}{5}$ perché 4 è il successivo di 3 o sempre per lo stesso motivo che il successivo di 0,3 è 0,4 .

[17] Questo ragionamento è assai più diffuso di quanto non si creda ed è stato messo in evidenza dalla letteratura di ricerca fino dagli anni '60. Non sempre si rivela naturale scrivere 3,7 come 3,70. ad impedire la naturalezza di questo passaggio sta anche una regola acquisita precedentemente, in base alla quale aggiungere uno 0 in fondo a un numero vuol dire moltiplicarlo per 10.[16]

Questi problemi [16] , rilevati dai ricercatori negli studenti di qualsiasi età, hanno svariate sfaccettature e si ritrovano anche quando si tratta di ordinare le frazioni, per esempio date due frazioni $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{9}$, è frequentissimo l'errore che $\frac{2}{3} < \frac{4}{9}$ perché 2<4.

O quando si deve stabilire quale fra i due numeri $\frac{2}{3}$ e 0,75 è maggiore dell'altro, e la cosa può produrre grosse difficoltà in quanto i due numeri vengono visti come due concetti diversi e quindi non confrontabili.

Inoltre, quando si portano esempi di razionali, si fa ricorso esclusivamente alle frazioni e ciò assieme agli errori frequenti valutati in precedenza, continua a mettere in risalto la distinzione fra decimali e frazioni basate sulla scrittura e quindi l'inadeguatezza della concettualizzazione di numero razionale.

Si tratta quindi di un errore definito da Brousseau "epistemologico" dovuto a fatto che l'alunno ha una conoscenza legata ad altre conoscenze precedenti imprecise e provvisorie o quando ha una conoscenza anteriore che ha avuto successo ma che ora è inadatta.[27] [29] [30]

Il fatto di considerare la frazione come una coppia di numeri distinti porta ad errori nel momento in cui devono essere affrontati problemi di operazioni fra frazioni tipo:

- $n\ (\frac{a}{b}) = \frac{na}{nb}$
- opposto di $\frac{a}{b}$ uguale a $\frac{-a}{-b}$

- nel caso di divisione tra frazioni $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ tendono a semplificare quando è possibile il denominatore della prima con il numeratore della seconda
- o anche $\frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{3}{2}$
- dati due razionali a e b, se a·b=1 allora a=1 e b=1 il che è sicuramente vero nei numeri naturali ma fra razionali potrebbe succedere che sia $a = \frac{1}{2}$ e $b = 2$
- capita anche di vedere $\frac{ab+c}{a} = b + c$
- tendono a generalizzare il concetto di frazione a due numeri qualsiasi esempio lampante di ciò sono espressioni del tipo $\frac{\sqrt{2}}{3}$ oppure $\frac{4}{0}$ che spesso vengono considerate frazioni.
- Nell'eseguire la moltiplicazione fra frazioni molti restano colpiti dal fatto che per esempio $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ dove $\frac{1}{8}$ è certamente minore sia del moltiplicatore che del moltiplicando, memori del fatto che nella moltiplicazione fra naturali il prodotto risulta sempre maggiore o uguale a ciascuno dei due fattori

La riduzione ai minimi termini di una frazione è un altro dei problemi più evidenti strettamente legato all'equivalenza di frazioni di cui abbiamo parlato prima.

Infatti per passare da una frazione alla sua equivalente bisogna a seconda dei casi moltiplicare o dividere per uno stesso numero numeratore e denominatore e questo dividere viene spesso fra studenti riassunto con un veloce ma pericoloso "cancellare sopra e sotto" col risultato di vedere espressioni del tipo $\frac{3}{6}$ che, ridotta ai minimi termini si trasforma in $\frac{\ }{2}$ in quanto abbiamo "cancellato" il 3 che era un numero comune sia per il 3 del numeratore che per il 6 del denominatore. Alle volte quel $\frac{\ }{2}$ si trasforma in $\frac{0}{2}$, giusto perchè cancellando non è rimasto nulla (dalle sottrazioni: se da 3 togli 3 non resta nulla e scrivi 0).

Il passaggio dalle frazioni ai numeri con la virgola è veramente molto complicato. In letteratura si segnalano studenti che semplicemente trasformano così:

$$\frac{2}{3} = 2{,}3$$

La letteratura segnala già dagli anni '60 casi in cui emerge l'ingestibilità da parte dello studente dell'equivalenza fra frazioni, [16] anche in base al tipo di operazione che deve fare per rendere una frazione equivalente ad un'altra. Negli esempi riportati in seguito

- $\frac{1}{3} = \frac{2}{?}$
- $\frac{2}{7} = \frac{?}{14}$
- $\frac{4}{12} = \frac{1}{?}$
- $\frac{2}{7} = \frac{?}{14} = \frac{10}{?}$

Si è visto come, mentre nelle prime due è più facile avere risposte esatte, meno del 30% degli studenti riesce a risolvere correttamente l'ultima delle equivalenze proposte e anche che è più semplice passare da frazioni con numeratori e denominatori più piccoli a quelle equivalente con numeratore e denominatore più grandi piuttosto che il viceversa.

Anche nel caso delle equivalenze lo studente fa più fatica con gli insiemi discreti per esempio se abbiamo 3 palline bianche e 6 nere, possiamo dire che le bianche sono $\frac{1}{3}$ del totale delle palline; ma se abbiamo 6 palline bianche e 12 nere lo studente potrebbe faticare a capire il perché le palline bianche continuino a restare esattamente $\frac{1}{3}$ del totale. Scatta infatti un meccanismo percettivo che non è da sottovalutare soprattutto negli studenti più giovani.

Risposte varie ma, in bassa percentuale esatte (anche fra studenti maturi), si hanno quando per esempio si chiede:

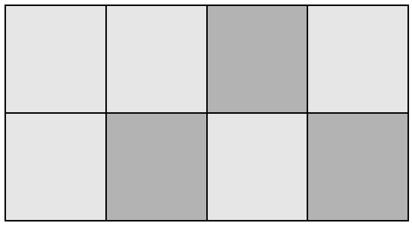
Data una frazione $\frac{x}{y}$ dividendo sia x che y per 2, ottengo una frazione che rispetto alla prima è la metà, il doppio, o esattamente uguale?

Le risposte più diffuse sono "doppio" e "metà".

Di contro, la regola che invece funziona benissimo, è quella della moltiplicazione $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ la cui "generalizzazione" alla addizione porta però ad errori del tipo $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ effettuata senza e la corretta riduzione delle due frazioni ad un comune denominatore.

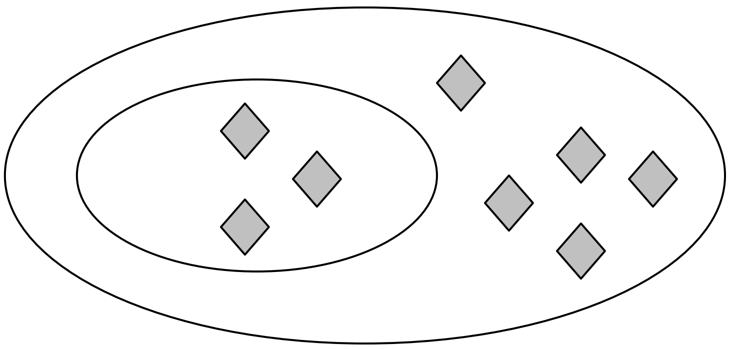
Quindi per addizione e sottrazione fra frazioni, la letteratura internazionale ne ha ampliamente evidenziato le difficoltà tanto da proporre, qualche decina di anni fa, di non fornire all'allievo spiegazioni sul significato di $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$, ma di fornire solo la regola per effettuarla $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ senza ulteriori spiegazioni, il che indubbiamente prodotto un netto miglioramento nelle prestazioni formali ma ad un clamoroso insuccesso a livello concettuale.

Classica anche la difficoltà a riconoscere gli schemi che si denota per esempio quando presentando a uno studente una situazione come quella rappresentata in figura



Ci si aspetterebbe che egli riconosca facilmente che sono stati ombreggiati i $\frac{3}{8}$ del rettangolo-unità, mentre a volte accade invece che lo studente risponda $\frac{3}{5}$.

