

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DELLA CALABRIA

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea

Sistemi dinamici e Musica

Relatore:

Prof.ssa Annamaria Canino

Candidata:

Stefania Gervasi

Anno Accademico 2000/2001

*A Daniele e alla sua
passione per la matematica.*

*E per essermi stato sempre
vicino in modo straordinario,*

GRAZIE!

Introduzione

La modellizzazione di diversi fenomeni (fisici, biologici, meccanici, ...) ha nei sistemi dinamici il suo fondamento. Mediante il loro studio si possono avere informazioni sull'andamento di tali fenomeni nel tempo. È possibile, ad esempio, individuare caratteristiche particolari, come l'assestamento nell'intorno di un punto (equilibrio), la tendenza a percorrere una determinata orbita (ciclo limite) e i comportamenti caotici che alcuni sistemi possono presentare.

In questa tesi si è affrontato tale studio con l'aiuto del software Matlab e di alcuni programmi sviluppati per esso, disponibili in Rete (pplane5.m). L'analisi eseguita da Matlab conduce, ovviamente, a delle rappresentazioni grafiche delle variabili dei sistemi; quello che, invece, si è voluto inserire è stata l'esplorazione di tali oggetti matematici da un nuovo punto di vista, o meglio...di ascolto!

Ecco perchè "Sistemi dinamici e musica"! Il risultato di questa lavoro, infatti, è la creazione di un programma (SDM: Sistemi Dinamici e Musica) capace di ricevere un sistema di equazioni differenziali del primo ordine, di visualizzare il suo ritratto nel piano (o eventualmente nello spazio) delle fasi e, a partire da tutto ciò, creare musica! E proprio attraverso questa musica, prodotta per via algoritmica, ho voluto provare a studiare il comportamento del sistema dinamico con i seguenti obiettivi:

-
- Ascoltare le soluzioni e comprendere dalla musica il loro andamento, quantomeno da un punto di vista qualitativo. Nel processo di “musificazione” si è cercato, infatti, di riprodurre il più fedelmente possibile le caratteristiche del sistema dinamico.
 - Riconoscere gli eventuali equilibri e cicli limite del sistema mediante la musica da loro prodotta.
 - Confrontare musicalmente più soluzioni con condizioni iniziali differenti.
 - Esplorare il caos attraverso la musica.

Per creare questo genere di musica sono stati usati degli opportuni strumenti: principalmente i due software Matlab e Csound, per i quali sono stati implementati degli appositi file di programmazione.

Ovviamente, però, non è stata tralasciata neanche la parte teorica, che ha richiesto lo studio delle basi matematiche del suono, i fondamenti della sintesi musicale (e quindi l’analisi di Fourier) e la teoria dei sistemi dinamici, con relativi teoremi fondamentali e analisi di particolari modelli (preda-predatore, mappa logistica, equazioni di Van der Pol, attrattore di Lorenz,...).

La realizzazione di SDM è stata dunque un’applicazione della matematica alla musica. Tuttavia l’utilizzo di questo programma può anche essere considerato come uno strumento utile per la didattica. La fusione con la musica può stimolare e “addolcire” lo studio di una disciplina come la matematica, che non sempre riscuote troppi successi. D’altra parte, per coloro che invece gustano già i “sapori della matematica”, SDM può essere un’occasione per comprendere meglio (o comunque sotto un’altra prospettiva) quei concetti che si è abituati a vedere con

formule e grafici.

Da un punto di vista strettamente musicale, SDM, come tutta la produzione di musica per via algoritmica, è uno stimolo per la creatività di ogni compositore.

C'è anche da ricordare che la musica elaborata da SDM è legata strettamente a sistemi dinamici significativi, i quali, spesso, sono l'espressione di fenomeni naturali. Sarebbe interessante approfondire questo uso di SDM, creando delle corrispondenze fra forme musicali e fenomeni naturali, e scoprire le eventuali similitudini o divergenze fra le musiche prodotte dai diversi fenomeni.

Un altro tipo di sviluppo di questo programma può essere quello di inserire nuovi parametri nella creazione musicale. Per sistemi con più di tre variabili, infatti, si potrebbero far corrispondere non solo le frequenze e le ampiezze delle note, ma ad esempio, ad una variabile si potrebbe associare una variazione di strumenti, oppure essa potrebbe controllare l'uscita del suono dalle casse, o ancora, introdurre variazioni ritmiche.

Questi gli argomenti trattati in ogni capitolo.

Nel primo capitolo ci avviciniamo alle basi della scienza del suono. Si inizia dalle radici storiche, con gli esperimenti compiuti dai Cinesi e dai Greci, e si giunge, passando attraverso l'esperienza decisiva del monocordo, alle diverse scale musicali (Pitagorica e Tolemaica) fino a quella ben temperata.

Dopo una breve analisi dei caratteri fisici del suono, sono descritti i meccanismi del nostro apparato uditivo, per cercare di comprendere meglio il percorso effettuato dall'impulso sonoro, che dall'esterno giunge fino al cervello.

Nel secondo capitolo sono presentati invece i legami fra la musica e la matematica. Con lo studio del moto armonico e delle oscillazioni di una corda sono trattati

gli argomenti base dell'analisi di Fourier, "ingredienti" fondamentali nella sintesi sonora. Successivamente viene descritta la sintesi effettuata attraverso sintetizzatori elettronici. Si pone dunque l'attenzione sull'involuppo di un'onda, sui diversi tipi di sintesi (additiva e sottrattiva) e sulle modulazioni di frequenza (FM) e di ampiezza (AM), per concludere con il trattamento digitale del suono.

Nel terzo capitolo si introduce il concetto di musica generativa. Essa si basa sulla possibilità di una generazione musicale infinita, sempre diversa, grazie ad algoritmi semplici e sempre nuovi.

Dopo un breve *excursus* sulle diverse tecniche di composizione algoritmica, sono descritte alcune sperimentazioni moderne.

Nel quarto capitolo è affrontato lo studio della teoria dei sistemi dinamici. Oltre ai teoremi base sull'esistenza e il prolungamento delle soluzioni è stata trattata la stabilità degli stati di equilibrio di un sistema, il criterio di Liapunov e la classificazione dei punti di equilibrio.

Nel quinto capitolo è riportato lo studio di alcuni sistemi specifici. Sono stati calcolati i loro punti di equilibrio e, con l'aiuto di Matlab, si sono potuti evidenziare alcuni comportamenti particolari, come ad esempio la presenza di cicli limiti o attrattori strani.

Nel sesto capitolo vengono descritti i file che SDM crea per produrre degli spartiti musicali (file per MIDI e per Csound). Inoltre sono presentate le diverse tecniche di musificazione necessarie per realizzare gli obiettivi esposti precedentemente.

Nel settimo capitolo, infine, vengono espone, in modo dettagliato, le tecniche di musificazione utilizzate in SDM. Viene spiegato in che modo sono associate,

algoritmicamente, le variabili fisiche del sistema dinamico alle variabili di musicalizzazione. In questo capitolo, inoltre, è riprodotta l'esecuzione di SDM e la presentazione delle sue finestre grafiche, le quali permettono all'utente di creare musica secondo le proprie esigenze.

Nell'appendice, infine, sono riportati alcuni codici di programmazione necessari per la realizzazione di SDM.

Indice

Introduzione	I
1 Fondamenti della scienza del suono	1
1.1 Le radici storiche	1
1.1.1 Scala pitagorica	4
1.1.2 Scala tolemaica	5
1.2 Scale musicali e temperamenti	8
1.2.1 Scala pitagorica e scala naturale	8
1.2.2 Scale temperate	11
1.3 Caratteri fisici e musicali del suono	14
1.3.1 Ampiezza	14
1.3.2 Altezza	14
1.3.3 Timbro	15
1.3.4 Frequenze formanti	17
1.3.5 Ritmo	18
1.3.6 Livello sonico e Durata	18
1.4 I meccanismi dell'udito	19

2	Basi matematiche della Musica	22
2.1	Il moto armonico	22
2.1.1	Corde vibranti	23
2.1.2	Identità trigonometriche e battimenti	25
2.2	Serie di Fourier	28
2.2.1	Coefficienti di Fourier	28
2.2.2	Convergenza e Cesaro-sommabilità	31
2.2.3	Fenomeno di Gibbs	34
2.2.4	Funzioni di Bessel	37
2.3	Trasformata di Fourier e Wavelet	40
2.3.1	Trasformata di Fourier	41
2.3.2	Dalla trasformata di Fourier a quella Wavelet	45
2.3.3	La <i>windowed</i> trasformata di Fourier (WFT)	47
2.3.4	Trasformata wavelet	51
2.3.5	Applicazioni delle wavelets	56
2.4	Sintesi musicale da computer	57
2.4.1	Inviluppo dell'onda	57
2.4.2	Sintesi additiva e sottrattiva	58
2.4.3	Modulazione di ampiezza (AM) e di frequenza (FM)	59
2.5	Trattamento digitale del suono	62
2.5.1	Campionamento del suono	62
2.5.2	Teorema di Nyquist ed effetto di aliasing	64
2.5.3	Sintesi digitale FM	66
2.5.4	Sintesi FM e Yamaha DX7	67

3	Musica generativa	70
3.1	Musica e algoritmi	71
3.1.1	Tecniche di composizione algoritmica	71
3.2	Esempi-base di musica algoritmica	74
3.3	Alcune sperimentazioni moderne	76
3.3.1	Composizioni Frattali	78
3.3.2	Esempio di composizione multimediale	82
3.3.3	Elaborazione cerebrale dei segnali	83
3.3.4	Comporre con gli automi cellulari	84
3.3.5	Esempio di composizione con i sistemi dinamici	89
3.4	Musica algoritmica e Csound	91
 4	 Teoria dei sistemi dinamici	 93
4.1	Un primo approccio ai sistemi dinamici	94
4.1.1	Lo spazio delle fasi	97
4.2	Teoremi fondamentali	98
4.2.1	Esistenza ed unicità locale	98
4.2.2	Prolungamento delle soluzioni	100
4.2.3	Soluzione globale	103
4.2.4	Il flusso di un'equazione differenziale	105
4.3	Stabilità	110
4.3.1	Stabilità dei sistemi lineari	111
4.3.2	Stabilità dei sistemi NON lineari	115
4.4	Funzioni di Liapunov	123
4.5	Classificazione dei punti di equilibrio	132

5	Sistemi dinamici e Matlab	142
5.1	Matlab e Pplane5	142
5.2	Modello preda-predatore di Lotka-Volterra	144
5.2.1	Andamento intuitivo del sistema	144
5.2.2	Punti di equilibrio del sistema	145
5.2.3	Linearizzazione del sistema	146
5.2.4	Simulazioni con Pplane5	150
5.2.5	Soluzioni particolari	155
5.3	Il pendolo	160
5.4	Crescita di una popolazione	164
5.5	Equazione di Van der Pol	168
5.6	Sistema di sospensioni di un autobus	172
5.7	<i>Pitch-Controller</i> (Beccheggio di un aereo)	176
5.8	L'attrattore di Rossler	180
5.9	Le equazioni di Lorenz	183
6	Sistemi dinamici e musica	185
6.1	Uso di Matlab, non solo da utente	185
6.2	SDM	187
6.2.1	I file <i>score</i>	187
6.2.2	I file <i>Met</i>	188
6.3	Corrispondenze fra musica e immagini	191
7	SDM, Csound e Midi	200
7.1	Eseguiamo SDM	200

INDICE

7.2	Creazione dei file <i>.sco</i> e <i>.met</i> da SDM	205
7.2.1	File score	205
7.2.2	File Met	208
7.3	Dallo spartito alla musica	209
A	File di programmazione per SDM	211
	Bibliografia	220

Capitolo 1

Fondamenti della scienza del suono

1.1 Le radici storiche

La storia del rapporto tra l'uomo e la scienza del suono affonda le sue radici nel tempo fino a 4000 anni fa. In quegli anni i cinesi compivano esperimenti facendo suonare canne di diversa lunghezza, dando così inizio allo studio che, nel corso dei secoli, approdò a risultati decisivi. A segnare un punto di svolta è stata l'esperienza del monocordo, databile nel sesto secolo a.C.

I greci costruirono questo piccolo, semplice strumento, che li portò a cogliere direttamente il nesso tra l'altezza del suono e la sua lunghezza d'onda (la distanza fra due massimi consecutivi dell'onda).

Il monocordo è una corda a estremi fissi, tesa sopra una cassa di risonanza, come schematizzato in figura 1.1. La tensione della corda può essere variata tramite una sorta di spinotto. Un ponticello scorrevole permette di spostare uno degli

estremi della corda in un qualsiasi punto intermedio, così da variare a piacimento la lunghezza della parte di corda che si intende porre in oscillazione.

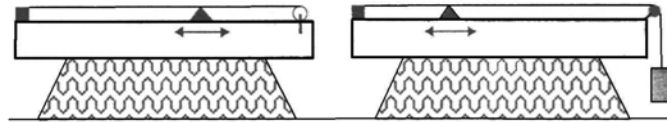


Figura 1.1: Il monocordo

Il risultato che si ottiene, a tensione fissa, è che l'altezza del suono, a giudizio dello sperimentatore, è inversamente proporzionale alla lunghezza della parte di corda che è in azione.

La lunghezza d'onda fondamentale del suono emesso (λ), in realtà, è pari al doppio della lunghezza della corda vibrante, per cui, se la velocità (v) di propagazione della deformazione meccanica sulla corda si potesse assumere costante al variare della frequenza del suono, l'equazione $v = \lambda f$, permetterebbe di dare, per la frequenza fondamentale f del suono emesso, la seguente dipendenza dalla lunghezza L della corda vibrante:

$$f = v/(2L).$$

Il monocordo dei greci permise, in particolare, di definire e capire i seguenti importanti aspetti:

1. INTERVALLO

Fintanto che si mantiene costante il rapporto tra le lunghezze delle corde oscillanti, resta costante il rapporto tra le altezze dei suoni, oggi chiamato intervallo.

2. OTTAVA

L'ottava è l'intervallo tra il suono emesso dalla corda in assenza di ponticello e quello in cui il ponticello è posto nel punto centrale della corda per cui corrisponde ad un rapporto delle lunghezze delle parti vibranti della corda uguale a 2.

I greci identificarono l'intervallo di ottava come quello di massima consonanza.

3. ALTRI INTERVALLI NOTEVOLI

Il secondo intervallo che i greci giudicarono di grande importanza per l'armonia, dopo l'ottava, è quello di quinta perfetta, che corrisponde a un rapporto di $3/2$ tra le lunghezze della corda vibrante (do-sol). Viene poi l'intervallo di quarta perfetta (do-fa), con rapporto di lunghezze della corda vibrante di $4/3$. Solo molti secoli più tardi, Tolomeo riconoscerà il valore degli intervalli di terza maggiore (do-mi, con rapporto $5/4$) e di sesta maggiore (do-la, con rapporto $5/3$). È interessante notare che le note che sembrano dare accordi consonanti corrispondono a frazioni tra numeri interi, con risultati tanto più gradevoli quanto più i numeri sono piccoli. Ciò fece enunciare a Pitagora la celebre frase: *“Il segreto dell'armonia sta nel magico potere dei numeri”*.

4. INTERVALLI MUSICALI E RAPPORTI ARMONICI

È significativo rilevare che tutti gli intervalli di interesse nella scala tonale corrispondono a note la cui frequenza è multipla di una fondamentale f_1 (si veda la tabella 1.1), ossia stanno in rapporto armonico con essa.

Nota	Intervallo	Nota	Intervallo
f_1	unisono	$4f_1$	2 ottave
$2f_1$	ottava	$5f_1$	2 ottave + 3 ^a maggiore
$3f_1$	ottava + 5 ^a	$6f_1$	2 ottave + 5 ^a maggiore

Tabella 1.1: Multipli di una frequenza fondamentale f_1 .

5. TENSIONE DELLA CORDA

Incrementando la tensione della corda, l'altezza del suono aumenta, ciò permette di stabilire, attraverso l'equazione $f = v/(2L)$, che la velocità del suono cresce con la tensione. Una misura quantitativa, fatta sostituendo allo spinotto di regolazione una carrucola che permetta di tenere la corda in tensione tramite un peso variabile a piacere, porta a stabilire una relazione del tipo:

$$v = \sqrt{T/\mu}$$

dove T è la tensione (peso agente) e μ è la densità lineare della corda (massa per unità di lunghezza, $\mu = m/L$). Ciò conferma il noto fatto che anche lo spessore della corda influisce sull'altezza del tono fondamentale emesso che risulta più grave per corde massicce.

1.1.1 Scala pitagorica

Nel sesto secolo prima dell'era cristiana, Pitagora propose una scala musicale diatonica (ossia composta di sette note, i tasti bianchi del pianoforte) basata sui concetti emersi dalle esperienze di armonia fatte con il monocordo: difficilmente poteva attendersi che essa avrebbe influito sulle concezioni musicali di oltre due

millenni. Eppure, a quel tempo, la musica era strettamente monofonica, per cui la consonanza delle note aveva una ben più modesta rilevanza che non nella complessa polifonia che ha caratterizzato la musica degli ultimi secoli, e che non potrebbe sussistere senza una struttura armonica. È quindi più significativo il risultato di Pitagora, ottenuto più per aspirazione verso una formale eleganza matematica e concettuale, che non per una reale esigenza pratica.

La procedura che fu adottata da Pitagora e dalla scuola di Crotone, basata sulla nozione che gli intervalli perfetti erano quelli di quinta e di ottava (e quindi di quarta, essendo $2 : 3/2 = 4/3$), ricalcava quella introdotta oltre duemila anni prima dai cinesi.

Probabilmente l'approccio di Pitagora fu il seguente:

Supponiamo di partire da una nota prescelta, per esempio il fa^4 (col numero in apice indichiamo l'ottava a cui appartiene quella determinata nota), avvio che porta alla cosiddetta scala *lidia*, ci si innalza per quinte, ottenendo successivamente do^5 , sol^5 , re^6 , la^6 , mi^7 , si^7 . Questi sarebbero i sette tasti bianchi della scala centrale di pianoforte se il do e il sol venissero abbassati di un'ottava, il re e il la di due, il mi e il si di tre. Il procedimento, in sostanza, consiste nel moltiplicare la frequenza del fa per $3/2$, rapporto dell'intervallo di quinta, o sue potenze, e dividere per due, rapporto di ottava, o sue potenze.

1.1.2 Scala tolemaica

Il passo successivo, negli aspetti essenziali, è dovuto a Tolomeo, che vive in Egitto nel secondo secolo dell'era cristiana. Egli pone la domanda: perchè fermarsi all'idea che la consonanza armoniosa debba limitarsi a note emesse da corde i

cui rapporti di lunghezza stiano tra loro come numeri 2, 3 e 4? Proviamo a fissare, sul monocordo, un punto posto a $1/5$ della lunghezza totale della corda. Facciamo vibrare la parte più lunga: il rapporto delle frequenze tra la nota così emessa e quella della corda fissata ai soli estremi è $5/4$. Esso non compare nella scala Pitagorica, ma oggi, nella scala naturale, è il fondamentale accordo di terza maggiore do-mi.

Con il nuovo intervallo di Tolomeo, che i greci, chissà perchè, non avevano ritenuto abbastanza armonioso da meritare attenzione, tra le varie possibilità di nuove scale che in teoria si potevano concepire, fu preferita quella che si ottiene scegliendo la nota di partenza (do) e da essa generandone subito altre due, mi e sol, rispettivamente con un intervallo di terza maggiore e uno di quinta perfetta (rapporti di frequenza con il do: $5/4$ e $3/2$). Le tre note costituiscono un accordo triadico maggiore, autentico fondamento dell'armonia nella musica occidentale. Con ulteriori intervalli di terza maggiore e di quinta perfetta giungiamo al *si* e al *re*. Aggiunto il *fa*, ripreso dalla scala pitagorica, da esso giungiamo anche al *la* con un intervallo di terza maggiore, completando la caratterizzazione delle sette note.

La scala così ottenuta altro non è che quella sopramenzionata come *naturale* o *di giusta intonazione*. Vedremo di seguito perchè essa si qualifichi come la scala di massima consonanza.

Dalla cultura greca, comunque, qualcosa di profondamente incisivo era nato, qualcosa che ci rimase come eredità: l'evidenza dell'interconnessione tra musica e scienza, il perfetto compenetrarsi di armonia, fisica e matematica.

Nel medioevo, l'ordine degli studi divideva le arti liberali in trivio e quadrivio: nel

<i>Nota</i>	<i>do</i>	<i>re</i>	<i>mi</i>	<i>fa</i>	<i>sol</i>	<i>la</i>	<i>si</i>	<i>do'</i>
Pitagorica	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2/1
Naturale	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2/1

Tabella 1.2: Rapporti tra la frequenza fondamentale delle varie note e quelle del *do*, in scala diatonica pitagorica e in scala diatonica naturale di *do* maggiore.

secondo si trovavano unite aritmetica, geometria, musica e astronomia. Musica, dunque, al rango di “arte scientifica”.

Nel tempo in cui viviamo, dopo secoli di continua anche se poco appariscente incubazione, siamo forse giunti a recuperare e a rinnovare quel fondamentale approccio e a capire quanta più strada possa percorrere l’arte, se fortificata dalla comprensione dei meccanismi fisico-matematici che la sorreggono.

1.2 Scale musicali e temperamenti

Una scala musicale è una successione di note (in ordine ascendente o discendente), collocate secondo criteri che, in modi diversi, tengono presenti le consonanze degli intervalli. Le scale più comunemente usate sono le scale *diatoniche maggiore e minore*, costituite da sette note, la scala *cromatica*, costituita dalle sette note della diatonica più cinque note accidentali e la scala *pentatonica*, (solo i tasti neri del pianoforte), impiegata nella musica cinese.

1.2.1 Scala pitagorica e scala naturale

Nel paragrafo precedente si sono discussi i due modi storici di costruire una scala diatonica, quello di Pitagora e quello di Tolomeo. Ora discuteremo i loro punti deboli e passeremo a giustificare l'introduzione di scale di compromesso - le *scale temperate* - concepite per superare gli inconvenienti delle scale storiche e per soddisfare importanti esigenze pratiche e strumentali.

Scala Pitagorica

La scala pitagorica, come anticipato nel precedente paragrafo, è concepita in modo da privilegiare le quinte perfette, sorvolando sulla consonanza della terza maggiore. L'approccio di Pitagora suggerisce di generare le note accidentate della scala cromatica (diesis e bemolle), costruendo il *circolo delle quinte*, in base al quale esse si ottengono semplicemente moltiplicando per $3/2$ la frequenza della nota che sta una quinta perfetta più in basso.

Si potrebbe pensare che il circolo delle quinte risolva completamente il problema della generazione delle scale a dodici note, ma non è così. Sorgono dei problemi:

per generare, a partire dalla frequenza del *si*, quella del *fa*♯ dell’ottava superiore, si esegue il prodotto $(243/128) \cdot (3/2) = 729/256$. Ora, il *fa* dell’ottava superiore ha frequenza $8/3$, per cui l’intervallo di semitono *fa-fa*♯ vale $(729/256) \cdot (3/8) = 2187/2048 = 1.0678$. Esso è detto *semitono cromatico* e risulta maggiore del *semitono diatonico*, pari a $256/243 = 1.0535$, ottenibile come intervallo *si-do*’ ($2:243/128$) o *mi-fa* ($4/3:81/64$), indichiamo con l’apice le note appartenenti ad un’ottava superiore.

Se la scala pitagorica, contrariamente a quella naturale, ha il merito di avere il solo valore $9/8$ per il tono intero, essa ha lo svantaggio di richiedere due valori per il semitono, a seconda che questo riguardi coppie della scala diatonica, oppure di note accidentate. Il rapporto tra i due semitoni vale $1.0678/1.0535=1.0136$ e si chiama *comma ditonico o pitagorico*. Esso non è piccolo, valendo circa $1/8$ di intervallo di tono, e la sua esistenza comporta alcuni inconvenienti.

L’altro aspetto negativo della scala pitagorica è l’estrema povertà di consonanza nell’intervallo di terza maggiore (*comma sintonico o di Didimo*). Assai infelice è anche l’intervallo di sesta maggiore.

Scala di giusta intonazione o naturale

La scala di giusta intonazione, che è mirata a garantire la massima armonia, si fonda sull’accordo *do-mi-sol*, costituito da una terza maggiore (rapporto di intervallo $5/4$), seguita da una terza minore (rapporto di intervallo $6/5$). Tale scala è anche detta scala dei rapporti semplici o *scala zarliniana*, per il fatto che furono gli scritti di Gioseffo Zarlino, attorno alla metà del secolo XVI, che ne valorizzarono l’impiego.

Il primo serio problema che si incontra con la scala naturale è che le quarte e le quinte non sono tutte perfette (*re-la*, di intervallo $40/27=1.481$ è inferiore a $3/2=1.5$). Ulteriori perdite di consonanza si aggiungono quando la scala diatonica viene resa cromatica, dividendo i toni interi in due semitoni. Un'altra difficoltà è la seguente: si consideri la sequenza *do-la-re'-sol-do* che, con una successione di intervalli di sesta + quarta verso l'alto, e poi quinta + quinta verso il basso, dovrebbe ricondurre al do di partenza. Ebbene, facendo il conto si trova $(5/3) \cdot (4/3) \cdot (2/3)^2 = 80/81$, che è diverso da 1, la frequenza assunta per il *do* di partenza.

Questa irreversibilità del processo di ascesa, ove nel ritorno non venga percorso lo stesso cammino, è causa di notevoli difficoltà nell'accordatura di uno strumento. Inoltre, unitamente al fatto che si hanno due toni interi (uno grande, *do-re*, uguale a $9/8$, e uno piccolo, *re-mi*, uguale a $10/9$), questi elementi impediscono che uno strumento possa essere usato per eseguire brani in tonalità differenti senza una completa riaccordatura.

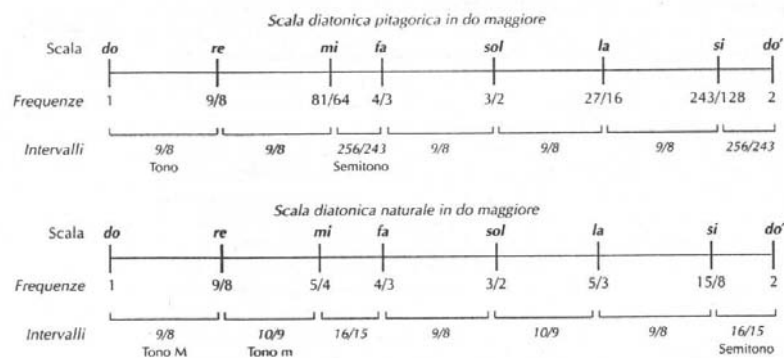


Figura 1.2: Confronto delle scale diatoniche: pitagorica e naturale.

1.2.2 Scale temperate

Lo spagnolo Francisco Salinas, nel Cinquecento, costruì uno strumento a tastiera dotato di ventiquattro note per ottava, strumento che consentiva di suonare in un certo numero di tonalità, anche se non tutte. Egli stesso, tuttavia, si rese conto che la soluzione di una tastiera gigante non era la strada più praticabile, tanto che propose di adottare una scala temperata, dove le note venissero “*aggiustate*” a valori che non corrispondevano ai requisiti della massima consonanza, ma risolvevano in modo decisivo il problema dei cambiamenti di tonalità.

In linea di principio, ogni forma di temperamento andava a diretto discapito dell’armonia, per cui molti musicisti del tempo, soprattutto i francesi, ne rifiutarono a lungo la validità. A parte gli intervalli di quarta e di quinta non perfetti, alle scale temperate (soprattutto a quella a temperamento equabile che presenteremo più avanti), si rimproverava una eccessiva meccanicità che aveva l’effetto di annullare le coloriture particolari di ciascuna tonalità. Johann Sebastian Bach, nei fatti, si dimostrò di opposto avviso: ritenendo che la possibilità di modulare da una tonalità all’altra fosse una componente essenziale alla vitalità della musica e che la simmetria e la regolarità nel susseguirsi delle note non fossero fattori deprecabili, bensì garanzia di ordine e trasparenza, egli accolse con pieno favore gli ultimi sviluppi in fatto di scale temperate, che consentivano di spaziare su tutte le tonalità maggiori e minori. A riprova di ciò, compose il primo e il secondo libro de *Il clavicembalo ben temperato*, celeberrima raccolta di 48 preludi e fughe, dove ogni pezzo è eseguito in tutte le tonalità della scala cromatica temperata di modo maggiore e di modo minore.

Fra tutte le forme di temperamento della scala cromatica, tratteremo ora quella che è divenuta oggi, a partire dall'era barocca, di uso universale, e cioè il *temperamento equabile*.

Il temperamento equabile a 12 note (scala ben temperata)

Con tale temperamento, pur rinunciando alle condizioni ottimali per l'armonia della scala naturale, si creano intervalli musicali egualmente spazati per qualsiasi scelta della tonica.

Nella scala cromatica, tutti gli intervalli di semitono vengono fissati a 100 cent, quindi i cinque intervalli di tono intero della scala diatonica sono uguali a 200 cent: in questo modo, la facoltà di trasposizione da una tonalità all'altra diviene illimitata.

Il *cent*, introdotto dall'inglese Alexander Ellis nel 1885, viene definito ricorrendo ai logaritmi delle frequenze. Il numero di cent associati ad un dato intervallo, il cui rapporto di frequenza sia R , si calcola facendo la proporzione:

$$\text{Numero di cent}/1200 = \log R / \log 2.$$

La via per arrivare al temperamento equabile è assai semplice. Si divide l'ottava *do-do'*, pari a 1200 cent, in dodici intervalli uguali di semitono. Poichè si hanno sette note principali, i diesis e i bemolle devono necessariamente coincidere per un totale di cinque note accidentate. Preso come di consueto il valore 1 per la frequenza del *do*, le note della scala a temperamento equabile, e le corrispondenti frequenze, sono allora rappresentabili su un percorso ciclico. Il rapporto di frequenze del semitono temperato, R , si ottiene osservando che la frequenza di *do'*,

uguale a 2, deve anche valere R^{12} , per cui si può scrivere

$$R = \sqrt[12]{2} = 1.05946$$

rapporto che corrisponde appunto a 100 cent.

Nella scala temperata e in quella naturale il rapporto è in pratica lo stesso per gli intervalli di quinta e quarta, fattore di grandissima importanza ai fini della buona armonia. Differenze abbastanza marcate si hanno invece sulla terza maggiore e sulla terza minore. Negli accordi ciò dà luogo a battimenti supplementari, come si vedrà nel paragrafo 2.1.2, e conseguentemente, a introduzione di rumore. Di fatto, però, un clavicembalo accordato in temperamento equabile e un violino accordato sulla scala più o meno naturale possono suonare assieme senza che l'orecchio dell'ascoltatore ne soffra.

1.3 Caratteri fisici e musicali del suono

I fattori fondamentali che ci permettono di distinguere un suono da un altro, in un insieme orchestrale, sono: *l'ampiezza, l'altezza, il timbro, il livello sonico e la durata*. Analizziamo ora singolarmente queste ed altre caratteristiche del suono.

1.3.1 Ampiezza

Quando un oggetto vibra produce una variazione di pressione locale dell'aria che si propaga come onda. Quest'onda viene riconosciuta dall'orecchio umano come suono. L'ampiezza del suono, che noi percepiamo come volume, non è altro che l'ampiezza di tale oscillazione.

1.3.2 Altezza

È quella caratteristica del suono che consente di collocarlo in forma di nota sul pentagramma e corrisponde alla frequenza di oscillazione.

Ci sono pochi fattori della musica che sono altrettanto dipendenti dal soggetto che li giudica quanto l'altezza assoluta del suono. La sensazione prodotta da una nota è diversa da un ascoltatore all'altro e persino, nello stesso soggetto, da un orecchio all'altro. La percezione dell'altezza assoluta è molto opinabile e nella grande maggioranza degli individui, per quanto possano essere assidui frequentatori della musica, del tutto impossibile. Solo pochissimi sanno identificare una nota di pianoforte suonata isolatamente, fuori da un contesto.

Relativamente normale è invece il riconoscimento dell'intervallo che separa tra loro due tasti suonati in successione. Sull'intervallo di ottava, in particolare, anche i

profani non hanno dubbi, perchè le note hanno frequenza doppia l'una dell'altra e ciò dona loro un carattere di inconfondibile omogeneità. Come nessuno rimane incerto su quale, di due note, abbia altezza maggiore e quale minore.

Altezza virtuale. Quando all'orecchio giunge un insieme di armoniche di pari intensità (le armoniche sono i diversi modi di oscillazioni dell'onda e ne parleremo in dettaglio nel paragrafo 2.1.1) la sensazione è quella di una completa fusione delle stesse in un suono complesso e l'altezza percepita è quella della fondamentale (cioè quella di minima frequenza), quand'anche essa fosse debole o persino assente dal gruppo di parziali ricevute. In un modo o nell'altro si crea un'*altezza virtuale* e l'orecchio coglie tale altezza come dominante e fonde le parziali reali in un tutto unico che conferisce colore timbrico alla nota.

Benchè l'effetto di altezza virtuale sia per lo più dominante, un ascolto attento, di tipo *analitico* anzichè *sintetico*, permette di cogliere separatamente gli eventuali ipertoni più intensi, soprattutto se essi sono stati suonati individualmente subito prima, così da predisporre il cervello al loro riconoscimento. Studi sperimentali mostrano che tale capacità è limitata ai primi ipertoni, certamente non supera l'ottavo.

1.3.3 Timbro

Esprime la qualità del suono, la sua coloritura e dipende in modo primario dallo strumento e dal modo in cui viene gestito. Sul piano scientifico esso corrisponde alla composizione armonica (contenuto spettrale) individuata dall'analisi di Fourier. In altre parole, il timbro è ciò che permette di distinguere due suoni prodotti da sorgenti diverse, anche se essi hanno rigorosamente lo stesso tempo di crescita,

la stessa altezza, la stessa intensità e la stessa durata.

Per la sua dipendenza, in misura preponderante o secondaria, da molti diversi fattori, il timbro, come fatto di percezione soggettiva, non può essere rappresentato su una scala diretta e univoca. Ad esempio, il contenuto di armoniche di un suono, a causa degli effetti di smorzamento e di interazione incrociata tra le varie corde e parti dello strumento, varia durante l'emissione del suono stesso.

Dal punto di vista dell'impressione soggettiva, si tende a classificare il timbro in vari modi, definendolo attraverso estremi che possono andare da opaco a brillante, da freddo a caldo, da puro a ricco, da compatto a diffuso, da vuoto a pieno, da neutro a colorito. L'idea che l'elemento precipuo che porta alla definizione del timbro sia lo spettro delle armoniche del suono è dovuta ad Hermann von Helmholtz. Molte sue osservazioni hanno tuttora validità, e si possono riassumere nelle seguenti "ricette":

- Suoni con un limitato numero di armoniche - diciamo dalla prima alla sesta o settima - sono più ricchi e pastosi di quelli puri, come il diapason, ma ne conservano in pieno, anzi ne accentuano, il carattere dolce e morbido; tra essi troviamo il pianoforte nei registri medio-alti e taluni strumenti a fiato, quali il flauto e l'oboe.
- Se si hanno armoniche più elevate, soprattutto se intense, il suono tende ad acquistare un carattere più aspro e frizzante, tipicamente di violino.
- I suoni mancanti delle armoniche pari, come avviene negli strumenti a canna chiusi a un estremo - clarinetto o canne d'organo "tappate" - hanno un carattere vuoto e nasale.

- L'intensità della prima armonica gioca un ruolo determinante nel dare "stoffa" al suono: se essa è debole, la pienezza del suono risulta impoverita.
- Circa le altre armoniche, in generale la seconda conferisce al suono limpidezza, la sesta e l'ottava lo rendono chiaro e squillante, la settima e la nona lo inaspriscono, la decima ne aumenta la chiarezza e introduce un sentore metallico.
- Il timbro non sembra dipendere dalle differenze di fase tra le varie armoniche costituenti il suono. Fatto che, anche se oggi non risulta esattamente verificato, è di certo un'eccellente approssimazione alla realtà delle cose.

1.3.4 Frequenze formanti

Si può vedere che un dato strumento può presentare contenuti di armonici assai differenti nei vari registri (bassi, medi, alti); il timbro mantiene, tuttavia, un carattere proprio, che ne permette il riconoscimento. Questo è dovuto alle *frequenze formanti* dello strumento, cioè, quelle per cui l'emissione sonora è dominante. Per individuare tali frequenze, si determina la media delle ampiezze di ciascuna frequenza generabile dallo strumento; tramite un personal computer, si fa ricorso all'analisi di Fourier del suono registrato applicandola a stretti intervalli di tempo e poi si media il risultato nel tempo. Si grafica tale media in funzione della frequenza stessa. Si mettono così in evidenza bande più intense, o risonanze principali, e bande più deboli.

Le formanti rappresentano un elemento chiave nel parlato e nel canto, risultando basilari nel riconoscimento della voce e nella comprensibilità delle parole.

1.3.5 Ritmo

Il ritmo è l'ordinata successione delle unità di tempo che, sulla base della misura assunta, regolano le accentuazioni periodiche dei suoni. In genere, le variazioni di intervallo temporale e di intensità del suono che generano il ritmo seguono un modello ciclico in cui, a intervalli regolari, si ripetono gruppi diversi di suoni.

La percezione del ritmo è istintiva, essendo presente fin dal primo istante di vita, cosa che non si può affermare in modo altrettanto perentorio per gli altri attributi del suono musicale, per esempio l'armonia tonale. Il ritmo, infatti, coinvolge direttamente la mobilità del nostro corpo e la cadenza del nostro passo. Malgrado tale "fisicità" del ritmo, esso non presenta fondamenti di scienza fisica, ma è di natura psicologica e in linea di massima appartiene esclusivamente all'uomo. Non esistono ritmi oggettivi, naturali, anche se è vero che il mondo può offrirci spontaneamente eventi acustici ai quali è possibile attribuire un'importanza ritmica.

1.3.6 Livello sonico e Durata

Il livello sonico corrisponde alle varie notazioni della dinamica musicale che si estendono, nella norma, dal pianissimo *ppp* al fortissimo *fff*.

La durata, invece, non è altro che l'intervallo di tempo nel quale la nota viene suonata.

1.4 I meccanismi dell'udito

In questo paragrafo viene descritto, nei tratti essenziali, il funzionamento dell'apparato uditivo, mirabile struttura capace di tradurre l'indecifrabile sequenza di oscillazioni di pressione associate al suono complesso in una nitida trama musicale, costituita da una molteplicità di timbri e di livelli poggiati su accordi.

Un disegno schematico dell'apparato auricolare è dato nella figura 1.3. Esso si

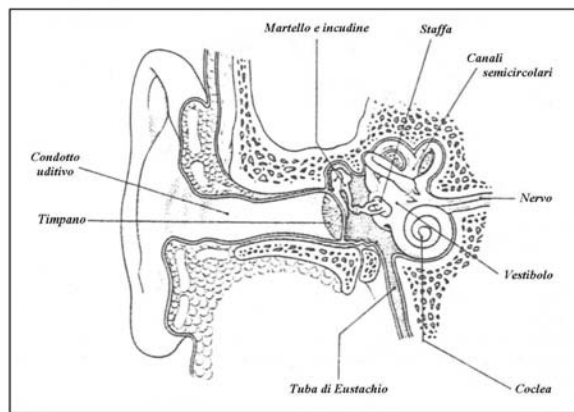


Figura 1.3: Struttura dell'orecchio

divide in orecchio esterno: *padiglione auricolare* e *condotto o meato uditivo*; orecchio medio: *timpano*, *ossicini* (martello, incudine e staffa) e *finestra ovale*; infine orecchio interno: *coclea*, autentico gioiello di ingegneria micromeccanica, *canali semicircolari*, e *fibre o terminazioni nervose*. Esaminiamo ora, separatamente, le varie parti, evidenziando i loro ruoli nella traduzione dell'onda musicale in segnali diretti al cervello.

Orecchio esterno e direzionalità del suono. Al *padiglione auricolare*, che ha la funzione di raccogliere il suono da un'area sufficientemente ampia, segue il

condotto o meato uditivo, terminante nella membrana del *timpano*. Il timpano entra in vibrazione quando si trova sollecitato da oscillazioni di pressione nell'aria interna al condotto.

Il padiglione auricolare ha anche una seconda importante funzione, quella di garantire l'individuazione della provenienza del suono.

Trasmissione dello stimolo sonoro nell'orecchio medio. L'orecchio medio è la zona compresa tra il timpano e la finestra ovale, apertura di accesso alla coclea. Il timpano è tenuto in tensione dal muscolo timpanico. La vibrazione del timpano convoglia l'onda alla finestra ovale tramite la catena degli ossicini: martello, incudine e staffa.

La *tuba di Eustachio* è un condotto che collega l'orecchio medio con la parte posteriore della cavità orale e ha lo scopo di equalizzare la pressione statica interna e quella esterna. Essa è normalmente chiusa, ma si apre per contrazione muscolare se si sbadiglia o si deglutisce.

Struttura della coclea. Nell'orecchio interno i canali semicircolari non hanno molto a che fare con l'udito, ma servono piuttosto da organi di controllo dell'equilibrio. La *coclea* è invece il fulcro dell'orecchio e la sede propria del processo uditivo, ossia della traduzione di impulsi meccanici in segnali nervosi. Essa ha forma di chiocciola, come suggerisce il nome, ed è scavata all'interno dell'osso temporale. La sua lunghezza è di circa 35 mm; il diametro, che all'imboccatura della spirale misura 2 mm, si restringe gradualmente. Nella coclea si hanno diverse gallerie che corrono per l'intera sua lunghezza. Si distinguono il *dotto*

cocleare, riempito da un liquido detto *endolinfa*, la *rampa vestibolare* e la *rampa timpanica*, anch'esse piene di fluido. Il dotto cocleare è separato dal comparto superiore dalla sottilissima *membrana di Reissner* e dal comparto inferiore dalla *membrana basilare*.

Lungo la membrana basilare corre *l'organo del Corti*, una sottile massa gelatinosa che accoglie le cellule colonnari interne ed esterne, munite di ciglia che le pongono in connessione con le fibre nervose. Le ciglia, collegate all'estremo superiore alla *membrana tectoria*, si flettono quando sono raggiunte dalla vibrazione meccanica in moto lungo la membrana basilare. È il piegamento delle ciglia che presumibilmente, spinge le relative cellule a produrre segnali elettrici, i quali vengono raccolti dalle terminazioni del nervo uditivo e convogliati al cervello. Il numero di impulsi per secondo dipende sia dalla frequenza dell'onda sia dalla sua intensità.

Quanto detto permette di affermare che la coclea è il primo e fondamentale organo che ci assicura la capacità di cogliere i caratteri principali della musica.

È interessante notare che, poichè la risposta della membrana basilare alle sollecitazioni meccaniche dipende dalle dimensioni della stessa, la gamma delle frequenze udite dai diversi esseri viventi può differire di molto. Così, se gli umani coprono al meglio l'intervallo $20 - 20000 Hz$ e il cane li supera solo di poco sul lato degli ultrasuoni, i pipistrelli partono tipicamente da $1000 Hz$ per arrivare oltre i $100000 Hz$, mentre i delfini, pur capaci di scendere fino a $200 Hz$, raggiungono nei registri alti addirittura i $200000 Hz$!

Capitolo 2

Basi matematiche della Musica

Precisiamo a questo punto che con il termine “suono” si dovrebbe intendere la sensazione, come essa si manifesta a livello cerebrale, di una perturbazione di natura meccanica (a carattere oscillatorio) che interessa il mezzo interposto tra sorgente e ascoltatore. In genere, tuttavia, si impiega la parola suono o onda sonora, per definire la perturbazione in sè e per sè.

2.1 Il moto armonico

Si consideri una particella di massa m soggetta ad una forza F intorno alla posizione di equilibrio, $y = 0$, la cui intensità sia proporzionale alla distanza y dalla posizione di equilibrio,

$$F = -ky$$

dove k è una costante di proporzionalità. L'equazione fornita dal secondo principio della dinamica è:

$$F = ma$$

dove

$$a = \frac{d^2y}{dt^2}$$

è l'accelerazione della particella e t rappresenta il tempo. Combinando queste equazioni si ottiene l'equazione differenziale del secondo ordine:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{ky}{m} = 0.$$

Con le notazioni $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ e $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$ l'equazione diviene:

$$\ddot{y} + \frac{ky}{m} = 0. \tag{2.1}$$

Le soluzioni sono funzioni del tipo:

$$y = A \sin(\sqrt{k/m}t) + B \cos(\sqrt{k/m}t).$$

Il fatto che queste siano le soluzioni dell'equazione differenziale (2.1) è il motivo per cui l'onda seno, e non qualche altra onda periodica, sia la base dell'analisi armonica delle onde periodiche.

Inoltre questa è l'equazione differenziale che governa il moto di una qualsiasi particella sulla membrana basilare nella coclea e quindi governa la percezione umana del suono.

2.1.1 Corde vibranti

Consideriamo una corda vibrante, fissata ai due estremi. Supponiamo che nel mezzo della corda sia ancorata una pallina di massa m molto maggiore della massa della corda stessa. Allora la corda esercita una forza F sulla massa verso la posizione di equilibrio, la cui intensità, almeno per piccoli spostamenti, è proporzionale alla distanza y dalla posizione d'equilibrio.

In accordo con il paragrafo precedente, si ottengono le soluzioni:

$$y = A \sin(\sqrt{k/mt}) + B \cos(\sqrt{k/mt})$$

dove le costanti A e B sono determinate dalla posizione e dalla velocità iniziale della corda.

Si consideri poi il caso in cui alla corda vengano ancorate più masse. Si ottengono diversi modi di oscillazione: i *modi normali* fra cui ce n'è uno di minima frequenza (quello di tipo sincro) ed uno di massima frequenza (quello di massima antisincronia), fermo restando che il numero totale dei modi normali possibili è pari al numero delle masse.

Dal caso di molte masse discrete, alla distribuzione continua di masse, che forma una corda musicale, il passo è breve. La corda è costituita da molecole tenute assieme da forze intermolecolari di varia natura, ad esempio dall'attrazione di origine elettrostatica. Il loro comportamento, almeno per piccole deformazioni, può essere molto ben assimilato a quello di forze elastiche. Nel caso di un continuo di masse, il numero dei modi normali diventa così grande da potersi riguardare come infinito.

I modi normali di una corda vibrante sono detti *parziali o armoniche della corda*: quello di minima frequenza è l'*armonica fondamentale (o tono)*, i successivi le *armoniche superiori (o ipertoni)*.

In generale, una corda pizzicata vibrerà con un misto di tutti i modi con frequenza pari a multipli della frequenza fondamentale, con varie ampiezze. Le ampiezze coinvolte dipendono dal modo in cui la corda viene pizzicata o colpita (ad esempio nel caso del pianoforte). L'equazione generale del moto di un generico punto

sulla corda sarà dunque:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin(n\sqrt{k/mt}) + B_n \cos(\sqrt{k/mt})).$$

Dunque una corda può vibrare con diverse frequenze allo stesso tempo; ciò sarà discusso nella teoria delle serie di Fourier. Prima, però, occorre capire bene come sono queste onde seno e come interagiscono fra di loro.

2.1.2 Identità trigonometriche e battimenti

Un'onda seno con frequenza ν , ampiezza c e fase ϕ è descritta dall'espressione:

$$c \sin(2\pi\nu t + \phi)$$

dove $\omega = 2\pi\nu$ è detta velocità angolare e ϕ rappresenta il punto in cui l'onda seno incontra l'asse del tempo. L'espressione precedente può anche essere convertita in una combinazione lineare di seni e coseni, usando le formule di addizione e sottrazione del seno e del coseno. Così si ha:

$$c \sin(\omega t + \phi) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

dove

$$a = c \sin \phi \quad b = c \cos \phi.$$

Inversamente, dati a e b , c e ϕ si possono ottenere come:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \tan \phi = a/b.$$

Vediamo ora cosa accade quando si sovrappongono due onde pure, seno o coseno, e osserviamo che quando le frequenze delle due note suonate simultaneamente

sono molto vicine si percepiscono i “battimenti”.

Considerando le formule di addizione e sottrazione e ricordando che $\sin(-B) = -\sin B$ e $\cos(-B) = \cos B$, si ottiene:

$$\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2 \sin A \cos B \quad (2.2)$$

e similmente:

$$\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2 \cos A \cos B \quad (2.3)$$

$$\cos(A - B) - \cos(A + B) = 2 \sin A \sin B \quad (2.4)$$

E ponendo $u = A + B$ e $v = A - B$ dalle (2.2),(2.3) e (2.4), si ottiene:

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{1}{2}(u + v) \cos \frac{1}{2}(u - v).$$

Si considerino ora due onde seno con fase nulla, ampiezza unitaria e frequenze leggermente differenti: f_1 e f_2 . Sommando le due onde si ottiene, dall’equazione precedente:

$$\sin 2\pi f_1 t + \sin 2\pi f_2 t = 2 \sin \frac{2\pi t}{2}(f_1 + f_2) \cos \frac{2\pi t}{2}(f_1 - f_2) \quad (2.5)$$

per cui possiamo dedurre che, da questa combinazione di suoni, noi percepiamo un’onda seno (*onda portante*) con frequenza pari alla media delle frequenze iniziali e ampiezza modulata da una lenta onda coseno (*involuppo*) con frequenza pari alla semidifferenza delle due frequenze iniziali. Proprio questa modulazione è ciò che noi identifichiamo con il fenomeno dei battimenti. Il numero di battimenti per secondo è esattamente la differenza tra le due frequenze.

Includendo anche i termini della fase e dell’ampiezza delle due onde, nella sovrapposizione, il primo termine dell’equazione 2.5 sarà:

$$c \sin(2f_1\pi t + \phi) + c' \sin(2f_2\pi t + \phi')$$

dove c, c', ϕ e ϕ' sono rispettivamente le ampiezze e le fasi delle due onde iniziali.

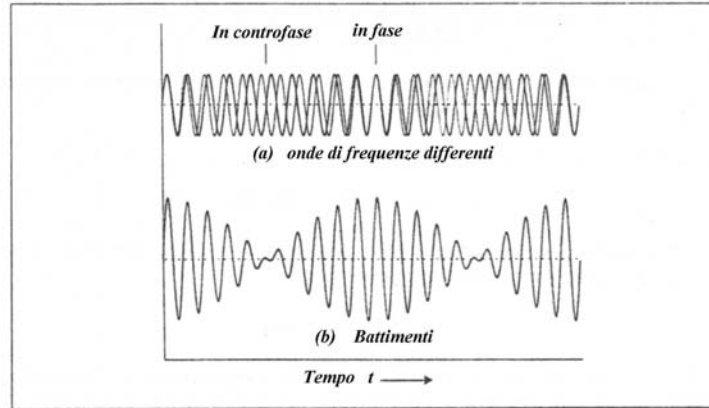


Figura 2.1: I Battimenti

Questo può essere, quindi, riscritto come:

$$(c + c') \sin \left(\frac{1}{2}(f_1 + f_2)2\pi t + \frac{1}{2}(\phi + \phi') \right) \cos \left(\frac{1}{2}(f_1 - f_2)2\pi t + \frac{1}{2}(\phi - \phi') \right)$$

e può essere usato per capire le relazioni tra la fase dei battimenti e le fasi delle onde seno originali.

Si osserva in figura (2.1), che i battimenti avranno valori massimi là dove le due onde originali si trovano in fase e valori nulli dove cadono in controfase.

2.2 Serie di Fourier

Come può una corda vibrare con un numero di frequenze diverse allo stesso tempo? Questo problema occupò la mente di molti fra i più grandi matematici e musicisti del diciassettesimo e diciottesimo secolo. Tra le persone il cui lavoro contribuì alla soluzione di questo problema troviamo: Marin Mersenne, Daniel Bernoulli, la famiglia Bach, Jean-le-Rond d'Alembert, Leonhard Euler e Jean Baptiste Joseph Fourier.

In questo paragrafo tratteremo la teoria dell'analisi armonica di Fourier. Essa consiste nella decomposizione di un'onda periodica in una somma (di solito infinita) di seni e coseni. Le frequenze coinvolte sono multipli interi della frequenza fondamentale dell'onda periodica e ognuna ha un'ampiezza che può essere calcolata con un integrale.

2.2.1 Coefficienti di Fourier

Vogliamo studiare come approssimare una funzione periodica $f(x)$, che supporremo per semplicità di periodo 2π , per mezzo delle somme trigonometriche

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)). \quad (2.6)$$

I coefficienti a_k e b_k dipenderanno evidentemente dalla funzione $f(x)$ in esame. Supponiamo per un momento che la serie a secondo membro converga uniformemente alla funzione $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)); \quad (2.7)$$

moltiplichiamo ambo i membri della 2.7 per $\cos mx$ e integriamo tra $-\pi$ e π . Se si osserva che si può integrare termine a termine e si ricordano le relazioni

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \sin(kx) dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(kx) dx = \begin{cases} \pi & \text{se } m = k \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(kx) dx = \begin{cases} \pi & \text{se } m = k \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

si ottiene immediatamente:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) f(x) dx \quad (2.8)$$

ed analogamente:

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) f(x) dx. \quad (2.9)$$

I coefficienti a_m e b_m si chiamano coefficienti di Fourier relativi alla funzione $f(x)$.

Usando le formule di Eulero:

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$$

e

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

si ottiene:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) =$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2} \right) =$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

con $c_0 = a_0/2$ e per $n \geq 1$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

L'espressione $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ è detta *Serie trigonometrica di Fourier in forma complessa*. Supponendo, come prima, che tale serie converga ad $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

moltiplicando per e^{-imx} entrambi i membri e integrando, si ottiene:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx = 2\pi c_m$$

essendo

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 2\pi & n = m \end{cases}.$$

Dunque

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx.$$

Utilizzando, inoltre le notazioni

$$f \sim (a_k, b_k) \qquad f \sim (c_k) \qquad \hat{f}(k)$$

per indicare che f ha i corrispondenti coefficienti di Fourier, possiamo raccogliere alcune loro proprietà nel seguente teorema:

Teorema 2.2.1 *Siano $f, g \in L^1[0, 2\pi]$ con periodo 2π e siano α e β delle costanti. Allora:*

- $(\widehat{\alpha f + \beta g})(k) = \alpha \hat{f}(k) + \beta \hat{g}(k)$.
- Se $f(x) \sim (c_k)$, allora $f(-x) \sim (c_{-k})$, $\overline{f(x)} \sim (\overline{c_{-k}})$, $f(x + \alpha) \sim (c_k e^{ik\alpha})$, $e^{imx} f(x) \sim (c_{k-m})$ per ogni $m \in \mathbb{Z}$ e la serie di Fourier di $f(nx)$ è: $S(x, f(nx)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{iknx}$ per qualche intero $n \neq 0$.
- Se f è assolutamente continua, allora $\hat{f}'(k) = ik\hat{f}(k)$.
- Se $f \in L^1[0, 2\pi]$ con $f \sim (c_k)$ e $F(x) = K + \int_0^x f(t)dt$, dove K è una costante; allora $F(x) - c_0 x \sim \left(\frac{c_k}{ik}\right)$.

In generale per una funzione periodica di periodo T , i coefficienti di Fourier sono dati da:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt$$

$$a_m = \frac{2}{T} \int_0^T \cos(2\pi mt/T) f(t)dt$$

$$b_m = \frac{2}{T} \int_0^T \sin(2\pi mt/T) f(t)dt.$$

2.2.2 Convergenza e Cesaro-sommabilità

Sfortunatamente non è vero che partendo da una qualsiasi funzione periodica $f(t)$, calcolando i coefficienti di Fourier a_m e b_m e poi valutandone la serie corrispondente riusciamo sempre ad ottenere la funzione $f(t)$. Il problema più evidente è che se due funzioni differiscono solo per un certo valore di t , i coefficienti di Fourier saranno identici. In definitiva abbiamo bisogno di ulteriori condizioni che

garantiscono la convergenza della serie di Fourier e le andiamo ad esplicitare nei seguenti teoremi:

Teorema 2.2.2 *Sia $f(x)$ una funzione periodica di periodo 2π regolare a tratti; la serie di Fourier della f ,*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

converge a $f(x)$ nei punti in cui f è continua. Inoltre in un punto x_0 di discontinuità, la serie converge alla media dei limiti destro e sinistro:

$$\frac{1}{2}(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)).$$

Dopo aver visto le condizioni necessarie per la convergenza puntuale, enunciamo ora alcuni teoremi che riguardano la convergenza uniforme:

Teorema 2.2.3 *Se la funzione $f(x)$ è continua in \mathbb{R} e regolare a tratti, la serie di Fourier di f converge totalmente, e quindi uniformemente, alla funzione $f(x)$*

Teorema 2.2.4 *Se $f(x)$ è regolare a tratti, la serie di Fourier di f converge uniformemente in ogni intervallo chiuso $[a, b]$ in cui la funzione $f(x)$ è continua.*

I prossimi due teoremi danno delle condizioni sufficienti per la convergenza uniforme di una serie di Fourier in termini di $f^{(n)} \in L^p$. In entrambi i casi si ha $n + p = 3$.

Teorema 2.2.5 *Se $f''(x)$ esiste per ogni x in $[0, 2\pi]$ e $f'' \in L^1[0, 2\pi]$, allora la serie di Fourier converge uniformemente ad f su $[0, 2\pi]$.*

Teorema 2.2.6 *Se f è una funzione periodica, assolutamente continua su $[0, 2\pi]$ e $f' \in L^2[0, 2\pi]$, allora la serie di Fourier converge uniformemente ad $f(x)$ su $[0, 2\pi]$.*

Un altro teorema sulla convergenza della serie di Fourier è il seguente, che riguarda le funzioni a variazione limitata (BV):

Teorema 2.2.7 (Test di Jordan)

1. Se f è BV in un intorno del punto x , allora la sua serie di Fourier converge in x a $[f(x+0) - f(x-0)]/2$. In particolare, se f è continua in x ed è BV in qualche intorno di x , allora $S(x, f) = f(x)$.
2. Se $f \in C[a, b] \cap BV(a, b)$, allora $S(x, f)$ converge uniformemente ad $f(x)$ in qualche intervallo chiuso $[\alpha, \beta]$ contenuto in $[a, b]$.

Infine altri due teoremi che offrono delle condizioni sufficienti sui coefficienti di Fourier per la convergenza uniforme della serie sono:

Teorema 2.2.8 Se $f \in C_{2\pi}$ e i suoi coefficienti di Fourier soddisfano

$$\sum_{k=1}^n k(|a_k| + |b_k|) = o(n)$$

allora $S(x, f)$ converge uniformemente ad $f(x)$ su ogni intervallo.

Teorema 2.2.9 (Paley)

Se una funzione continua ha coefficienti di Fourier non negativi, allora la sua serie di Fourier converge uniformemente.

Consideriamo, infine, le medie aritmetiche delle somme parziali.

Fejér provò un importante teorema a riguardo. La sua idea fu che se le somme parziali s_m definite da

$$s_m = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^m (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

convergono, allora le loro medie:

$$\sigma_m = \frac{s_0 + \cdots + s_m}{m + 1}$$

convergono allo stesso limite (Cesàro sommabilità).

Naturalmente, σ_m potrebbe anche convergere senza garantire nulla sulla convergenza delle s_m .

Teorema 2.2.10 (*Fejér*). *Se $f(t)$ è una funzione periodica Riemann integrabile, allora le somme di Cesàro σ_m convergono ad $f(t)$, quando m tende ad infinito, in ogni punto in cui $f(t)$ è continua.*

Possiamo interpretare questo teorema dicendo che ogni funzione continua ha un'espansione in serie di Fourier, ma se la funzione non soddisfa le ipotesi del teorema (2.2.2), allora la ricostruzione è fatta mediante le somme di Cesàro e non semplicemente con la serie di Fourier.

2.2.3 Fenomeno di Gibbs

Abbiamo elencato fino ad ora i casi in cui si ha convergenza uniforme, ma poichè le somme parziali sono tutte continue, se la funzione limite (somma della serie) non è continua, la convergenza uniforme è impossibile.

Nelle serie di Fourier, la manifestazione di questa convergenza non uniforme conduce ad un particolare fenomeno, detto *fenomeno di Gibbs*. Per analizzare tale fenomeno consideriamo dunque una funzione che presenta un “salto” in $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2} & \text{per } 0 < x < 2\pi \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

e definita altrove per periodicità. Essa è una funzione dispari la cui serie di Fourier è:

$$S(x, f) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

Ora, nei punti in cui f è continua, essendo anche $f \in BV$, per il test di Jordan si ha

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \quad \text{per } 0 < x < 2\pi.$$

Per vedere, invece, l'andamento delle somme parziali della serie di Fourier nelle vicinanze dell'origine, consideriamo:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} = \sum_{k=1}^n \int_0^x \cos ktdt = \\ &= \int_0^x D_n(t) - \frac{1}{2} dt = \int_0^x D_n(t) dt - \frac{x}{2} \end{aligned}$$

dove $D_n = \frac{\sin nt}{t} + g(t) \sin nt + \frac{\cos nt}{2}$ è detto *nucleo di Dirichelet* e $g(t)$ è una funzione limitata, pari a

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2 \tan(t/2)} - \frac{1}{t} & \text{per } t \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Allora, per le proprietà del nucleo di Dirichelet, si ha:

$$\begin{aligned} S_n(x) + \frac{x}{2} &= \int_0^x D_n(t) dt \\ &= \int_0^x \frac{\sin nt}{t} dt + o(1) = \int_0^{nx} \frac{\sin t}{t} dt + o(1) \end{aligned} \quad (2.11)$$

dove $o(1)$ rappresenta una funzione che tende a zero all'aumentare di n .

Ponendo $x = h_n$ nella 2.11, con $h_n \rightarrow 0$, si vede che:

$$S_n(h_n) + \frac{h_n}{2} = \int_0^{nh_n} n \frac{\sin t}{t} dt + o(1).$$

I due termini $\frac{h_n}{2}$ e $o(1)$ al tendere di n all' ∞ , tendono a zero; così $S_n(h_n)$ è determinato solo dall'integrale. Scegliendo h_n tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} nh_n$ sia una costante (y), si può considerare $\int_0^y \frac{\sin t}{t} dt$ come una funzione della variabile y . Questa funzione ha massimi relativi nei multipli dispari di π e minimi relativi nei suoi multipli pari. Il massimo assoluto si ha in $y = \pi$ (che corrisponde ad $h_n = \pi/n$) e vale:

$$G = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt = 1.85\dots > \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} = 1.57\dots$$

Quindi i valori massimi delle somme parziali superano la funzione data con un rapporto di $G/(\pi/2)$, approssimativamente 1.18. Quindi l'ammontare del superamento è pari al 18% di $\pi/2$ o 9% del salto totale, cioè π . Questo andamento si verifica in modo analogo sia dalla parte destra che dalla parte sinistra dell'origine. Molte funzioni che si incontrano nella teoria di sintesi del suono sono continue a tratti e presentano dunque questi punti di discontinuità. Nel sintetizzare tali funzioni mediante la serie di Fourier si presenta l'esigenza pratica di stabilire quanti termini della serie debbano essere considerati. Il fenomeno di Gibbs, ap-

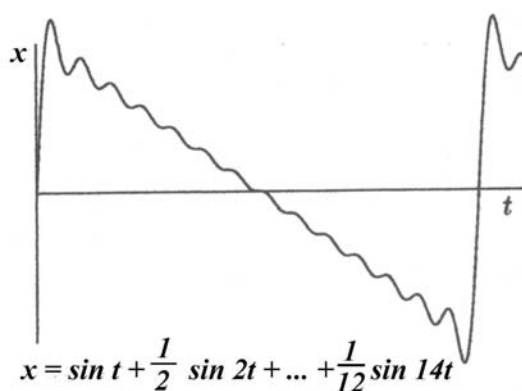


Figura 2.2: Fenomeno di Gibbs

pena descritto, ci insegna che nei punti di discontinuità la funzione sintetizzata

supererà, oscillando, la funzione data, indipendentemente dal numero di termini della serie considerati. A partire da un punto vicino al “salto”, però, l’ampiezza delle oscillazioni decrescerà sempre di più fino a che la somma della serie sarà pari al valore della funzione di cui essa è la serie di Fourier.

2.2.4 Funzioni di Bessel

Le funzioni di Bessel sono il risultato dell’applicazione della teoria delle serie di Fourier alle funzioni $\sin(z \sin \theta)$ e $\cos(z \sin \theta)$, come funzioni di θ . Le funzioni di Bessel sono utili per la comprensione delle vibrazioni di un tamburo e per la sintesi FM, che tratteremo più avanti.

$\sin(z \sin \theta)$ è una funzione dispari periodica. I suoi coefficienti di Fourier a_n sono uguali a zero per ogni n . Inoltre, essendo

$$\sin(z \sin(\pi + \theta)) = -\sin(z \sin \theta),$$

anche i coefficienti b_{2n} sono nulli. I coefficienti b_{2n+1} dipendono da z , e così possiamo indicarli con $2J_{2n+1}(z)$. Il fattore 2 risulta opportuno per semplificare alcuni passaggi che saranno esposti in seguito. Così lo sviluppo di Fourier è il seguente:

$$\sin(z \sin \theta) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(z) \sin(2n + 1)\theta.$$

Similmente, $\cos(z \sin \theta)$ è una funzione pari periodica, così i coefficienti b_n sono nulli. E, dal momento che

$$\cos(z \sin(\pi + \theta)) = \cos(z \sin \theta)$$

si ha $a_{2n+1} = 0$ e, ponendo $2J_{2n}(z) = a_{2n}$, si ottiene:

$$\cos(z \sin \theta) = J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z) \cos(2n\theta).$$

Le funzioni $J_n(z)$ che danno i coefficienti di Fourier in questi sviluppi, sono chiamate *funzioni di Bessel* del primo ordine. Possiamo dunque riscrivere questi $J_n(z)$, grazie alle equazioni (2.8 e 2.9), sotto forma di integrali:

$$2J_{2n+1}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(2n+1)\theta \sin(z \sin \theta) d\theta.$$

Essendo l'integranda una funzione pari, si ottiene:

$$J_{2n+1}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(2n+1)\theta \sin(z \sin \theta) d\theta.$$

Poichè

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(2n+1)\theta \cos(z \sin \theta) d\theta = 0,$$

sommando questa quantità (nulla) all'espressione di $J_{2n+1}(z)$, otteniamo:

$$\begin{aligned} J_{2n+1}(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(2n+1)\theta \cos(z \sin \theta) + \sin(2n+1)\theta \sin(z \sin \theta)] d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos((2n+1)\theta - z \sin \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Analogamente si ottiene:

$$2J_{2n}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos 2n\theta \cos(z \sin \theta) d\theta$$

che con simili operazioni, prende la forma:

$$J_{2n}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(2n\theta - z \sin \theta) d\theta.$$

Questo significa che esiste una singola equazione per tutti i valori di n , pari e dispari:

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta - z \sin \theta) d\theta$$

che può essere assunta come la definizione per le funzioni di Bessel per interi $n \geq 0$ (per valori di n non interi, questa non è la definizione corretta). In realtà

questa definizione continua a sussistere anche per valori dell'intero n negativi e vale:

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z).$$

Quindi si può scrivere:

$$\sin(z \sin \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{2n+1}(z) \sin(2n+1)\theta$$

$$\cos(z \sin \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{2n}(z) \cos 2n\theta.$$

Inoltre si ha che:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{2n+1}(z) \cos(2n+1)\theta = 0$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{2n}(z) \sin 2n\theta = 0,$$

poichè i termini con indici opposti si annullano.

Così, utilizzando la formula di addizione del seno, si ha:

$$\begin{aligned} \sin(\phi + z \sin \theta) &= \sin \phi \cos(z \sin \theta) + \cos \phi \sin(z \sin \theta) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{2n}(z) (\sin \phi \cos 2n\theta + \cos \phi \sin 2n\theta) \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{2n+1}(z) (\cos \phi \sin(2n+1)\theta + \sin \phi \cos(2n+1)\theta). \end{aligned}$$

Infine, combinando i termini pari e dispari e usando ancora la formula di addizione del seno, si ottiene:

$$\sin(\phi + z \sin \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) \sin(\phi + n\theta). \quad (2.12)$$

Questa equazione sarà di fondamentale importanza nella sintesi FM.

2.3 Trasformata di Fourier e Wavelet

La teoria delle serie di Fourier scompone onde periodiche in somme infinite di seni e coseni con frequenze pari a multipli di una frequenza fondamentale, o equivalentemente, in funzioni esponenziali complesse della forma e^{int} . Spesso si desidera analizzare, però, funzioni non periodiche nello stesso modo. Questo porta alla teoria delle trasformate di Fourier. Esse ci permettono di rappresentare una funzione non periodica mediante una somma integrale su un campo continuo di frequenze.

Per trattare ciò con una prospettiva musicale, introdurremo la teoria di “windowing”. Il punto fondamentale è che ogni suono reale non è veramente periodico, in quanto le funzioni periodiche non hanno nè punto di inizio, nè di fine. Inoltre, in generale, non si è interessati all’analisi delle frequenze, ad esempio, di tutta una sinfonia, ma siamo interessati a conoscere lo spettro delle frequenze ed il suo andamento nel tempo.

Non ha senso, ovviamente, parlare di frequenza istantanea, mentre analizzeremo, invece, la forma d’onda per una finestra di tempo intorno ad ogni punto.

Finestre piccole daranno informazioni più localizzate nel tempo, ma le componenti delle frequenze saranno schiacciate verticalmente e produrranno un’eccessiva attenuazione delle alte frequenze.

Finestre grandi, invece, daranno informazioni più accurate in frequenza, ma più estese nel tempo.

Questo limite è inerente al procedimento e non ha niente a che fare con l’accuratezza con cui la forma d’onda è misurata. Per superare tale limite, verrà introdotta la *trasformata wavelet* che tratteremo nel paragrafo 2.3.4.

2.3.1 Trasformata di Fourier

Se $f(t)$ è una funzione a valori reali o complessi di una variabile reale t , allora la sua trasformata di Fourier $g(\xi)$ è la funzione, di una variabile reale, definita da

$$FT^+\{f(t)\} := g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\xi t} dt.$$

L'esistenza della trasformata di Fourier presuppone la convergenza di tale integrale e ciò impone delle restrizioni sulla funzione $f(t)$. Una condizione che assicura questa convergenza è l'appartenenza di f ad L^1 .

Teorema 2.3.1 *Sia $f(t)$ una funzione C^1 a tratti (vale a dire C^1 tranne in un insieme finito di punti) che sia anche L^1 . Allora nei punti in cui $f(t)$ è continua, il suo valore è dato dalla trasformata inversa di Fourier*

$$FT^-\{g(\xi)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{i\xi t} d\xi.$$

Nelle discontinuità, l'espressione sulla destra di questa equazione dà la media del limite sinistro e di quello destro, $1/2(f(t^+) + f(t^-))$.

Come nel caso delle serie di Fourier, le funzioni L^1 continue a tratti (che non appartengano a C^1) non verificano le tesi del teorema precedente, ma si può ricorrere ad una variazione analoga alla sommabilità di *Cesàro*. Questa consiste nell'inserire un fattore $1 - \frac{|\xi|}{R}$ nell'integrale che definisce la trasformata di Fourier inversa.

Teorema 2.3.2 *Sia $f(t)$ una funzione L^1 continua a tratti. Allora nei punti in cui $f(t)$ è continua, il suo valore è dato da*

$$f(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|\xi|}{R}\right) g(\xi)e^{i\xi t} d\xi.$$

Nelle discontinuità, questa uguaglianza risulta pari a: $1/2(f(t^+) + f(t^-))$.

Più in generale, però sussiste il teorema:

Teorema 2.3.3 (*Plancherel*)

Sia $f \in L^2$. Allora esiste la sua trasformata di Fourier, g , inoltre $g \in L^2$ e valgono le seguenti relazioni:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| g(\xi) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A f(x) e^{-i\xi x} dx \right|^2 d\xi = 0$$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A g(\xi) e^{i\xi x} dx \right|^2 dx = 0$$

e

$$\|g\|_2 = \|f\|_2.$$

Prima di passare al paragrafo successivo, vediamo alcune proprietà della trasformata di Fourier e analizziamo alcune relazioni che intercorrono fra una funzione e la sua trasformata. Utilizzando la simbologia di sopra, possiamo enunciare le seguenti proprietà:

- $FT^+ FT^- = FT^- FT^+ = 1$
- $FT^+ \{FT^- \{f(t)\}\} = f(t)$
- $FT^- \{FT^+ \{g(\xi)\}\} = g(\xi)$
- $FT^- \{f(t)\} = g(\xi)$
- $FT^- FT^- \{f(t)\} = 2\pi f(-t)$
- $FT^+ FT^+ \{f(t)\} = \frac{f(-t)}{2\pi}$

Relazioni fra una funzione e la sua trasformata di Fourier

1. Addizione e sottrazione.

$$FT^\pm\{f(t) + g(t)\} = FT^\pm\{f(t)\} + FT^\pm\{g(t)\}.$$

2. Moltiplicazione per una costante (a).

$$FT^\pm\{af(t)\} = aFT^\pm\{f(t)\}.$$

3. *Scaling*. Se $f(t) \longleftrightarrow g(\xi)$ allora

$$f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}g\left(\frac{\xi}{a}\right)$$

e

$$\frac{1}{|a|}f\left(\frac{t}{a}\right) \longleftrightarrow g(a\xi).$$

4. *Shifting*. Se una funzione di t è traslata nella direzione positiva di una quantità t_0 , allora FT^\pm è moltiplicata per $e^{\pm it_0\xi}$. Inversamente, moltiplicando una funzione di t per $e^{i\xi_0 t}$, trasliamo la sua FT^\pm di una quantità $\mp\xi_0$. Quindi, se $f(t) \longleftrightarrow g(\xi)$, allora

$$f(t \pm t_0) \longleftrightarrow e^{\pm it_0\xi}$$

e

$$e^{\pm i\xi_0 t}f(t) \longleftrightarrow g(\xi \mp \xi_0).$$

5. *Aree*. La superficie delimitata da una funzione con l'asse delle ascisse è uguale al valore della sua FT^- nell'origine e viceversa il valore di una funzione nell'origine è uguale a $1/2\pi$ volte l'area determinata dalla sua FT^- .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = g(0) \qquad f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)d\xi.$$

6. Simmetria. Se $f(t)$ è una funzione pari o dispari, tale sarà anche $g(\xi)$.
7. Derivate. Se una funzione è derivata n volte, allora la sua FT^\pm deve essere moltiplicata per $(\mp i\xi)^n$ e, viceversa, se una funzione di t è moltiplicata per $(\mp it)^n$, allora la sua FT^\pm deve essere derivata n volte. Se $f(t) \longleftrightarrow g(\xi)$, allora

$$\begin{aligned} \frac{d^n f(t)}{dt^n} &\longleftrightarrow (i\xi)^n g(\xi) \\ (-it)^n f(t) &\longleftrightarrow \frac{d^n g(\xi)}{d\xi^n}. \end{aligned}$$

8. Prodotti e convoluzione.

Diamo innanzitutto la definizione di convoluzione:

Definizione 2.3.4 *Date due funzioni sommabili, f e g , definiamo Convoluzione di f e g :*

$$(f * g)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt.$$

La FT^- del prodotto di due funzioni è uguale alla convoluzione delle due FT^- . Viceversa la FT^- della convoluzione di due funzioni è proporzionale al prodotto delle due FT^- . Se $f(t) \longleftrightarrow g(\xi)$ e $u(t) \longleftrightarrow v(\xi)$, allora

$$\begin{aligned} f(t)u(t) &\longleftrightarrow \{g(\xi) * v(\xi)\} \\ \{f(t) * u(t)\} &\longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} g(\xi)v(\xi). \end{aligned}$$

Sul prodotto di convoluzione inoltre possiamo osservare che $f * g \in L^1[0, 2\pi]$ ed è periodica ed inoltre vale il seguente teorema:

Teorema 2.3.5 *Siano f e $g \in L^1[0, 2\pi]$. Allora per ogni intero k si ha:*

$$\widehat{(f * g)}(k) = \hat{f}(k)\hat{g}(k)$$

Fra le altre proprietà della convoluzione ricordiamo:

1. Il prodotto di convoluzione è commutativo, associativo e distributivo.
2. Non esiste l'identità per tale prodotto.
3. Esistono funzioni integrabili f per le quali vale: $f * f = f$.
4. Ogni funzione integrabile f può essere espressa come $f = g * h$ con g e h integrabili. In altre parole: $L^1 = L^1 * L^1$; questo non vale, però, per L^p con $p > 1$.

2.3.2 Dalla trasformata di Fourier a quella Wavelet

La trasformata di Fourier dà delle informazioni sul contenuto delle frequenze, ma non dà informazioni su come esse siano localizzate nel dominio del tempo. Per esempio, nella figura 2.3(a) sono rappresentati due segnali; il primo consiste di due frequenze ($\sin(10t)$ e $\sin(20t)$) sovrapposte per l'intera durata del segnale e il secondo consiste delle stesse frequenze, ma ognuna applicata separatamente per la metà della durata del segnale. La figura 2.3(b) mostra lo spettro, cioè $|f(\omega)|^2$, di questi due segnali. È evidente che gli spettri dei due segnali sono indistinguibili. Nella figura 2.3(c) sono invece rappresentate le trasformate wavelet dei due segnali. Le frequenze varianti nel tempo sono abbastanza comuni nei segnali sismici, in processi geofisici, nel parlato e, chiaramente, nella musica.