Questo fatto si presenta con maggiore frequenza nel caso discreto qui di seguito illustrato



dove è comunque difficile capire se si tratti di $\frac{3}{5}$ o di $\frac{3}{8}$ segno del fatto che gli schemi non sempre sono esplicativi e che comunque alcuni sono più difficile da interpretare di altri.

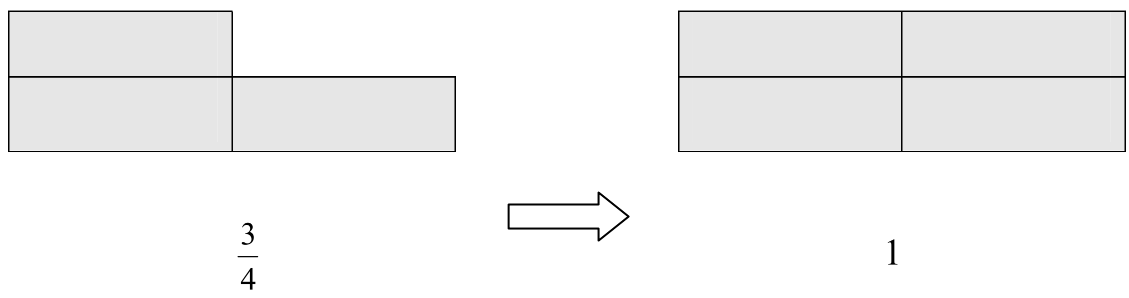
Peggiore la situazione quando si parla di frazioni improprie.

Concludo illustrando le difficoltà nel passare da una frazione all'unità che l'ha generata e nel gestire autonomamente schemi o figure o modelli.

Di solito negli esercizi si da una unità (continua o discreta) e si chiede di trovarne una frazione. Difficilmente il problema è posto in senso inverso cioè data la frazione risalire all'unità.

E' fondamentale costruire l'idea che non sempre c'è un'unica risposta corretta a questo compito e che tutte le soluzioni corrette trovate risolvono altrettanto bene l'esercizio.

Arrivare a capire questo è difficile a causa del contratto didattico[18] e anche nel caso in cui si fanno esercizi di questo tipo, la figura che si da ha l'aspetto tipico delle frazioni, cioè la figura è concava o le manca proprio la parte che ricostruisce l'intero e solo quell'intero per esempio:



[18] Lo studente crede che l'insegnante abbia già in mente la soluzione giusta e che si aspetti esattamente quella.il suo compito è dunque quello di intuire o indovinare quello che l'insegnante si aspetta di sentirsi dire.

E’ invece fondamentale dare esercizi in cui la parte frazionaria ha l’aspetto di una figura compatta, unitaria, convessa; per risolvere l’esercizio, lo studente deve rompere il modello mentale che si sta costruendo.

La letteratura ha messo ben in evidenza che uno studente entra in crisi quando deve gestire schemi, diagrammi figure in modo spontaneo o produrli autonomamente.

► Questo discorso vale in generale, ma per le frazioni in modo specifico, dove la cosa si è recentemente rivelata drammatica grazie agli studi anticipatori di Lesh, Post, Behr e più recenti di Gagatsis, Michaelidou, Sciacalli solo per citarne alcuni.

Il fatto è che, passare da modelli interni ad esterni, è una traduzione tutt’altro che banale; i modelli esterni sono vari: registro linguistico orale, scritto, disegni, figure, schemi….con la difficoltà ancora più marcata ed evidente nella gestione di schemi per situazioni discrete.

Su questa gestione autonoma bisogna lavorare didatticamente, in aula, non ci si può aspettare che sia un apprendimento spontaneo o indotto dall’abitudine che invece al contrario costanza e ripetizione agiscono in senso contrario all’apprendimento consapevole.

Un discorso a parte meritano invece le operazioni che mettono in gioco i numeri periodici e le tecniche dell’aritmetica elementare, le quali se espresse meccanicamente, possono essere insufficienti.

Per operazioni del tipo $1-0,\bar{3}$ nella quale sarebbe utile una buona padronanza del ragionamento induttivo:

1-0,3=0,7

1-0,33=0,67

1-0,333=0,667

……….

1-0,333…3=0,666…67

oppure della rappresentazione decimale equivalente

$1-0,\overline{3}=0,\overline{9}-0,\overline{3}=0,9999.....-0,3333....=0,6666....=0,\overline{6}$

o del passaggio alla notazione frazionaria

$1-0,\overline{3}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}=0,\overline{6}$ ci si trova di fronte invece ad errori concettuali e a scarsa padronanza dei cambiamenti di rappresentazioni quando addirittura non riescono a essere svolte perché non comprese.

Se volessimo calcolare ad esempio $(0,02)^2$

L'errore frequente è $(0,02)^2 \rightarrow 0,04$

Mentre utilizzando la notazione decimale $0,02\times 0,02=0,0004$

o la notazione scientifica $(0,02)^2 = (2\cdot 10^{-2})^2 = 4\cdot 10^{-4}$

o la notazione frazionaria $(0,02)^2=\left(\frac{2}{100}\right)^2=\frac{4}{10000}$

l'errore non si verifica.

Da questi esempi emerge come, una discreta padronanza delle diverse notazioni, consente di controllare i propri procedimenti. In particolare la capacità di operare con diverse notazioni è un ottimo strumento per evitare gli errori provocati dall'applicazione impropria di tecniche.

Infatti capita spesso che i passaggi che possono creare difficoltà in un sistema di rappresentazione siano molto più semplici nell'altro.

Un interessante articolo del 1997 del Prof. Ferrari dell'Università di Torino [41], che fa riferimento ad una ricerca svolta in Francia nel 1995 dal Prof. Munyazikwiye[19] con studenti della secondaria superiore, mostra notevoli difficoltà degli studenti nella risoluzione di problemi richiedenti conversioni di tipo diverso:

Notazione decimale ↔ notazione frazionaria (esercizi proposti rappresentare 0,79 come frazione e rappresentare $\frac{1}{-0.0008}$ in scrittura decimale)

Notazione frazionaria ↔ notazione scientifica (esercizi proposti rappresentare $\frac{2}{0{,}005}$ in notazione scientifica e rappresentare $2{,}7 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^{2}$ come frazione)

Notazione scientifica ↔ notazione decimale (esercizi proposti rappresentare $1{,}27 \times 10^{-2}$ in scrittura decimale e trasformare 0,0075 in notazione scientifica)

Dunque fin dall'inizio occorre che lo studente apprenda ad usare tutti i registri semiotici a sua disposizione in modo autonomo *scegliendo* prima quello che gli sembra più idoneo alla situazione e poi a *trattare* per passare da una rappresentazione ad un'altra nello stesso registro, a *convertire* per passare da una rappresentazione all'altra in registri diversi. Queste sono le tre rappresentazioni fondamentali della semiotica. La ricerca degli ultimi 30 anni è riuscita a mettere bene in evidenza che è meglio dare sempre un senso a quello che si sta facendo e questo

[19] Munyazikwiye, A. : 1995, "Problèmes didactiques liés aux écritures des nombres", Recherches en didactique des mathématique, 15/2, 31-61

avviene attraverso vari registri semiotici e con il coinvolgimento personale dello studente nella costruzione della propria conoscenza.

Conoscenze che dovranno poi comunque imparare a gestire attraverso l'abbattimento di ostacoli didattici ed epistemologici che sono delle vere e proprie conoscenze acquisite in precedenza (che vengono definite come convinzioni o credenze) ma che ora si rivelano fallimentari.
Oggi disponiamo grazie alle ricerche di Fischbein, Brousseau e Duval, di uno strumento di analisi delle risposte degli studenti in aula, l'epistemologia dell'apprendimento matematico.

3. La didattica della matematica

Secondo D'Amore [13], il matematico Felix Klein (1849-1925) lamentava già verso la fine del XIX sec. la mancanza di una preparazione alla professione di insegnante di matematica presso le università: secondo Klein, infatti, il periodo degli studi universitari costituisce solo una parentesi: prima, il futuro insegnante, è uno studente di scuola secondaria superiore, poi vive questa parentesi, poi rientra da insegnante, nella scuola secondaria, e, non avendo avuto alcuna preparazione a questa professione, non può che adeguarsi a quel modello preuniversitario che aveva già vissuto [22].