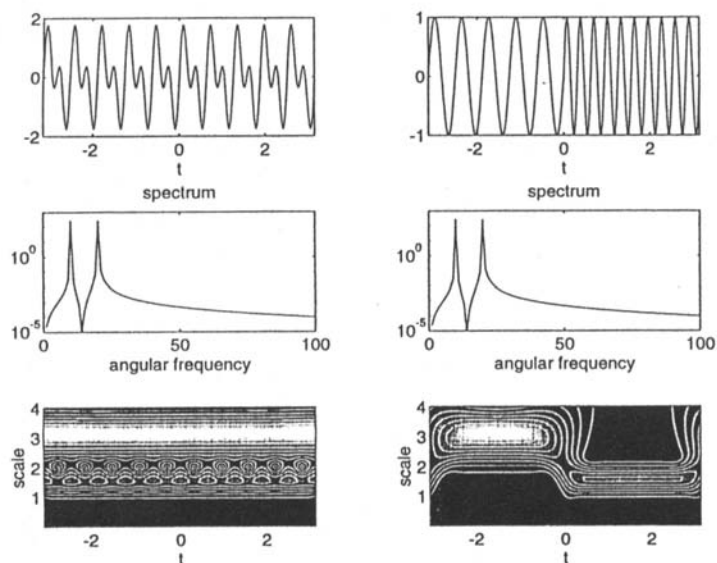


Figura 2.3: Le prime due immagini in alto, (a), raffigurano i due segnali. Nel centro, le figure (b), sono gli spettri corrispondenti e in basso, (c) sono rappresentate le trasformate wavelet dei due segnali.

Per studiare questo tipo di segnali, abbiamo bisogno, dunque di trasformate dalle quali si possano estrarre informazioni sulle frequenze localizzate nel tempo. Ci sono essenzialmente due metodi che si sono sviluppati in questa direzione:

- La trasformata di Fourier “a finestra” (WFT: *windowed Fourier Transform*).
- La trasformata wavelet.

Già dalla figura 2.3 si può vedere la capacità delle trasformate wavelets nel distinguere i due segnali.

2.3.3 La *windowed* trasformata di Fourier (WFT)

Nella trasformata di Fourier, la localizzazione nel tempo può essere migliorata attraverso la tecnica di “windowing”. Data una funzione di “windowing” $g(t)$ e una forma d’onda $f(u)$, la WFT è la funzione di due variabili

$$\begin{aligned} Gf(\omega, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(u-t)e^{-i\omega u} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g_{\omega, t}(u) du \end{aligned}$$

dove il nucleo di integrazione è $g_{\omega, t}(u) = g(u-t)e^{-i\omega u}$. Questa trasformata misura localmente, intorno al punto t , l’ampiezza delle componenti sinusoidali di frequenza ω . La funzione “finestra” $g(t)$ è usualmente scelta come una funzione pari, reale, con la massima concentrazione di energia nelle componenti di bassa frequenza. Notiamo che il nucleo $g_{\omega, t}(u)$ ha lo stesso supporto per ogni ω , ma il numero di oscillazioni varia con la frequenza ω come si può vedere in figura 2.4. La rappresentazione della funzione $f(t)$ sul piano tempo-frequenza (cioè il piano (ω, t)), ottenuta tramite la funzione $g(t)$, è chiamata rappresentazione sullo spazio delle fasi.

La WFT è una trasformazione che conserva l’energia, cioè:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Gf(\omega, t)|^2 d\omega dt$$

a condizione che $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = 1$ (e assumiamo ciò valido, d’ora in poi). La WFT inoltre è invertibile mediante la formula data da:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Gf(\omega, u)g(u-t)e^{-i\omega t} d\omega du.$$

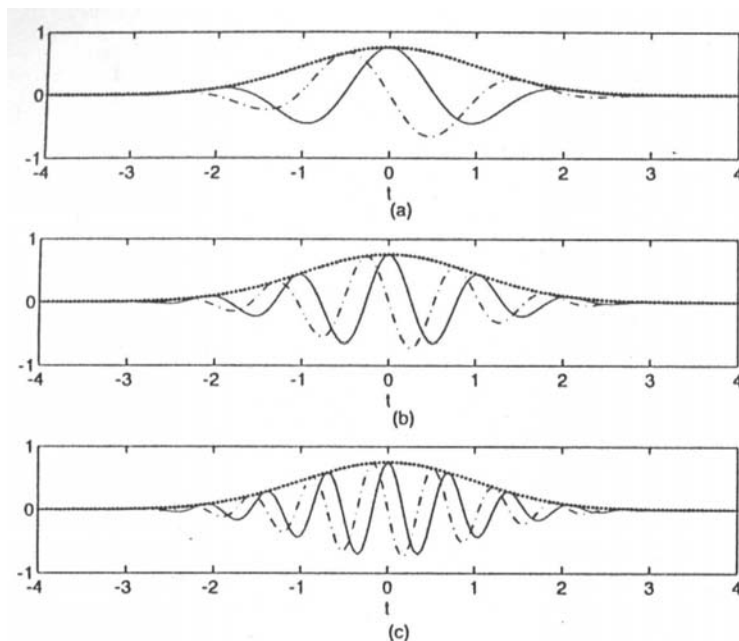


Figura 2.4: Rappresentazione della parte reale (linea continua) e della parte immaginaria (linea tratto-punto) del nucleo $g_{\omega,t}(u)$ al variare di ω ((a) $\omega = 3$, (b) $\omega = 6$ (c) $\omega = 9$). La linea puntinata indica una funzione di windowing Gaussiana $g(t)$.

Localizzazione tempo-frequenza

Per studiare le proprietà di localizzazione in tempo-frequenza della WFT abbiamo bisogno di studiare le proprietà di $|g_{\omega,t}|^2$ e $|\hat{g}_{\omega,t}|^2$ (\hat{g} indica la trasformata di Fourier di g), in quanto esse determinano le caratteristiche di $f(t)$. Enunciamo, quindi, il teorema di Parseval che afferma:

Teorema 2.3.6 *Siano f e g sommabili. Allora*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\bar{g}(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(y)\bar{G}(y)dy$$

dove le lettere maiuscole indicano le trasformate di Fourier e la barra indica il complesso coniugato.

Grazie a questo teorema, la definizione della WFT può essere scritta:

$$Gf(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega') \hat{g}_{\omega, t}(\omega') d\omega'.$$

Definiamo ora le deviazioni standard di $g_{\omega, t}$ e $\hat{g}_{\omega, t}$ come σ_g e $\sigma_{\hat{g}}$, cioè:

$$\sigma_g = \left(\int_{-\infty}^{\infty} (u - t)^2 |g_{\omega, t}(u)|^2 du \right)^{1/2}$$

e

$$\sigma_{\hat{g}} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\omega' - \omega)^2 |\hat{g}_{\omega, t}(\omega')|^2 d\omega' \right)^{1/2}.$$

Questi parametri esprimono l'estensione delle funzioni $|g_{\omega, t}|$ e $|\hat{g}_{\omega, t}|$ intorno a t e ad ω come si può vedere in figura 2.5.

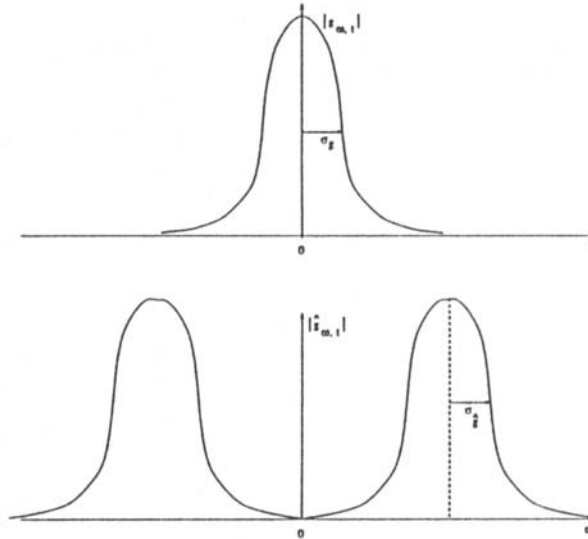


Figura 2.5: Funzioni $|g_{\omega, t}|$ e $|\hat{g}_{\omega, t}|$

Per il principio di incertezza il prodotto di σ_g^2 e $\sigma_{\hat{g}}^2$ soddisfa:

$$\sigma_g^2 \sigma_{\hat{g}}^2 \geq \frac{\pi}{2}, \quad (2.13)$$

dunque non si può avere contemporaneamente un'alta precisione per il tempo e per le frequenze. L'uguaglianza si ottiene solo quando $g(t)$ è la Gaussiana, cioè:

$$g(t) = \pi^{-1/4} e^{-t^2/2}.$$

Quando si usa la funzione Gaussiana come “finestra”, la WFT è chiamata trasformata di Gabor.

Una volta scelta la funzione $g(t)$, sia σ_g che $\sigma_{\hat{g}}$ sono fissati. Perciò, per ogni t_0 e ω_0 , la risoluzione tempo-frequenza può essere rappresentata dalla cella fissata $[t_0 \pm \sigma_g \times \omega_0 \pm \sigma_{\hat{g}}]$. Ciò significa che la WFT, in ogni punto nel piano delle fasi, dà delle informazioni su $f(t)$ che sono localizzate con incertezza σ_g nel dominio del tempo, e incertezza $\sigma_{\hat{g}}$ nel dominio di Fourier. Questa localizzazione è uniforme sull'intero spazio delle fasi. In altre parole, tutto il piano delle fasi è ricoperto da celle di risoluzione di una dimensione fissata, come si può vedere nella figura 2.6. Ciò porta a due tipi di limitazioni:

1. Se il segnale ha una componente di passaggio con supporto più piccolo di σ_g risulta difficile localizzarla con precisione migliore di σ_g .
2. Se il segnale ha caratteristiche importanti di misura diversa, non si riesce a trovare una $g(t)$ ottimale per analizzare il segnale.

Dunque la WFT è adatta ad analizzare processi in cui le caratteristiche compaiono tutte approssimativamente alla stessa scala, mentre è la trasformata wavelet a superare i limiti inerenti alla WFT come si vedrà nel seguente paragrafo.

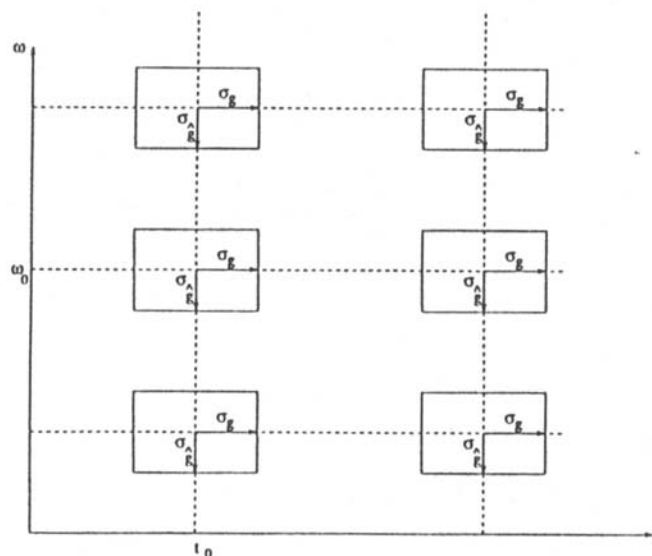


Figura 2.6: Celle di risoluzione di dimensione fissata che ricoprono l'intero spazio delle fasi.

2.3.4 Trasformata wavelet

Poichè le caratteristiche delle frequenze più alte hanno un supporto più piccolo, sarebbe utile una funzione analizzante, diciamo $\psi(t)$, tale che la sua deviazione standard σ_ψ sia piccola quando ci si trova ad analizzare le componenti di alta frequenza e viceversa. Questo sarà raggiunto dalla decomposizione della funzione $f(t)$ mediante una famiglia di funzioni, chiamate *wavelet*, a due parametri. Uno dei due parametri è quello di traslazione come nella WFT, ma l'altro (λ) è un parametro di dilatazione che sostituisce l' ω della WFT.

Definizione 2.3.7 *La trasformata wavelet di una funzione $f(t)$ è definita come la trasformata integrale con una famiglia di funzioni $\psi_{\lambda,t}(u) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\psi(\frac{u-t}{\lambda})$ ed è data da:*

$$Wf(\lambda,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\psi_{\lambda,t}(u)du \quad \lambda > 0$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \psi\left(\frac{u-t}{\lambda}\right) du.$$

Dove λ è un parametro di scala, t di localizzazione e le funzioni $\psi_{\lambda,t}$ sono chiamate *wavelets*.

Variando il parametro λ si ha l'effetto di dilatare ($\lambda > 1$) o contrarre ($\lambda < 1$) le funzioni $\psi(t)$, come si può osservare nella figura 2.7.

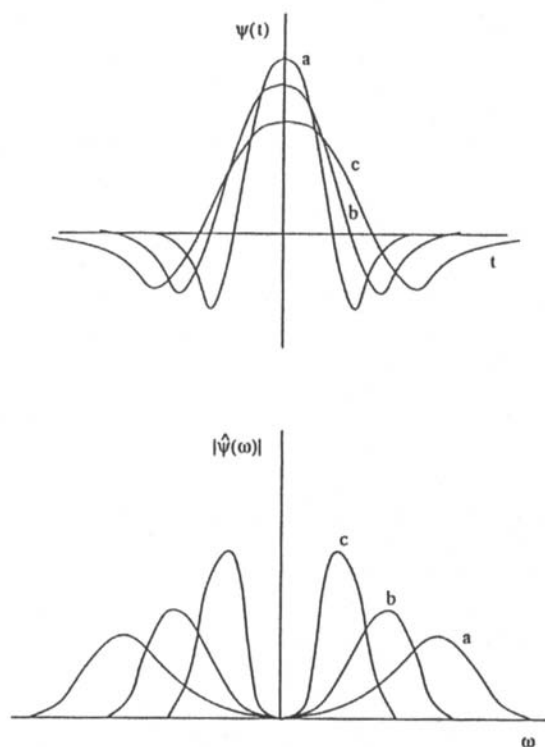


Figura 2.7: Esempio di wavelets al variare di λ .

Cambiando t si analizza la funzione $f(t)$ intorno al punto t considerato.

La costante di normalizzazione $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ è scelta in modo che

$$\|\psi_{\lambda,t}\|^2 \equiv \int |\psi_{\lambda,t}(u)|^2 du = \int |\psi(t)|^2 dt$$

per tutte le scale λ (notiamo che $\psi(t) \equiv \psi_{1,0}(t)$). Inoltre scegliamo la normalizzazione

$$\int |\psi(t)|^2 dt = 1.$$

Osserviamo infine che la trasformata wavelet si può denotare come il prodotto interno $\langle f, \psi_{\lambda,t} \rangle$.

Facciamo ora alcune considerazioni: notiamo che, a differenza della WFT, il numero di cicli nella wavelet $\psi_{\lambda,t}(u)$ non cambia al variare del parametro di scala (o di dilatazione) λ , mentre varia invece la lunghezza del suo supporto. In particolare, quando λ è piccolo, che corrisponde ad un piccolo supporto, la trasformata wavelet raggiunge le frequenze più alte e viceversa.

La scelta delle wavelets, ovviamente, non è né unica (come invece si ha per la base della trasformata di Fourier, che consiste sempre in seni e coseni), né arbitraria. La funzione $\psi(t)$ è una funzione, ad energia unitaria, scelta in modo tale che:

1. Abbia un supporto compatto, o un decadimento sufficientemente rapido, per ottenere la localizzazione nello spazio.
2. Verifichi $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$, che è detta *condizione di ammissibilità*.

Queste due proprietà ci assicurano che la $\psi(t)$ abbia l'andamento di un'onda (ecco perchè "ondine") e non siano sostenute (grazie al punto 1).

La *trasformata wavelet inversa* è data da:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda^{-2} W f(\lambda, u) \psi_{\lambda, u}(t) d\lambda du$$

dove

$$C_\psi = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty.$$

Inoltre vale il teorema:

Teorema 2.3.8 *Se $f(t)$ è una funzione L^2 di una variabile reale t , allora la trasformata inversa della trasformata wavelet di f coincide con f per quasi tutti i valori di t , in particolare in tutti quelli in cui $f(t)$ è continua.*

Anche la trasformata wavelet è una trasformazione che conserva l'energia, cioè:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |Wf(\lambda, u)|^2 \lambda^{-2} d\lambda du.$$

Localizzazione tempo-frequenza

Per comprendere bene il comportamento della trasformata wavelet nel dominio delle frequenze, risulta utile riconoscere che, usando il teorema di Parseval, essa può essere scritta equivalentemente:

$$Wf(\lambda, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\psi}_{\lambda, t}(\omega)} d\omega.$$

Perciò, come è stato fatto per la WFT, dobbiamo ora studiare le proprietà di $|\psi_{\lambda, t}(u)|^2$ e $|\hat{\psi}_{\lambda, t}(\omega)|^2$ per comprendere le proprietà di localizzazione delle trasformate wavelets. In particolare, ci serve capire il comportamento delle loro deviazioni standard, $\sigma_{\psi_{\lambda, t}}$ e $\sigma_{\hat{\psi}_{\lambda, t}}$:

$$\sigma_{\hat{\psi}_{\lambda, t}} = \left(\int_0^{\infty} (\omega - \omega_{\hat{\psi}_{\lambda, t}}^0)^2 |\hat{\psi}_{\lambda, t}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}$$

e

$$\sigma_{\psi_{\lambda, t}} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} (u - t_0)^2 |\psi_{\lambda, t}(u)|^2 du \right)^{1/2}$$

dove

$$\omega_{\hat{\psi}_{\lambda, t}}^0 = \frac{\int_0^{\infty} \omega |\hat{\psi}_{\lambda, t}(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{\infty} |\hat{\psi}_{\lambda, t}(\omega)|^2 d\omega}$$

e

$$t_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} u |\psi_{\lambda, t}(u)|^2 du}{\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{\lambda, t}(u)|^2 du}.$$

É possibile verificare che valgono le seguenti uguaglianze:

$$1. \sigma_{\psi_{\lambda,t}} = \lambda \sigma_{\psi_{1,0}}.$$

$$2. \sigma_{\hat{\psi}_{\lambda,t}} = \frac{\sigma_{\hat{\psi}_{1,0}}}{\lambda}.$$

$$3. \omega_{\hat{\psi}_{\lambda,t}}^0 = \frac{\omega_{\hat{\psi}_{1,0}}^0}{\lambda}.$$

Nello spazio delle fasi, le celle di risoluzione sono date da

$$\left[t_0 \pm \lambda \sigma_{\psi_{1,0}} \times \frac{\omega_{\hat{\psi}_{1,0}}^0}{\lambda} \pm \frac{\sigma_{\hat{\psi}_{1,0}}}{\lambda} \right]$$

ed esse sono variabili in dipendenza dal parametro di scala λ , come si può vedere in figura 2.8.

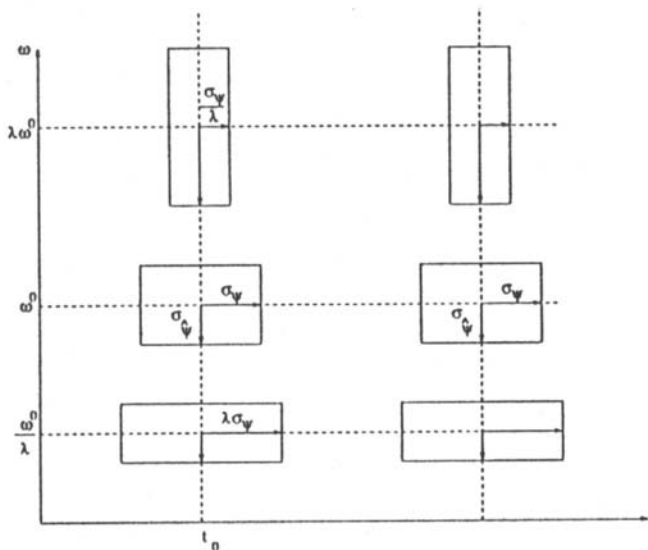


Figura 2.8: Celle di risoluzione di dimensione variabili che ricoprono lo spazio delle fasi, ottenute con le wavelets.

In ogni caso, però, l'area delle celle di risoluzione $[\sigma_{\psi_{\lambda,t}} \times \sigma_{\hat{\psi}_{\lambda,t}}]$ rimane indipendente sia dal parametro di scala λ , sia da quello di locazione t . In altre parole,

lo spazio delle fasi è ricoperto da celle di risoluzione di diverse dimensioni, ma con area costante. Si può anche interpretare la trasformata wavelet come un microscopio matematico con ingrandimento dato da $1/\lambda$.

2.3.5 Applicazioni delle wavelets

I campi di applicazione delle wavelets sono davvero tanti e vanno dalla compressione di immagini, alla previsione di terremoti, dallo studio delle turbolenze atmosferiche all'analisi di segnali sonori.

Diamo ora un accenno su come possano intervenire le wavelets nella sintesi musicale. La trasformata wavelet è in realtà un sottoinsieme di una trasformata ancora più versatile: la *trasformata wavelet packet*. I “pacchetti” wavelet sono particolari combinazioni lineari di wavelets. Esse formano delle basi che mantengono molte delle proprietà di ortogonalità, continuità, derivabilità e localizzazione delle loro “parenti” wavelets. Victor Wickerhauser ha suggerito che i *wavelets packets* possono essere molto utili nella sintesi del suono. La sua idea consiste nell'affermare che un singolo pacchetto di wavelets può sostituire un grande numero di oscillatori. Attraverso varie sperimentazioni, un musicista potrebbe determinare le combinazioni di pacchetti d'onde capaci di produrre suoni interessanti. Wickerhauser afferma che la sintesi del suono è un uso naturale delle wavelets, anche per cercare di approssimare il suono di uno strumento musicale. Un campione di note prodotte da uno strumento può essere decomposto nei suoi coefficienti per un pacchetto wavelets. Le informazioni sull'attacco, il decadimento e l'intensità delle note possono essere controllate separatamente o gestite da un opportuno pacchetto più grande.

2.4 Sintesi musicale da computer

In questo paragrafo, studieremo la sintesi dei suoni musicali, ponendo maggiore attenzione alla sintesi a modulazione di frequenza (o FM).

I suoni interessanti non hanno in generale uno spettro di frequenze statico. Cercheremo di studiare lo sviluppo nel tempo dello spettro di una nota, analizzandone le varie fasi, le quali di solito si indicano con *attacco*, *decadimento*, *sostegno* e *rilascio* (ADSR).

Chiaramente la vera potenza della sintesi sta nella possibilità di produrre nuovi suoni e manipolare suoni già esistenti, in modo mai fatto in precedenza.

I sintetizzatori elettronici - strumenti capaci di produrre suoni che coprono una grande varietà di timbri e profili temporali, su una gamma continua o quasi continua di frequenze - sono oggi, infatti, utilizzati in tutti i settori musicali: musica classica, contemporanea, jazz, musica leggera e di sottofondo, colonne sonore cinematografiche e annunci pubblicitari. Per esecuzione al sintetizzatore, sono state anche trascritte opere di grandi musicisti del passato. E' plausibile ritenere che, con il progresso delle tecnologie elettroniche, i sintetizzatori di musica svolgeranno un ruolo di crescente importanza nel panorama musicale.

2.4.1 Involuppo dell'onda

Per qualsiasi metodo di sintesi del suono, bisogna prima porgere l'attenzione all'involuppo. Come dicevamo in precedenza, lo spettro di una nota molto spesso varia nel tempo e, ascoltando un suono, si distingue un attacco all' inizio, seguito subito dopo da un decadimento, poi da una fase di sostegno e infine un rilascio. In qualche particolare strumento, alcune di queste fasi possono essere mancanti,

ma la struttura di base è questa.

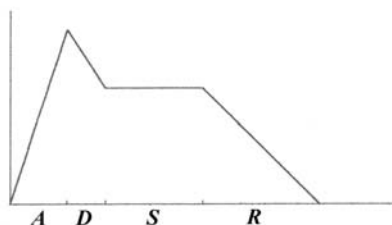


Figura 2.9: Inviluppo

Su un sintetizzatore tipico, ci sono diversi generatori di inviluppo che consentono di sagomare sia l'ampiezza che la frequenza di un suono.

Un generatore di inviluppo produce un inviluppo la cui forma è determinata da un certo numero di parametri. Questi parametri sono di solito dati in termini di livelli e velocità. Il livello 0 si può interpretare come l'evento corrispondente alla pressione del tasto “on” su una generica tastiera di un sintetizzatore; la velocità 1 determina la rapidità con cui il livello cambia, fino a raggiungere il livello 1. Poi viene sostituita dalla velocità 2 fino al livello 2 e così via fino al livello 4, che corrisponde alla pressione del tasto off. A questo punto si è pronti per la prossima pressione del tasto “on”.

2.4.2 Sintesi additiva e sottrattiva

La forma più facile di sintesi è quella additiva, che consiste nel processo inverso dell'analisi di Fourier di un segnale. Per sintetizzare un'onda periodica, si generano le sue componenti di Fourier con la loro propria ampiezza e questi segnali vengono sommati istante per istante tramite circuiti.

Tale metodo, però, non è molto efficiente, in quanto per generare una nota con un grande numero di armoniche è necessario un grande numero di onde seno da

mettere insieme, ciascuna con il proprio involuppo.

Un'alternativa alla sintesi additiva, che non presenta questo limite, è la sintesi sottrattiva, introdotta in tempi più recenti. Nella sintesi sottrattiva si parte da una forma d'onda più complessa di quelle che si vogliono produrre, una forma d'onda che contiene più componenti spettrali di quelle necessarie. Successivamente, con dei filtri, si escludono le parziali indesiderate.

I vari procedimenti additivi e sottrattivi che si sono descritti danno luogo a sintesi per modulazione di ampiezza (AM), in quanto i segnali di controllo e di miscelazione agiscono sull'ampiezza dell'onda primaria.

John Chowning della Stanford University ha mostrato, però, che la modulazione di frequenza (FM) ha un impiego più ampio, offrendosi come valida alternativa alla tecnica AM, inoltre essa trova anche impiego nella sintesi digitale, come vedremo più avanti.

2.4.3 Modulazione di ampiezza (AM) e di frequenza (FM)

Le modulazioni di frequenza e di ampiezza sono semplicemente dei modi di trasportare dei segnali audio attraverso delle radio, portatori di frequenze (radio AM e FM).

Nel caso di radio AM, la frequenza del segnale portante è di solito compresa nell'intervallo 500-2000 KHz , che è molto più grande della frequenza del segnale portato. Quest'ultimo viene inserito nell'ampiezza del segnale portante. Così, per esempio, un segnale portante a 700 KHz , modulato da un'onda seno a 440 Hz sarà rappresentato da:

$$x = (A + B \sin(440 \cdot 2\pi t)) \sin(700000 \cdot 2\pi t)$$

e si può vedere in figura (2.10).

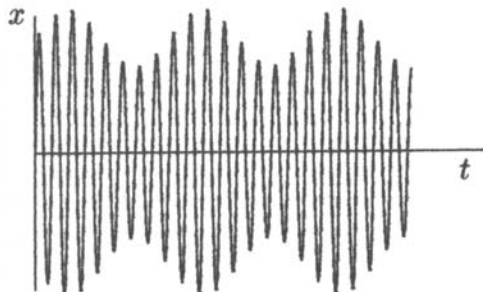


Figura 2.10: Modulazione di ampiezza.

Nel caso di modulazione di frequenza, la frequenza portante è di solito fra 90 e 120 MHz , che è ancora molto più grande della frequenza del segnale portato. Esso, questa volta, è inserito nella frequenza del segnale portante. Ad esempio, un segnale a 100 MHz modulato da un'onda seno a 440 Hz sarà rappresentato da:

$$x = A \sin(10^8 \cdot 2\pi t + B \sin(440 \cdot 2\pi t))$$

e si può visualizzare nella figura 2.11. L'ampiezza A è associata all'onda por-

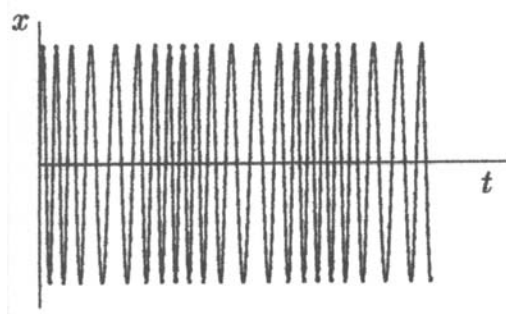


Figura 2.11: Modulazione di frequenza.

tante, mentre B è associato all'onda audio. B viene detto *indice di modulazione* e dipende dalle caratteristiche del circuito utilizzato.

Più generalmente, un'onda audio rappresentata da $x = f(t)$, trasmessa da un'onda portante di frequenza ν e ampiezza A , è rappresentata da:

$$x = A \sin(2\pi\nu t + Bf(t)).$$

Un segnale modulato in frequenza è più difficile da decodificare rispetto ad uno modulato in ampiezza: il grande vantaggio della modulazione FM è la sua spiccata immunità ai disturbi. Per rendersi conto di questo si pensi che la maggior parte dei disturbi atmosferici sono di tipo impulsivo e tendono a generare componenti additive che modificano l'ampiezza dell'onda portante. Al contrario della modulazione di ampiezza, la FM trasporta tutta l'informazione come variazione di frequenza rispetto alla portante, consentendo una trasmissione di suoni più *puliti*. L'idea che sta dietro alla sintesi FM è simile a quella usata per le radio FM, solo che, nella sintesi FM, sia il segnale che l'onda portante stanno nell'intervallo di udibilità e di solito il rapporto tra le loro frequenze è un numero razionale abbastanza piccolo.

2.5 Trattamento digitale del suono

Volgiamo ora l'attenzione alle tecniche più moderne di sintesi musicale, ossia quelle di tipo numerico, più note con il termine di tecniche digitali. Queste, grazie alla loro straordinaria semplicità e flessibilità, hanno originato una grande trasformazione in tutti i campi del trattamento del suono.

2.5.1 Campionamento del suono

La digitalizzazione comporta la conversione di un'onda continua in una successione di numeri (processo detto di campionamento) che vengono inseriti nella memoria di un computer per rigenerare il suono in tempi successivi, dopo essere stati sottoposti ad una vasta gamma di possibili manipolazioni. La tecnica presenta un'ovvia similitudine con quella usata in cinematografia, dove un movimento continuo viene convertito in una sequenza di immagini discrete, separati da uguali intervalli di tempo.

L'insieme di numeri, per fare un semplice esempio, può essere utilizzato per generare un segnale di frequenza diversa da quella originale, come avverrebbe con un nastro magnetico fatto scorrere a velocità diversa da quella con cui si è fatta la registrazione. Un particolare suono, quale un breve stralcio del cinguettio di un canarino, può essere registrato e risuonato da una tastiera a tutte le frequenze della scala musicale: i tasti fissano la durata di una singola onda, cioè l'altezza del suono, mentre la voce di canarino, come qualsiasi altro suono primario, determina il carattere timbrico dell'onda. Nella figura (2.12) è esemplificato il campionamento di una data onda effettuato a uguali intervalli di tempo e l'andamento della tensione in uscita, dettato dai punti campionati. Questa operazione

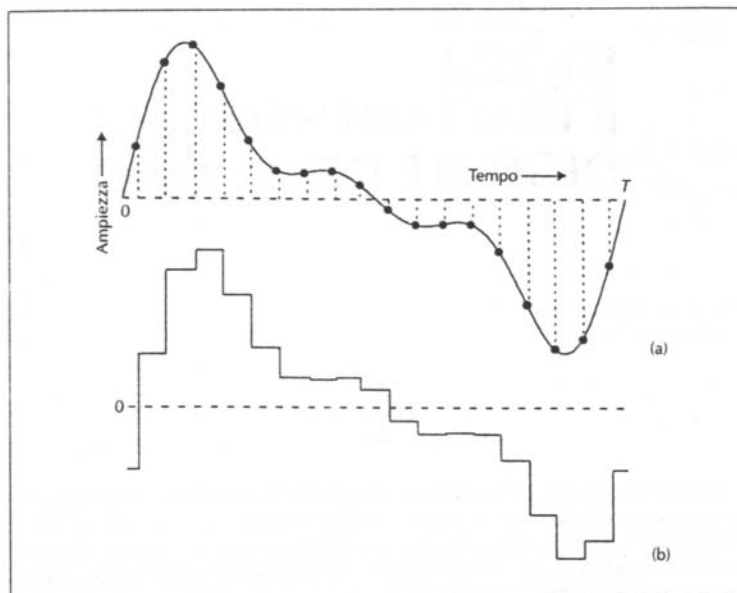


Figura 2.12: Campionamento

porta a descrivere il segnale nel dominio del tempo discreto. Successivamente, un convertitore analogico-digitale (ADC) traduce i gradini di tensione in altrettanti numeri (operazione detta di *quantizzazione*). Evidentemente, più numerosi sono i punti in un dato intervallo di tempo, più fedele sarà la ricostruzione del suono. La presa in considerazione di molti punti implica una grande capacità di memoria e di elaborazione dei segnali, esigenza che cresce molto rapidamente con l'aumentare dell'insieme di dati.

L'operazione inversa, dopo che l'onda è stata modificata a piacere tramite alterazione via computer della successione di numeri che la rappresenta, viene svolta da un convertitore digitale-analogico (DAC), il quale converte i numeri in valori di tensione discreti. Da questi, è possibile ricreare un'onda per interpolazione dei valori quantizzati (approssimazione che è tanto più valida quanto più fitta è la quantizzazione).

Con la procedura di digitalizzazione descritta, l'onda viene generata con sole operazioni numeriche sui dati iniziali: gli oscillatori, i filtri, i circuiti modificatori di segnale, che erano necessari nella sintesi analogica a controllo di tensione, vengono eliminati.

La potenza del metodo appare evidente dalla semplice considerazione della sua efficacia nell'eliminare, nella trasmissione a distanza di segnali, le distorsioni e il rumore di fondo.

Tipicamente, nella registrazione e nella trasmissione digitale della musica, la frequenza di campionamento arriva a 44200 punti al secondo. Tale valore è fissato dal *teorema del campionamento o teorema di Nyquist*.

2.5.2 Teorema di Nyquist ed effetto di aliasing

Un segnale analogico, nel processo di digitalizzazione, viene campionato un grande numero di volte al secondo e un numero binario rappresenta l'altezza della forma d'onda nei punti campionati.

Il **Teorema di Nyquist** afferma che la massima frequenza che può essere rappresentata, nel processo di digitalizzazione descritto sopra, è esattamente la metà della frequenza di campionamento.

Per spiegare il perchè di questa relazione fra frequenza del segnale e frequenza di campionamento, consideriamo un'onda sinusoidale pura con frequenza ν , ad esempio:

$$f(t) = A \cos(2\pi\nu t).$$

Dati N campioni al secondo, l'altezza della funzione all' M –esimo campione è data da:

$$f(M/N) = A \cos(2\pi\nu M/N).$$

Se ν è più grande di $N/2$, diciamo $\nu = N/2 + \alpha$, allora:

$$\begin{aligned} f(M/N) &= A \cos(2\pi(N/2 + \alpha)M/N) \\ &= A \cos(\pi M + 2\pi\alpha M/N) \\ &= A(\cos(\pi M) \cos(2\pi\alpha M/N) - \sin(\pi M) \sin(2\pi\alpha M/N)) \\ &= (-1)^M A \cos(2\pi\alpha M/N). \end{aligned}$$

Si osserva ora che, cambiando il segno di α , il risultato non cambia, dunque, si ha lo stesso effetto di una forma d'onda con $\nu = N/2 - \alpha$ anziché $\nu = N/2 + \alpha$. In altre parole, i punti campionati in questo modo, sono esattamente i punti in cui si intersecano i grafici delle funzioni

$$A \cos(2\pi(N/2 + \alpha)t) \text{ e } A \cos(2\pi(N/2 - \alpha)t).$$

Il risultato di tutto ciò è che i suoni che superano in frequenza la metà della frequenza di campionamento vengono riflessi e noi li riceviamo ad una frequenza pari alla differenza fra la metà della frequenza di campionamento e quella quantità con cui il segnale supera tale metà.

Questo fenomeno è detto *aliasing*.

Un esempio è mostrato nella figura (2.13). Se la frequenza di campionamento è $f_c = 40000Hz$, per $f = 20000Hz$ non si ha aliasing, ma per $f = 30000Hz$ compare un'onda di frequenza $f_{aliasing} = 10000Hz$. L'effetto è analogo a quello ben noto in cinematografia, in cui i raggi di una ruota appaiono ruotare all'indietro

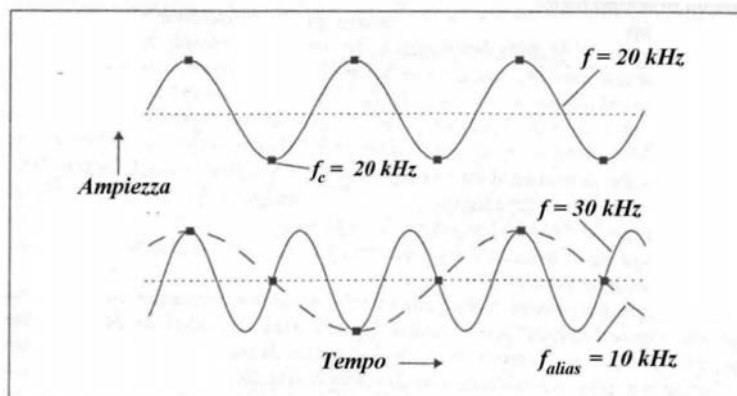


Figura 2.13: Aliasing

con una frequenza che è pari alla differenza tra quella della camera da ripresa - tipicamente uguale a 24 fotogrammi al secondo - e quella con cui i raggi si susseguono in una data posizione del giro (i raggi appaiono fermi se le due frequenze sono uguali).

Questo tipo di inconveniente, nel caso non sia possibile incrementare la frequenza di campionamento per includere tutte le parziali importanti dell'onda, può essere eliminato inviando il segnale, prima di digitalizzarlo, attraverso un opportuno filtro passa-basso.

2.5.3 Sintesi digitale FM

La modulazione di frequenza - già discussa in precedenza - viene realizzata in modo più rapido con tecniche numeriche, non analogiche. I parametri da fissare sono soltanto la frequenza dell'onda modulante, quella dell'onda modulata e l'indice di modulazione B . Ciò offre, rispetto anche ad altri metodi di modulazione digitale, un notevole risparmio di memoria e di velocità di calcolo. Molti sintetizzatori commerciali di elevata qualità sono basati su questa tecnica.

2.5.4 Sintesi FM e Yamaha DX7

La Yamaha DX7 fu il primo sintetizzatore digitale disponibile in commercio nel 1983. Questo strumento fu il risultato di una lunga collaborazione fra John Chowning e la Yamaha corporation. Esso utilizza la sintesi FM con sei “operatori” configurabili.

Un operatore produce come output un’onda seno modulata in frequenza, la cui frequenza è determinata da un input modulante, e il cui involuppo è determinato da un altro input.