Presente da anni nello scenario della scuola e spesso confusa con la pedagogia, la didattica, ricevette negli anni '70 da Guy Brousseau e il suo gruppo operante in Francia a Bordeaux una spinta decisiva. In particolare, ebbe il merito di aver tentato una sistemazione teorica della Didattica della Matematica, imperniata sullo studio dei soggetti e delle relazioni che li legano all'interno delle situazioni didattiche (Teoria delle Situazioni).

Prima degli anni '70 era radicata infatti l'idea "se insegnerete bene i vostri allievi apprenderanno" idea che, quando si cominciò a riflettere in maniera diversa sugli obiettivi dell'insegnamento della matematica, si trasformò in "la matematica è più di una tecnica".

Una volta accertato che "apprendere la matematica" significa conquistare l'attitudine ad un "comportamento matematico" [18], si spostò l'attenzione dal solo *insegnamento* al binomio *insegnamento-apprendimento* fino ad arrivare ad oggi quando si evidenzia soprattutto la parola *apprendimento*.

Lo scopo della ricerca in didattica è quello di individuare le variabili e le costanti che entrano in gioco in una situazione didattica, ed ha come fine la costruzione di situazioni utili alla rimozione degli ostacoli all'apprendimento. Il fine dei ricercatori è creare una teoria che non "insegni ad insegnare" ma che permetta da una parte, di capire e spiegare i fatti che avvengono all'interno del binomio insegnamento-apprendimento della matematica e d'altra parte, fornire ad insegnanti e ricercatori uno strumento per progettare e realizzare un insegnamento efficace della matematica[20].

Il paradigma[21] di ricerca proposto da Brousseau per lo studio della didattica è fondamentalmente un alternarsi d'azione e sperimentazione, dove sono altresì tenuti nella giusta considerazione fattori di carattere storico, epistemologico, semantico, politico-sociale, ecc.

L'apprendimento della matematica [38] è caratterizzato da una serie di ostacoli di diversa entità, riconducibili sia alla natura della disciplina che ad altri fattori.

Contrariamente a quanto accadeva prima, quello che veniva classificato genericamente come "errore" con valenza assolutamente negativa ha assunto nel tempo un aspetto diverso e sicuramente più costruttivo. A seconda dei punti di vista, l'errore non è più un "punto" di arrivo per uno studente che non ha capito perché non ha le capacità per farlo o perché non ha studiato, ma si trasforma per il docente in un punto di domanda: "perché avrà fatto quell'errore?". A quel punto l'insegnante potrà intervenire e sfruttare al meglio l'errore a favore della conoscenza: dovrà agire come un medico che "osserva il sintomo" e lo cura o mette lo studente (se in grado) in condizioni di curarsi da solo.

---

[20] Lo studio dell'insegnamento della matematica da parte di G. Brousseau parte proprio dai numeri razionali,ed è stato al tempo stesso "la culla di una nuova teoria didattica (TSD) e la dimostrazione della sua potenza"; la prima formulazione della teoria è del 1970

[21] Un insieme di problemi e metodi relativi alla loro risoluzione in un determinato campo e in un determinato periodo storico, individuano un modello di ricerca che viene indicato col termine paradigma.

L’errore può essere inteso come	Sbaglio
	Ignoranza
	Distrazione
	Svista
	Evidenziatore di non comprensione
	lacuna
	Salto logico (mancanza di motivazioni)
	Confusione
	Equivoco
	Tentativi
	Ostacolo
	Ostacolo epistemologico

Tabella sul cambiamento semantico della parola “errore” da una valenza solamente negativa ad una valenza utile per una comprensione delle matematiche. Ciascuno di questi modi di descrivere l’errore privilegia un punto di vista diverso, che è interessante di per sè

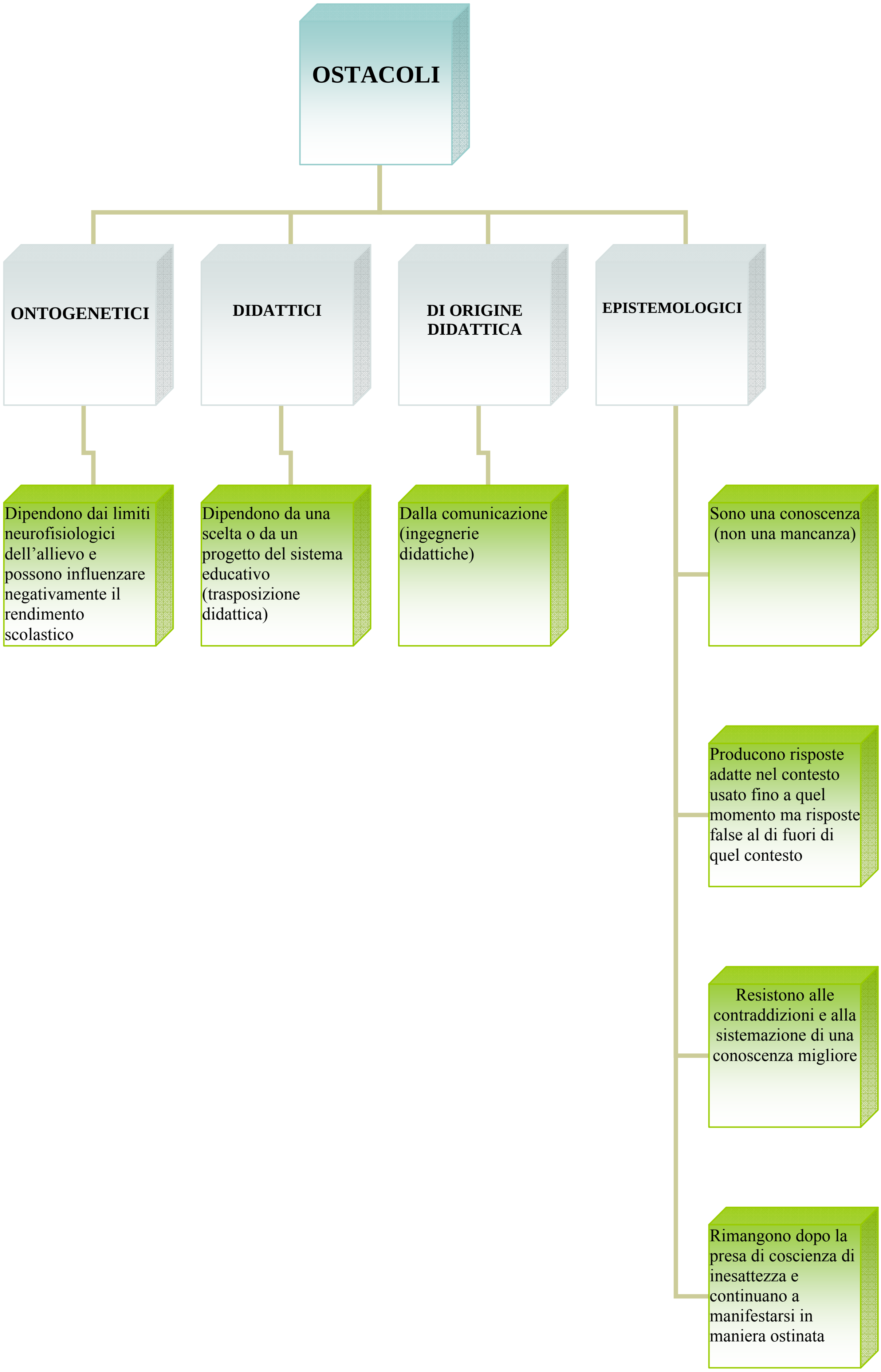
[24] Da Bachelard in poi si è arrivati a individuare delle caratteristiche specifiche per gli errori→ostacoli[22].

Quelli che risiedono nell’organizzazione della matematica vengono chiamati ostacoli epistemologici e Bachelard afferma che tali ostacoli non sono conoscenze “mal fatte” ma piuttosto fatte “altrimenti”, per altri scopi, adatte ad altri problemi. L’ostacolo è nel pensiero, esso è l’effetto di una conoscenza anteriore che ha avuto il suo successo, ma che ora si rivela falsa e inadatta.

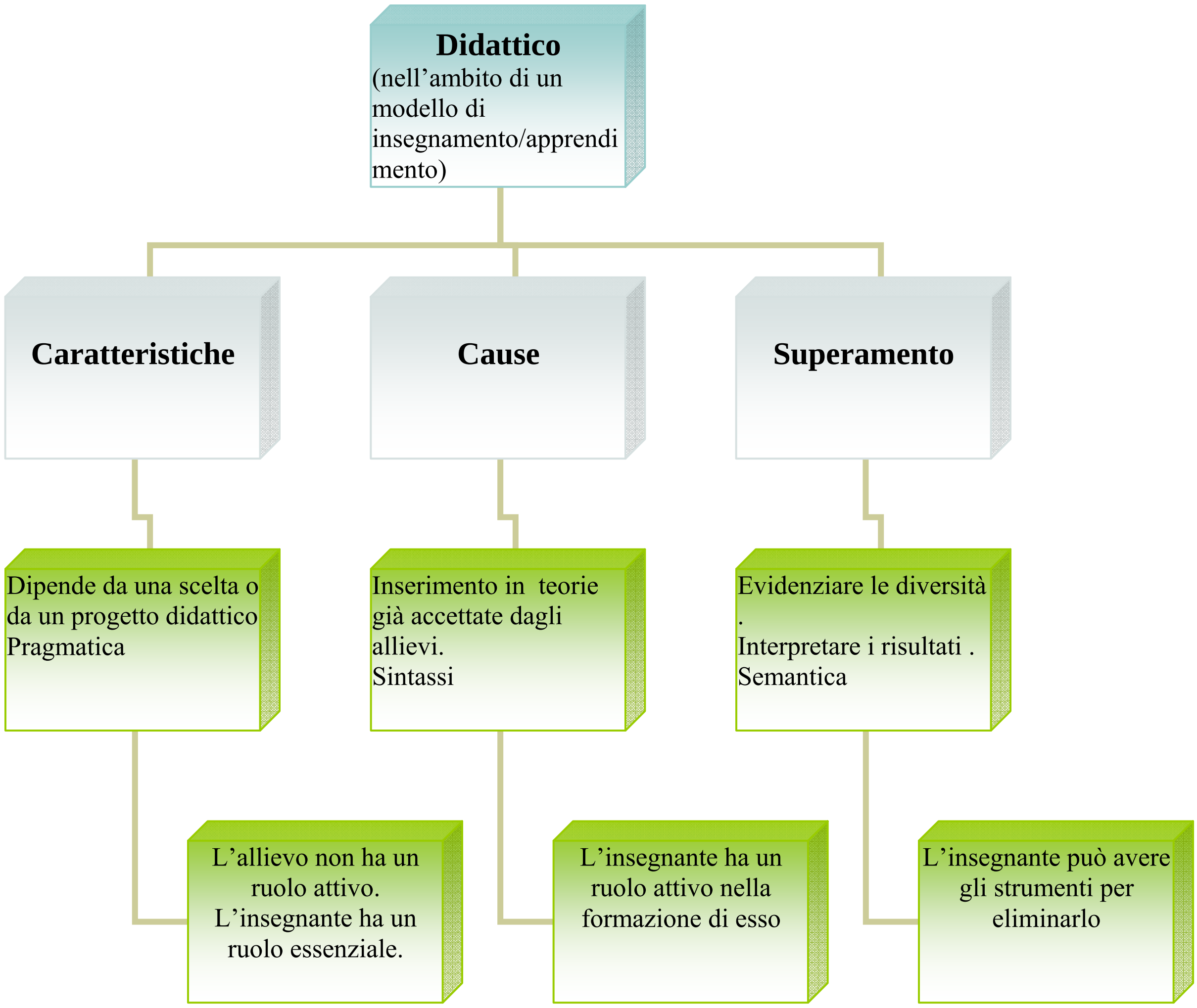
L’ostacolo è uno strumento conoscitivo dell’evoluzione del pensiero scientifico.

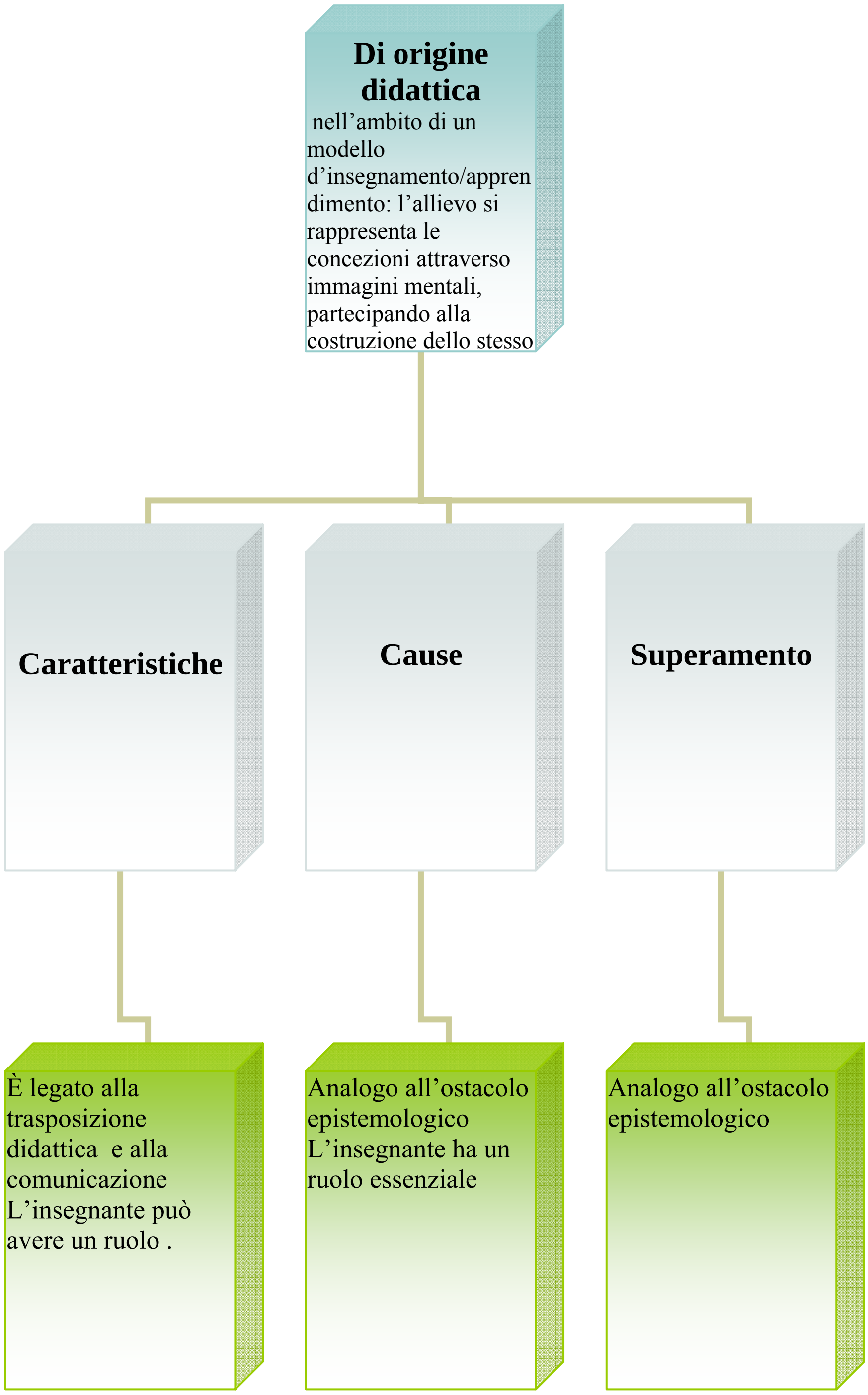
In seguito, Brousseau (1983) sviluppando tali impostazioni, e riferendosi alla didattica della matematica, dà la seguente classificazione degli errori/ostacoli:

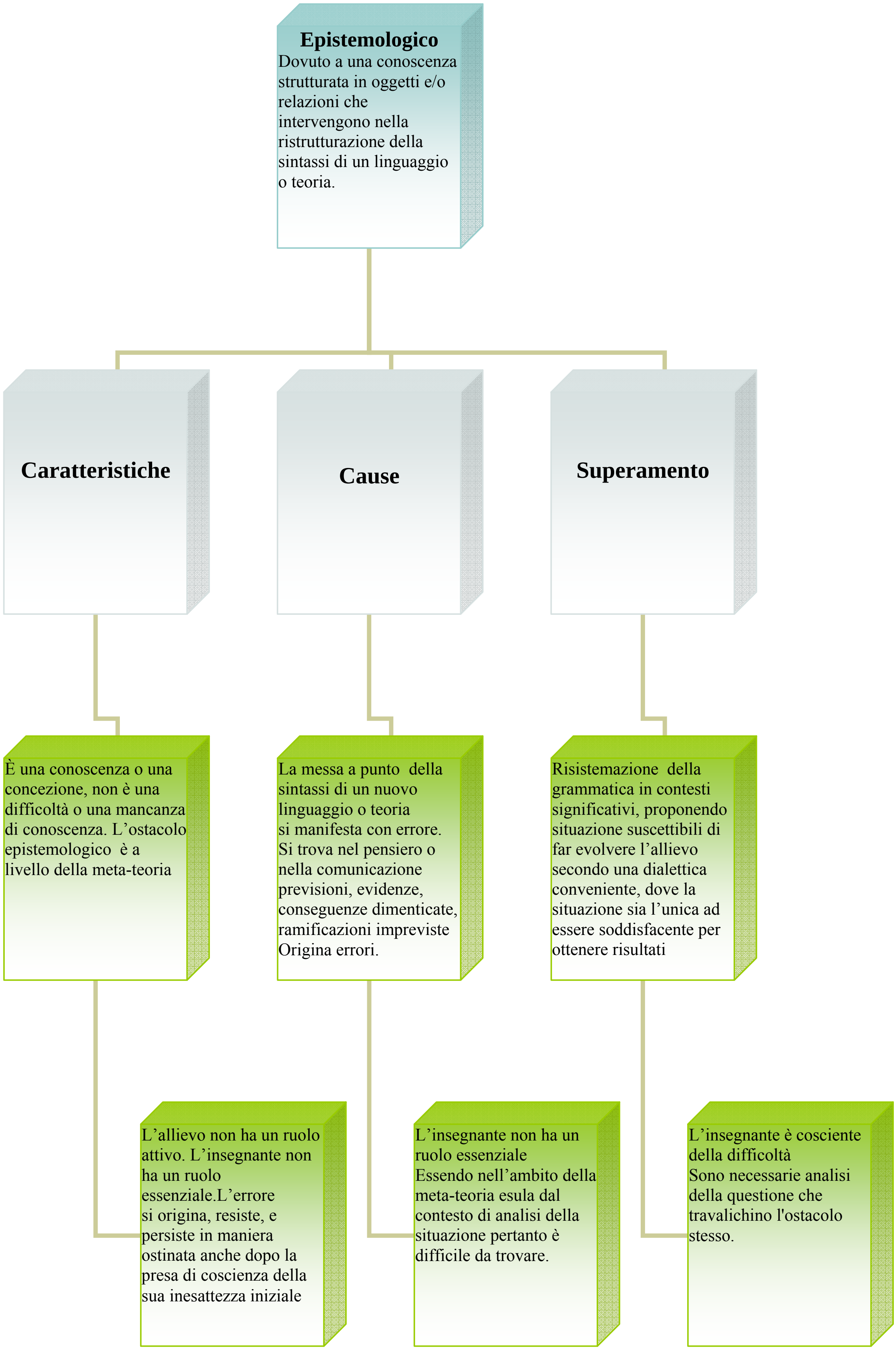
[22] Errore inteso come ostacolo.


OSTACOLI
ONTOGENETICI
DIDATTICI
DI ORIGINE DIDATTICA
EPISTEMOLOGICI
Dipendono dai limiti neurofisiologici dell’allievo e possono influenzare negativamente il rendimento scolastico
Dipendono da una scelta o da un progetto del sistema educativo (trasposizione didattica)
Dalla comunicazione (ingegnerie didattiche)
Sono una conoscenza (non una mancanza)
Producono risposte adatte nel contesto usato fino a quel momento ma risposte false al di fuori di quel contesto
Resistono alle contraddizioni e alla sistemazione di una conoscenza migliore
Rimangono dopo la presa di coscienza di inesattezza e continuano a manifestarsi in maniera ostinata

E, più in particolare:




Di origine didattica
nell'ambito di un modello d'insegnamento/apprendimento: l'allievo si rappresenta le concezioni attraverso immagini mentali, partecipando alla costruzione dello stesso
Caratteristiche
Cause
Superamento
È legato alla trasposizione didattica e alla comunicazione L'insegnante può avere un ruolo .
Analogo all'ostacolo epistemologico L'insegnante ha un ruolo essenziale
Analogo all'ostacolo epistemologico


Epistemologico
Dovuto a una conoscenza strutturata in oggetti e/o relazioni che intervengono nella ristrutturazione della sintassi di un linguaggio o teoria.
Caratteristiche
Cause
Superamento
È una conoscenza o una concezione, non è una difficoltà o una mancanza di conoscenza. L’ostacolo epistemologico è a livello della meta-teoria
La messa a punto della sintassi di un nuovo linguaggio o teoria si manifesta con errore. Si trova nel pensiero o nella comunicazione previsioni, evidenze, conseguenze dimenticate, ramificazioni impreviste Origina errori.
Risistemazione della grammatica in contesti significativi, proponendo situazione suscettibili di far evolvere l’allievo secondo una dialettica conveniente, dove la situazione sia l’unica ad essere soddisfacente per ottenere risultati
L’allievo non ha un ruolo attivo. L’insegnante non ha un ruolo essenziale.L’errore si origina, resiste, e persiste in maniera ostinata anche dopo la presa di coscienza della sua inesattezza iniziale
L’insegnante non ha un ruolo essenziale Essendo nell’ambito della meta-teoria esula dal contesto di analisi della situazione pertanto è difficile da trovare.
L’insegnante è cosciente della difficoltà Sono necessarie analisi della questione che travalichino l'ostacolo stesso.

L’errore/ostacolo è quindi una tappa naturale nella costruzione della conoscenza e, per questo, è inevitabile per gli studenti.

► Dalla discussione finora fatta, si è visto che l’argomento frazioni non esula dai problemi inerenti gli ostacoli epistemologici, di forma, e anche di linguaggio corrente.
L’influsso negativo del linguaggio moderno superficiale molto legato più alla forma che alla sostanza facilita di errori legati al linguaggio quindi nascono confusioni di designazione fra divisone/quoto/quoziente, nominatore/denominatore, addizione/somma/totale, sottrazione/differenza, moltiplicazione/prodotto e la sottovalutazione di questi errori porta a situazioni che saranno molto più problematiche in seguito con la confusione ad esempio fra inverso/reciproco (nelle funzioni) perpendicolare/verticale, ipotesi/tesi e così via.

3.1. Le misconcezioni

Abbiamo già visto quali sono gli errori più frequenti a cui si va incontro nell’insegnamento/apprendimento delle frazioni.
Mi piace ricordare la frase usata da D’Amore:
«Una misconcezione è un concetto errato e dunque costituisce genericamente un evento da evitare; essa però non va vista sempre come una situazione del tutto o certamente negativa: non è escluso che per poter raggiungere la costruzione di un concetto, si renda necessario passare attraverso una misconcezione momentanea, ma in corso di sistemazione» [13].
Tale proposta semantica del termine “misconcezione” è stata sottoposta per anni a prove di coerenza e di efficacia, che ne hanno rilevato l’importanza e l’utilità dal punto di vista didattico.