In questo paragrafo, studieremo la sintesi FM usando la Yamaha DX7; lo stesso tipo di studio potrà essere facilmente trasportato ad ogni altro sintetizzatore FM. Iniziamo con l’esaminare un segnale, modulato in frequenza, nella forma:

$$\sin(\omega_c t + I \sin \omega_m t).$$

$\omega_c = 2\pi f_c$ dove f_c indica la frequenza portante, $\omega_m = 2\pi f_m$ dove f_m indica la frequenza modulante, e I l’indice di modulazione. La serie di Fourier per funzioni di questa forma è stata analizzata nel paragrafo (2.2.4) in termini delle funzioni di Bessel.

Ponendo $\phi = \omega_c t$, $z = I$ e $\theta = \omega_m t$ nell’equazione (2.12) si ottiene l’equazione fondamentale per la modulazione di frequenza:

$$\sin(\omega_c t + I \sin \omega_m t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(I) \sin(\omega_c + n\omega_m)t.$$

L’interpretazione di questa equazione è che per un segnale modulato in frequenza con frequenza portante f_c e frequenza modulante f_m , le frequenze presenti nel segnale modulato sono $f_c + n f_m$. La componente con frequenza $f_c + n f_m$ è chiamata *n-esima side band* del segnale. Dunque la funzione di Bessel $J_n(I)$ dà l’ampiezza

dell' n -esima *side band* in termini di indice di modulazione.

Il diagramma blocchi sulla DX7 per modulare in frequenza un'onda seno in questo modo è mostrato in figura (2.14).

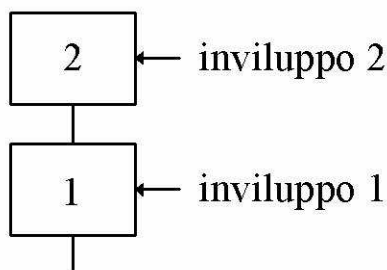


Figura 2.14: Diagramma blocchi per DX7.

Il blocco “1” rappresenta l’operatore che produce il segnale portante e il blocco “2” rappresenta l’operatore che produce il segnale modulante. Ogni operatore possiede un suo proprio inviluppo, che determina come la sua ampiezza varia nel tempo. Così, l’inviluppo “1” determina come varia nel tempo l’ampiezza del segnale finale, ma risulta meno ovvio che anche l’inviluppo “2” svolge un ruolo determinante. Poichè l’output dell’operatore “2” è la frequenza che andrà a modulare l’operatore “1”, l’ampiezza dell’ output si può interpretare come l’indice di modulazione I . Per piccoli valori di I , $J_0(I)$ è molto più grande degli altri $J_n(I)$, come si vede in figura 2.15, così l’operatore 1 produrrà un output sempre più vicino ad un’onda seno pura, ma con altre frequenze di piccola ampiezza. Mentre, per grandi valori di I , lo spettro dell’output dell’operatore 1 sarà sempre più ricco in armoniche.

Per un dato valore di I , al crescere di n , l’ampiezza $J_n(I)$ alla fine tende a zero. E ciò accade tanto più rapidamente, quanto più il valore di I è piccolo. Quindi,

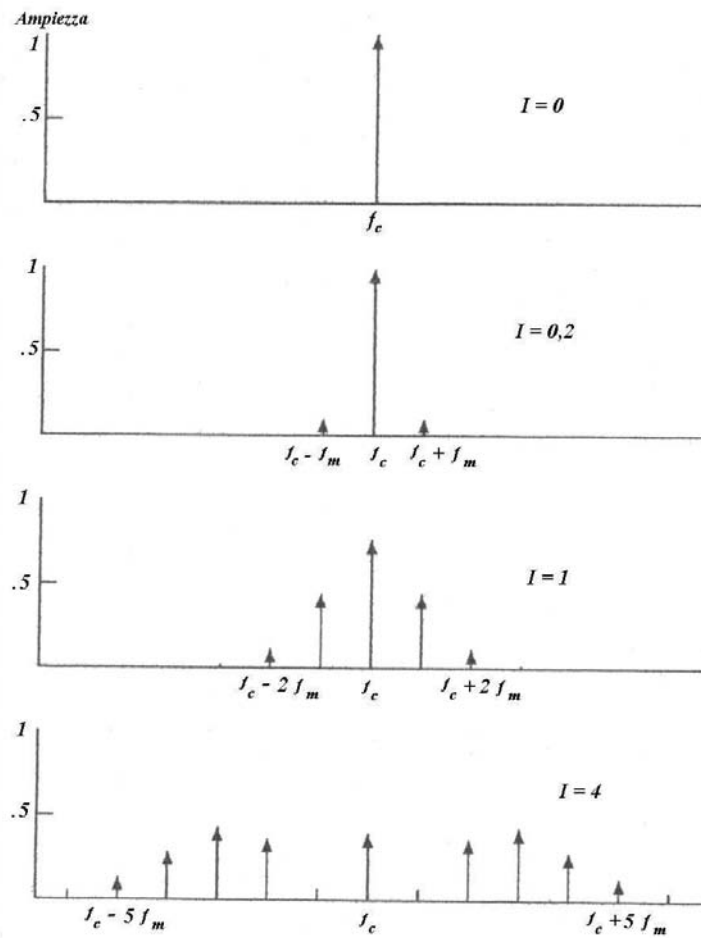


Figura 2.15: Grafici dei J_n .

si avrà una nota più pura per valori di I piccoli e un suono più ricco di armoniche per valori di I più grandi.

Dunque, l'involuppo 2 controllerà il timbro dell'output.

Capitolo 3

Musica generativa

Sin da quando Pitagora ha intuito che l'armonia può essere compresa semplicemente mediante i rapporti numerici delle frequenze, la musica e la matematica hanno avuto uno stretto legame.

La musica è stata sempre un campo molto interessante per le applicazioni delle nuove scoperte scientifiche, invitando i compositori a combinare la creatività artistica con il metodo scientifico.

Sempre più di frequente, accade che i compositori si volgano alle scienze per ampliare e rinnovare i loro modelli compositivi. D'altra parte, anche gli scienziati sembrano mostrare interesse verso i principi organizzativi trovati nella musica.

I modelli scientifici offrono al pensiero umano un'importante componente: *l'astrazione formale*, che può essere di grande aiuto nell'ispirazione di una composizione musicale.

La «musica generativa» è una nuova dimensione musicale. Essa si basa sulla possibilità di una generazione musicale infinita, sempre diversa, grazie ad algoritmi semplici e sempre nuovi.

3.1 Musica e algoritmi

Il termine “algoritmo” è, ovviamente, lo stesso che viene utilizzato nella scienza dell’informazione. Non dobbiamo però spaventarci quando esso viene accostato “persino” alla musica!

Un algoritmo è una sequenza finita di passi che, a partire da alcuni dati di input, ci conduce, senza ambiguità, a dei risultati di output.

L’idea di “musica algoritmica”, cioè di musica prodotta attraverso degli algoritmi, non è nuovissima, come invece si sarebbe portati a pensare: già nel 1787 a misurarsi con tali congetture fu Mozart, che in quell’anno scrisse le istruzioni e le misure di un sistema di composizione per minuetto, ottenuto attraverso un gioco di dadi. Il genio austriaco compilò una tabella di regole per associare ai risultati delle giocate, le rispettive note. In pratica questo è stato il primo algoritmo di composizione generativa e in Rete (in QuickTime streaming mozart.composers.net/dice) se ne trova anche una scarna simulazione che fa ascoltare i risultati ottenuti variando opportunamente i parametri .

Da allora la matematica ha fatto parte di diverse sperimentazioni musicali, sia colte sia pop, ma per ritrovare la musica generativa si deve tornare ai giorni nostri.

3.1.1 Tecniche di composizione algoritmica

Sono state esplorate diverse tecniche per la composizione algoritmica e queste possono essere suddivise in quattro grossi campi di ricerca:

1. **Composizioni stocastiche.**

Sin dai primi esperimenti (a cominciare da Mozart) nell’esplorazione di

questa nuova dimensione musicale, la probabilità ha giocato un ruolo basilare. I processi stocastici vengono generati mediante le *catene di Markov*, che fondamentalmente trattano la probabilità di passare da uno stato A ad uno stato B.

Le composizioni stocastiche si basano appunto su queste probabilità per muoversi continuamente fra diversi stati dati.

2. Composizioni caotiche

A partire dagli anni settanta, la comunità scientifica si interessò molto alle principali forme di irregolarità nella natura, e negli anni ottanta il *caos* fu al centro dell'attenzione. Molti lavori di ricerca si sono occupati di tali sistemi caotici. Si tratta di sistemi che, superficialmente, sembrano semplici nella loro definizione, ma producono risultati sempre più imprevedibili e inspiegabili.

I sistemi più “famosi”, di questo tipo, sono i cosiddetti *frattali* che, da una semplice equazione, producono infinite forme complesse che si ripetono continuamente in dimensioni sempre più piccole.

Di solito siamo abituati a vedere questi algoritmi applicati alla generazione di immagini, ma la stessa tecnica è stata applicata per generare musica come si può vedere nel paragrafo (3.3.1).

3. Composizioni “rule-based”

Questo tipo di composizioni è descritto da regole formali e test, in base ai quali il programma può avanzare da uno stato ad un altro.

4. **Composizioni musicali e Intelligenza artificiale**

Si tratta di composizioni che sfruttano l'euristica, cioè la capacità di prevedere in modo intuitivo il verificarsi di eventi successivi.

I sistemi di intelligenza artificiale sono quelli nei quali gli algoritmi sono capaci di “imparare”, attraverso dei confronti fra gli stati in cui vengono a trovarsi, quali soluzioni debbano essere “ricordate” ed eventualmente ripetute e quali no.

Un'applicazione dell'intelligenza artificiale alla composizione musicale, si trova in dei sistemi sviluppati da Charles Ames e Michal Domino che, con questa tecnica, hanno prodotto musica jazz e rock.

3.2 Esempi-base di musica algoritmica

Ci sono dunque infiniti algoritmi per la produzione musicale, infiniti algoritmi che associano ai numeri le note, in base a criteri sempre diversi.

In genere si determina un insieme discreto di elementi (*range*) e poi si fa corrispondere, a ciascun elemento, una nota con una certa frequenza, durata e ampiezza.

RANGE. Gli strumenti matematici necessari nella determinazione di un *range* possono essere:

- **Conversione:** Convertire un numero dato, n , in base r .
- **Congruenze aritmetiche:** Sostituire ad n , $n \bmod r$, cioè il resto della divisione di n per r .
- **Somma delle cifre:** Sostituire n con la somma delle sue cifre e ripetere il procedimento fino a quando questa non diventi minore di r .
- **Prodotto delle cifre:** Sostituire n con il prodotto delle sue cifre e ripetere il procedimento fino a quando questo non sia minore di r .
- **Funzioni periodiche:** Sostituire n con $r/2 \cos n - 1$ oppure $r/2 \sin n - 1$, arrotondati all'intero più vicino.

DAI NUMERI AL SUONO. Una volta determinato il range, si può associare ad ogni numero una nota nei modi più svariati, ad esempio:

- Far corrispondere ad ogni numero (o cifra) una nota.
- Associare ad una cifra (o ad un gruppo di cifre) una specifica caratteristica della nota (durata, ampiezza,...).

- Considerare il numero n di cifre uguali consecutive per determinare una data proprietà della nota.
- Scegliere delle cifre per ottenere delle pause o dei cambi di ottave.

Un esempio base può essere il seguente:

1. Si consideri un numero intero.
2. Si calcoli il suo corrispondente numero binario.
3. Si sommino le cifre di tale numero.
4. Si suoni la nota C se la somma è 1, la nota D , se la somma è 2, la nota E , se la somma è 3, e così via.

Così facendo, si può creare la melodia descritta nella tabella 3.1

Numero intero	Numero binario	Somma delle cifre	Nota
1	1	1	C
2	10	1	C
3	11	2	D
4	100	1	C
5	101	2	D
6	110	2	D
7	111	3	E

Tabella 3.1: Esempio di musica creata per via algoritmica.

3.3 Alcune sperimentazioni moderne

Dopo la prima sperimentazione di Mozart, per ritrovare della produzione di musica generativa, si deve giungere al 1975, quando uno dei più famosi guru dell'elettronica, Brian Eno, si interessò alla produzione di esperienze musicali di questo genere.

Egli, in uno dei suoi primi lavori, produsse un brano in cui due cicli melodici di diversa durata si ripetevano separatamente, potendo così sovrapporsi in maniera arbitraria.

Il passo successivo è venuto dall'utilizzo della tecnologia digitale non solo per raffinare questa tecnica, ma per evolverla, introducendo variabili probabilistiche che variassero davvero il brano ad ogni esecuzione, specificando solo il dominio musicale entro cui comporre la sua struttura e i parametri su cui svilupparlo.

Nel 1983, la Yamaha DX7, di cui abbiamo già parlato nel paragrafo 2.5.4, mise a disposizione degli utenti ben 32 configurazioni (algoritmi) dei suoi sei oscillatori. In questi algoritmi la DX7 permise di unire componenti additive e modulazione di frequenza (FM). Anche la sintesi additiva, infatti, può essere espressa mediante i diagrammi a blocchi. Una forma d'onda con cinque componenti sinusoidali si può ad esempio rappresentare come in figura 3.1.

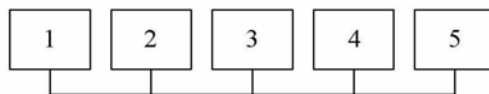


Figura 3.1: Diagrammi a blocchi per sintesi additiva

Vediamo più da vicino due esempi di algoritmi della DX7.

Consideriamo la somma di due forme sinusoidali di diversa frequenza (blocchi 2 e 3); supponiamo di utilizzare questa somma per modulare un'altra onda seno (blocco 1): il diagramma a blocchi diventa quello in figura (3.2).

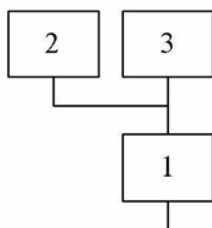


Figura 3.2: Algoritmo per DX7

La corrispondente forma d'onda è data da:

$$\sin(\omega_1 t + I_2 \sin \omega_2 t + I_3 \sin \omega_3 t) = \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \sum_{n_3=-\infty}^{\infty} J_{n_2}(I_2) J_{n_3}(I_3) \sin(\omega_1 + n_2 \omega_2 + n_3 \omega_3) t.$$

Un altro possibile algoritmo è quello detto a *cascata*, nel quale il segnale modulante è anch'esso modulato. Il suo diagramma a blocchi è qui rappresentato

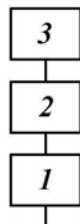


Figura 3.3: Algoritmo a cascata

e la corrispondente formula è la seguente:

$$\sin(\omega_1 t + I_2 \sin(\omega_2 t + I_3 \sin \omega_3 t)) =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} J_{n_2}(I_2) \sin(\omega_1 t + n_2 \omega_2 t + n_2 I_3 \sin \omega_3 t) \\ &= \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \sum_{n_3=-\infty}^{\infty} J_{n_2}(I_2) J_{n_3}(n_2 I_3) \sin(\omega_1 + n_2 \omega_2 + n_3 \omega_3) t. \end{aligned}$$

Successivamente si sono sviluppate sperimentazioni sempre più innovative, fra cui va ricordata quella di Webplayer, un software che ha “musicato la Rete”.

Il flusso che fuoriesce dalle casse del PC, una volta avviato questo programma, è davvero sorprendente, e si basa, oltre che sul testo in Html specificato dall’utente, anche sulla data e sull’ora che il computer segna in quel momento, creando così le condizioni necessarie perchè le melodie siano sempre originali.

Anche in natura, comunque, si trovano numerose sequenze simmetriche che possono ispirare inediti accostamenti. Uno di questi è il patrimonio genetico, inteso come la complessa struttura del DNA. Proprio a questa associazione sono ricorsi i due musicisti Susan Alexander e David Deamer che hanno ribattezzato le loro creazioni come *DNA music*, associando alle basi del DNA, le note di un sistema a quattro toni.

Fra le altre sperimentazioni più moderne ne presentiamo alcune di seguito.

3.3.1 Composizioni Frattali

Un esempio di produzione musicale attraverso modelli frattali è dato da Nelson in un suo articolo: “Real time trasformation of musical material with fractal algorithms”.

Con la scoperta dei frattali, Mandelbrot introdusse una nuova classe di modelli matematici e una nuova branca della matematica. Allo stesso tempo egli stimolò

molti musicisti che si interessarono alle applicazioni musicali dei frattali. La caratterizzazione fondamentale dei frattali è l'autosimilarità per cui l'andamento di una curva si ritrova, ed è facilmente visibile mediante ingrandimenti, in dimensioni più ridotte, nella stessa immagine frattale. Uno dei più semplici modelli frattali è quello bidimensionale che delinea i contorni di una montagna.

All'inizio si disegnano delle linee per identificare il picco più alto e la valle. Poi queste linee vengono riprese in modo ricorsivo per delineare i livelli in modo più dettagliato e così via, come mostrato in figura 3.4.

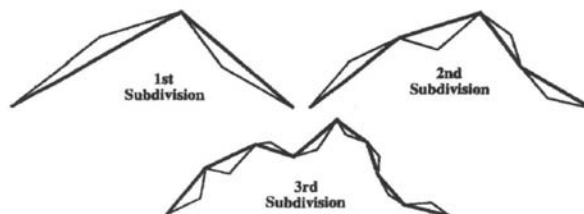


Figura 3.4: Suddivisione in “Fractal mountains”

Le sequenze musicali sono generate creando una corrispondenza fra i punti di intersezione di ogni coppia di linee e i valori del tempo e della frequenza. Ogni vertice rappresenta il punto di attacco di una nota.

Un'altra funzione frattale è usata per gestire la durata delle note ed essa controlla anche il numero di note che devono essere suonate contemporaneamente.

La forma armonica in “Fractal mountains” viene dalla tendenza dei modelli frattali ad essere attratti da particolari valori numerici e dunque particolari frequenze. Questi “attrattori strani” sono una delle più interessanti caratteristiche dei frattali. In musica essi producono sensi di tensione e rilassamento, i quali destano interessi sia da un punto di vista fisico che armonico.

Nel medesimo articolo, Nelson descrive la composizione di un altro brano musicale ottenuto con l'aiuto dei sistemi di Lindenmayer (*L – systems*). Essi sono delle grammatiche formali per sequenze crescenti di simboli. Il processo inizia con un “seme” e prosegue attraverso una serie di generazioni in cui ogni simbolo viene sostituito da una stringa di simboli; ad esempio, la grammatica:

$$X \longrightarrow -YF + XFX + FY -$$

$$Y \longrightarrow +XF - YFY - FX +$$

significa che al simbolo X sarà sostituita la stringa $-YF + XFX + FY -$ nella generazione successiva e, analogamente accadrà per il simbolo Y . Dal momento che le stringhe contengono a loro volta i simboli X e Y , il processo sarà ricorsivo e frattale.

Se si esegue questo processo per 4 generazioni partendo dal “seme” X , si ottiene la stringa in figura 3.5.

```

--++XF-YFY-FX+F+-YF+XFX+FY-F-YF+XFX+FY--F+XF-YFY-FX+-F+-YF+
XFX+FY-F--XF-YFY-FX+F+XF-YFY-FX+-F-YF+XFX+FY--F+-YF+XFX+FY-F
--XF-YFY-FX+F+XF-YFY-FX+-F-YF+XFX+FY--F--XF-YFY-FX+F+-YF+XF
X+FY-F-YF+XFX+FY--F+XF-YFY-FX+-F+-YF+XFX+FY-F--XF-YFY-FX+
F+XF-YFY-FX+-F-YF+XFX+FY--F+-YF+XFX+FY-F--XF-YFY-FX+
X+FY--F+XF-YFY-FX+-F--XF-YFY-FX+F+-YF+XFX+FY-F-YF+XFX+FY--F+
XF-YFY-FX+-F+-YF+XFX+FY-F--XF-YFY-FX+F+XF-YFY-FX+-F-YF+XFX+
FY--F--YF+XFX+FY-F--XF-YFY-FX+F+XF-YFY-FX+-F-YF+XFX+FY--F+
--XF-YFY-FX+F+-YF+XFX+FY-F-YF+XFX+FY--F+XF-YFY-FX+-F--XF-YFY
-FX+F+-YF+XFX+FY-F-YF+XFX+FY--F+XF-YFY-FX+-F+-YF+XFX+FY-F--
XF-YFY-FX+F+XF-YFY-FX+-F-YF+XFX+FY--F+-YF+XFX+FY-F--YF+XF
X+FY-F-YF+XFX+FY--F+XF-YFY-FX+-F--YF+XFX+FY-F--XF-YFY-FX+F+
XF-YFY-FX+-F-YF+XFX+FY--F+-YF+XFX+FY-F--XF-YFY-FX+F+XF-YFY-F
X+-F-YF+XFX+FY--F--XF-YFY-FX+F+-YF+XFX+FY-F-YF+XFX+FY--F+XF
-YFY-FX+-F--
    
```

Figura 3.5: Stringhe di rappresentazione della curva di Hilbert.

Se ora si interpreta tale stringa come una serie di comandi per disegnare delle linee, possiamo creare l'immagine mostrata in figura 3.6. In questo linguaggio, “F” significa tracciare una linea in avanti di una lunghezza fissata, “+” significa girare a sinistra e “-” significa girare a destra di un certo angolo (l'angolo considerato nella figura 3.6 è 90 gradi). I simboli “X” e “Y” sono utilizzati solo per reiterare il processo e sono ignorati nella realizzazione del grafico.

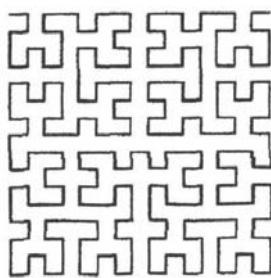


Figura 3.6: Curva di Hilbert.

L'interpretazione musicale usata da Nelson consiste nell'associare note (cioè frequenze) alle coordinate verticali dei vertici, e interpretare le distanze (in valore assoluto) fra due vertici consecutivi come la durata della nota stessa. La curva rappresentata in figura 3.6 è “troppo simmetrica” e produce quindi delle forme sonore piuttosto ripetitive con poche variazioni di note e ritmi.

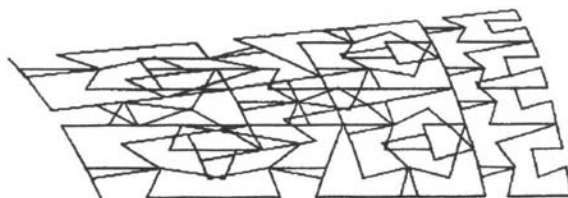


Figura 3.7: Curva di Hilbert “deformata”, variando l'angolo.

Per inserire delle variazioni significative Nelson varia l'angolo da 90 a 101 gradi. In figura 3.7, è rappresentato il grafico così ottenuto, il quale, tradotto in tempo e frequenza, diviene come in figura 3.8.



Figura 3.8: Frequenze nel tempo prodotte dalla curva di Hilbert.

3.3.2 Esempio di composizione multimediale

In “Music and Animation Tool Kit: Modules for computer Multimedia Composition” si può trovare un altro tipo di sperimentazione moderna effettuata da R.Roth. Nel suo articolo egli descrive un software per tradurre in musica movimenti visibili. Tutti gli eventi visivi vengono trasferiti nel campo musicale.

Egli scrisse questo lavoro mentre conduceva delle ricerche su come la vista e l'udito percepiscono il movimento, lo spazio e il tempo e su come il cervello elabora le informazioni trasmesse dagli occhi e dalle orecchie.

In “Geomusic”, uno dei software prodotti da Roth, l'utente può scegliere, mediante alcuni comandi della tastiera o con il mouse, una forma tridimensionale e muoverla liberamente sullo schermo. Essa può muoversi lentamente ruotando oppure può compiere movimenti rapidi, etc. In questo programma il movimento è tradotto in musica attraverso un sistema di “coordinate mapping”, in cui il computer assegna delle note alle coordinate tridimensionali (x,y,z) dei vertici

della forma scelta. La coordinata y si riferisce alla frequenza: il computer assegna una frequenza più alta a vertici con valori di y più elevati. La coordinata z fa riferimento, invece, alla velocità: il computer assegna una velocità tanto più alta quanto più il vertice è vicino all'utente. La coordinata x infine, regola l'uscita del suono nelle casse.

La musica riflette la struttura dell'oggetto scelto e i suoi movimenti nel tempo. Un triangolo, avendo tre vertici, produrrà una musica con tre melodie simultanee, analogamente un quadrato ne produrrà quattro contemporaneamente, etc... È solo mediante il movimento che si può riconoscere la forma dell'oggetto con la musica prodotta.

Alla formazione di questa "orchestra", può inoltre contribuire l'intera forma (non solo i suoi vertici); in quanto si può assegnare ad ogni faccia dell'oggetto un diverso canale MIDI. Ad esempio, ad una faccia può essere assegnato uno strumento a fiato e, a quella opposta, un violino. Quando la forma si muove, l'insieme dei timbri cambia costantemente man mano che una faccia si sposta in avanti (e le frequenze associate ad essa aumentano di volume) e indietro. La musica così prodotta è stata progettata per creare un'esperienza di percezione uditiva simile a quella visiva.

3.3.3 Elaborazione cerebrale dei segnali

Un'altra sperimentazione musicale, legata all'elaborazione cerebrale dei segnali, è quella che riguarda le strutture di musica tonale come agenti di controllo del caos presente nel cervello. L'analisi dell'elettroencefalogramma (EEG) umano ha mostrato che molti segnali cerebrali sono processi caotici dipendenti dallo stato

funzionale del cervello (sonno, veglia, epilessia,...).

S.Kelso ha anche mostrato che le variazioni del campo magnetico generato tra le cellule a livello cerebrale sono descritte da attrattori caotici deterministici. Successivamente Birbaumer, e altri, rivelarono che la musica tende a ridurre il grado di caos nelle onde cerebrali. Esperimenti condotti al computer da V.Bondarenko hanno mostrato che è possibile controllare un comportamento caotico nel sistema cerebrale attraverso impulsi periodici esterni.

3.3.4 Comporre con gli automi cellulari

Possiamo definire in breve un automa cellulare come un array regolare di variabili, o celle, che possono essere mono, bi o tri dimensionali. Ogni cella può assumere valori di un insieme finito di interi e ogni valore è normalmente associato ad un colore. Il funzionamento di un tale automa viene visualizzato sul monitor come una sequenza di “pattern” di celle colorate che cambiano con il “tic” di un orologio immaginario. Ad ogni “tic” dell’orologio, i valori delle celle cambiano simultaneamente secondo un insieme di regole di transizione che tengono conto dei valori delle celle vicine.

Un’ampia varietà di automi cellulari e regole di transizione sono state adattate a vari modelli in aree diverse: dalla fisica alla biologia, alla chimica e alle scienze sociali.

Nell’articolo di Eduardo Reck Miranda “Evolving Cellular Automata Music: From Sound Synthesis to Composition” sono presentati degli esperimenti effettuati proprio per vedere come la propagazione di “pattern” negli automi cellulari, potesse essere usata o adattata a modelli di propagazione di “pattern” musicali. Questi

esperimenti culminarono in un sistema, chiamato CAMUS (Cellular automata and music). CAMUS usa un classico tipo di automa cellulare: *Gioco della vita*, ideato da John Horton Conway.

Questo automa cellulare consiste in una matrice di celle, le quali possono sussistere in due stati: vive (rappresentate da 1) o morte (rappresentate da 0). La funzione di transizione che determina l'evoluzione dell'automa può essere riassunta con due semplici regole, che sono applicate simultaneamente ad ogni cella della matrice:

- Se una cella è morta all'istante t , essa diventa viva nel tempo $t + 1$ se ha esattamente 3 celle vive intorno ad essa.
- Se una cella è viva nell'istante di tempo t , essa diventa morta nell'istante $t + 1$ se ha meno di 2 o più di 3 celle vive intorno ad essa.

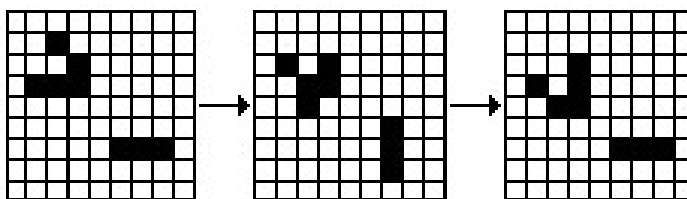


Figura 3.9: Il *Gioco della vita*.

CAMUS usa lo spazio cartesiano bidimensionale per rappresentare delle triplette musicali $\{A,N,D\}$. In questo piano cartesiano le ascisse esprimono la distanza (intesa come numero di semitoni) tra A e N , e le ordinate la distanza fra N e D .

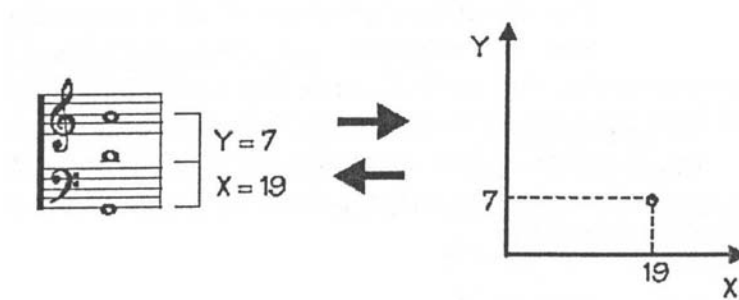


Figura 3.10: Rappresentazione di CAMUS delle triplette musicali sul piano cartesiano.

Il modello musicale è definito nel modo seguente: si considera l'automa $\{M, m_0, f\}$, tale che $M = \{m_0, m_1\}$, dove $m_0 = 0$ e $m_1 = 1$. Siano P e Q gli insiemi di interi tali che a tutte le $p \in P$ corrispondono i valori dell'asse orizzontale e a tutte le $q \in Q$ corrispondono i valori dell'asse verticale della matrice di celle. Una configurazione $f : P \times Q \rightarrow M$ definisce un insieme di triplette nel piano cartesiano. Per iniziare la composizione, il sistema è posto ad una configurazione iniziale. Ad ogni incremento temporale, le coordinate di ogni cella viva sono analizzate e usate per determinare una tripletta. Per esempio, nel caso della figura 3.11,

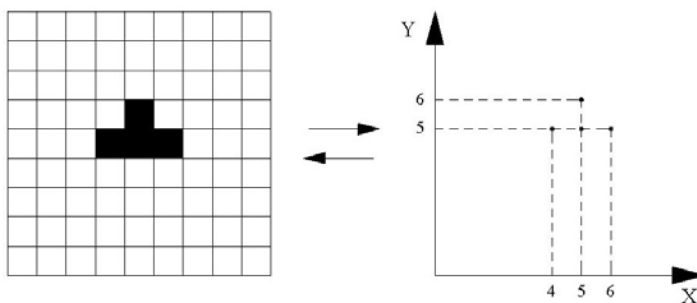


Figura 3.11: Dalla configurazione dell'automa alla tripletta e viceversa.

la cella di coordinate (5,5) è viva e allora, assumendo che sia data una certa nota A , la nota più vicina, N , sarà 5 semitoni più in alto e la più lontana, D , sarà 10 semitoni al di sopra della fondamentale A . Per *default* le note sono suonate da sinistra a destra e dall'alto verso il basso.

Una volta determinata la nota per ogni cella, gli stati delle celle vicine ne determinano l'istante di attacco e la durata in accordo con uno schema detto *AND-code*. Per determinare l'*AND-code* di una cella, CAMUS costruisce anzitutto una lista $S = [s_1, s_2, \dots, s_8]$ contenente gli stati delle otto celle circostanti. Poi il sistema stabilisce quattro *parole* composte da quattro bit, secondo lo schema seguente:

$$w_1 = s_1 s_2 s_3 s_4$$

$$w_2 = s_4 s_3 s_2 s_1$$

$$w_3 = s_5 s_6 s_7 s_8$$

$$w_4 = s_8 s_7 s_6 s_5.$$

Il formato dell'*AND-code* è $Tgg + Dur$ ed è composto da 8 bit. La parte Tgg corrisponde all'istante d'attacco delle note, mentre la parte Dur corrisponde alla loro durata. Queste due parti del codice sono definite con un *or* logico:

$$Tgg = w_1 \vee w_2$$

$$Dur = w_3 \vee w_4.$$

Entrambe le parti del codice sono interpretate con il seguente criterio:

$$0000 = a[dn]$$

$$0001 = [dna]$$

$$0010 = adn$$

$$0011 = dna$$

$$0101 = and$$

$$0110 = dan$$

$$0111 = nad$$

$$1001 = d[na]$$

$$1011 = nda$$

$$1111 = n[da]$$

dove a rappresenta la nota fondamentale, n la nota media e d la nota più alta della tripletta e le parentesi quadre indicano la simultaneità degli eventi.

Ad esempio, nel caso in cui $Tgg = 0111$ e $Dur = 0000$ si ha la configurazione rappresentata in figura 3.12.

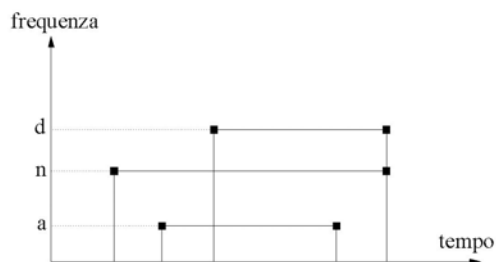


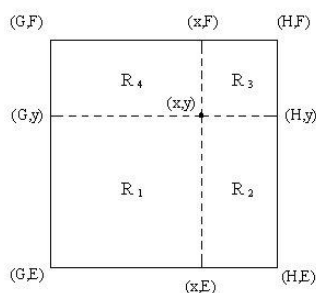
Figura 3.12: Configurazione della tripletta dell'esempio considerato.

I valori effettivi in secondi, degli istanti di attacco e della durata, sono calcolabili con ulteriori procedure.

3.3.5 Esempio di composizione con i sistemi dinamici

Recentemente ci sono state anche delle sperimentazioni sul legame fra musica e modelli matematici; ad esempio, quella descritta da M.Witten in “The sounds of science: Listening to Dynamical Systems towards a musical exploration of complexity”.

Egli prende in considerazione una porzione di un processo dinamico bidimensionale, racchiusa in un rettangolo R_D del piano xy rappresentato in figura 3.3.5. Questo rettangolo, ovviamente, potrebbe essere misurato in cm, piedi, numero di animali, concentrazione di sostanze chimiche o qualsiasi altra variabile astratta. Una volta delineata la superficie in cui il modello dinamico si sviluppa, vanno assegnati gli attributi *sonoro – musicali* al fenomeno dinamico. Per fare ciò Witten segue l’approccio descritto di seguito. Considera un punto del sistema dinamico nell’istante t , (x,y) e traccia una croce centrata in esso, come in figura 3.3.5. In questo modo compaiono quattro rettangoli R_1, R_2, R_3, R_4 , con aree A_1, A_2, A_3, A_4 .



Se ora si divide ciascuna area per l’area del rettangolo iniziale $A = (H - G)(F - E)$, è facile osservare che i fattori così ottenuti, F_i per $i = 1,2,3,4$ appartengono all’intervallo $[0,1]$ per ogni (x,y) .

Questo è uno dei modi per attribuire ad ogni punto (x,y) una quadrupla $A = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ che associa il valore dell' i -esimo fattore F_i ad un particolare attributo A_i . Ad esempio, si può operare sul fattore F_1 in modo che abbia un valore intero compreso 0 e 127. Allora l'attributo A_1 potrebbe essere assegnato alla corrispondente nota midi. Analoghe associazioni possono farsi anche per il volume, il timbro, la durata e altre caratteristiche musicali. I valori (A_1, A_2, A_3, A_4) possono anche essere assegnati alle quattro fasi dell'involuppo di un segnale.

3.4 Musica algoritmica e Csound

Ci possono essere diversi approcci alla composizione musicale per via algoritmica:

1. Algoritmi che, attraverso la sintesi del suono, sono capaci di creare nuovi timbri e quindi strumenti elettronici originali.
2. Algoritmi che agiscono solo sullo spartito della composizione musicale, operando sulla frequenza, sull'ampiezza e sulla durata delle note.
3. Algoritmi capaci di produrre sia strumenti che spartiti.

A quest'ultima categoria appartiene il linguaggio di sintesi del suono più diffuso nel mondo: **Csound**.

Csound è un programma di sintesi del suono, scritto da Barry Vercoe, diventato ormai lo strumento principale per la produzione di musica elettronica. I motivi di questo successo si trovano nel fatto che Csound è utilizzabile praticamente su tutte le piattaforme e su tutti i principali sistemi operativi oggi disponibili. Inoltre decine di persone sparse nel mondo si occupano costantemente del suo aggiornamento e dell'espansione delle sue possibilità. Si tratta quindi di uno strumento vivo e in continua evoluzione. Csound permette di fare molto più di ciò che fino a qualche tempo fa era possibile solo su piattaforme del costo di centinaia di migliaia di dollari.

Csound riceve in input due file di tipo testo, chiamati *file orchestra* (con estensione *orc*) e *file score* (con estensione *sco*).

Il file orchestra definisce gli strumenti e fa uso della sintesi FM, degli involuipi sulle frequenze e di altri metodi di sintesi.

Il file score, invece, è un vero e proprio spartito in cui si danno le informazioni

necessarie per “far suonare” gli strumenti dell’orchestra. Viene assegnato l’istante d’attacco, la durata, la frequenza e l’ampiezza della nota.

L’esecuzione del programma Csound restituisce poi come output un file di tipo WAV, che può essere ascoltato su ogni PC.

Capitolo 4

Teoria dei sistemi dinamici

Le prime equazioni differenziali comparvero in matematica quasi contemporaneamente alla creazione del calcolo differenziale, in relazione a numerosi problemi fisici, quali, ad esempio, quelli della teoria dell'elasticità. In essi si studiavano movimenti di corpi materiali, come funi o travi, sottoposti a sollecitazioni di vario genere.

Fu poi la meccanica celeste la prima scienza a formulare le proprie leggi mediante equazioni differenziali. Lo studio del modello matematico che esse costituivano permise di ricavare informazioni circa le orbite dei pianeti e di prevedere fenomeni naturali quali le eclissi.

Per qualche tempo gli scienziati dell'epoca cercarono di risolvere le equazioni differenziali mediante formule esplicite; ben presto fu chiaro che tale progetto era realizzabile per un numero molto esiguo di equazioni. Nacque così l'esigenza di una teoria sistematica, ancora oggi in evoluzione, che trova i suoi pilastri nei teoremi di esistenza ed unicità, di prolungabilità, di dipendenza continua dai dati e di stabilità.

Alla fine del secolo scorso le ricerche di Henri Poincaré sul *problema degli n-corpi* (determinazione del movimento di n masse soggette all'azione gravitazionale come il movimento dei pianeti nel sistema solare), condussero alla cosiddetta *teoria qualitativa*, ovvero allo studio delle proprietà geometriche e topologiche delle soluzioni intese nella loro globalità.

Il compito è oggi facilitato dallo sviluppo dei *metodi numerici* (questo è l'aspetto quantitativo della teoria), e dell'uso degli elaboratori, che permettono di visualizzare le soluzioni e, conseguentemente, di formulare congetture teoriche.