Le *immagini* che uno studente si crea dei concetti proposti (e questo avviene a qualunque livello scolastico) in alcuni casi possono essere delle vere e proprie interpretazioni errate delle informazioni ricevute; tali immagini-misconcezioni, essendo in continua evoluzione nella complessa scalata verso la costruzione di un concetto, non sempre risultano di ostacolo all'apprendimento futuro degli allievi, a meno che esse non diventino forti e stabili *modelli* erronei di un concetto. Tutto ciò deriva dalla forza e dalla stabilità del modello, caratteristiche che sono di per sé stesse di ostacolo ai futuri apprendimenti, rispetto alla dinamicità e instabilità delle immagini.
Sappiamo come sia difficile per l'allievo costruire un concetto, soprattutto quando il modello che si forma rappresenta solo un'immagine-misconcezione che avrebbe dovuto essere ulteriormente ampliata per riuscire a contemplare i diversi aspetti del concetto stesso (bisogna imparare a vedere le cose sotto diversi punti di vista per riuscire a comprendere il loro significato).
Dal punto di vista didattico, quando un insegnante propone un'immagine forte, convincente, persistente e in alcuni casi addirittura univoca di un concetto, tale immagine si trasforma in *modello intuitivo*.
Tali modelli rispondono pienamente alle sollecitazioni intuitive e hanno dunque un'accettazione immediata forte; si crea così una sorta di rispondenza diretta tra la situazione proposta ed il concetto matematico che si sta utilizzando. Ma questo modello potrebbe non rispecchiare il sapere matematico chiamato in gioco, generando così un modello erroneo che vincola l'apprendimento futuro: più "forte" è il modello intuitivo, più difficile è infrangerlo per accomodarlo ad una nuova immagine più comprensiva del concetto.

Si tratta allora di non favorire anticipatamente l'insorgere di modelli, in quanto accomodare un modello erroneo trasformandolo in un nuovo modello comprensivo di una diversa situazione non è affatto facile, dato che il modello è per sua stessa natura forte e stabile.

Didatticamente conviene quindi lasciare immagini ancora instabili, in attesa di poter creare modelli adatti e significativi, vicini al Sapere matematico che si vuole raggiungere. In questi ultimi anni stiamo avviando una prima classificazione delle misconcezioni, osservandone le specifiche particolarità. Una prima distinzione riguarda quelle che si sono chiamate misconcezioni "evitabili" e "inevitabili".

Le misconcezioni "evitabili" derivano *direttamente dalla trasposizione didattica del sapere*, in quanto sono, appunto, una diretta conseguenza delle scelte degli insegnanti. Queste misconcezioni dipendono dalla prassi scolastica "minata" da improprie consuetudini proposte dagli insegnanti ai propri allievi. D'altra parte, come afferma Zan (1998): «Si può riconoscere che nella formazione delle convinzioni ha una notevole responsabilità il tipo di insegnamento ricevuto».In effetti, capita spesso che, a complicare l'apprendimento dei concetti matematici, incidano le decisioni prese dall'insegnante, derivanti dalle proposte della *noosfera*[23] (libri di testo, programmi, riviste, …), di fornire all'allievo giorno dopo giorno, sempre e solo univoche rappresentazioni convenzionali, che vengono così accettate ciecamente dall'allievo a causa del *contratto didattico* instaurato in classe e del fenomeno di *scolarizzazione*[24].

[23] Anche in questo caso è stato coniato un termine apposito, noosfera; con esso si indica «il luogo dei dibattiti di idee significative sull'insegnamento, le finalità della scuola, gli scopi della formazione, le attese della società per quanto attiene scuola e cultura (per esempio i programmi ministeriali); la noosfera è l'intermediario tra il sistema scolastico (e le scelte dell'insegnante) e l'ambiente sociale più esteso (esterno alla scuola)» (D'Amore & Frabboni 1996, p. 111, in cui viene citato: Chevallard & Joshua, 1982).

[24] Per "scolarizzazione dei saperi" si intende l'atto, spesso inconsapevole, attraverso il quale l'allievo effettua una delega alla Scuola, in quanto istituzione, ed all'insegnante, in quanto rappresentante di quell'istituzione, il compito diselezionare per lui i saperi significativi

Le continue e univoche sollecitazioni fornite dall'insegnante fanno sì che lo studente, o addirittura a volte anche l'insegnante stesso, confonda la rappresentazione proposta con il concetto matematico che si vuole far apprendere: «Lo studente non sa che sta apprendendo segni che stanno per concetti e che dovrebbe invece apprendere concetti; se l'insegnante non ha mai riflettuto su questo punto, crederà che lo studente stia apprendendo concetti, mentre questi sta in realtà "apprendendo" solo a far uso di segni».[12]

Ne consegue che occorre didatticamente fare molta attenzione alla scelta, ai contesti ed alle modalità d'uso dei segni che rappresentano il concetto matematico che si vuole far apprendere ai propri allievi; un'attenzione che è spesso sottovalutata o data per scontata.

Questo è sostenuto anche da Duval che ribadisce come, presso alcuni studiosi di didattica, si scorga una riduzione del segno ai *simboli convenzionali* che connotano direttamente e isolatamente dei concetti, ma che possono portare a misconcezioni (*"evitabili"*), dato che diventano rappresentanti unici di un dato concetto in un dato registro. Eppure «(…) il coordinamento di registri è la condizione per la padronanza della comprensione in quanto essa è la condizione per una differenziazione reale tra i concetti matematici e la loro rappresentazione. Costituisce una soglia il cui superamento cambia radicalmente l'attitudine di fronte ad un tipo di attività o ad un dominio (…) Ora, questo coordinamento non ha niente di spontaneo».[14]

Le misconcezioni "inevitabili" sono quelle che derivano solo *indirettamente dalla trasposizione didattica* effettuata dall'insegnante, in quanto sono una conseguenza dall'esigenza di dover dire e mostrare qualcosa per poter spiegare un concetto.

Tali misconcezioni sono quindi imputabili alla necessità di dover partire da un certo sapere per poter comunicare, sapere iniziale che non potrà

mai essere esaustivo dell'intero concetto matematico che si vuol proporre.
In questo caso, le misconcezioni possono essere viste come *inevitabili* momenti di passaggio nella costruzione dei concetti che derivano dalle rappresentazioni che gli insegnanti sono *costretti* a fornire per poter presentare un concetto, rappresentazioni che potrebbero contenere delle "informazioni parassite" rispetto al concetto matematico che si vuole trattare.
Nell'affermare che, nel presentare un concetto, si è *costretti* a fare i conti con rappresentazioni realizzate per mezzo di segni, ossia con la semiotica, stiamo affermando, in linea con il pensiero di Duval (1993), che: *non c'è noetica* (acquisizione concettuale di un oggetto) *senza semiotica* (rappresentazione realizzata per mezzo di segni) e che la semiotica viene assunta come caratteristica necessaria per garantire il primo passo verso la noetica. Detto in altro modo: «In Matematica l'acquisizione concettuale di un oggetto passa necessariamente attraverso l'acquisizione di una o più rappresentazioni semiotiche» [12].
Eppure, qualsiasi rappresentazione (un disegno, una frase, un grafico, un modello tridimensionale, …) non avrà mai le caratteristiche concettuali di astrattezza, idealità, perfezione, generalità tipiche della Matematica e questo potrebbe essere la fonte di quelle *misconcezioni* che abbiamo chiamato *inevitabili*.
Tuttavia, dovendo fare i conti con la semiotica di un concetto, potrebbe accadere che lo studente confonda la semiotica con la noetica, associando le caratteristiche peculiari della specifica rappresentazione al concetto stesso.

3.2 . Noetica e semiotica delle frazioni

Per alcuni autori (Godino, Duval, Batanero, D'Amore) l'apprendimento matematico consta di 4 fondamentali elementi strettamente legati fra loro

- L'apprendimento dei concetti (noetica)
- L'apprendimento degli algoritmi
- L'apprendimento "strategico"
- L'apprendimento comunicativo

Il primo è quello che ha indubbiamente un ruolo dominante fra i quattro in quanto del secondo è caratteristico soprattutto un carattere mnemonico, del terzo fanno parte la capacità di argomentare, di risolvere i problemi di dimostrare e il quarto infine (per troppo tempo dimenticato in didattica) la capacità di esprimere il proprio parere su cose matematiche , di descrivere un oggetto, di definire,…

Per quello che concerne la semiotica invece basti osservare che i concetti espressi dalla matematica non esistono nella realtà concreta nel senso che non sono frutto della esperienza empirica , ma prevedono un processo di astrazione mentale a volte non indifferente.

Quindi nella rappresentazione di tali concetti non possiamo mostrare o esemplificare come si fa nelle altre scienze, ma l'unica cosa che possiamo fare è scegliere un registro semiotico e rappresentare quel concetto in quel registro. Infatti in matematica quello che si impara a maneggiare non sono i concetti ma le loro rappresentazioni semiotiche. Facciamo un esempio per mostrare che per una rappresentazione semiotica ci sono più registri possibili.