Proprio la teoria qualitativa e la sua versione moderna, *i sistemi dinamici*, hanno permesso la fioritura di modelli matematici in scienze quali la chimica, la biologia, l'economia, la sociologia.

4.1 Un primo approccio ai sistemi dinamici

Sia data l'equazione differenziale

$$\dot{x} = Ax \tag{4.1}$$

con $x = (x_1, x_2)$ e $A = (a_1, a_2)$.

Si può pensare a questa equazione come ad un sistema dinamico se si considera la variabile indipendente t come una variabile temporale; le curve soluzioni $x(t)$, possono essere quindi pensate, ad esempio, come il percorso di una particella che si muove nel piano \mathbb{R}^2 a partire da una data condizione iniziale. Per indicare la dipendenza della posizione da t e dal punto iniziale ($x(0) = u$) denotiamo:

$$\phi_t(u) = (u_1 e^{a_1 t}, u_2 e^{a_2 t}) \tag{4.2}$$

Possiamo immaginare tante particelle posizionate in ogni punto del piano che si muovono simultaneamente. Per ogni fissato $t \in \mathbb{R}$ si ha una trasformazione lineare

$$\phi_t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

che assegna ad u , $\phi_t(u)$.

Al variare del tempo, ogni punto si muove lungo la traiettoria che passa per esso. In questo modo, l'insieme delle applicazioni

$$\phi_t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

per $t \in \mathbb{R}$ è una famiglia di trasformazioni, dipendenti da un parametro. Questa famiglia è chiamata *flusso* o *sistema dinamico* su \mathbb{R}^2 determinato dal campo vettoriale:

$$x \longrightarrow Ax.$$

Dunque, siamo partiti da un'equazione differenziale e siamo giunti ad un sistema dinamico ϕ_t . Formalizziamo ora la definizione di sistema dinamico:

Definizione 4.1.1 *Un sistema dinamico è una applicazione $\phi \in C^1$, $\phi : \mathbb{R} \times S \longrightarrow S$ dove S è un aperto di uno spazio Euclideo e, scrivendo $\phi(t,x) = \phi_t(x)$, l'applicazione $\phi_t : S \longrightarrow S$ soddisfa:*

1. $\phi_0 : S \longrightarrow S$ è l'identità.
2. La composizione $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s} \quad \forall t,s \in \mathbb{R}$

Dalla (2), prendendo $s = -t$, deduciamo che ϕ_t , per ogni $t \in \mathbb{R}$, ha un'inversa ϕ_{-t} che è C^1 .

Vediamo ora come, dato un sistema dinamico, si può ottenere un'equazione differenziale.

Sia $\phi_t : S \rightarrow S$ un sistema dinamico e $x \in S$, sia $x(t) = \phi_t(x)$ e $f : S \rightarrow E$ sia definita come $f(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t(x)$, con E , spazio vettoriale. Allora $\dot{x} = f(x)$ e $x(t)$ o $\phi(t)$ è la sua curva soluzione con condizione iniziale $x(0) = \phi_0(x) = x$. Dunque in generale un sistema dinamico ϕ_t su S dà origine ad un'equazione differenziale che è un campo vettoriale su S .

Definendo $f : S \rightarrow E$ come

$$f(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t(x)$$

per $x \in S$, $f(x)$ è un vettore in E , che si può vedere in figura (4.1) come il vettore tangente alla curva $t \rightarrow \phi_t(x)$ in $t_0 = 0$. L'equazione $\dot{x} = f(x)$ è detta equazione

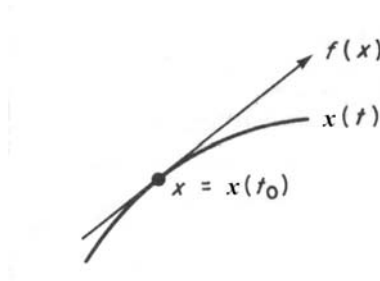


Figura 4.1: L'equazione differenziale come campo vettoriale

autonoma in quanto f non dipende esplicitamente dal tempo.

N.B. Nel seguito del capitolo ci riferiremo sempre ad equazioni di questo tipo!

4.1.1 Lo spazio delle fasi

Abbiamo visto come un'equazione differenziale determina un campo vettoriale. Risolvere l'equazione significa trovare le curve che in ogni punto hanno vettore tangente prescritto dal campo.

L'interpretazione data per un'equazione si estende senza difficoltà ai sistemi. Particolarmente importante è questa interpretazione per i sistemi autonomi, non dipendenti esplicitamente dal tempo, la cui analisi si può efficacemente condurre nello spazio delle variabili, detto *spazio delle fasi*. Anzichè cercare di descrivere le curve soluzione si analizzano le loro proiezioni, che si chiamano *traiettorie* o *orbite del sistema*, sull'iperpiano $t = 0$ (si veda la figura (4.2)).

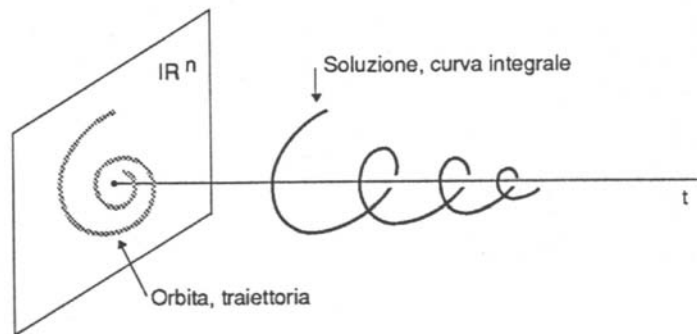


Figura 4.2: Proiezione sul piano delle fasi

4.2 Teoremi fondamentali

In questo paragrafo studieremo il problema dei valori iniziali nei suoi molteplici aspetti: unicità, esistenza, dominio di definizione delle soluzioni, dipendenza dai dati iniziali.

Supporremo che le funzioni che compaiono nei secondi membri delle equazioni appartengano ad una speciale classe di funzioni continue, le funzioni lipschitziane. Questa restrizione consente di trattare con notevole facilità le questioni suddette.

4.2.1 Esistenza ed unicità locale

Iniziamo con l'enunciare il teorema fondamentale di tipo locale, che studia la natura del campo vettoriale $f : W \longrightarrow E$, con W insieme aperto di E , in un intorno di qualche punto $x_0 \in W$.

Teorema 4.2.1 *Sia $W \subset E$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato, sia $f : W \longrightarrow E$ una funzione C^1 e $x_0 \in W$. Allora esiste $a > 0$ per cui*

$$x : (-a, a) \longrightarrow W$$

risulta essere l'unica soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = f(x)$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = x_0$.

Osservazione 4.2.2 *Si considerino le ipotesi del teorema (4.2.1) con $f \in C^1$ e $f : W \longrightarrow E$, dove W è un aperto di E . Allora, come immediata conseguenza dell'unicità della soluzione, si ha che due curve soluzioni di $\dot{x} = f(x)$ non possono intersecarsi e, analogamente, una curva soluzione non può autointersecarsi.*

Sono dunque impossibili le situazioni mostrate nelle figure 4.3 e 4.4.

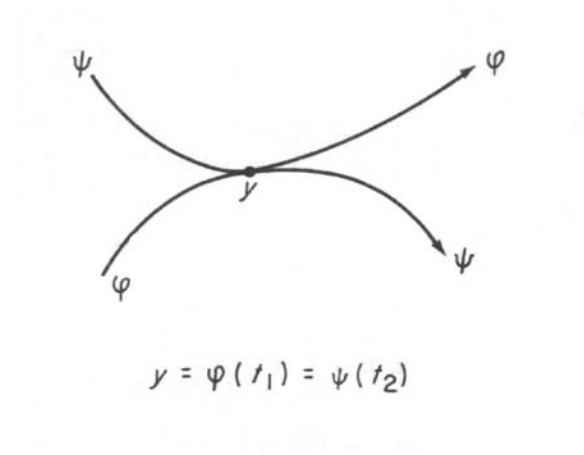


Figura 4.3: Le curve soluzioni non possono intersecarsi.



Figura 4.4: Le curve soluzioni non possono autointersecarsi.

Quindi se una soluzione $\varphi : J \rightarrow W$ di $\dot{x} = f(x)$ soddisfa $\varphi(t_1) = \varphi(t_1 + w)$ per qualche t_1 e $w > 0$ allora questa soluzione deve essere una curva chiusa. Enunciamo inoltre un teorema il quale afferma che la soluzione $x(t)$ dipende in modo continuo dalla condizione iniziale $x(0)$.

Teorema 4.2.3 *Sia $W \subset E$ un aperto e supponiamo che $f : W \rightarrow E$ abbia costante di Lipschitz K . Siano $y(t)$ e $z(t)$ soluzioni di $\dot{x} = f(x)$ sull'intervallo*

chiuso $[t_0, t_1]$. Allora $\forall t \in [t_0, t_1]$ si ha

$$|y(t) - z(t)| \leq |y(t_0) - z(t_0)| \exp(K(t - t_0)).$$

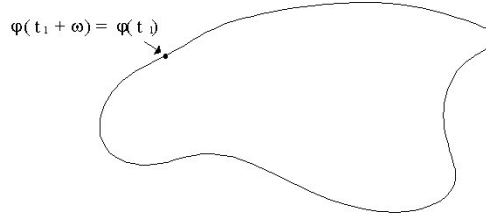


Figura 4.5: Curva soluzione che soddisfa: $\varphi(t_1) = \varphi(t_1 + \omega)$ e quindi è chiusa.

4.2.2 Prolungamento delle soluzioni

Sappiamo dal teorema (4.2.1), per l'unicità locale, che due soluzioni $u(t)$ e $v(t)$ di $\dot{x} = f(x)$ con la stessa condizione iniziale, coincidono in qualche intervallo aperto intorno a t_0 . Vediamo ora come prolungare questo intervallo.

Lemma 4.2.4 *Sia $f : W \rightarrow E$ una funzione C^1 . Siano $u(t)$ e $v(t)$ due soluzioni di $\dot{x} = f(x)$ definite sullo stesso intervallo aperto J contenente t_0 e tali che $u(t_0) = v(t_0)$. Allora*

$$u(t) = v(t) \quad \forall t \in J.$$

Dim.

L'unione di tutti gli intervalli aperti in cui $u(t)$ e $v(t)$ coincidono è il più grande intervallo $J^* \subseteq J$ attorno a t_0 su cui $u(t) = v(t)$. Vediamo ora che J^* deve necessariamente coincidere con J .

Supponiamo per assurdo che il più grande intervallo J^* , in cui $u(t) = v(t)$, non coincida con J .

Sia $t_1 \in J$ un punto estremo di J^* . Per la continuità delle soluzioni $u(t_1) = v(t_1)$, quindi per il teorema (4.2.1), esiste un intorno J' di t_1 in cui $u = v$.

Dunque $u = v$ in $J^* \cup J'$ che è più grande di J^* .

Quindi J^* deve necessariamente coincidere con J .

■.

In generale, dunque, data l'equazione differenziale $\dot{x} = f(x)$ con $f \in C^1$ definita su un insieme aperto $W \subset E$; per ogni $x_0 \in W$ c'è un intervallo aperto massimo, (α, β) , contenente lo zero, sul quale c'è una soluzione $x(t)$ con $x(0) = x_0$.

Vediamo ora cosa accade alla soluzione quando ci avviciniamo ai limiti del suo dominio.

Teorema 4.2.5 *Sia $W \subset E$ aperto, sia $f : W \rightarrow E$ una funzione C^1 . Sia $y(t)$ una soluzione su un intervallo massimale aperto $J = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ con $\beta < \infty$. Allora, dato un qualsiasi insieme compatto $K \subset W$, c'è qualche $t \in (\alpha, \beta)$ con $y(t) \notin K$.*

Dim.

Supponiamo per assurdo che $y(t) \in K \forall t \in (\alpha, \beta)$.

f continua su $K \implies \exists M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$ per $x \in K$.

Sia $\gamma \in (\alpha, \beta)$; vogliamo provare che y si può estendere ad un'applicazione continua da

$$[\alpha, \beta] \rightarrow E.$$

Grazie ad un noto lemma dell'analisi, per dimostrare ciò, basta mostrare che l'applicazione $y : J \rightarrow E$ è uniformemente continua.

Sia $t_0 < t_1$ in J ,

$$|y(t_0) - y(t_1)| = \left| \int_{t_0}^{t_1} \dot{y}(s) ds \right| \leq \int_{t_0}^{t_1} |f(y(s))| ds \leq (t_1 - t_0)M$$

■.

Verifichiamo ora che $y : [\alpha, \beta] \rightarrow E$, appena estesa, è differenziabile in β .

$$\begin{aligned} y(\beta) &= y(\gamma) + \lim_{t \rightarrow \beta} \int_{\gamma}^t \dot{y}(s) ds \\ &= y(\gamma) + \lim_{t \rightarrow \beta} \int_{\gamma}^t f(y(s)) ds \\ &= y(\gamma) + \int_{\gamma}^{\beta} f(y(s)) ds; \end{aligned}$$

quindi

$$y(t) = y(\gamma) + \int_{\gamma}^t f(y(s)) ds \quad \forall t \in [\gamma, \beta].$$

Allora y è differenziabile in β in quanto si ha $\dot{y} = f(y(\beta))$. Quindi y è una soluzione su $[\gamma, \beta]$.

Dal momento che c'è, per il teorema (4.2.1), una soluzione su un intervallo $[\beta, \delta)$, con $\delta > \beta$, possiamo estendere y all'intervallo (α, δ) , e ciò implica che (α, β) non è massimale. Questa contraddizione conclude la nostra dimostrazione.

■.

Il teorema appena dimostrato, in altre parole, afferma che, se una soluzione $y(t)$ non può essere estesa ad un intervallo più grande, allora essa sta fuori da ogni insieme compatto.

Quindi, quando t tende a β , $y(t)$ tenderà al bordo di W oppure $|y(t)|$ tenderà

all'infinito.

Un'importante conseguenza del teorema è:

Proposizione 4.2.6 *Sia A un sottoinsieme compatto dell'aperto $W \subset E$ e sia $f : W \rightarrow E$ una funzione C^1 . Sia $y_0 \in A$ e supponiamo che ogni curva soluzione della forma*

$$y : [0, \beta] \rightarrow W$$

con $y(0) = y_0$ sia contenuta interamente in A . Allora esiste una soluzione:

$$y : [0, \infty] \rightarrow W$$

con $y(0) = y_0$ e $y(t) \in A \forall t \geq 0$.

Dim.

Sia $[0, \beta)$ l'intervallo semi-aperto massimale sul quale è definita una soluzione y tale che $y([0, \beta)) \subset A$; allora β , per la contronominale del teorema (4.2.5), non può essere finito.

■.

4.2.3 Soluzione globale

Nel Teorema (4.2.3) abbiamo supposto che le due soluzioni fossero definite sullo stesso intervallo. Togliamo ora questa ipotesi e dimostriamo che, partendo da punti vicini, le due soluzioni saranno definite sullo stesso intervallo chiuso e rimarranno vicine in tutto questo intervallo.

Teorema 4.2.7 *Sia $f(x)$ appartenente a C^1 . Sia $y(t)$ una soluzione di*

$$\dot{x} = f(x)$$

definita su un intervallo chiuso $[t_0, t_1]$ con $y(t_0) = y_0$. Dunque esiste un intorno $U \subset E$ di y_0 e una costante K tale che, se $z_0 \in U$, allora c'è un'unica soluzione $z(t)$, definita ancora su $[t_0, t_1]$, con $z(t_0) = z_0$ e z soddisfa:

$$|y(t) - z(t)| \leq |y_0 - z_0| \exp(K(t - t_0)) \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

Enunciamo prima i due lemmi:

Lemma 4.2.8 *Se $f : W \rightarrow E$ è localmente Lipschitziana e $A \subset W$ è un compatto. Allora $f|_A$ è Lipschitziana.*

Lemma 4.2.9 *Sia $f : W \rightarrow E$ una funzione di classe C^1 , allora f è localmente Lipschitziana. In particolare, W_0 sarà del tipo:*

$$B_b(x_0) = \{x \in W; |x - x_0| \leq b\}.$$

Dimostriamo ora il teorema (4.2.7).

Per la compattezza di $[t_0, t_1]$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $x \in W$ se

$$|x - y(t)| \leq \varepsilon.$$

L'insieme di questi punti è un sottoinsieme compatto A di W . La funzione f , per il lemma (4.2.9), è localmente Lipschitziana e, dal lemma (4.2.8), segue che $f|_A$ ha una costante di Lipschitz K .

Sia $\delta > 0$ tale che $\delta \leq \varepsilon$ e $\delta \exp(K|t_1 - t_0|) \leq \varepsilon$. Affermiamo che: se

$$|z_0 - y_0| < \delta$$

allora c'è un'unica soluzione, passante per z_0 , definita su tutto $[t_0, t_1]$.

Innanzitutto $z_0 \in W$ poichè $|z_0 - y_0| < \varepsilon$, così c'è, per il Teorema (4.2.5), una

soluzione $z(t)$ passante per z_0 , su un intervallo massimale $[t_0, \beta)$.

Proviamo che $\beta > t_1$:

Supponiamo $\beta \leq t_1$, allora per il Teorema (4.2.3), si ha: $\forall t \in [t_0, \beta)$

$$\begin{aligned} |z(t) - y(t)| &\leq |z_0 - y_0| \exp(K|t - t_0|) \\ &\leq \delta \exp(K|t - t_0|) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Dunque $z(t)$ giace su un compatto A . Per la contronominale del Teorema (4.2.5), $[t_0, \beta)$ non può essere un dominio massimale della soluzione; perciò $z(t)$ è definita su $[t_0, t_1]$. Dal Lemma (4.2.4) abbiamo inoltre l'unicità di tale soluzione.

■.

Questo Teorema si può interpretare anche in un altro modo, il quale rende più evidente il fatto che esso è una generalizzazione del Teorema (4.2.3):

Data $f(x) \in C^1$ da $W \rightarrow E$ e data $y(t)$ soluzione definita su $[t_0, t_1]$ di $\dot{x} = f(x)$.

Allora $\forall z_0$ sufficientemente vicino a y_0 , c'è un'unica soluzione su $[t_0, t_1]$ che parte da z_0 in $t = 0$. Se indichiamo con $t \rightarrow u(t, z_0)$ questa soluzione, allora il Teorema dice che:

$$\lim_{z_0 \rightarrow y_0} u(t, z_0) = u(t, y_0)$$

uniformemente su $[t_0, t_1]$.

In altre parole ancora, il Teorema afferma che la soluzione che passa per z_0 dipende in modo continuo da z_0 .

4.2.4 Il flusso di un'equazione differenziale

Si consideri l'equazione differenziale:

$$\dot{x} = f(x)$$

con $f \in C^1, f : W \longrightarrow E$ e $W \subset E$ aperto.

Per ogni $y \in E$ (condizione iniziale) c'è un'unica soluzione $\phi(t)$ con $\phi(0) = y$ definita su un intervallo massimale aperto $J(y) \subset \mathbb{R}$. Per indicare la dipendenza di $\phi(t)$ da y , scriveremo:

$$\phi(t) = \phi(t, y),$$

per cui $\phi(0, y) = y$.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R} \times W$ l'insieme seguente:

$$\Omega = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times W / t \in J(y)\}. \quad (4.3)$$

L'applicazione che associa a

$$(t, y) \longrightarrow \phi(t, y)$$

è allora una funzione

$$\phi : \Omega \longrightarrow W$$

che chiameremo *FLUSSO* dell'equazione differenziale

$$\dot{x} = f(x).$$

In particolare, se $f(x) = Ax$, con $A \in GL(\mathbb{R}^n)$, allora $\phi_t(x) = e^{tA}x$ sarà detto *Flusso lineare*; il termine lineare si riferisce al fatto che ogni applicazione

$$\phi_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

è un'applicazione lineare.

Teorema 4.2.10 *L'applicazione ϕ ha le seguenti proprietà:*

$$\phi_{s+t} = \phi_s(\phi_t(x))$$

nel senso che se uno dei due membri è definito, allora è definito anche l'altro e sono uguali.

Dim.

Supponiamo s e t positivi e che $\phi_s(\phi_t(x))$ sia definito, cioè $t \in J(x)$ e $s \in J(\phi(x))$.

Supponiamo $J(x) = (\alpha, \beta)$. Allora $t \in (\alpha, \beta)$; mostreremo che $\beta > s + t$, cioè $s + t \in J(x)$.

Definiamo $y : (\alpha, s + t] \rightarrow W$ come:

$$y(r) = \begin{cases} \phi(r, x) & \text{se } \alpha < r \leq t; \\ \phi(r - t, \phi_t(x)) & \text{se } t \leq r \leq t + s. \end{cases}$$

Allora y è una soluzione con $y(0) = x$. Dunque $s + t \in J(x)$ ed inoltre:

$$\phi_{s+t}(x) = y(s + t) = \phi_s(\phi_t(x))$$

■.

Teorema 4.2.11 *L'insieme Ω , definito da*

$$\Omega = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times W / t \in J(y)\}$$

è un aperto in $\mathbb{R} \times W$ e

$$\phi : \Omega \rightarrow W$$

è continua.

Dim.

Sia $(t_0, x_0) \in \Omega$. Supponiamo, senza perdita in generalità, che $t_0 \geq 0$. Allora la curva soluzione: $t \rightarrow \phi(t, x_0)$ è definita su $[0, t_0)$ e quindi su un intervallo $[-\varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. Per il Teorema (4.2.7), esiste un intorno $U \subset W$ di x_0 (si tratta

dunque di un intorno di condizioni iniziali), per il quale, la soluzione $t \rightarrow \phi(t, x)$ è definita su $[-\varepsilon, t_0 + \varepsilon] \forall x \in U$.

Dunque $(-\varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times U \subset \Omega$, e ciò prova che Ω è aperto.

Dimostriamo ora che

$$\phi : \Omega \longrightarrow W$$

è continua in (t_0, x_0) . Siano U e ε come sopra. Sia \bar{U} la chiusura compatta di U , $\bar{U} \subset W$.

poichè f è localmente Lipschitziana e

$$A = \phi([-\varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \bar{U})$$

è compatto, allora, per il Lemma (4.2.8), $f|_A$ è Lipschitziana con costante K .

A è l'insieme di tutte le traiettorie che hanno condizione iniziale in \bar{U} e sono definite su un intervallo di tempo compatto $[-\varepsilon, t_0 + \varepsilon]$.

Sia $M = \max |f(x)| : x \in A$, sia $\delta > 0$ tale che $\delta < \varepsilon$ e se $|x_1 - x_0| < \delta$ allora $x_1 \in U$. Supponiamo

$$|t_1 - t_0| < \delta, \quad |x_1 - x_0| < \delta.$$

Allora

$$|\phi(t_1, x_1) - \phi(t_0, x_0)| \leq |\phi(t_1, x_1) - \phi(t_1, x_0)| + |\phi(t_1, x_0) - \phi(t_0, x_0)|.$$

Il primo addendo, per il Teorema (4.2.3), è maggiorato da $\delta e^{(K\delta)}$ che tende a zero per δ tendente all'infinito; il secondo addendo tende anch'esso a zero, per la continuità della soluzione. Dunque al tendere di δ all'infinito, si ha:

$$|\phi(t_1, x_1) - \phi(t_0, x_0)| \longrightarrow 0$$

che è la definizione di continuità di ϕ in (t_0, x_0) .

■.

Osservazione 4.2.12 Sia $(t, x_0) \in \Omega$, allora c'è un intorno U di x_0 , $U \subset W$ con $t \times U \subset \Omega$, in quanto Ω è aperto in $\mathbb{R} \times W$. La funzione

$$x \longrightarrow \phi_t(x)$$

definisce un'applicazione

$$\phi_t : U \longrightarrow W.$$

Teorema 4.2.13 L'applicazione ϕ_t manda U in un insieme aperto V e inoltre è definita anche un'applicazione: ϕ_{-t} che manda V in U .

La composizione $\phi_{-t}\phi_t$ è l'identità in U e $\phi_t\phi_{-t}$ è l'identità in V .

Dim.

Sia $y = \phi_t(x)$, allora $t \in J(x)$. È facile vedere che $-t \in J(y)$, in quanto

$$\phi_{-t} = \phi_{-t}(\phi_t(x)) = \phi_{-t+t}(x) = \phi(0, x) = x.$$

Quindi la funzione

$$s \longrightarrow \phi_{s-t}(y)$$

è una soluzione su $[-t, 0]$ che manda lo zero in x . Segue dunque che ϕ_{-t} è definita su $\phi_t(U) =: V$.

Rimane da dimostrare che V è aperto. Sia $V^* \supset V$ il sottoinsieme massimale di W su cui è definita ϕ_{-t} . Per il Teorema (4.2.11), V^* è un aperto e $\phi_{-t} : V^* \longrightarrow W$ è continua. Quindi la retroimmagine, mediante ϕ_{-t} , di un aperto (U) è un aperto. Ma la retroimmagine di U è V , dunque V è aperto.

■.

4.3 Stabilità

Questo paragrafo è dedicato ai problemi della stabilità degli stati di equilibrio di un sistema dinamico. In generale si può dire che la stabilità è la dipendenza continua delle soluzioni in funzione dei dati su intervalli infiniti e che la ragione per cui è necessario aprire questo nuovo paragrafo deriva dal fatto che i Teoremi di dipendenza continua (4.2.3 e la sua generalizzazione 4.2.7) valgono solo per intervalli compatti.

Nella descrizione di fenomeni fisici per mezzo di equazioni differenziali, è necessario imporre delle condizioni addizionali, ad esempio valori iniziali, in modo da individuare univocamente la soluzione. Queste condizioni iniziali sono ottenute spesso con misure sperimentali e sono soggette dunque a degli errori. Pertanto siamo portati allo studio dell'effetto sulle soluzioni di un cambiamento piccolo sui valori iniziali.

Il concetto di stabilità è essenzialmente la richiesta che un cambiamento piccolo sulle condizioni iniziali produca solo un piccolo cambiamento sulla soluzione.

Di particolare interesse matematico, e soprattutto fisico, sono gli *stati di equilibrio* di un sistema dinamico.

Definizione 4.3.1 *Data l'equazione differenziale*

$$\dot{x} = f(x) \tag{4.4}$$

con $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, uno stato di equilibrio $\bar{x} \in U$ è una soluzione della 4.4 che non cambia nel tempo; cioè tale che $f(\bar{x}) = 0$.

4.3.1 Stabilità dei sistemi lineari

I sistemi lineari sono l'unica (o quasi) vasta classe di equazioni differenziali per le quali l'insieme delle soluzioni possa essere descritto con grande accuratezza, e, nel caso dei sistemi autonomi, anche rappresentato esplicitamente. Essi hanno grande importanza, sia perchè molti fenomeni fisici possono essere modellizzati da equazioni di questo tipo, sia perchè anche fenomeni non lineari possono, in prima approssimazione, essere descritti da equazioni lineari.

Studiamo ora la stabilità e l'instabilità degli stati di equilibrio per sistemi di equazioni differenziali lineari autonomi del tipo

$$\dot{x} = Ax \tag{4.5}$$

con $A \in GL(\mathbb{R}^n)$.

Enunciamo alcuni teoremi che ci saranno d'aiuto nella classificazione dei punti di equilibrio.

Teorema 4.3.2 *Sia $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ e sia $x(t)$ una soluzione di*

$$\dot{x} = Ax.$$

Allora ogni coordinata $x_j(t)$ è una combinazione lineare delle funzioni:

$$t^k e^{ta} \cos bt, \quad t^l e^{ta} \sin bt$$

dove $a + bi$ sono tutti gli autovalori di A con $b \geq 0$ e k e l scorrono fra tutti gli interi $0, \dots, n - 1$. Inoltre $\forall \lambda = a + ib$, k e l sono minori della dimensione del più grande λ -esimo blocco nella forma canonica di Jordan per A .

Teorema 4.3.3 *Supponiamo che ogni autovalore di $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ abbia parte reale negativa. Allora*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

per ogni soluzione della (4.5).

Dim.

Segue immediatamente dal teorema (4.3.2), considerando le maggiorazioni

$$|\cos bt| \leq 1 \quad e \quad |\sin bt| \leq 1$$

e il fatto che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^k e^{at} = 0$$

per ogni k quando $a < 0$.

■.

Definizione 4.3.4 *Se tutti gli autovalori di $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ hanno parte reale negativa, l'origine $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ è detto Attrattore per*

$$\dot{x} = Ax.$$

In questo caso il flusso lineare e^{tA} è detto Contrazione ed è stabile.

Anche l'inverso del teorema (4.3.3) risulta essere vero:

Teorema 4.3.5 *Se ogni soluzione di (4.5) tende a zero quando $t \rightarrow \infty$, allora ogni autovalore di A ha parte reale negativa.*

Dim.

Supponiamo per assurdo che ci sia un autovalore $\mu = a+ib$ con $a \geq 0$. Utilizzando

la forma canonica di Jordan, con un opportuno cambiamento di coordinate, si arriva ad una soluzione della (4.5) che però non tende a zero quando $t \rightarrow \infty$. Questa contraddizione conclude la dimostrazione.

■.

Teorema 4.3.6 *Se ogni autovalore di $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ ha parte reale positiva, allora*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = \infty$$

per ogni soluzione della (4.5).

Definizione 4.3.7 *Se ogni autovalore di $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ ha parte reale positiva, l'origine $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ è detto Sorgente per*

$$\dot{x} = Ax.$$

In questo caso il flusso lineare e^{tA} è detto Espansione ed è instabile.

Teorema 4.3.8 *Se $A \in GL(\mathbb{R}^n)$, allora le coordinate di ogni soluzione di*

$$\dot{x} = Ax$$

sono infinitamente differenziabili, cioè sono funzioni $C^m \forall m$.

Si può, inoltre, mostrare che: se ogni autovalore di $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ ha parte reale $r < -a < 0$, allora esiste una costante $K > 0$ tale che, se $x(t)$ è una soluzione di (4.5), si ha

$$|x(t)| \leq K^{-at} |x(0)| \quad \forall t \geq 0.$$

Definizione 4.3.9 *Quando tutti gli autovalori di A hanno parte reale diversa da zero, il flusso lineare è detto iperbolico.*

Osserviamo che quasi ogni flusso lineare è iperbolico ed inoltre esiste il seguente teorema il quale afferma che:

Teorema 4.3.10 *Un flusso iperbolico è la somma diretta di una contrazione ed una espansione:*

$$E = E^s \oplus E^i$$

dove la s sta per “stabile” e la i sta per “instabile”. Tale decomposizione è unica.

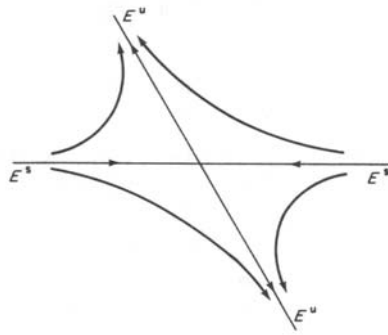


Figura 4.6: Flusso iperbolico, caso bidimensionale.

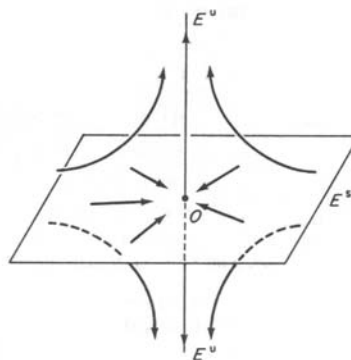


Figura 4.7: Flusso iperbolico, caso tridimensionale.

Un flusso iperbolico, quando $E^s \neq 0$ e $E^i \neq 0$ è rappresentato in figura(4.6) nel caso bidimensionale e in figura (4.7) nel caso tridimensionale. Nel caso in cui gli autovalori di $A|_{E^s}$ hanno parte immaginaria diversa da zero, tutte le traiettorie sono spirali attorno ad E^u , come in figura (4.8).

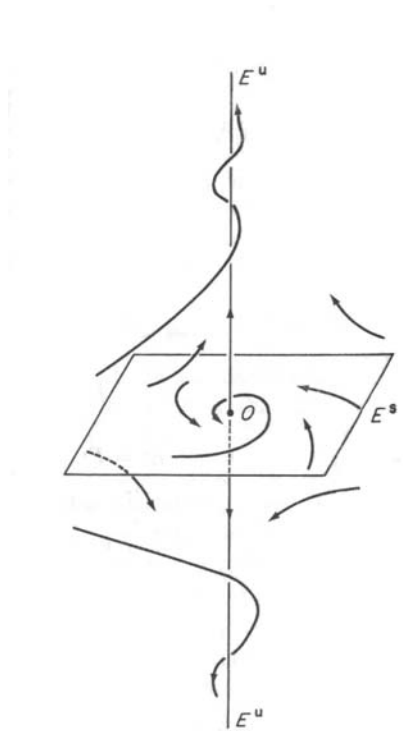


Figura 4.8: Flusso iperbolico con autovalori che hanno parte immaginaria non nulla.

4.3.2 Stabilità dei sistemi NON lineari

Consideriamo ora lo studio della stabilità per equazioni differenziali non lineari. Rimaniamo, comunque, nell'ipotesi che l'equazione differenziale sia autonoma.

Sia

$$\dot{x} = f(x)$$

con $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $f \in C^1$.

Come nel caso lineare, $\bar{x} \in W$ è detto *punto di equilibrio* se $f(\bar{x}) = 0$ e la funzione $x(t) \equiv \bar{x}$ è una soluzione.

Per l'unicità delle soluzioni, nessun'altra curva soluzione passa per \bar{x} .

Supponiamo che f sia un campo vettoriale C^1 con punto di equilibrio $0 \in \mathbb{R}^n$.

Consideriamo $\mathbf{D}f(0) = A$ come un campo vettoriale lineare che approssima f vicino a 0. Se A è non singolare, è detta *parte lineare* di f .

Se tutti gli autovalori di $\mathbf{D}f(\bar{x})$ hanno parte reale negativa, diremo che \bar{x} è un *attrattore*.

Sussiste un teorema che afferma che un attrattore non lineare \bar{x} si comporta *localmente* come un attrattore lineare:

Teorema 4.3.11 *Sia $\bar{x} \in W$ un attrattore dell'equazione*

$$\dot{x} = f(x).$$

Supponiamo che ogni autovalore di $\mathbf{D}f(\bar{x})$ abbia parte reale minore di $-c$ con $c > 0$. Allora c è un intorno $U \subset W$ di \bar{x} tale che:

1. $\phi_t(x)$ è definita e sta in $U \forall x \in U$ e $t > 0$.

2. C'è una norma euclidea su \mathbb{R}^n tale che

$$|\phi_t(x) - \bar{x}| \leq e^{-tc}|x - \bar{x}|$$

$$\forall x \in U \text{ e } t \geq 0.$$

3. Per ogni norma su \mathbb{R}^n , c'è una costante $B > 0$ tale che

$$|\phi_t(x) - \bar{x}| \leq B e^{-tc} |x - \bar{x}|$$

$\forall x \in U$ e $t \geq 0$. In particolare $\phi_t(x) \rightarrow \bar{x}$ quando $t \rightarrow \infty \forall x \in U$.

Dim.

Per convenienza assumiamo $\bar{x} = 0$, se non fosse così, potremmo sempre fare un cambiamento di coordinate $y = x - \bar{x}$ per cui f abbia un equilibrio in 0.

Poniamo $A = \mathbf{D}f(0)$. Scegliamo $b > 0$ tale che le parti reali degli autovalori di A siano minori di $-b < -c$. Esiste un Lemma che mostra che \mathbb{R}^n ha una base \mathcal{B} di cui la corrispondente norma e il prodotto interno soddisfano la seguente relazione:

$$\langle Ax, x \rangle \leq -b|x|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Poichè $A = \mathbf{D}f(0)$ e $f(0) = 0$, per la definizione di derivata,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - Ax|}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - f(0) - \mathbf{D}f(0)x|}{|x|} = 0.$$

Inoltre utilizzando la disuguaglianza di Cauchy:

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x| \cdot |y|$$

si ha che

$$|\langle f(x) - Ax, x \rangle| \leq |f(x) - Ax| \cdot |x|$$

e quindi

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\langle f(x) - Ax, x \rangle}{|x|^2} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - Ax|}{|x|} = 0$$

dunque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\langle f(x) - Ax, x \rangle}{|x|^2} = 0$$

Per la definizione di limite, $\exists \delta > 0$ piccolo tale che se $|x| \leq \delta$ allora

$$\frac{\langle f(x) - Ax, x \rangle}{|x|^2} < \varepsilon$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{\langle f(x), x \rangle}{|x|^2} - \frac{\langle Ax, x \rangle}{|x|^2} &< \varepsilon \\ \frac{\langle f(x), x \rangle}{|x|^2} &< \frac{\langle Ax, x \rangle}{|x|^2} + \varepsilon \leq \varepsilon - \frac{b|x|^2}{|x|^2} = \varepsilon - b \end{aligned}$$

Quindi scegliendo $\varepsilon = -c - (-b)$ che è positivo in quanto $-b < -c$, si ha

$$\langle f(x), x \rangle \leq -c|x|^2.$$

Ponendo $U = \{x \in \mathbb{R}^n / |x| \leq \delta\}$ e prendendo $x(t)$, $0 \leq t \leq t_0$, soluzione in U con $x(t) \neq 0$, allora

$$\frac{d}{dt}|x| = \frac{1}{|x|} \langle \dot{x}, x \rangle$$

in quanto

$$\frac{1}{|x|} \langle \dot{x}, x \rangle = \langle \dot{x}, \frac{x}{|x|} \rangle = \langle \dot{x}, \text{sgn}(x) \rangle = \text{sgn}(x) \cdot \dot{x} = \frac{d|x|}{dt}.$$

Inoltre essendo $\dot{x} = f(x)$ si ha

$$\frac{d|x|}{dt} = \frac{1}{|x|} \langle \dot{x}, x \rangle = \frac{1}{|x|} \langle f(x), x \rangle \leq \frac{-c|x|^2}{|x|} = -c|x|.$$

Questo mostra che $|x(t)|$ decresce e inoltre

$$|x(t)| \in U \quad \forall t \in [0, t_0].$$

Poichè U è compatto, per la proposizione (4.2.6), si ha che la traiettoria $x(t)$ è definita e sta in U per tutto l'intervallo $t \in [0, +\infty)$. Secondariamente, dalla disuguaglianza:

$$\frac{d}{dt}|x| \leq -c|x|$$

si ottiene che

$$|x(t)| \leq e^{-tc}|x(0)| \quad \forall t \geq 0$$

in quanto da :

$$\frac{d}{dt}|x| \leq -c|x|$$

segue che

$$\frac{1}{|x|} \frac{d}{dt}|x| \leq -c$$

cioè:

$$\frac{d}{dt} \ln |x| \leq -c.$$

Quindi, integrando e con altri semplici passaggi, si ha:

$$|x(t)| \leq e^{-tc}|x(0)|.$$

Abbiamo così dimostrato i punti (1) e (2). Il punto (3) segue dalla definizione di equivalenza fra due norme.

■.

Anche l'instabilità si può trasferire dal sistema linearizzato a quello originale, sussiste infatti la seguente proposizione:

Proposizione 4.3.12 *Se esiste un autovalore di $A = \mathbf{D}f(\bar{x})$ con parte reale positiva, allora \bar{x} è un punto instabile per il sistema.*

Un esempio fisico di attrattore non lineare è dato dal pendolo che si muove su un piano verticale.

Diamo ora delle definizioni più rigorose di *Stabilità*, *Stabilità asintotica* ed *Instabilità*.

Definizione 4.3.13 Sia $\bar{x} \in W$ un equilibrio dell'equazione differenziale

$$\dot{x} = f(x)$$

dove $f : W \rightarrow E$ è un'applicazione C^1 da un aperto $W \subset E$ in uno spazio vettoriale E .

\bar{x} è un equilibrio stabile se per ogni intorno U di \bar{x} in W c'è un intorno U_1 di \bar{x} con $U_1 \subset U$ tale che ogni soluzione $x(t)$ con $x(0)$ in U_1 sia definita e rimanga in U per ogni $t > 0$

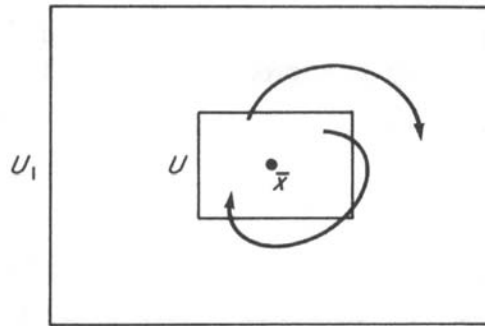


Figura 4.9: Equilibrio stabile.

Definizione 4.3.14 Se U_1 può essere scelto tale che, oltre alla proprietà descritta nella definizione (4.3.13), sia

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x},$$

allora \bar{x} è asintoticamente stabile.

Definizione 4.3.15 Un equilibrio \bar{x} che non è stabile è detto instabile. Questo significa che c'è un intorno di \bar{x} , U , tale che per ogni intorno U_1 di \bar{x} in U , c'è almeno una soluzione $x(t)$ che parte in $x(0) \in U_1$ e non giace interamente in U .

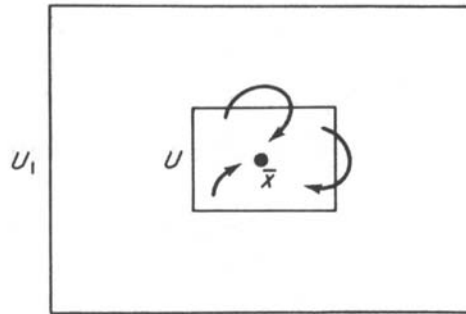


Figura 4.10: Equilibrio asintoticamente stabile.

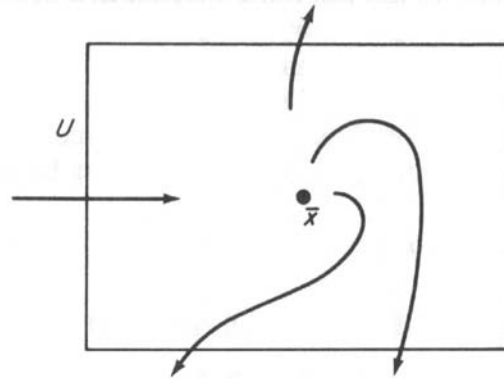


Figura 4.11: Equilibrio instabile.

Osservazione 4.3.16 *Un attrattore è asintoticamente stabile.*

Un esempio di equilibrio stabile, ma non asintoticamente stabile è l'origine in \mathbb{R}^2 per l'equazione lineare $\dot{x} = Ax$ quando A ha autovalori puramente immaginari. Le orbite sono delle ellissi come in figura (4.12).

Teorema 4.3.17 *Sia $W \subset E$ un aperto; $f : W \rightarrow E$ continuamente differenziabile. Se $f(\bar{x}) = 0$ e \bar{x} è un punto di equilibrio stabile dell'equazione*

$$\dot{x} = f(x).$$

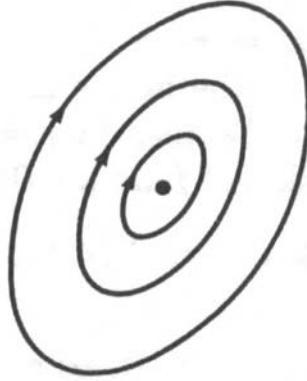


Figura 4.12: Equilibrio stabile, ma non asintoticamente stabile.

Allora nessun autovalore di $\mathbf{D}f(\bar{x})$ ha parte reale positiva.

Definizione 4.3.18 *Un punto di equilibrio \bar{x} è iperbolico se la derivata $\mathbf{D}f(\bar{x})$ non ha autovalori con parte reale zero.*

Corollario 4.3.19 *Un punto di equilibrio iperbolico è o instabile o asintoticamente stabile.*

4.4 Funzioni di Liapunov

Abbiamo finora definito la stabilità e l'asintotica stabilità di un punto d'equilibrio \bar{x} di un sistema dinamico

$$\dot{x} = f(x) \tag{4.6}$$

dove $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un'applicazione C^1 su un insieme aperto $W \subset \mathbb{R}^n$.

Se \bar{x} è un *attrattore*, la sua stabilità può essere studiata esaminando gli autovalori della parte lineare $Df(\bar{x})$. Oltre a ciò, comunque, non abbiamo visto ancora nessun altro metodo per determinare la stabilità a meno che non si riescano a trovare tutte le soluzioni della (4.6), il che è spesso molto difficile, se non impossibile.

Il matematico e ingegnere russo A.M. Liapunov nel 1892 trovò un criterio molto utile per la stabilità. Esso consiste in una generalizzazione dell'idea che afferma che per un attrattore c'è una norma su \mathbb{R}^n tale che $|x(t) - \bar{x}|$ decresce per $x(t)$ soluzione vicina a \bar{x} . Liapunov mostrò che possono essere usate altre funzioni, invece della norma, per garantire la stabilità.

Sia

$$V : U \rightarrow \mathbb{R}$$

una funzione differenziabile definita in un intorno $U \subset W$ di \bar{x} . Denotiamo con $\dot{V} : U \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$\dot{V}(x) = DV(x)(f(x))$$

dove il secondo membro è semplicemente l'operatore $DV(x)$ applicato al vettore $f(x)$. Allora se $\phi_t(x)$ è la soluzione della 4.6 passante per x nell'istante $t = 0$, per

la regola della catena si ha:

$$\dot{V}(x) = \left. \frac{d}{dt} V(\phi_t(x)) \right|_{t=0}.$$

Di conseguenza, se $\dot{V}(x)$ è negativo, allora V decresce lungo la soluzione della 4.6 passante per x .

Possiamo ora enunciare il teorema della stabilità di Liapunov:

Teorema 4.4.1 *Sia $\bar{x} \in V$ un equilibrio per la 4.6. Sia $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua definita su un intorno $U \subset W$ di x , differenziabile su $U - \bar{x}$, tale che*

1. $V(\bar{x}) = 0$ e $V(x) > 0$ se $x \neq \bar{x}$;

2. $\dot{V} \leq 0$ in $U - \bar{x}$.

Allora \bar{x} è stabile. Inoltre se vale anche che:

3. $\dot{V} < 0$ in $U - \bar{x}$

allora \bar{x} è asintoticamente stabile.

Una funzione V che soddisfa la (1) e la (2) è chiamata *funzione di Liapunov* per \bar{x} . Se V soddisfa anche la (3), essa viene detta *funzione di Liapunov stretta*. In ogni caso \bar{x} deve essere un equilibrio isolato.

Dim

Sia $\delta > 0$ piccolo tale che l'intorno sferico chiuso $B_\delta(\bar{x})$ di centro \bar{x} e raggio δ giace interamente in U . Sia α il minimo valore di V sul bordo di $B_\delta(\bar{x})$. Allora per la (1) si ha che $\alpha > 0$. Sia $U_1 = \{x \in B_\delta(\bar{x}) | V(x) < \alpha\}$. Allora nessuna soluzione con punto iniziale in U_1 può incontrare il bordo di $B_\delta(\bar{x})$ poichè V è non crescente sulle curve soluzione. Quindi ogni curva che parte in U_1 non uscirà

mai da $B_\delta(\bar{x})$. Questo prova che \bar{x} è stabile.

Ora assumiamo che valga anche la (3), così che V è strettamente decrescente sulle orbite in $U - \bar{x}$. Sia $x(t)$ una soluzione con condizione iniziale in $U_1 - \bar{x}$ e supponiamo che $x(t_n) \rightarrow z_0 \in B_\delta(\bar{x})$ per qualche successione $t_n \rightarrow \infty$. Una successione di questo tipo esiste per la compattezza di $B_\delta(\bar{x})$. Affermiamo che $z_0 = \bar{x}$ e per vedere ciò, osserviamo che $V(x(t)) > V(z_0)$ per ogni $t \geq 0$ poichè $V(x(t))$ decresce e $V(x(t_n)) \rightarrow V(z_0)$ per la continuità di V . Supponiamo ora per assurdo che $z_0 \neq \bar{x}$; sia $z(t)$ la soluzione con punto iniziale z_0 . Per ogni $s > 0$, si avrebbe $V(z(s)) < V(z_0)$. Quindi per ogni soluzione $y(s)$ con condizione iniziale sufficientemente vicina a z_0 si ha

$$V(y(s)) < V(z_0);$$

ponendo $y(0) = x(t_n)$ per un valore sufficientemente grande di n si giunge alla contraddizione

$$V(x(t_n + s)) < V(z_0).$$

Perciò $z_0 = \bar{x}$. Questo prova che \bar{x} è il solo punto limite possibile dell'insieme $\{x(t) | t \geq 0\}$.

■.

Osserviamo che il teorema di Liapunov può essere applicato senza risolvere l'equazione differenziale. D'altra parte, però, non c'è un metodo definitivo per trovare le funzioni di Liapunov; il problema va risolto sempre per tentativi con ingegnosità. Qualche volta ci sono funzioni naturali da provare; nei sistemi elettrici o meccanici, ad esempio, l'energia è spesso una funzione di Liapunov.

Esempio 4.4.2 Si consideri il sistema dinamico su \mathbb{R}^3 descritto dal sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(z-1) \\ \dot{y} = -x(z-1) \\ \dot{z} = -z^3 \end{cases} .$$

L'asse z ($= \{(x, y, z) \mid x = y = 0\}$) è interamente un asse di punti di equilibrio. Studiamo ora la stabilità dell'origine. La parte lineare del sistema in $(0, 0, 0)$ è la matrice:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Gli autovalori corrispondenti sono due immaginari ed uno nullo e da questo si può concludere che l'origine non è un attrattore.

Cerchiamo ora una funzione di Liapunov per $(0, 0, 0)$ della forma

$$V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2,$$

con $a, b, c > 0$. Per una tale V si ha:

$$\dot{V} = 2(ax\dot{x} + by\dot{y} + cz\dot{z});$$

così

$$\frac{1}{2}\dot{V} = 2axy(z-1) - bxy(z-1) - cz^4.$$

Noi vogliamo che sia $\dot{V} \leq 0$; ciò accade se poniamo $c = 1$ e $2a = b$. Concludiamo che $x^2 + 2y^2 + z^2$ è una funzione di Liapunov, perciò l'origine è un equilibrio stabile. Inoltre essa è asintoticamente stabile in quanto la nostra funzione di Liapunov è stretta.

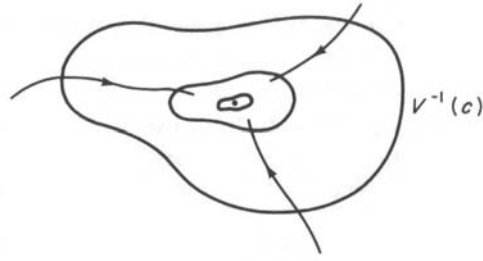


Figura 4.13: Curve di livello di una funzione di Liapunov

La figura 4.13 mostra intuitivamente il significato del teorema. La condizione $\dot{V} \leq 0$ significa che quando una traiettoria incontra una superficie di livello $V^{-1}(c)$, essa entrerà nell'insieme in cui $V \leq c$ e rimarrà sempre nel suo interno.

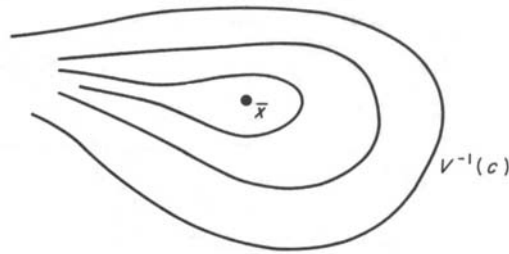


Figura 4.14: Curve di livello di una funzione di Liapunov

Sfortunatamente non sempre il diagramma in figura 4.13 è valido, se ne potrebbe avere uno, ad esempio, come quello rappresentato nella figura 4.14 e diventa difficile verificare che una funzione V soddisfi le caratteristiche di una funzione di Liapunov.

Le funzioni di Liapunov non sono solo utili per determinare gli equilibri stabili, esse possono essere utilizzate anche per stimare l'estensione del bacino d'attrazione di un equilibrio asintoticamente stabile, come mostra il teorema 4.4.6.

Prima di enunciare il teorema diamo delle definizioni:

Definizione 4.4.3 Se un punto di equilibrio \bar{x} è asintoticamente stabile, si chiama bacino d'attrazione di \bar{x} , l'insieme dei punti $x \in \Omega$ (condizioni iniziali) tali che $\phi_t(x) \rightarrow \bar{x}$ per $t \rightarrow \infty$.

Definizione 4.4.4 Un insieme P è positivamente invariante per un sistema dinamico se per ogni $x \in P$, $\phi_t(x)$ è definito ed è in P per ogni $t \geq 0$ (dove ϕ è il flusso del sistema).

Definizione 4.4.5 Un'orbita intera del sistema è un insieme della forma $\{\phi_t(x) | t \in \mathbb{R}\}$ dove $\phi_t(x)$ è definito per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.4.6 Sia $\bar{x} \in W$ un equilibrio del sistema dinamico 4.6 e sia $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di Liapunov per \bar{x} , con U , intorno di \bar{x} . Sia $P \subset U$ un intorno di \bar{x} chiuso in W . Supponiamo che P sia positivamente invariante e che non ci sia nessun'orbita intera in $P - \bar{x}$ sulla quale V sia costante. Allora \bar{x} è asintoticamente stabile e $P \subset B(\bar{x})$.

Dim

Si consideri una traiettoria $x(t)$, $0 \leq t < \infty$, nell'insieme positivamente invariante P . Supponiamo che $x(t)$ non tenda a \bar{x} quando $t \rightarrow \infty$. Allora ci deve essere un punto $a \neq \bar{x}$ in P e una successione $t_n \rightarrow \infty$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) = a.$$

Sia $\alpha := V(a)$, allora α è il limite inferiore di $\{V(x(t)) : t \geq 0\}$; questo segue dalla continuità di V e dal fatto che V decresce lungo le traiettorie.

Sia L l'insieme:

$$L = \{a \in W : \exists t_n \rightarrow \infty \text{ con } x(t_n) \rightarrow a\},$$

dove $x(t)$ è la traiettoria considerata prima. Poichè ogni punto di L è un limite di punti appartenenti a P e P è un insieme chiuso, segue che $L \subset P$. Inoltre, se $a \in L$, allora l'orbita intera di a è in L , cioè $\phi_t(a)$ è definito e sta in L per ogni $t \in \mathbb{R}$.

$\phi_t(a)$ è definito per ogni $t \geq 0$ poichè P è positivamente invariante. D'altra parte, ogni punto $\phi_t(x(t_n))$ è definito per ogni t nell'intervallo $[-t_n, 0]$; poichè $x(t_n) \rightarrow a$ e possiamo assumere che $t_1 < t_2 < \dots$, segue che $\phi_t(a)$ è definito per ogni $t \in [-t_n, 0]$, $n = 1, 2, \dots$. Poichè $-t_n \rightarrow -\infty$, $\phi_t(a)$ è definito per ogni $t \leq 0$. Per vedere che $\phi_s(a) \in L$ per ogni $s \in \mathbb{R}$, notiamo che se $x(t_n) \rightarrow a$, allora $x(t_n + s) \rightarrow \phi_s(a)$.

Giungiamo così ad una contraddizione per $V(a) = \alpha$, per ogni $a \in L$, in quanto V sarebbe costante su un'orbita intera in P e questo contraddice le ipotesi. Quindi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$$

per tutte le traiettorie in P . Questo prova che \bar{x} è asintoticamente stabile e anche che $P \subset B(\bar{x})$.

■.

Applichiamo ora questo teorema al punto di equilibrio $\bar{x} = (0, 0)$ del pendolo, governato dalle equazioni:

$$\begin{cases} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\frac{1}{l} \sin \theta - \frac{k}{m} \omega \end{cases} \quad (4.7)$$

Vediamo se l'energia totale, E , può essere una funzione di Liapunov.

$$E = \text{energia cinetica} + \text{energia potenziale}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}mv^2 + ml(1 - \cos \theta) \\
 &= \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + ml(1 - \cos \theta) \\
 &= \frac{1}{2}ml^2\omega^2 + ml(1 - \cos \theta) \\
 &= ml\left(\frac{1}{2}l\omega^2 + 1 - \cos \theta\right).
 \end{aligned}$$

E dunque

$$\dot{E} = ml(l\dot{\omega} + \dot{\theta} \sin \theta).$$

Dal sistema 4.7 si ottiene

$$\dot{E} = -kl^2\omega^2.$$

Dunque $\dot{E} \leq 0$ e $E(0, 0) = 0$ ci permettono di affermare che E è una funzione di Liapunov. Per stimare il bacino d'attrazione di $(0, 0)$, fissiamo un numero c , $0 < c < 2ml$ e definiamo:

$$P_c = \{(\theta, \omega) / E(\theta, \omega) \leq c \text{ e } |\theta| < \pi\}.$$

Chiaramente $(0, 0) \in P_c$. Proviamo ora che $P_c \subset B(0, 0)$.

P_c è positivamente invariante. Per dimostrare ciò, supponiamo che

$$(\theta(t), \omega(t)), \quad 0 \leq t \leq \alpha, \quad \alpha > 0$$

sia una traiettoria con $(\theta(0), \omega(0)) \in P_c$. Osserviamo che $E(\theta(\alpha), \omega(\alpha)) \leq c$ poichè $\dot{E} \leq 0$ e dunque $(\theta(\alpha), \omega(\alpha)) \in P_c$.

Se $|\theta(\alpha)|$ fosse maggiore o uguale a π , ci dovrebbe essere un piccolissimo $t_0 \in [0, \alpha]$ tale che $\theta(t_0) = \pm\pi$. Allora

$$\begin{aligned}
 E(\theta(t_0), \omega(t_0)) &= E(\pm\pi, \omega(t_0)) \\
 &= ml \left[\frac{1}{2}l\omega(t_0)^2 + 2 \right] \geq 2ml.
 \end{aligned}$$

Ma $E(\theta(t_0), \omega(t_0)) \leq c < 2ml$. Questa contraddizione mostra che deve essere $\theta(\alpha) < \pi$ e quindi P_c è positivamente invariante.

Affermiamo ora che P_c soddisfa la seconda condizione del teorema 4.4.6. Supponiamo che E sia costante su una traiettoria. Allora lungo quella traiettoria, $\dot{E} = 0$ e $\omega = 0$; da cui $\dot{\theta} = 0$ e quindi θ costante sull'orbita e analogamente $\sin(\theta) = 0$. Poichè $|\theta| < \pi$, segue che $\theta = 0$. Allora la sola orbita intera in P_c su cui E è costante è l'equilibrio $(0, 0)$.

Infine, verifichiamo che P_c è un insieme chiuso. Se (θ_0, ω_0) è un punto limite di P_c , allora $|\theta_0| \leq \pi$ e $E(\theta_0, \omega_0) \leq c$ per la continuità di E . Ma $|\theta_0| = \pi$ implica $E(\theta_0, \omega_0) > c$. Quindi $|\theta_0| < \pi$ e $(\theta_0, \omega_0) \in P_c$.

Dal teorema 4.4.6 possiamo dunque concludere che ogni $P_c \subset B(0, 0)$; quindi l'insieme

$$P = \bigcup \{P_c / 0 < c < 2ml\}$$

è contenuto in $B(0, 0)$. E notiamo che

$$P = \{(\theta, \omega) / E(\theta, \omega) < 2ml \text{ e } |\theta| < \pi\}.$$

Questo risultato è abbastanza naturale in campo fisico. Sia $2ml$ l'energia totale dello stato $(\pi, 0)$ in cui la pallina del pendolo è in equilibrio sopra il perno a cui è fissato. Se il pendolo non è esattamente dritto e l'energia totale è minore di quella nello stato di bilanciamento superiore, allora il pendolo si avvicinerà gradualmente allo stato $(0, 0)$.

Ci sono anche altri stati nel bacino di $(0, 0)$ che non appartengono a P . Consideriamo lo stato (π, u) con u molto piccolo ma non zero. Allora $(\pi, u) \notin P$, ma il pendolo si sposterà immediatamente in uno stato in P e si avvicinerà a $(0, 0)$. Quindi $(\pi, u) \in B(0, 0)$.

4.5 Classificazione dei punti di equilibrio

Abbiamo visto che lo studio di un sistema non lineare, si riconduce, attraverso l'approssimazione di $f(x)$ mediante $\mathbf{D}f(x)$, ad un sistema lineare.

Studiamo ora più da vicino, la stabilità dell'origine per sistemi lineari autonomi. Se il bacino d'attrazione coincide con Ω , il punto \bar{x} è detto *globalmente asintoticamente stabile* in Ω .

Teorema 4.5.1 *Valgono le seguenti affermazioni:*

1. *L'origine è punto di equilibrio asintoticamente stabile se e solo se*

$$\Re(\lambda_j) < 0 \quad \forall j = 1, \dots, k.$$

La stabilità è globale in \mathbb{R}^n .

2. *L'origine è stabile, ma non asintoticamente, (stabilità neutra), se e solo se $\Re(\lambda_j) \leq 0$ e tutti gli autovalori con parte reale nulla sono regolari (molteplicità algebrica=molteplicità geometrica).*

3. *L'origine è instabile negli altri casi.*

Dim. (1)

Ogni soluzione di

$$\dot{y} = Ay$$

è del tipo:

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{m_j} c^{ij} t^{i-1} e^{\lambda_j t}$$

dove r è il numero di autovalori distinti, m_j è la molteplicità algebrica di λ_j e c^{ij} sono opportuni vettori (contenenti, in tutto, n costanti arbitrarie) detti

autovettori generalizzati.

Dunque ogni soluzione φ è somma di addendi del tipo:

$$ct^h e^{\lambda_j t} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}^n.$$

Se $\Re(\lambda_j) < 0 \forall \lambda_j$ allora

$$\varphi(t) \longrightarrow 0 \quad \text{per } t \longrightarrow \infty$$

e perciò 0 è asintoticamente stabile con bacino d'attrazione coincidente proprio con \mathbb{R}^n .

Viceversa, se 0 è asintoticamente stabile, allora non possono esistere autovalori con parte reale non negativa, altrimenti ci sarebbero delle soluzioni non convergenti a zero per $t \longrightarrow \infty$.

■.

Dim. (2)

Se $\Re(\lambda_j) \leq 0$ e i λ_j , con $\Re(\lambda_j) = 0$, sono regolari, allora gli addendi nella soluzione sono della forma:

$$ct^h e^{\lambda_j t} \quad \text{se } \Re(\lambda_j) < 0 \quad h \geq 0$$

oppure

$$ce^{i\Im(\lambda_j)t} \quad \text{se } \Re(\lambda_j) = 0.$$

I primi tendono a 0 per $t \longrightarrow \infty$, i secondi sono neutralmente stabili avendo autovalori immaginari puri (vedi esempio pag. 121).

Viceversa se 0 è stabile neutralmente, allora gli addendi possono essere soltanto del tipo indicato sopra e quindi valgono le condizioni sugli autovalori.

■.

Dim. (3)

Se esistono autovalori con parte reale positiva oppure immaginari puri e non regolari allora esistono soluzioni del tipo:

$$\varphi(t) = ce^{\lambda_j t} \text{ o } \varphi(t) = (c + c_1 t + \dots + c_{k_j-1} t^{k_j-1}) e^{i\Im(\lambda_j)t}$$

la cui norma diverge per t tendente all'infinito.

Si noti che $\varphi(0) = c$ e la funzione $\alpha\varphi$ è ancora soluzione con $\varphi(0) = \alpha c$. Dunque, scegliendo opportunamente $\alpha \neq 0$, la soluzione parte da un punto vicino all'origine quanto si vuole, mentre $\|\alpha\varphi(t)\| \rightarrow \infty$. Ciò significa instabilità per 0.

Se 0 è instabile, viceversa, le condizioni sugli autovalori date dai punti (1) e (2), non possono valere.

■.

Restringiamoci adesso al caso bidimensionale e facciamo un'analisi accurata e completa per classificare tutti i possibili comportamenti delle traiettorie vicino allo zero.

Prendiamo un sistema omogeneo autonomo:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

con a, b, c, d , parametri reali. Supponiamo che $|A| = \det(A) \neq 0$ in modo che l'origine sia l'unico stato di equilibrio del sistema.

Siano λ_1 e λ_2 gli autovalori di A . Distinguiamo i casi:

1. Due autovalori (λ_1, λ_2) reali e distinti.
2. Due autovalori reali coincidenti.

3. Due autovalori complessi coniugati.

Analizziamo singolarmente questi tre casi:

Autovalori reali e distinti

Il sistema possiede le due soluzioni linearmente indipendenti:

$$h^1 e^{\lambda_1 t} \quad h^2 e^{\lambda_2 t}$$

dove h_1 e h_2 sono gli autovettori associati a λ_1 e a λ_2 . Ogni soluzione sarà della forma

$$\varphi(t) = c_1 h_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 h_2 e^{\lambda_2 t}$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Distinguiamo ora alcuni sottocasi in corrispondenza del segno degli autovalori.

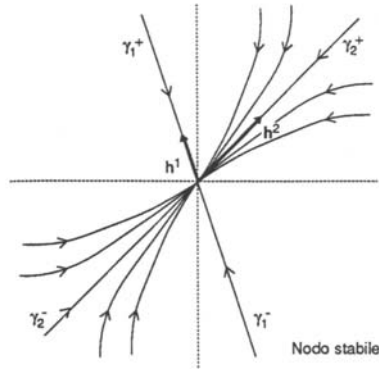


Figura 4.15: Nodo stabile o attrattore.

1. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. L'origine è globalmente asintoticamente stabile.

Per $c_2 = 0$ si hanno due traiettorie rettilinee γ_1^\pm .

Per $c_1 = 0$ si hanno due traiettorie rettilinee γ_2^\pm .

Essendo $\lambda_2 > \lambda_1$, per $t \rightarrow \infty$ il termine $c_1 h_1 e^{\lambda_1 t}$ è infinitesimo di ordine superiore all'altro, così tutte le traiettorie (tranne γ_1^\pm) sono asintotiche a γ_2^\pm .

Il punto di equilibrio prende il nome di *Nodo stabile o attrattore* ed è rappresentato in figura (4.15).

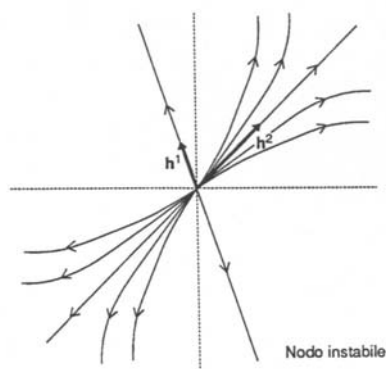


Figura 4.16: Nodo instabile.

2. $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$. È analogo al caso precedente, ma partendo da un punto, quanto si vuole vicino all'origine, la soluzione si allontana indefinitamente da essa.

Il punto di equilibrio è detto *Nodo instabile* ed è rappresentato in figura (4.16).

3. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. L'origine è instabile.

Per $c_2 = 0$ si hanno le traiettorie γ_1^\pm lungo le quali il punto mobile si avvicina indefinitamente all'origine (essendo $\lambda_1 < 0$).

Per $c_1 = 0$ si hanno le traiettorie γ_2^\pm lungo le quali ci si allontana indefinitamente dall'origine ($\lambda_2 > 0$).

Ogni altra traiettoria risulta asintotica ad una del tipo γ_1 per $t \rightarrow -\infty$ e ad una del tipo γ_2 per $t \rightarrow +\infty$.

L'origine è detta, in questo caso, *colle o sella* ed è rappresentata in figura (4.17).

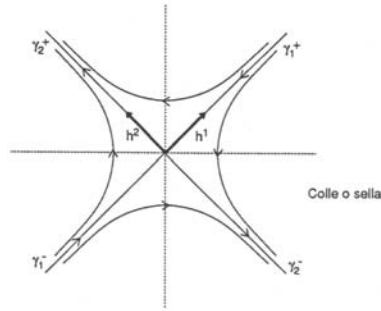


Figura 4.17: Colle o sella.

Autovalori reali e coincidenti

Sia λ l'autovalore doppio della matrice A . La soluzione generale del sistem è della forma:

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

dove c_1 e c_2 sono due opportuni vettori, dipendenti da due sole costanti arbitrarie.

Se $\lambda > 0$, tutte le traiettorie si allontanano definitamente dall'origine.

Se $\lambda < 0$, l'origine è globalmente asintoticamente stabile: tutte le soluzioni convergono verso l'origine e sono asintotiche alle traiettorie rettilinee di equazione

$$\varphi(t) = c_2 t e^{\lambda t}$$

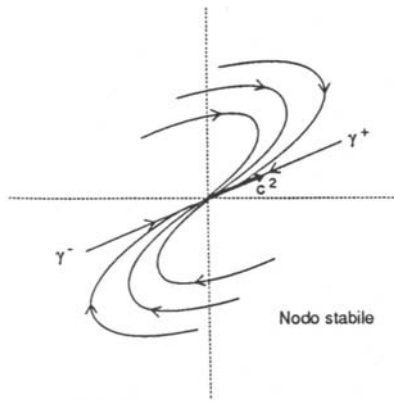


Figura 4.18: Nodo.

indicate in figura da γ^+ e γ^- .

Se A è diagonale ($a = d$) la soluzione generale è:

$$\varphi(t) = ce^{\lambda t}$$

e le traiettorie sono allora tutte rettilinee.

Il punto 0 si chiama ancora *nodo* ed è rappresentato nelle figure (4.18 e 4.19)

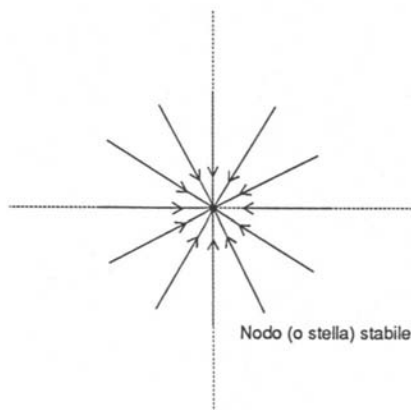


Figura 4.19: Nodo.

Autovalori complessi coniugati

Siano $\lambda = \alpha + i\beta$ e $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ gli autovalori di A . Gli autovettori corrispondenti possono essere scelti in modo che risultino coniugati anch'essi; abbiamo così la coppia di soluzioni (linearmente indipendenti):

$$he^{\alpha t + i\beta t} \quad \bar{h}e^{\alpha t - i\beta t}.$$

Ponendo $h = 1/2(h_1 + ih_2)$ con h_1 e h_2 , vettori reali, le due soluzioni diventano:

$$\varphi_1(t) = e^{\alpha t}(h_1 \cos \beta t - h_2 \sin \beta t)$$

$$\varphi_2(t) = e^{\alpha t}(h_1 \sin \beta t - h_2 \cos \beta t)$$

La soluzione generale è rappresentata, dunque, da:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) \\ &= e^{\alpha t}[(c_1h_1 + c_2h_2) \cos \beta t + (c_2h_1 - c_1h_2) \sin \beta t] \end{aligned}$$

Distinguiamo tre casi al variare di α :

1. Sia $\alpha = 0$ (autovalori immaginari puri). L'origine è stabile neutralmente. Le traiettorie sono delle ellissi. Si ha un'infinità di orbite periodiche; l'origine è detto *centro* ed è rappresentato in figura (4.20).
2. Sia $\alpha < 0$. L'origine è globalmente asintoticamente stabile. Tutte le traiettorie si avvicinano indefinitamente all'origine, con andamento a spirale. L'origine è detto *fuoco stabile* ed è rappresentato in figura (4.21).
3. Sia $\alpha > 0$. L'andamento è come quello precedente solo che il punto mobile si allontana indefinitamente dall'origine. L'origine è detto *fuoco instabile*.

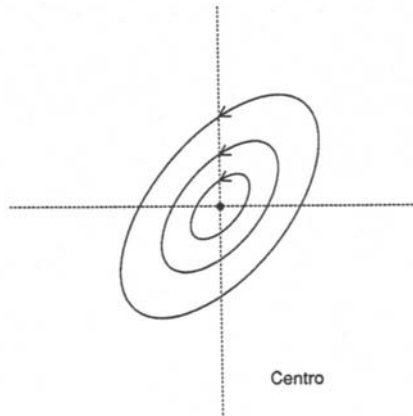


Figura 4.20: Centro.

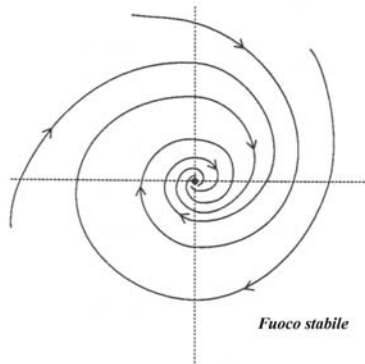


Figura 4.21: Fuoco stabile.

Osservazione 4.5.2 *Il segno della parte reale di un autovalore, λ_i , indica il carattere attrattivo, se $\Re(\lambda_i) < 0$, oppure repulsivo, se $\Re(\lambda_i) > 0$, del punto di equilibrio rispetto alla direzione dell'autovettore associato a λ_i .*

Il segno dell'eventuale parte immaginaria è rappresentativo del verso di rotazione del flusso nell'intorno del punto di equilibrio.

Possiamo riassumere tutti questi risultati nel seguente quadro relativo alla natura dell'origine. Poniamo

$$\Delta := (\operatorname{tr}(A))^2 - 4|A|.$$

- Caso $\Delta > 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} |A| > 0 \quad \text{nodo} \\ |A| < 0 \quad \text{colle} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tr}(A) < 0 \quad \text{asintoticamente stabile} \\ \operatorname{tr}(A) > 0 \quad \text{instabile} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{instabile} \end{array} \right.$$

- Caso $\Delta = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} b^2 + c^2 \neq 0 \quad \text{nodo} \\ b = c = 0 \quad \text{nodo a stella} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tr}(A) < 0 \quad \text{asintoticamente stabile} \\ \operatorname{tr}(A) > 0 \quad \text{instabile} \end{array} \right.$$

- Caso $\Delta < 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tr}(A) = 0 \quad \text{centro} \\ \operatorname{tr}(A) \neq 0 \quad \text{fuoco} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{stabile (neutralmente)} \\ \operatorname{tr}(A) < 0 \quad \text{asintoticamente stabile} \\ \operatorname{tr}(A) > 0 \quad \text{instabile} \end{array} \right.$$

Capitolo 5

Sistemi dinamici e Matlab

Lo studio dei sistemi dinamici è oggi facilitato dallo sviluppo dei *metodi numerici* e dall'uso dei calcolatori che ci permettono di visualizzare le soluzioni e di ricavare così delle informazioni utili sul sistema.

In questo capitolo analizzeremo in dettaglio lo studio di alcuni tra i più famosi sistemi dinamici, servendoci di Matlab. In particolare, utilizzeremo un programma, *Pplane5*, prodotto dal professore John Polking della Rice University, disponibile in rete sul sito: <http://math.rice.edu/~dfield>. Esso, come già il nome lascia intendere, ci permetterà di studiare il piano delle fasi del sistema dinamico.

5.1 Matlab e Pplane5

Matlab è un programma interattivo che ci aiuta nel calcolo e nella visualizzazione di dati. Fondamentalmente esso è nato per gestire sofisticati calcoli matriciali necessari per studiare sistemi di equazioni. Molti problemi in matematica applicata alla fisica, alla chimica, all'ingegneria e all'economia, possono essere risolti con

più facilità grazie a tale potente strumento; la maggior parte di queste applicazioni, infatti, richiede l'elaborazione di calcoli lunghi e complessi.

Pplane5 è uno strumento interattivo di Matlab, nato per studiare sistemi di equazioni differenziali autonomi bidimensionali.

Eseguendo Pplane5, cioè digitando “pplane5” nel *workspace* di Matlab, viene aperta una finestra grafica nella quale l'utente può inserire l'equazione differenziale, o scegliere uno dei sistemi già memorizzati. È consentito inoltre l'uso di alcuni parametri.

Una volta assegnato il sistema e i suoi parametri, si può procedere selezionando con il mouse il tasto “proceed”. A questo punto comparirà un'altra finestra grafica, nella quale, scegliendo un punto mediante il mouse, si otterrà sul piano delle fasi la traiettoria del sistema, a partire da quella condizione iniziale.

Pplane5 ci consente anche di ricercare i punti di equilibrio del sistema e di classificarli mediante l'approssimazione lineare e il calcolo degli autovalori, come è stato illustrato nel paragrafo (4.5).

Di seguito presenteremo lo studio di un particolare sistema dinamico: modello preda-predatore, supportato da immagini ottenute appunto con Pplane5.

5.2 Modello preda-predatore di Lotka-Volterra

Il modello in questione studia il comportamento di due popolazioni (ad esempio microrganismi, insetti o mammiferi) che convivono nello stesso territorio e che interagiscono tra loro in modo che la crescita del numero di componenti di ciascuna dipenda, oltre che dalla popolazione stessa, anche dall'altra. In questo caso le popolazioni interagenti, sono rappresentate da prede e predatori; lo studio di questo fenomeno, può essere sintetizzato dal seguente sistema di equazioni differenziali del I° ordine:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = rN_1 \left(1 - \frac{N_1}{k}\right) - \alpha N_1 N_2 \\ \dot{N}_2 = -cN_2 + \beta N_1 N_2 \end{cases} \quad (5.1)$$

dove:

- N_1 indica la popolazione delle prede.
- N_2 indica la popolazione dei predatori.
- α indica l'efficacia della ricerca da parte dei predatori nello scovare le prede.
- β indica il tasso di accrescimento dei predatori per preda mangiata.
- r indica il tasso di natalità (accrescimento) delle prede.
- c indica il tasso di mortalità dei predatori.
- k indica il fattore di ripopolamento della specie (non legato a cause naturali)

5.2.1 Andamento intuitivo del sistema

Il predatore (N_2) ha bisogno della preda (N_1) per riprodursi. La preda si riproduce con un suo tasso di riproduzione (r). Se il predatore uccide una quantità eccessiva

di prede allora queste ultime non possono riprodursi nella quantità necessaria al predatore che, quindi, diminuisce. Questa situazione è favorevole alla preda che vede diminuire la sua mortalità. La riproduzione della preda favorisce però il predatore, il quale può nuovamente riprodursi dando luogo ad un ciclo simile al precedente. Si intuisce che le quantità delle prede e dei predatori hanno un andamento oscillatorio nel tempo.