Supponiamo di voler rappresentare in diversi registri il concetto che in matematica formalizza l'idea di dividere a metà un intero:

Registro semiotico: la lingua comune

rappresentazione semiotica: un mezzo

altra rappresentazione semiotica: la metà

ecc…

Registro semiotico: la lingua aritmetica

rappresentazione semiotica: $\frac{1}{2}$ (scrittura frazionaria)

altra rappresentazione semiotica: 0,5 (scrittura decimale)

altra rappresentazione semiotica: 5×10^{-1} (scrittura esponenziale)

ecc…

Registro semiotico: lingua algebrica

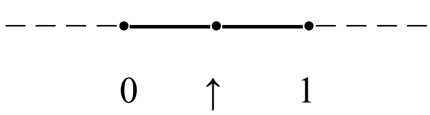
Rappresentazione semiotica: $\{x\in\mathbb{Q}^{+}$ t.c. $2x-1=0\}$ (scrittura insiemistica)

Rappresentazione semiotica: $y=f(x)$ t.c. $x\rightarrow \frac{x}{2}$ (scrittura funzionale)

ecc..

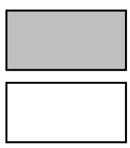
Registro semiotico: linguaggio figurale

Rappresentazione semiotica



ecc…

Registro semiotico: schemi pittografici

Rappresentazione semiotica  ecc.

Il passaggio da una rappresentazione semiotica ad un'altra dello stesso registro semiotico si chiama "trasformazione di trattamento" , mentre il passaggio da un registro semiotico ad un altro si chiama "trasformazione di conversione" .

Nella semiotica ci sono quindi tre operazioni fondamentali:

- la scelta degli elementi del concetto che vogliamo rappresentare (indispensabile per la scelta del registro semiotico)
- Il trattamento
- La conversione.

Nell'apprendimento matematico la noetica passa attraverso la semiotica, ma potrebbe valere la conseguenza del paradosso di Duval, secondo il quale lo studente potrebbe fermarsi alla gestione semiotica senza arrivare alla noetica. E l'unica soluzione a questa evenienza è la responsabilizzazione dell'insegnante.

[38] D'Amore (2001) sostiene che la rinuncia dello studente alla devoluzione[25], è legata alle difficoltà provenienti dalle operazioni tipiche della semiotica, a causa di una mancata didattica specifica a monte. Lo studente, in tal modo, potrebbe giungere ad effettuare una scelta rinunciataria, che ha come diretta conseguenza la scolarizzazione dei saperi.

In particolare, alcune delle difficoltà più spesso riscontrate riguardano capacità come quella di risalire da una rappresentazione al contenuto rappresentato. Padroneggiare le rappresentazioni semiotiche ed essere in grado di coordinare registri linguistici diversi è un modo per rendere lo studente responsabile della costruzione del proprio sapere.

[25] Per "devoluzione" si intende l'atto con il quale l'insegnante delega allo studente di farsi carico diretto della responsabilità della costruzione del proprio sapere. Quando l'allievo accetta l'apprendimento è possibile; in altri casi lo studente non accetta di impegnarsi personalmente, ed allora l'apprendimento è impossibile.

Il problema del passaggio da un registro semiotico all'altro molto spesso è sottovalutato dall'insegnante, convinto che lo studente lo segua. Ma a differenza dell'insegnante lo studente non ha ancora concettualizzato i concetti e quindi tende semplicemente a gestire le varie rappresentazioni semiotiche senza rendersi conto che magari si sta parlando della stessa cosa. Un esempio che sembra banale si ha con la scrittura di frazioni: in genere vedere una frazione scritta $\frac{1}{2}$ o $1/2$ che per un adulto è normale, in uno studente crea sempre delle perplessità (si parla sempre di frazioni o di un'altra cosa che è scritta come se fosse una frazione ma in realtà non lo è?)

Nel caso delle frazioni di esempi di immagini mentali che si formano troppo presto ce ne sono tante: ad esempio l'immagine di un uno-tutto in cui esso viene diviso in parti uguali (congruenti sovrapponibili ecc..) e prenderne sempre una certa parte, pregiudica immediatamente la possibilità di passaggio alle frazioni apparenti o improprie così come il ricorso alle stesse figure geometriche (così come già visto precedentemente) che viene fatto dall'insegnante semplicemente per comodità diventa predominante e pregiudica in seguito la scelta di altre figure in quanto lo studente non domina più la noetica della frazione perché la situazione non fa parte del suo modello.

L'idea che aggiungere uno zero alla fine di un numero significa moltiplicare per 10 (validissima per i naturali) crea un modello mentale non più valido quando si passa ai razionali con conseguenti affermazioni del tipo che 0,7 è più piccolo di 0,30 perchè vedere 0,7=0,70 non è possibile in quanto si ritiene che 0,70>0,7 perchè è stato moltiplicato per 10. Ora chiamare errori questi modelli errati è veramente banalizzarli così come è esagerato esasperarli come una mancanza di intelligenza o concentrazione o di studio da parte di un ragazzo.

3.3 Conclusioni

Alla fine quale sarà il metodo migliore per insegnare le frazioni? Per non creare modelli precoci? Per evitare la formazione di misconcezioni per fare in modo che un ragazzo giunto in età adulta sappia cosa è un razionale?

La risposta non è semplice anzi non esiste affatto. Ovviamente non possiamo introdurre il concetto di numero razionale in uno studente delle primarie perché evidentemente ci troveremmo davanti a un ostacolo ontogenetico, dalla teoria delle situazioni didattiche sappiamo che una delle possibilità per far si che gli studenti costruiscano sapere matematico è quello di ricorrere ad una situazione adidattica, la quale richiede molta pazienza attenzione osservazione e soprattutto professionalità da parte dell'insegnante.

La ricerca mostra infatti che spesso la frazione non è vista come un numero ma come qualcosa di operativo, così come l'hanno appresa e concettualizzata nei primi anni della scuola primaria.

Sarebbe bene infatti introdurre le frazioni e poi usarle nel modo più naturale possibile mettendo sempre in evidenza che la frazione è presente in maniera costante nella vita di tutti i giorni per dare senso a quello che si studia. E' bene introdurre le frazioni non come simbolismo ma come linguaggio naturale facendo giochi o esempi in cui lo studente è ben lieto di collaborare con l'insegnante, sin dalla scuola dell'infanzia senza aspettare la terza primaria in modo da far prendere confidenza con queste idee. Quando si inizia a formalizzare con rappresentazioni e simbolismi sarebbe utile seguire il percorso storico di sviluppo del concetto di frazione e introdurre le frazioni "egizie" quelle unitarie in modo da presentare l'unità frazionaria e darle un senso intuitivo semplice e riconoscibile. Al momento in cui si decide di iniziare una didattica sulle frazioni è inutile illudersi che la prime a definizione possa andar bene per sempre quindi bisogna evitare che il ragazzino si costruisca un modello troppo presto. Bisogna sempre lasciare uno spiraglio aperto per mettere a quell'idea di cambiare forma e lasciare spazio per l'adattamento di concetti futuri facendo sempre riferimento al primo contatto intuitivo e naturale che il ragazzo ha avuto con questo concetto. Anche se per partire occorreranno modelli concreti, le nostre torte serviranno fino ad un certo punto. Bisogna far capire infatti che un modello concreto, nel corso degli studi spesso non è più applicabile e bisogna cominciare ad astrarre per poter comprendere meglio il concetto. L'idea è risalire dal particolare all'universale cominciando a porsi problemi su problemi tangibili di vita quotidiana proponendo via via situazioni in cui si richieda uno sforzo di " immaginazione" da parte dello studente in modo che egli stesso possa costruirsi la sua teoria ad hoc, stando bene attenti a che non si creino modelli parassiti. Spiegare bene tutti i termini che vengono incontrati strada facendo a cominciare da quell'uguale che verrà continuamente ripetuto dall'insegnante. E soprattutto dare un senso a tutto soprattutto quando verranno introdotte le frazioni improprie che è bene evitare di introdurre almeno fino a quando non è consolidato il concetto di frazione propria in quanto esse non appartengono alle frazioni "concrete" ma ad una loro teorizzazione che porterà ai numeri razionali.