5.2.2 Punti di equilibrio del sistema

Per determinare i punti di equilibrio, basta risolvere il sistema di due equazioni in due incognite che si ottiene dopo aver posto i termini differenziali del (5.1) uguali a zero. Si ha dunque il seguente sistema:

$$\begin{cases} N_1 \left[r \left(1 - \frac{N_1}{k} \right) - \alpha N_2 \right] = 0 \\ N_2 (\beta N_1 - c) = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

La ragione per cui si pongono i termini differenziali uguali a zero risiede, ovviamente, nel fatto che le derivate \dot{N}_1 e \dot{N}_2 rappresentano la variazione delle popolazioni delle prede e dei predatori, ovvero la loro crescita o diminuzione nel tempo: imponendo quindi che tali variazioni siano nulle, si avrà uno stato di equilibrio.

Per la legge dell'annullamento del prodotto, si ottengono i tre punti critici seguenti:

$$P_1 = (0,0) \quad P_2 = (k,0) \quad P_3 = \left(\frac{c}{\beta}, \frac{r(\beta k - c)}{\alpha \beta k} \right).$$

Come si può notare, il secondo ed il terzo punto dipendono dai parametri α , β , k , c ed r ; pertanto la loro natura non è classificabile in maniera univoca, ma a seconda dei valori che assumono tali costanti, gli equilibri avranno diverse configurazioni.

5.2.3 Linearizzazione del sistema

Per lo studio delle orbite generate in un generico processo dinamico, rappresentato da un sistema di equazioni differenziali (lineari o non lineari), è di primaria importanza l'analisi del comportamento del sistema in prossimità delle sue singolarità. Nelle vicinanze di questi punti, infatti, lo studio delle traiettorie risulta più semplice, poiché diviene possibile approssimare la funzione tramite uno sviluppo polinomiale e considerare solo i primi termini di tale sviluppo. Inoltre, lontano dai suoi punti d'equilibrio, il sistema non presenta comportamenti anormali e, globalmente, la mappa delle traiettorie avrà un aspetto determinato dalla posizione e dalle caratteristiche delle singolarità. In particolare il sistema (5.1) non è lineare, ma presenta un termine di 2° grado nella prima equazione e termini di prodotti misti fra le variabili in questione.

La linearizzazione del sistema si realizza approssimando le funzioni:

$$\begin{aligned}f_1 &= rN_1 \left(1 - \frac{N_1}{k}\right) - \alpha N_1 N_2 \\f_2 &= -cN_2 + \beta N_1 N_2\end{aligned}$$

con lo sviluppo in serie di Taylor in corrispondenza dei tre punti critici, già determinati in precedenza. Naturalmente per avere funzioni lineari, la serie di Taylor deve essere arrestata al I° ordine.

Lo sviluppo in serie di Taylor per una funzione di due variabili in un punto A di coordinate (x_0, y_0) , è il seguente:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + \dots$$

Trascurando quindi, nello sviluppo, i termini di ordine superiore al primo, il sistema linearizzato può essere scritto nella seguente forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} \dot{N}_1 \\ \dot{N}_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial N_1} & \frac{\partial f_1}{\partial N_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial N_1} & \frac{\partial f_2}{\partial N_2} \end{array} \right) \Big|_{(x_0, y_0)} \cdot \begin{pmatrix} N_1 - x_0 \\ N_2 - y_0 \end{pmatrix}$$

dove:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial N_1} & \frac{\partial f_1}{\partial N_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial N_1} & \frac{\partial f_2}{\partial N_2} \end{pmatrix}$$

è la matrice *Jacobiana* (J) del sistema.

Il sistema linearizzato nel punto $P_1 = (0,0)$ sarà della forma:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = rN_1 \\ \dot{N}_2 = -cN_2 \end{cases}$$

Gli autovalori della matrice J , valutata in un punto di equilibrio permettono di classificare questo punto.

$$J = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

ha autovalori: $\lambda_1 = r$ e $\lambda_2 = -c$ e poichè le costanti (r e c) per definizione, sono reali positive, per la discordanza degli autovalori si ha che il punto $(0,0)$ è sempre un *punto di sella*.

Per poter linearizzare il sistema (5.1) nel punto $P_2 = (k,0)$ occorre effettuare una traslazione degli assi cartesiani ortogonali, N_1, N_2 , in un nuovo riferimento cartesiano in modo da portare il punto $(k,0)$ nell'origine.

La traslazione sarà dunque:

$$\begin{cases} \bar{N}_1 = N_1 - k \\ \bar{N}_2 = N_2 \end{cases}$$

Ricavando N_1 e N_2 e sostituendole nel sistema (5.1) per riferirlo ai nuovi assi cartesiani, si può fare lo sviluppo in serie di Taylor in $(0,0)$ e linearizzare il sistema.

Il sistema nel nuovo riferimento cartesiano sarà:

$$\begin{cases} \dot{\bar{N}}_1 &= -r\bar{N}_1 - \frac{r\bar{N}_1^2}{k} - \alpha\bar{N}_1\bar{N}_2 - \alpha k\bar{N}_2 \\ \dot{\bar{N}}_2 &= -c\bar{N}_2 + \beta\bar{N}_1\bar{N}_2 + \beta k\bar{N}_2 \end{cases}$$

e con la linearizzazione, assumerà la forma:

$$\begin{cases} \dot{\bar{N}}_1 &= -r\bar{N}_1 - \alpha k\bar{N}_2 \\ \dot{\bar{N}}_2 &= -c\bar{N}_2 + \beta k\bar{N}_2 \end{cases}.$$

Risolvendo l'equazione caratteristica $\det(J - \lambda I) = 0$ si trovano gli autovalori:

$$\begin{vmatrix} -r - \lambda & -\alpha k \\ 0 & \beta k - c - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-r - \lambda)(\beta k - c - \lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = -r \qquad \lambda_2 = \beta k - c.$$

La natura del punto $P_2 = (k,0)$ non è possibile stabilirla a priori, in quanto gli autovalori relativi ad esso, dipendono dai valori che possono assumere i parametri α, β, k, c e r . In particolare l'autovalore λ_1 è sempre negativo dato che r è positivo; l'autovalore λ_2 , invece, dipende dal segno che assume $\beta k - c$. Se $\beta k - c < 0$ i due autovalori sono entrambi negativi e pertanto il punto P_2 è un *nodo stabile* e nel piano delle fasi possiamo classificare tale punto come un attrattore poiché le traiettorie in prossimità del punto convergono. Se, al contrario, $\beta k - c > 0$, i due autovalori sono discordi e il punto P_2 è classificabile come un *punto di sella*.

Anche per la linearizzazione nel punto $P_3 = \left(\frac{c}{\beta}, \frac{r(\beta k - c)}{\alpha\beta k}\right)$ occorre effettuare

una traslazione degli assi cartesiani ortogonali in un nuovo riferimento cartesiano di centro P_3 . Le equazioni della traslazione sono le seguenti:

$$\begin{cases} \bar{N}_1 &= N_1 - \frac{c}{\beta} \\ \bar{N}_2 &= N_2 - \frac{r(\beta k - c)}{\alpha \beta k} \end{cases}$$

Analogamente allo studio per il punto P_2 , linearizzando il sistema (5.1), si avrà:

$$\begin{cases} \dot{\bar{N}}_1 &= -\frac{rc}{\beta k} \bar{N}_1 - \frac{\alpha c}{\beta} \bar{N}_2 \\ \dot{\bar{N}}_2 &= \frac{r(\beta k - c)}{\alpha k} \bar{N}_2 \end{cases}$$

Risolvendo l'equazione caratteristica, si trovano gli autovalori:

$$\lambda_1 = \frac{-rc + \sqrt{rc(rc - 4\beta^2 k^2 + 4\beta kc)}}{2\beta k}$$

$$\lambda_2 = \frac{-rc - \sqrt{rc(rc - 4\beta^2 k^2 + 4\beta kc)}}{2\beta k}$$

I due autovalori, a seconda dei valori assunti dai parametri, possono essere definiti nel campo reale o complesso. Si ricorda che il segno della parte reale di un autovalore indica il carattere attrattivo o repulsivo del punto di equilibrio rispetto all'autodirezione associata, mentre il segno dell'eventuale parte immaginaria è rappresentativo del verso di rotazione del flusso nell'intorno del punto di equilibrio.

Se $rc(rc - 4\beta^2 k^2 + 4\beta kc) > 0$ allora, poiché rc è sempre positivo, gli autovalori saranno reali. Mettendo in evidenza $4\beta k$ e dividendo per rc , la disequazione:

$$4\frac{\beta k}{rc}(c - \beta k) + 1 > 0 \tag{5.3}$$

mostra la condizione per cui si ottengono autovalori reali. Studiando, poi, il segno del numeratore si può determinare per quali valori di α, β, k, r, c , gli autovalori

sono positivi o negativi. Osserviamo subito che l'autovalore λ_2 risulta sempre negativo, essendo $rc > 0$. L'autovalore λ_1 invece sarà positivo se

$$\sqrt{rc(rc - 4\beta^2k^2 + 4\beta kc)} > rc$$

e negativo altrimenti.

Elevando al quadrato e facendo qualche semplice passaggio si ottiene che $\lambda_1 > 0$ se $(c - \beta k) > 0$, ma quando è verificata questa condizione si deduce anche (dalla 5.3) che gli autovalori sono reali. Quindi, in conclusione, se $(c - \beta k) > 0$, gli autovalori sono reali e discordi e P_3 sarà un punto di *sella*.

Quando invece si ha $(c - \beta k) < 0$, rimanendo sempre nella condizione di autovalori reali $\left(4\frac{\beta k}{rc}(c - \beta k) > -1\right)$, si ha che λ_1 e λ_2 sono reali e concordi e il punto P_3 è detto *nodo stabile*.

Nel caso di autovalori immaginari, infine, si vede che le loro parti reali $\left(-\frac{rc}{2\beta k}\right)$ sono senz'altro negative e dunque il punto P_3 sarà un *attrattore*, il cui verso di rotazione sarà determinato dalla parte immaginaria $\pm \frac{\sqrt{rc - 4\beta^2k^2 + 4\beta kc}}{2\beta k}$.

5.2.4 Simulazioni con Pplane5

In questo paragrafo viene studiata la natura dei punti critici, al variare dei parametri α , β , k , r , c . A seconda dei valori assunti dalle costanti, il sistema (5.1) cambia comportamento in prossimità dei punti medesimi.

Il punto $P_1 = (0,0)$ è indipendente da parametri, e sarà sempre di sella; il punto $P_2 = (k,0)$ può assumere due configurazioni: attrattore o sella; il punto $P_3 = \left(\frac{c}{\beta}, \frac{r(\beta k - c)}{\alpha\beta k}\right)$ può essere una sella, un nodo o un attrattore. I vincoli sui parametri sono, però, legati fra loro e quindi, in definitiva, ci sono solo tre configurazioni possibili e le studieremo qui di seguito.

1. Il punto P_1 è sempre di sella.

Il punto P_2 di sella.

Il punto P_3 nodo stabile.

2. Il punto P_1 di sella.

Il punto P_2 di sella.

Il punto P_3 attrattore.

3. Il punto P_1 di sella.

Il punto P_2 nodo stabile.

Il punto P_3 di sella.

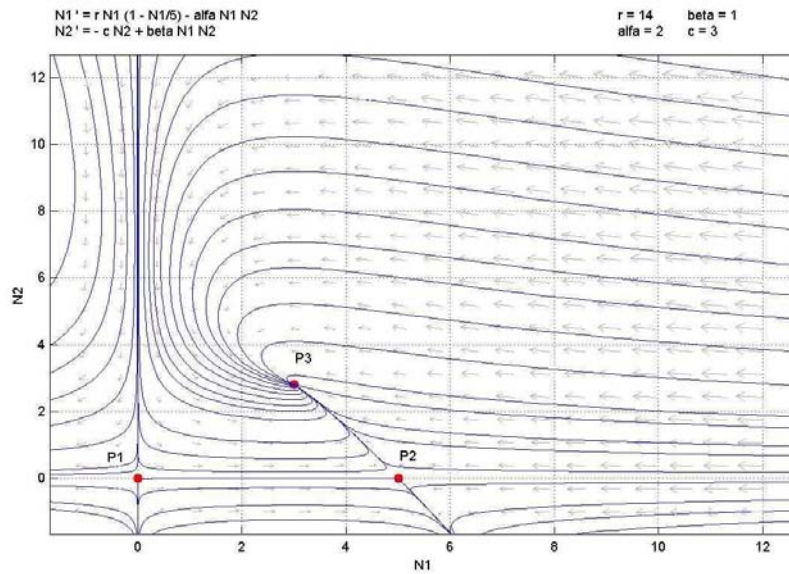


Figura 5.1: Prima configurazione.

Nella prima configurazione (rappresentata nella figura 5.1) le traiettorie tendono ad addensarsi sul punto P_3 che è un nodo stabile, mentre P_1 e P_2 sono punti di

sella.

Nelle figure (5.2 e 5.3) sono raffigurati rispettivamente l' andamento delle prede e quello dei predatori nel tempo.

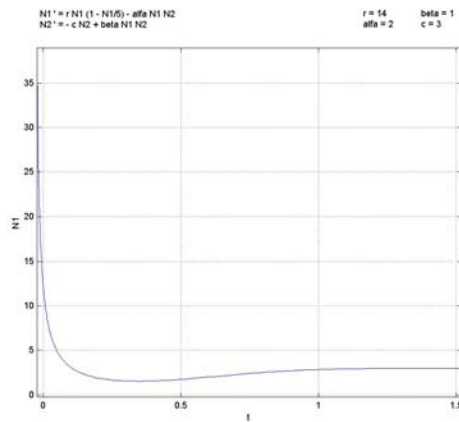


Figura 5.2: Andamento delle prede nel tempo.

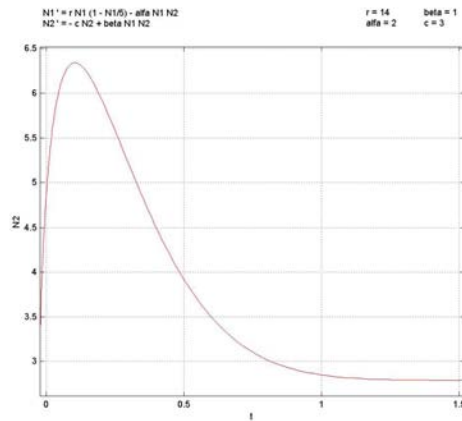


Figura 5.3: Andamento dei predatori nel tempo.

Come si può notare, i predatori subiscono un repentino aumento legato al fatto che il tasso di accrescimento delle prede è abbastanza alto, per poi stabilizzarsi

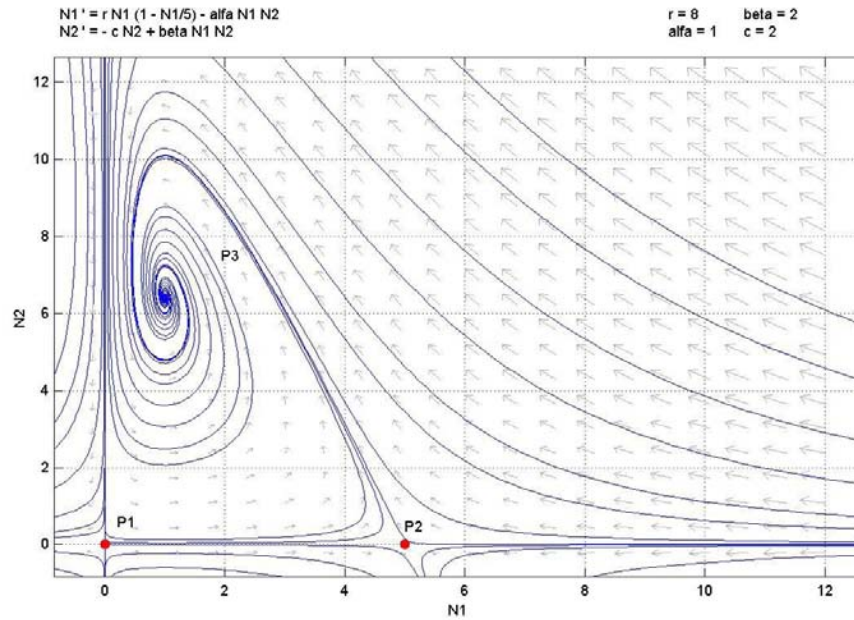


Figura 5.4: Seconda configurazione.

nel corso del tempo.

Negli stessi intervalli di tempo, all'aumentare dei predatori corrisponde una notevole diminuzione delle prede, ma anch'esse in seguito andranno a stabilizzarsi. La figura (5.4) ci mostra, invece la seconda configurazione, in cui, il punto P_3 è un attrattore e P_2 e P_1 continuano ad essere punti di sella. Dall'andamento delle prede e dei predatori in funzione del tempo, come si vede nelle figure (5.5 e 5.6), si può osservare che, all'inizio, il numero esiguo di prede fa diminuire notevolmente la popolazione di predatori. Successivamente, però, il calo dei predatori e il tasso di natalità delle prede, r , (sufficientemente elevato) provoca un'aumento delle prede. Questo, a sua volta, consente l'accrescimento dei predatori e così via fino a quando il sistema non collassa definitivamente nel punto di equilibrio P_3 .

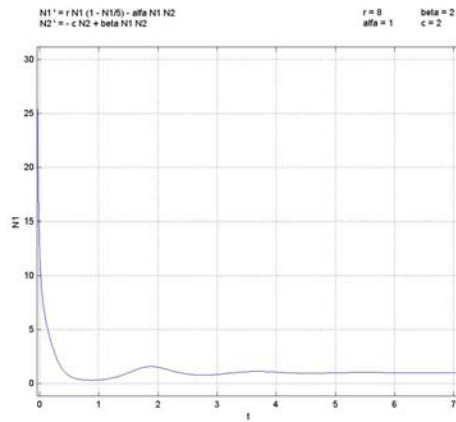


Figura 5.5: Andamento delle prede nel tempo.

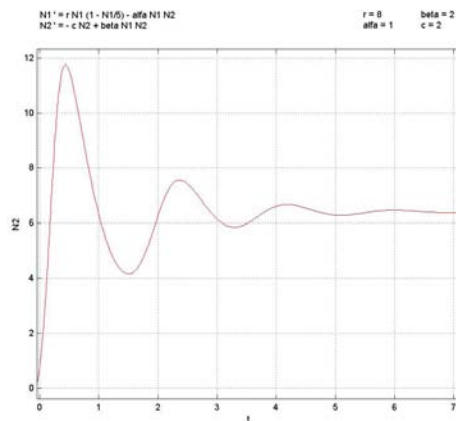


Figura 5.6: Andamento dei predatori nel tempo.

Nella terza configurazione, infine, (come si vede in figura 5.7) è il punto P_2 ad essere l'unico attrattore mentre P_3 , che ha le caratteristiche di una sella, cade nel 4° quadrante e dunque perde di significato in quanto non ha senso parlare di popolazioni negative.

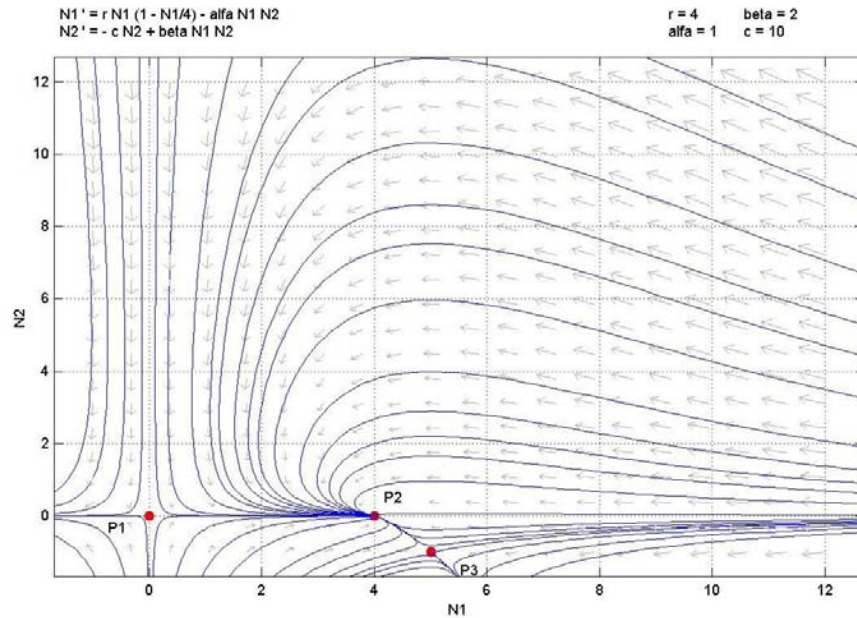


Figura 5.7: Terza configurazione.

5.2.5 Soluzioni particolari

Vediamo ora alcune soluzioni particolari: se $\beta k = c$ il punto P_2 coincide con il punto P_3 , pertanto il sistema ha solo due punti di equilibrio. Uno degli autovalori relativo al punto $P := P_2 = P_3$ è pari a zero e risulta alquanto complesso studiare in modo analitico la natura del punto per poterlo classificare. Cercheremo dunque di valutare la natura del punto in modo euristico studiando l'andamento delle soluzioni nel piano delle fasi. Il punto P_1 è sempre di sella in quanto la condizione $\beta k = c$ non influenza i relativi autovalori. Il punto P invece, come si evince dal grafico (5.8), assume le caratteristiche di un attrattore.

Il comportamento dei predatori e delle prede in funzione del tempo è pressochè simile ai casi precedentemente studiati. Il sistema, dopo un breve intervallo di

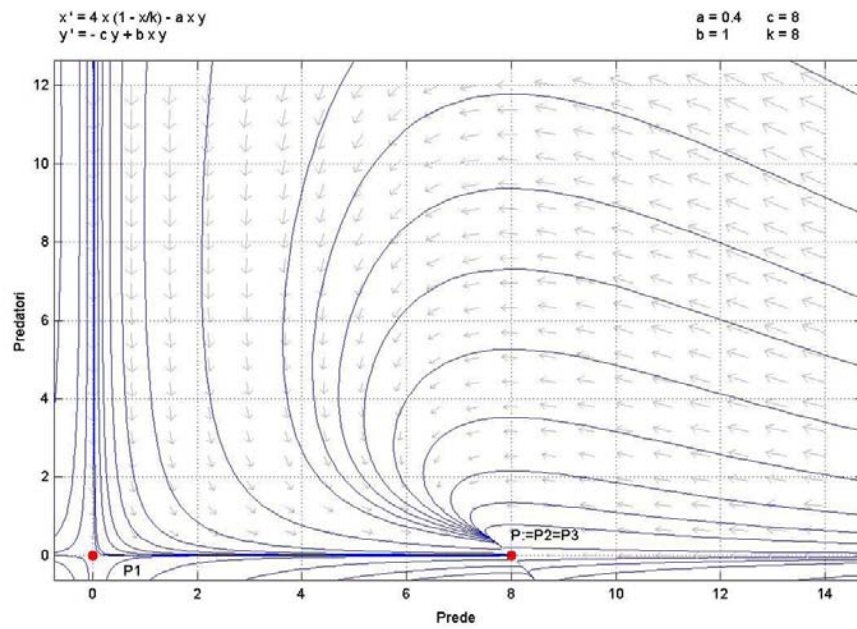


Figura 5.8: Soluzione particolare con $\beta k = c$.

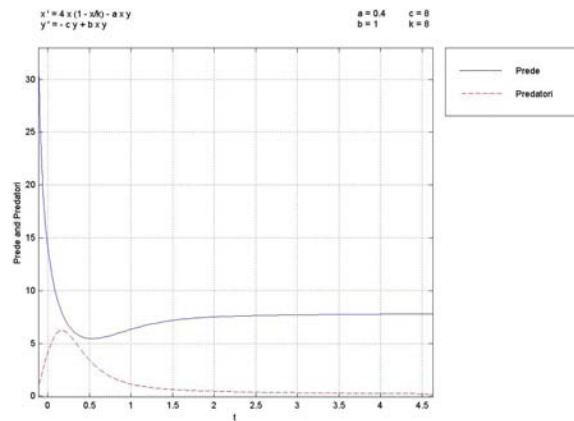


Figura 5.9: Andamento delle prede e dei predatori nel tempo.

tempo, si stabilizza attorno al suo punto critico (fig. 5.9).

Variando opportunamente il valore del parametro α , che rappresenta l'efficacia

della ricerca da parte dei predatori nello scovare le prede, si ottengono soluzioni di particolare rilevanza.

Se il fattore α è elevato, significa che i predatori catturano e uccidono molte prede, le quali, mantenendo il medesimo tasso di natalità, tendono ad estinguersi in breve tempo provocando un sovrannumero di predatori. Questi ultimi, non avendo a disposizione prede a sufficienza per nutrirsi, si estingueranno a loro volta, anche se in un arco di tempo più lungo rispetto a quello delle prede.

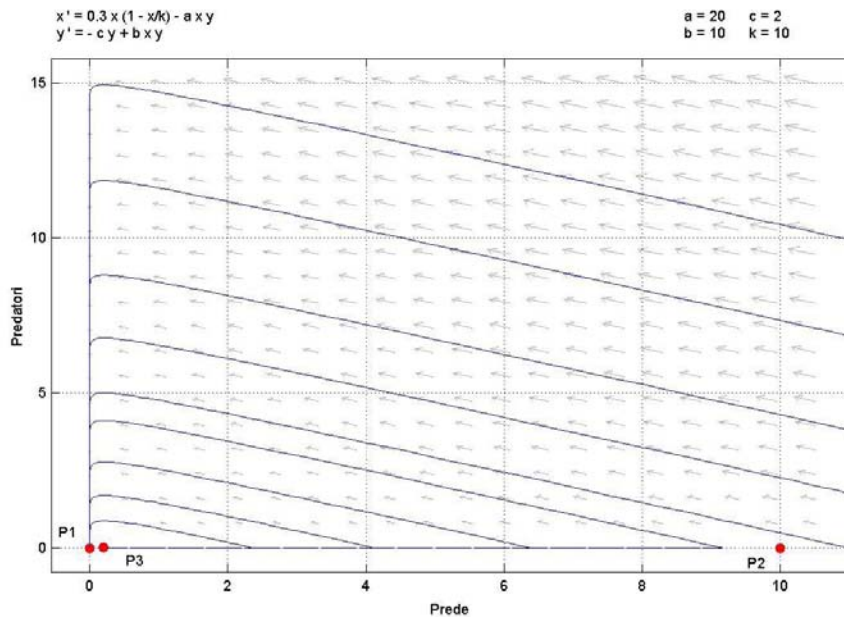


Figura 5.10: Soluzione particolare con fattore di efficacia dei predatori nello scovare le prede elevata.

Nella figura (5.10), si nota che i due punti fissi P_1 e P_3 sono molto vicini tra loro pur mantenendo le caratteristiche di sella, l'uno e di attrattore, l'altro. Il punto P_2 risulta essere di sella e le traiettorie hanno un andamento quasi lineare

e mostrano che ad una diminuzione delle prede corrisponde un proporzionale aumento dei predatori fino a quando, con l'esaurimento delle prede, anche i predatori collassano verso lo zero.

L'andamento nel corso del tempo di tutte e due le variabili è meglio rappresentato nel grafico in tre dimensioni (5.11).

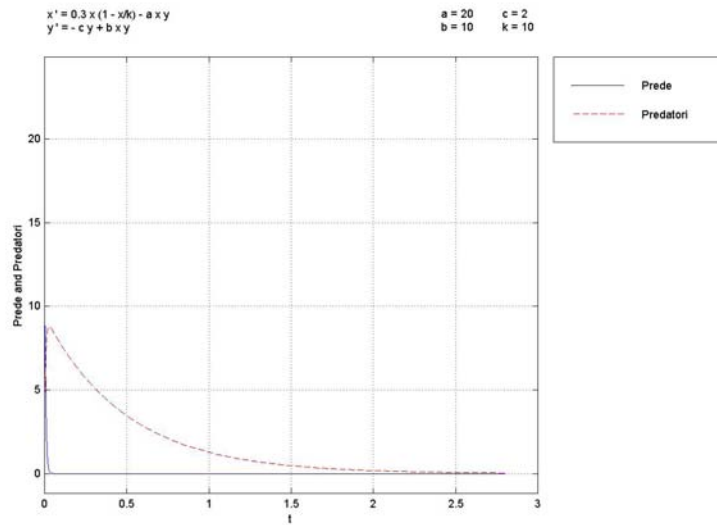


Figura 5.11: Andamento delle variabili nel tempo, soluzione particolare.

Infine, vediamo cosa accade variando il fattore k di ripopolamento della specie. Si osserva che, man mano che k viene incrementato, le traiettorie diventano sempre più fitte attorno al punto di equilibrio P_3 , mentre P_1 e P_2 conservano la loro natura di selle (figura 5.12). Si osserva che, man mano che k viene incrementato, le traiettorie diventano sempre più fitte attorno al punto di equilibrio P_3 , mentre P_1 e P_2 conservano la loro natura di selle (figura 5.12).

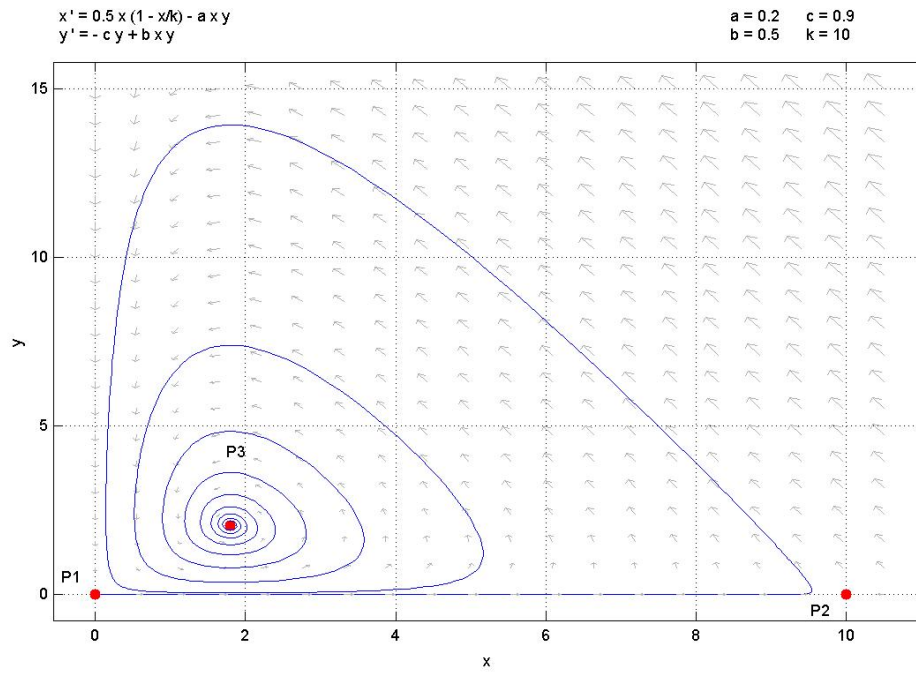


Figura 5.12: Soluzione particolare con fattore di ripopolamento elevato.

5.3 Il pendolo

Un classico esempio fisico di equazione non lineare è dato dal moto del pendolo su un piano verticale in presenza d'attrito.

Si consideri una sfera di massa unitaria sospesa ad un filo di lunghezza l e soggetta all'attrazione gravitazionale (g) e ad una forza che si oppone al moto (l'attrito), proporzionale alla velocità della sferetta. Il pendolo si muove su una circonferenza di raggio l con velocità angolare $d\theta/dt$; la velocità tangenziale è $ld\theta/dt$, per cui la forza d'attrito sarà $-kl d\theta/dt$ con $k > 0$, costante di proporzionalità.

Pertanto, la forza totale agente sulla sfera in modo tangenziale nel tempo t , è data da:

$$F = - \left(kl \frac{d\theta}{dt} + m \sin \theta \right).$$

Essendo poi, l'accelerazione della pallina pari a:

$$a = l \frac{d^2\theta}{dt^2};$$

per la legge di Newton si ha:

$$l\ddot{\theta} = -\frac{kl}{m}\dot{\theta} - \sin \theta$$

o meglio:

$$\ddot{\theta} = -\frac{k}{m}\dot{\theta} - \frac{1}{l} \sin \theta.$$

Questa equazione equivale al sistema autonomo non lineare:

$$\begin{cases} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\frac{k}{m}\omega - \frac{1}{l} \sin \theta \end{cases} \quad (5.4)$$

che possiede infiniti punti di equilibrio in

$$(n\pi, 0) \quad \text{con } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Poniamo la nostra attenzione sul punto $(0,0)$. Linearizzando si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\frac{k}{m}\omega - \frac{1}{l}\theta \end{cases}$$

la cui matrice associata:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{l} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}$$

ha autovalori:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{k}{m} \pm \left[\left(\frac{k}{m} \right)^2 - \frac{4}{l} \right]^{1/2} \right\}.$$

Essendo k , m e l positivi, si ha, dunque, $tr(A) = -k/m < 0$ e $|A| = 1/l > 0$ per cui, dal quadro di pagina 141 l'equilibrio $(0,0)$ risulta un *nodo asintoticamente stabile* se $(k/m)^2 - 4/l > 0$, oppure un *fuoco asintoticamente stabile* se $(k/m)^2 - 4/l < 0$.

Questo risultato non è di certo sorprendente, infatti dall'esperienza risulta evidente che da qualsiasi posizione e velocità iniziale, il pendolo tende sempre verso lo stato d'equilibrio.

Per quel che riguarda il punto $(\pi,0)$, invece, linearizzando si ottiene:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{l} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}$$

per cui, $|A| = -1/l < 0$, $tr(A) = -k/m < 0$ e $\Delta = (k/m)^2 + 4/l > 0$ ci permettono di classificare il punto $(\pi,0)$ come *colle instabile*.

Il piano delle fasi è raffigurato nei grafici 5.13 e 5.14.

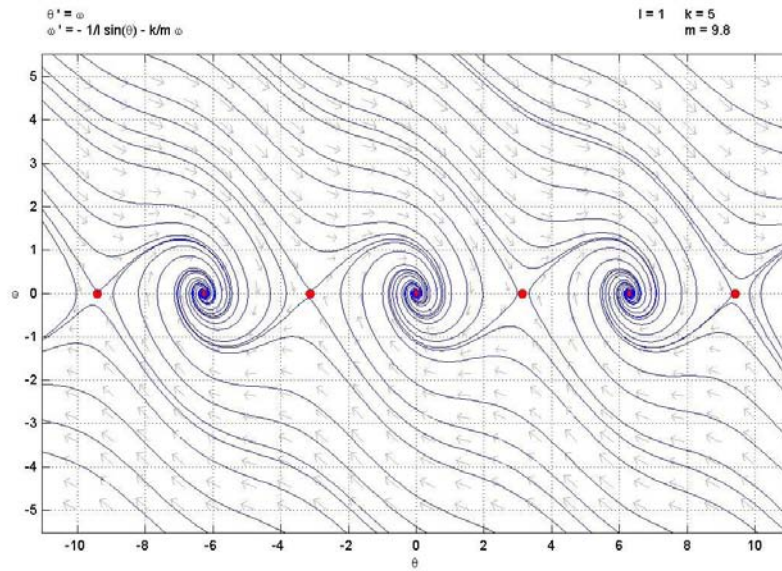


Figura 5.13: Piano delle fasi per il pendolo in presenza di molto attrito.

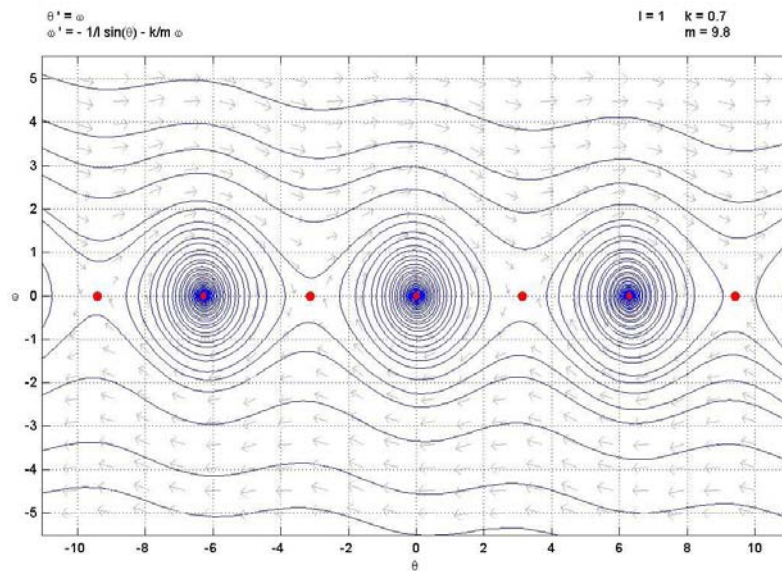


Figura 5.14: Piano delle fasi per il pendolo in presenza di poco attrito.

In assenza d'attrito ($k = 0$), invece, il punto $(0,0)$ diventa un *centro neutralmente stabile* (si veda la figura 5.15).

Prima di lasciare definitivamente lo studio del moto del pendolo, poniamo brevemente l'attenzione su un paradosso: *il pendolo che non può mai fermarsi!*

Si consideri il moto del pendolo in presenza d'attrito. Per l'unicità delle soluzioni, nessuna traiettoria può passare per un punto di equilibrio, ma tende verso di esso e lo “raggiunge” solo in un tempo infinito! Di fronte ad un pendolo che, dapprima in moto, “raggiunge” poi lo stato d'equilibrio, ci si trova, dunque, in contraddizione con il modello. Si potrebbe affermare che il pendolo non è realmente fermo, ma il suo moto è talmente piccolo da non poter essere percepito; in realtà, una spiegazione più valida si trova nel fatto che il modello matematico, dato dal sistema 5.4, è solo un'approssimazione del moto reale.