L'unica frazione apparente che ha senso iniziale è $\frac{n}{n}$, nella quale si divide un uno-tutto in n parti uguali e si prendono tutte perché , almeno all'inizio, è l'unica che può essere compresa e bisogna lasciare tempo affinché questa idea di frazione si trasformi fino a farla diventare un'idea di numero razionale.

Bisogna porre molta attenzione nel contesto discreto ricordando che per esempio i $\frac{2}{3}$ di 4 oggetti sembra non avere senso; i $\frac{3}{3}$ di 4 oggetti sono i

4 oggetti stessi e che questo nonostante sembra non avere molto senso nella realtà ne ha invece da un punto di vista matematico. La letteratura evidenzia come detto prima la difficoltà di confronti fra numeri in notazioni diverse e le difficoltà dello studente nell'ordinare le frazioni, i numeri decimali o le due assieme. Quel tipo di ordinamento non può avvenire in modo spontaneo esso deve essere oggetto di insegnamento esplicito ed è necessario controllarne l'avvenuta padronanza soprattutto quando ci si accorge che l'idea radicata nel proprio allievo è quella che il successivo di un numero esiste sempre e quindi preparare la strada alla sistemazione delle frazioni sulla retta dei numeri in modo da facilitare poi l'accesso al concetto di numero reale. Perché alla fine le frazioni sono rappresentanti di numeri e come numeri vanno trattate (e non come insieme e come operatori). Fare comprendere il ruolo dello zero nelle frazioni sia al numeratore che al denominatore e gradualmente introdurre l'uso delle operazioni fra frazioni cominciando con quelle unitarie e il passo successivo sarà graduale e meno ostico magari introducendo anche dei riferimenti storici che aiutino anche a capire il perchè sono nate certe cose e a cosa sono servite e perché si usano ancora. In generale è bene portare lo studente a farsi carico del proprio sapere non nascondendo i problemi ma esplicitandoli bene. Deve avere insomma un contatto diretto col sapere insegnato per trasformarlo in sapere da apprendere e non delegare tutto all'insegnante che è il mediatore fra i due saperi altrimenti si rischia che lo studente non impari mai la matematica ma impari piuttosto a far contento il proprio insegnante dandogli quello che vuole cioè risposte giuste senza capire con che cosa sta trattando. E soprattutto non snobbare nessuna domanda perché dietro domande che a prima vista sembrano prime di senso potrebbero esserci dei modelli o delle convinzioni errate da correggere radicate da anni che lo studente stesso ignora di avere. Agire il più possibile creando situazioni

adidattiche e ricalcando le convinzioni di due grandi ed influenti pensatori della storia dell’umanità:

“Non vi spiego tutto per non privarvi del piacere di apprenderlo da soli”.(Renèe Decartes)

“Nulla egli sappia per averlo udito da voi, ma solo per averlo compreso da sé: non impari la scienza: la scopra. Se nella sua mente giungerete a sostituire l’autorità alla ragione, non ragionerà più; non sarà che lo zimbello dell’opinione altrui.”(J.J. Rousseau)

Indice

2. Introduzione ai numeri razionali

3. La didattica della matematica

Bibliografia

[1] *Bachelard G.(1938) La formation de l'esprit scientifique.Paris,Vrin*

[2] *Bessot A., Panorama des cadres théoriques de la didactique des Maths en France, L'educazione Matematica, 1994, 1.*

[3] *Behr M.J., Lesh R., Post T.,Silver E.A. (1983).Rational-number concept.New York: Academic Press.*

[4] *Carl B. Boyer – Storia della matematica – Arnoldo Mondatori Editore – 1987*

[5] *Brousseau G., Thèorie des situations didactiques (didactique des mathèmatiques 1970-1990) ,1998, Grenoble ed. la Pensée Sauvage*

[6] *Brousseau G., Les obstacles epistemologiques et les problemes en Maths, RDM, 1983, Grenoble, ed. la Pensée Sauvage,Vol.4.2.*

[7] *Brousseau G., Fondements et méthodes de la didactique de mathématiques, RDM, 1986, Grenoble, ed. la Pensée Sauvage,Vol.7.2.*

[8] *Brousseau G., Theorisation des Phenomes d'Enseignement des Maths. These d'etat, Bordeaux,1986.*

[9]*Brousseau G., Le contrat didactique: Le milieu, RDM, 1988, Grenoble, ed. la Pensée Sauvage, Vol.9.3.*

[10] *Chevallard Y., La trasposition didactique du savoir savant au savoir enseigné,1991, Grenoble, ed. La Pensée Sauvage*

[11] *Chevalard Y. - Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activitè matématique.Séminaire de didactique des Mathèmatiqes et de l'informatique de Grenoble.LSD2, IMAG,Università J.Fourier, Grenoble*

[12] *D'Amore B.- Le basi filosofiche, pedagogiche,epistemologiche e concettuali della didattica della matematica.-Pitagora Bologna (2003)*

[13] *B. D'Amore-Elementi di didattica della matematica-Pitagora Bologna 1999*

[14] *R. Duval –Registres de representations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de didactique et de sciences cognitives,ULP,IREM Strasbourg.*

[15] *Martha Isabel Fandiño Pinilla-Curricolo e valutazione in matematica*

[16] *Martha Isabel Fandiño Pinilla – Le frazioni aspetti concettuali e didattici - Pitagora editrice -2005*

[17]*E.Fischbein –Intuizione e dimostrazione in Matematica a scuola:teorie ed esperienza-Pitagora 1992*

[18] *Freudehantal H., Ripensando l'educazione matematica (a cura di F.Manara), 1994, Brescia, ed. La Scuola.*

[19] *L. Giovannoni – La matematica e la sua didattica -1996*

[20] *Godino J.D. & BataneroC. (1994) Significado istituzionale y personal de los objectos matematicos.recherches en didactique des matèmatiques*

[21] *Kline M.,. Storia del pensiero matematico, 1991, Torino Einaudi.*

[22] *G.Loria -Storia delle matematiche.- Hoepli Milano*

[23] *Marino T.- Spagnolo F., Gli ostacoli Epistemologici: Come si individuano e come si utilizzano nella ricerca in Didattica della Matematica, L'insegnamento della. matematica e delle scienze integrate, vol.19B, n.2, Aprile 1996.*

[24] *MarinoTeresa – Sugli ostacoli in didattica delle matematiche -Seminario GRIM 1997*

[25] *Rota G.C., Matematica e Filosofia: Storia di un malinteso,1990, BUMI, Serie VII, vol.IV-A,n.3, p.301.*

[26] *Guido Setter-Lo sviluppo mentale nella ricerca di Piaget-Giunti 1961*

[27] *Spagnolo F., Insegnare le matematiche nella scuola secondaria, 1998, Milano, ed.La Nuova Italia.*

[28] *Spagnolo F. - Valenti S., Errori matematici: un'occasione didattica, L'insegnamento della matematica, 1984, 7/1.*

[29] *Rosetta Zan- Dalla correzione degli errori all'intervento sulle difficoltà*

[30] *Rosetta Zan-Emozioni e difficoltà in matematica*

Siti consultati

[31] *www.wikipedia.org*

[32] *http://web.unife.it/altro/tesi/A.Montanari/cina.htm*

[33]*http://web.math.unifi.it/archimede/archimede/note_storia/numeri/numeri1/node13.html*

[34]*http://math.unipa.it/~grim/Tesi_Malisani_06_it.pdf*

[35] *http://math.unipa.it/~grim/*

[36] *http://www.ssis.unige.it/0607SostegnoLaviosa0607DDI_Lez2_lettura.pdf*

SSIS – A.A. 2006/2007 Didattiche disciplinari integrate modulo di Matematica Numeri decimali e scrittura dei numeri Laviosa Lezione 28

[37] *www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/sbaragli/LDMS%203.pdf*

[38] *http://dipmat.math.unipa.it/~grim/conv_aicmgrim05_alongi.pdf*

[39]*http://didasp.tiedu.ch/~dm/ForBase/MIA1/Anno%2004%2005/MIA%2005%20Danilo/TDS.pdf*

[40] *http://math.unipa.it/~grim/Jdamoreital.Pdf*

[41] *http://www.dm.unito.it/mathesis/volumi/indice97.html*