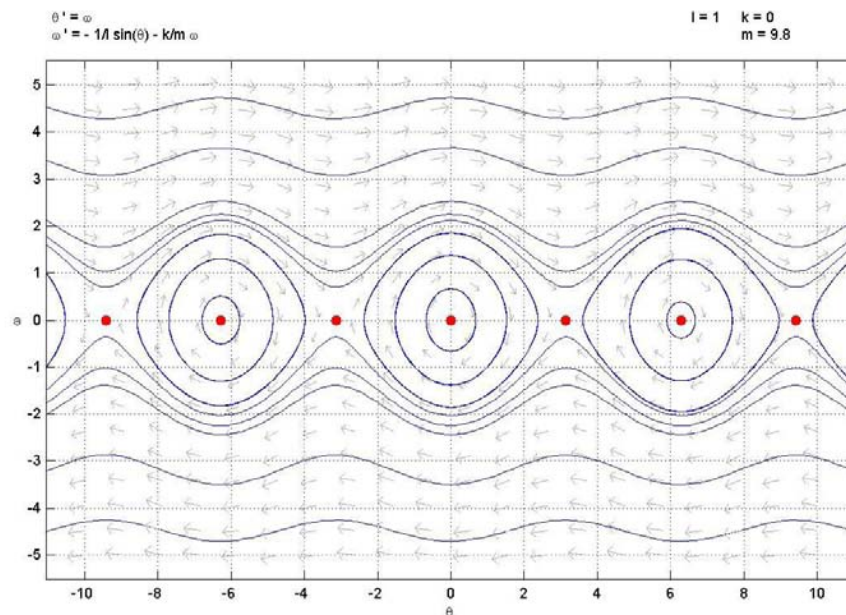


Figura 5.15: Piano delle fasi per il pendolo in assenza di attrito.

5.4 Crescita di una popolazione

Un altro classico esempio di sistema dinamico è lo studio della crescita di una popolazione e ne proponiamo ora due modelli.

Denotiamo con $N(t)$ la popolazione al tempo t e consideriamo la costante k pari al rapporto fra il tasso di natalità e quello di mortalità mediato sull'intera popolazione. Dunque ogni membro della popolazione si riproduce con lo stessa frequenza k . La totale crescita della popolazione sarà dunque:

$$\dot{N} = rN.$$

Questa semplice equazione si può risolvere ottenendo:

$$N(t) = N(0)e^{rt},$$

e così la popolazione, apparentemente, cresce senza limiti con il passare del tempo. Intuitivamente, però, possiamo affermare che questo è un modello non realistico perchè, per quanto le condizioni possano essere favorevoli, la crescita di una popolazione può avere un andamento esponenziale solo per un limitato periodo di tempo, dopo il quale comincerà a decrescere o si stabilizzerà in uno stato di equilibrio.

Per migliorare il modello, introduciamo una nuova costante M pari al valore massimo che può essere raggiunto dalla popolazione. Il nostro modello diventa così:

$$\dot{N} = kN \left(1 - \frac{N}{M}\right) \quad (5.5)$$

che è chiamata *equazione logistica*. I suoi punti di equilibrio sono: $\bar{N} = 0$ e $\bar{N} = M$.

L'equazione linearizzata sarà dunque:

$$\dot{N} = kN \left(1 - \frac{2\bar{N}}{M} \right).$$

Si osserva che per $\bar{N} = 0$ si ottiene:

$$\dot{N} = kN$$

le cui soluzioni crescono esponenzialmente per $k > 0$ e ciò mostra che 0 è un equilibrio instabile; d'altra parte, per $\bar{N} = k$ si ha:

$$\dot{N} = -kN$$

per cui le soluzioni tendono a zero col passare del tempo e dunque k è asintoticamente stabile.

Questo studio qualitativo trova conferma nella risoluzione esplicita della 5.5. Per la separabilità delle variabili si ottiene:

$$M \int \frac{dN}{N(M-N)} = kt + \text{costante}.$$

Il primo membro si può scrivere come:

$$\int \frac{dN}{N} + \int \frac{dN}{(M-N)} = \ln \left(\frac{N}{M-N} \right)$$

e per un'opportuna costante c , si giunge alla soluzione:

$$N(t) = \frac{M}{1 + ce^{-kt}}.$$

$N(t)$ dunque tende a M quando si parte da una condizione diversa dallo zero e l'andamento è dato da una tipica curva ad S con flesso in $M/2$. Ovviamente, per valori di k sempre più grandi, si ha una crescita sempre più rapida, come mostrato nelle figure 5.16 e 5.17.

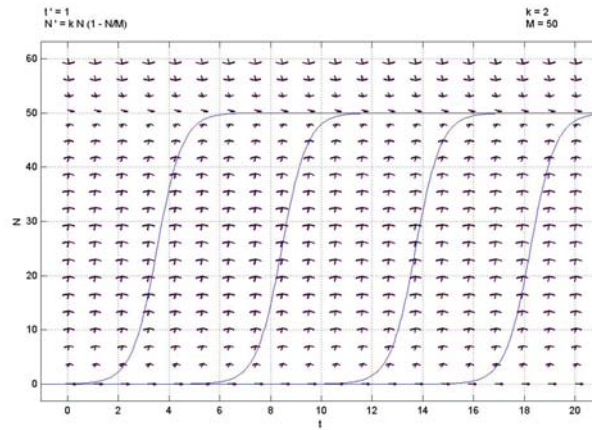


Figura 5.16: Mappa logistica con $k = 2$.

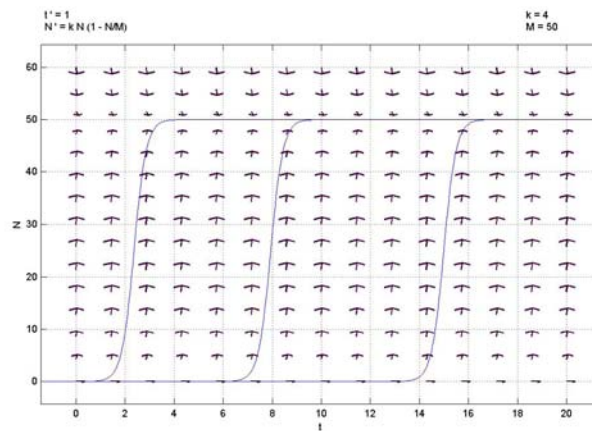


Figura 5.17: Mappa logistica con $k = 8$.

Un altro modello sulla crescita di una popolazione è dato dall'*equazione di Gompertz* che si basa su un'idea diversa rispetto alla crescita logistica.

La velocità di crescita si suppone sempre proporzionale alla popolazione attuale,

ma il fattore di proporzionalità decresce in modo esponenziale nel tempo, per cui si ottiene:

$$\dot{N} = ke^{-\frac{k}{M}t}N.$$

Risolvendo:

$$N(t) = N(0)e^{M(1-e^{-\frac{k}{M}t})}.$$

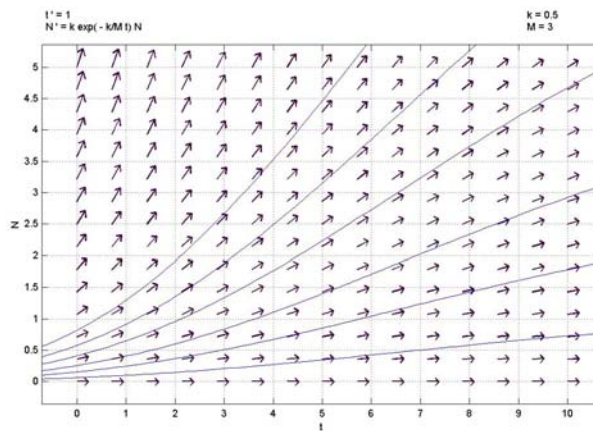


Figura 5.18: Equazione di Gompertz.

Secondo la crescita di Gompertz, dunque, $N(t)$ tende a $N(0)e^M$ per t tendente all'infinito. Il valore asintotico della popolazione dipende, dunque, dalla condizione iniziale, a differenza del modello logistico, in cui, indipendentemente da $N(0)$, la popolazione si avvicina sempre al valore M . Nella figura 5.18 è rappresentato l'andamento della popolazione descritta da Gompertz.

Questo tipo di crescita trova un'applicazione nella riproduzione delle cellule tumorali, alcuni dati sperimentali, infatti, risultano ben rappresentati da esso.

5.5 Equazione di Van der Pol

In molti modelli dinamici si può osservare che quando si verifica un disturbo dovuto a qualche fattore esterno, le traiettorie del sistema subiscono delle modifiche nelle loro oscillazioni e non ritornano più a quelle originali.

Alcuni modelli biologici, però, mostrano un comportamento diverso e, di fronte a piccoli disturbi, ristabiliscono nel tempo ($t \rightarrow \infty$) la traiettoria originale.

Questo tipo di comportamento è dovuto alla presenza di un *ciclo limite*. Un ciclo limite è una soluzione periodica isolata, cioè si tratta di un'orbita chiusa del sistema per cui esiste un intorno in cui non ci sono altre soluzioni periodiche.

Probabilmente il primo e più semplice modello biologico con tale caratteristica risiede nelle oscillazioni cardiache. La loro modellizzazione fu proposta dall'ingegnere elettronico Van der Pol nella seguente equazione:

$$\ddot{y} + \varepsilon(y^2 - 1)\dot{y} + y = 0 \quad (5.6)$$

con $\varepsilon > 0$. Questa equazione può essere vista come l'esempio fondamentale per le equazioni differenziali ordinarie non lineari, in quanto possiede una caratteristica che nessun flusso lineare può avere: un attrattore periodico. Studiamo ora più da vicino questo modello. Per fare ciò introduciamo il cosiddetto *piano di Lienard*, ossia delle variabili y e $z = \dot{y} + \varepsilon(y^3/3 - y)$, rispetto alle quali otteniamo il sistema, equivalente alla 5.6:

$$\begin{cases} \dot{y} = z - \varepsilon \left(\frac{y^3}{3} - y \right) \\ \dot{z} = -y \end{cases}$$

La corrispondenza $(y, \dot{y}) \longleftrightarrow (y, z)$ tra punti del piano delle fasi (y, \dot{y}) e del piano di Lienard è chiaramente biunivoca e regolare, cosicchè il ritratto di fase è

qualitativamente simile nei due casi. In particolare, punti di equilibrio e orbite chiuse si corrispondono nei due piani.

L'unico punto di equilibrio è $(0,0)$. Linearizzando si trova:

$$\begin{cases} \dot{y} = \varepsilon y + z \\ \dot{z} = -y \end{cases}$$

a cui è associata la matrice

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\text{tr}(A) = \varepsilon > 0$ e $|A| = 1 > 0$ si ha $\Delta = (\text{tr}(A))^2 - 4|A| = \varepsilon^2 - 4$; quindi riferendoci al quadro riassuntivo di pagina 141, l'origine sarà un *nodo instabile* se $0 < \varepsilon < 2$, oppure un *fuoco instabile* se $\varepsilon > 2$ e le orbite che partono in un intorno di $(0,0)$ se ne allontanano a spirale per avvolgersi sul ciclo limite del sistema (come mostrato nelle figure 5.19 e 5.20).

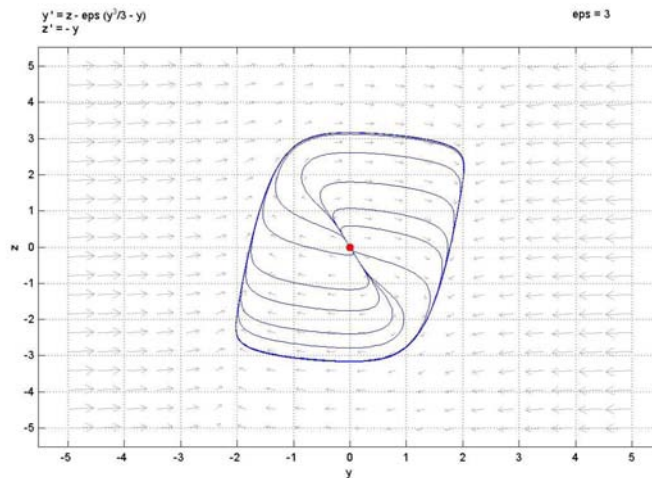


Figura 5.19: Equazione di Van der Pol con $(0,0)$ nodo instabile.

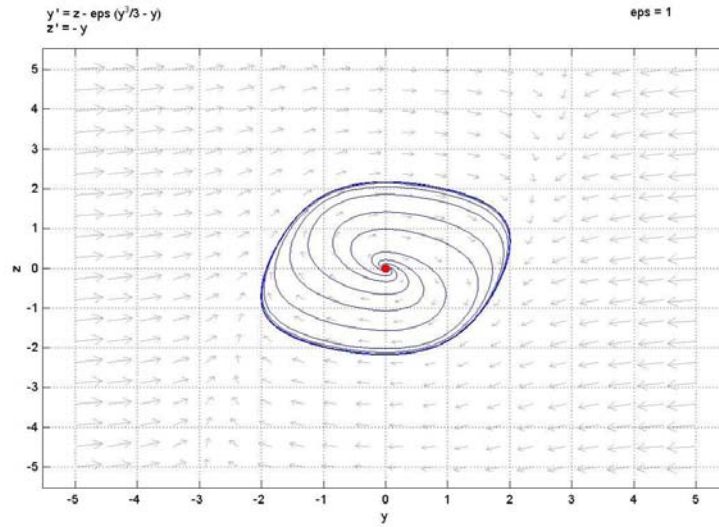


Figura 5.20: Equazione di Van der Pol con $(0,0)$ fuoco instabile.

Anche le orbite che partono da punti distanti dall'origine tenderanno ad avvicinarsi sempre più allo stesso ciclo come si può vedere dal grafico 5.21.

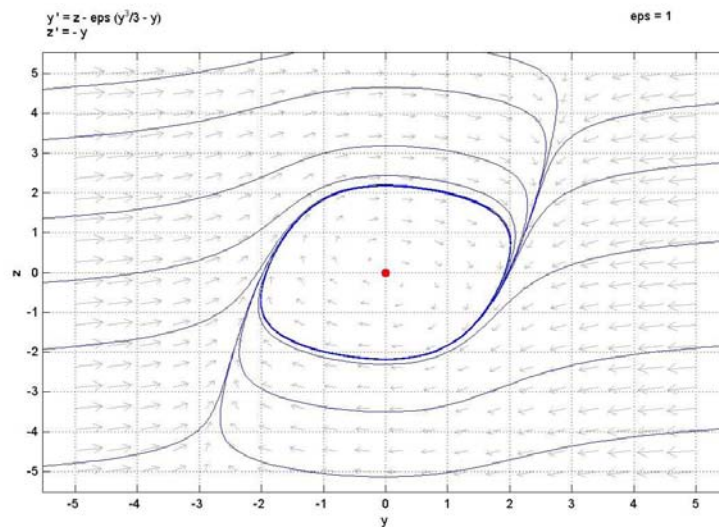


Figura 5.21: Equazione di Van der Pol.

L'andamento delle soluzioni y e z nel tempo è rappresentato in figura 5.22.

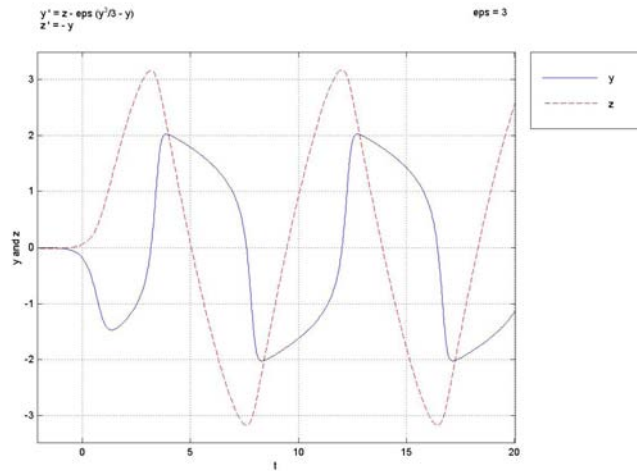


Figura 5.22: Equazione di Van der Pol.

5.6 Sistema di sospensioni di un autobus

Mediante un sistema dinamico si può modellizzare il sistema di sospensioni di un autobus. Per semplificare tale modello, il sistema delle sospensioni si può schematizzare con una sola ruota, come rappresentato nella figura (5.23).

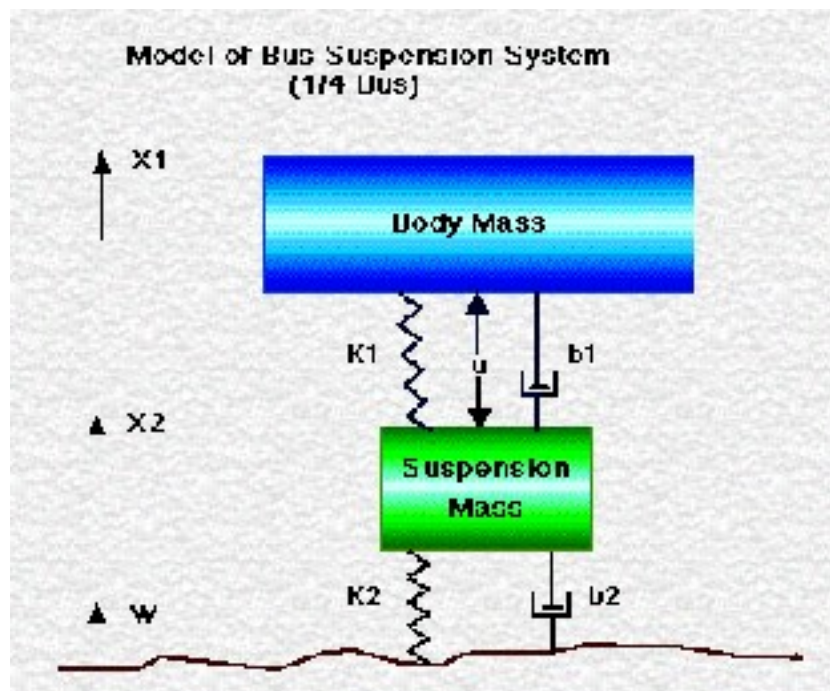
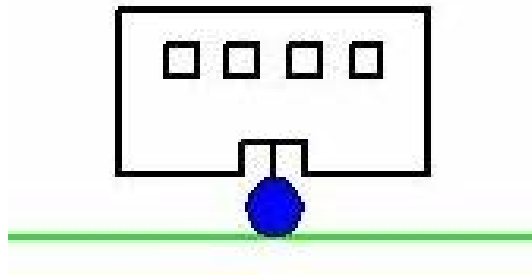


Figura 5.23: Schematizzazione del sistema di sospensione di un autobus

dove

$m_1 =$ *massa del corpo;*

$m_2 =$ *massa delle sospensioni;*

$k_1 =$ *costante della molla del sistema di sospensioni;*

$k_2 =$ *costante di oscillazione della ruota;*

$b_1 =$ *costante d'attrito delle sospensioni;*

$b_2 =$ *costante d'attrito delle ruote.*

Un buon sistema di sospensioni dovrebbe consentire una buona tenuta di strada e allo stesso tempo dovrebbe contribuire a mantenere un certo *comfort* per i passeggeri anche quando si percorrono strade dissestate con buche e gradini.

Quando ci si imbatte in una crepa del suolo o in un salto improvviso, l'autobus non dovrebbe subire grandi oscillazioni e, in ogni caso, queste dovrebbero dissiparsi nel più breve tempo possibile.

Trattandosi dunque di un modello matematico, si possono apportare delle approssimazioni che ci consentano di semplificare un pò il problema, ad esempio, poichè la distanza $(x_1 - w)$ è molto difficile da misurare e la deformazione $(x_2 - w)$ è trascurabile, useremo la distanza $(x_2 - x_1)$ invece di $(x_1 - w)$ come output del nostro sistema. Il dissestamento della strada (w) in questo problema viene simulato con un gradino dato in input. Questo gradino potrebbe rappresentare l'ostacolo che l'autobus deve superare per "risalire" da una buca in cui si è imbattuto.

Si vuole modellizzare un sistema di controllo tale che l'output $(x_1 - x_2)$ abbia un dislivello inferiore al 5% e un tempo di arresto inferiore a 5 secondi. Ad esempio, quando l'autobus incontra un gradino alto 10 cm, oscillerà in un *range* di ± 5 mm

e ritornerà alla sua andatura indisturbata in 5 secondi.

Le equazioni del moto che descrivono tale modello sono:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_1(x_1 - x_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1(x_1 - x_2) - b_2\dot{x}_2 - k_2x_2 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Ponendo degli opportuni valori alle costanti e trasformando le due equazioni in un sistema di quattro equazioni differenziali del primo ordine si può osservare, utilizzando lo studio che si può effettuare con il programma SDM, che l'origine è un punto di equilibrio e inoltre esso risulta asintoticamente stabile (ciò si può verificare, ovviamente, tramite lo studio degli autovalori che risultano complessi coniugati con parte reale negativa). Dunque ogni soluzione del sistema, con punto iniziale sufficientemente vicino all'origine, vi rimane vicino per tutto il tempo, o meglio, al tendere di t all'infinito, la soluzione tenderà proprio all'origine.

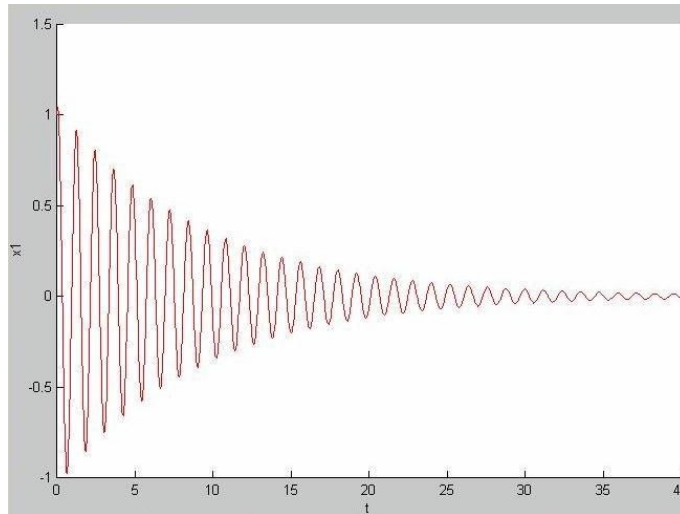


Figura 5.24: Andamento della variabile x_1 nel tempo.

Nelle figure 5.24 e 5.25 sono rappresentati l'andamento di una variabile del sistema nel tempo ed un'orbita nel piano delle fasi (x_2, x_4) , ottenuti inserendo nel

programma SDM il seguente sistema, equivalente al sistema 5.7:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = -32x_1 + 3x_2 - 0.14x_3 + 0.14x_4 \\ \dot{x}_4 = 250x_1 - 1812.5x_2 + 350/320x_3 - 15370/320x_4 \end{cases} \quad (5.8)$$

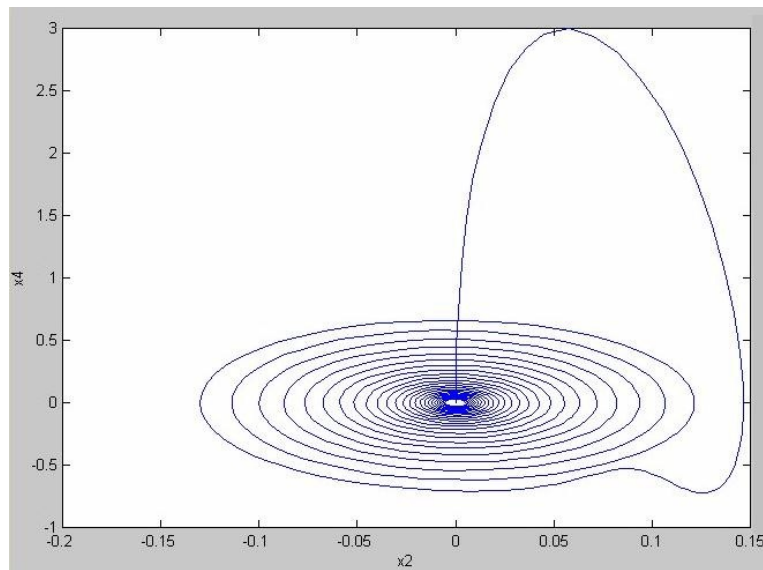


Figura 5.25: Orbita nel piano delle fasi del sistema di sospensioni di un autobus.

5.7 *Pitch-Controller* (Beccheggio di un aereo)

Il moto di un aereo è governato da un sistema di sei equazioni differenziali accoppiate non lineari. Sotto certe assunzioni, comunque, esse possono essere linearizzate e separate in equazioni longitudinali e laterali.

Il controllo del beccheggio di un aereo è un problema longitudinale, esso consiste in un movimento oscillatorio dell'aereo rispetto ad un asse trasversale orizzontale, passante per il baricentro dell'aereo. Gli assi delle coordinate e le forze agenti sull'aereo sono mostrate nella figura 5.26.

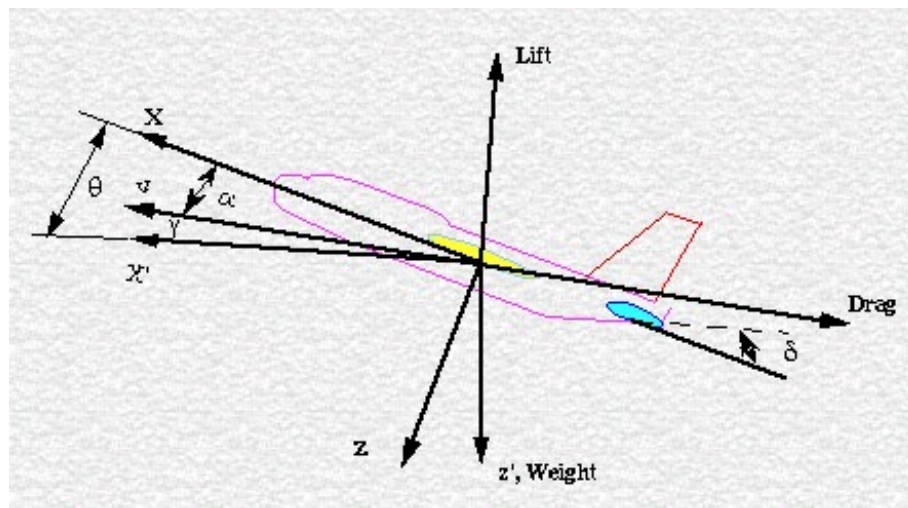


Figura 5.26: Schematizzazione del moto di beccheggio di un aereo

Supponiamo che l'aereo stia viaggiando ad una velocità di crociera stabile, ad un'altitudine fissata e con una velocità costante. Assumiamo inoltre che la variazione dell'angolo di beccheggio non cambi la velocità dell'aereo. Con queste assunzioni, le equazioni longitudinali del moto di un aereo possono essere scritte

come:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \mu\Omega\sigma[-(C_L + C_D)\alpha + (\frac{1}{\mu} - C_L)q - (C_W \sin(\gamma_e))\theta + C_L] \\ \dot{q} = \frac{\mu\Omega}{2i_{yy}}\{[C_M - \eta(C_L + C_D)]\alpha + [C_M + \sigma C_M(1 - \mu C_L)]q + (\eta C_W \sin(\gamma_e))\delta_e\} \\ \dot{\theta} = \Omega q \end{cases} \quad (5.9)$$

dove

α = *angolo di attacco;*

q = *tasso di beccheggio;*

θ = *angolo di beccheggio;*

δ_e = *angolo di deviazione;*

$\mu = \frac{\rho_e S \bar{c}}{4m};$

ρ_e = *densità dell'aria circostante;*

S = *superficie dell'ala;*

\bar{c} = *lunghezza media dell'aereo;*

m = *massa dell'aereo;*

$\Omega = \frac{2U}{\bar{c}};$

U = *velocità di equilibrio;*

C_T = *coefficiente di spinta;*

C_D = *coefficiente di resistenza aerodinamica;*

C_L = *coefficiente di ascensione;*

C_W = *coefficiente di peso;*

C_M = *coefficiente del momento di beccheggio;*

$\gamma_e =$ angolo della traiettoria di volo;

$i_{yy} =$ momento di inerzia normalizzato;

$$\sigma = \frac{1}{1 + \mu C_L};$$

$$\eta = \mu \sigma C_L.$$

Noi considereremo un controllo tale che l'output abbia una variazione inferiore al 10%, raggiunga tale variazione in meno di 2 secondi, si ristabilizzi in meno di 10 secondi e l'errore nel ritornare allo stato di stabilità sia inferiore al 2%. Ad esempio, se l'input è 0.2 rad allora l'angolo di beccheggio non supererà 0.22 rad , raggiungerà 0.2 rad in 2 secondi, ristabilirà il 2% dello stato di stabilità in 10 secondi e rimarrà fra 0.196 e 0.204 rad nello stato di equilibrio.

In figura 5.27 sono raffigurati gli andamenti delle tre variabili nel tempo.

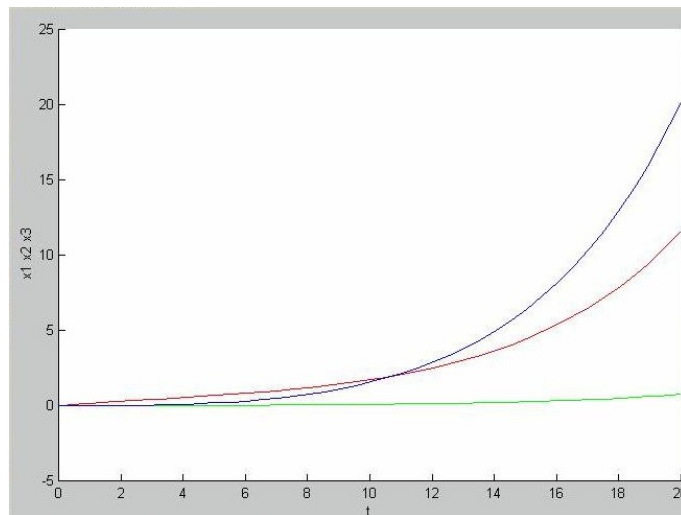


Figura 5.27: Andamento delle tre variabili nel tempo.

Aggiungendo un termine non lineare, dovuto magari a qualche malfunzionamento improvviso o all'usura del sistema, si possono osservare altri andamenti.

Ad esempio, sommando alla terza equazione il termine $\theta^2\alpha$ si ottiene il grafico in figura 5.28.

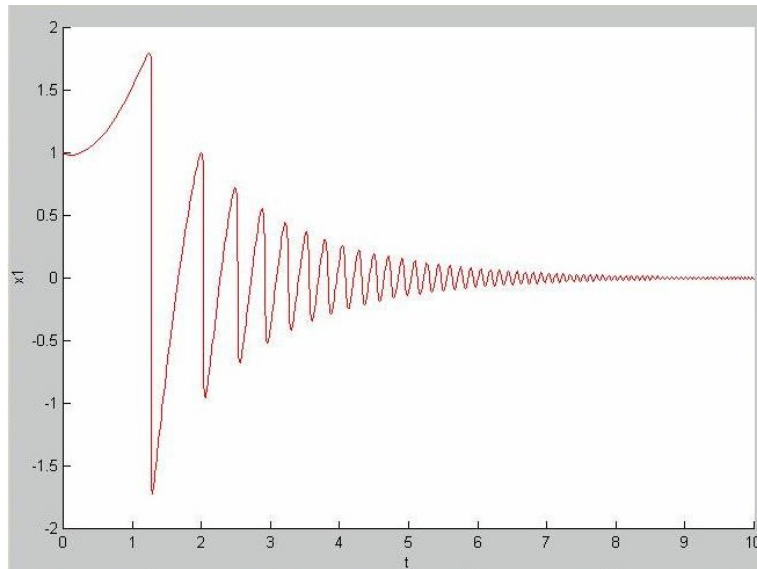


Figura 5.28: Andamento della variabile x_1 , ottenuto con l'aggiunta del termine non lineare.

5.8 L'attrattore di Rossler

Otto Rossler ritrovò questo attrattore durante un suo studio sulle oscillazioni presenti in una reazione chimica. Egli presentò il sistema di tre equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + ax_2 \\ \dot{x}_3 = b + x_1x_3 - cx_3 \end{cases} \quad (5.10)$$

come modello per tali moti oscillatori.

Con opportuni valori per le costanti: $a = b = 0.2$, $c = 5.7$ oppure $c = 8$ si possono osservare degli andamenti caotici, con la presenza di un “attrattore strano”.

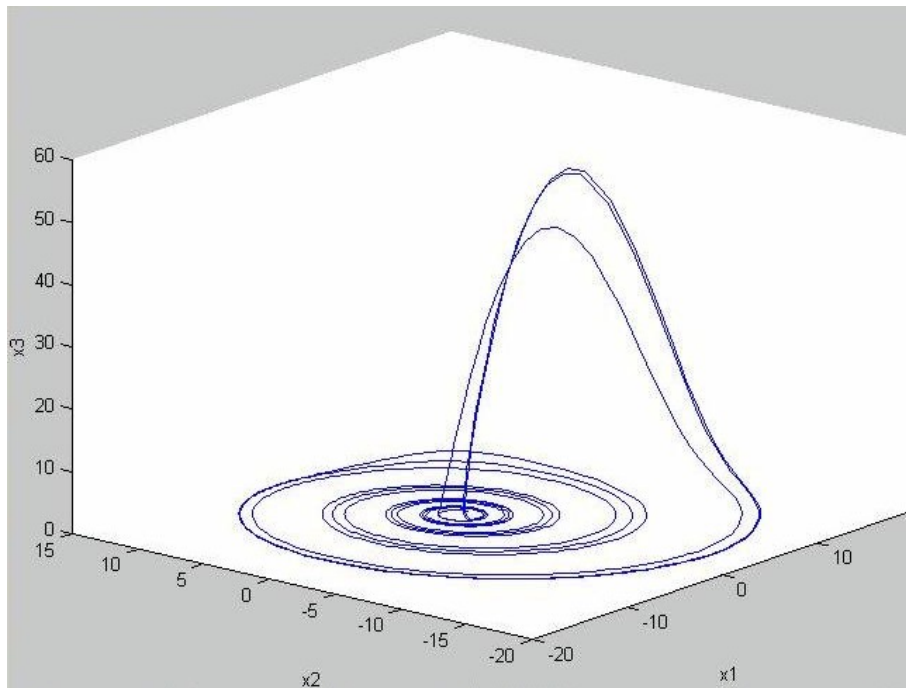


Figura 5.29: Immagine 3D dell'attrattore di Rossler.

Attrattori strani

Non c'è una definizione formale di cosa sia in realtà un attrattore strano, ma il *Collins Reference Dictionary* propone la seguente definizione:

Definizione 5.8.1 *Un attrattore strano è “qualcosa” che ha la sua dimensione di Hausdorff dipendente dalle condizioni iniziali.*

Dove la dimensione di Hausdorff è un mezzo per misurare la dimensione di un oggetto matematico. Ad esempio, la dimensione di un punto è zero, di una linea è uno, di un piano è 2 e dello spazio a noi familiare è 3. Così potremmo dire che un attrattore strano è un oggetto che non si può identificare né con un punto, né con una linea, né con un piano... L'attrattore di Rossler, ad esempio, ha una dimensione compresa fra 2.01 e 2.02. Per capire ciò, si può pensare che le equazioni che descrivono l'attrattore di Rossler descrivono una curva o una linea nello spazio tridimensionale quando si hanno soluzioni periodiche. Ma quando ci si trova di fronte ad una soluzione caotica, che non è mai periodica, allora il percorso dell'attrattore di Rossler (al tendere del tempo all'infinito) diventa qualcosa che supera la dimensione di un piano.

Questa dimensione non intera è anche ciò che qualifica l'attrattore come un *frattale*. Un frattale, infatti è definito proprio come un oggetto con dimensione di Hausdorff non intera.

Nei seguenti grafici sono rappresentati gli andamenti di due variabili nel tempo e il piano delle fasi (x_1 e x_2).

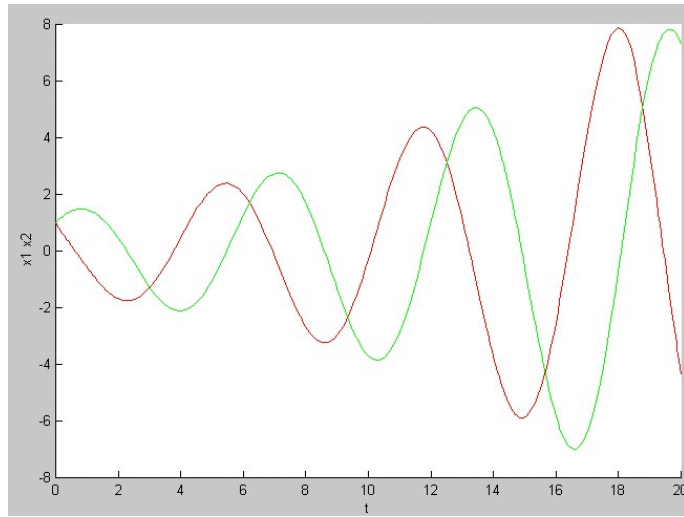


Figura 5.30: Andamento delle variabili x_1 e x_2 nel tempo.

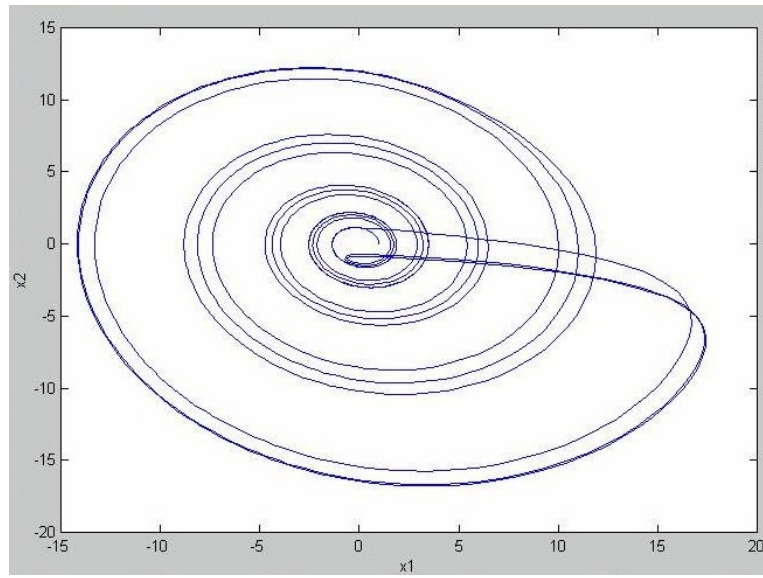


Figura 5.31: Piano delle fasi x_1 e x_2 .

5.9 Le equazioni di Lorenz

Diamo ora uno sguardo ad un altro sistema dinamico che presenta comportamenti caotici: il famoso modello proposto dal meteorologo Lorenz nel 1963. Egli era interessato al problema delle previsioni del tempo e il suo approccio fu quello di prendere in considerazione delle forme semplificate delle equazioni del flusso dei fluidi in presenza di gradienti termici. Dopo una serie di approssimazioni giunse al sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad (5.11)$$

Queste equazioni sembrano abbastanza “innocue”, ma la loro dinamica è stata la sorgente di intensi dubbi e studi matematici.

Nella figura 5.32 è mostrata una traiettoria in tre dimensioni. Come si può vedere, non si approda a nessun ciclo limite, nè ad un punto di equilibrio, ma ci si inoltra nel *caos*!

In questi casi, le soluzioni dipendono sensibilmente dalle condizioni iniziali, così che, pur partendo da due condizioni iniziali arbitrariamente vicine, le soluzioni divergeranno col passare del tempo. Lorenz coniò il termine *effetto farfalla* per descrivere questa cosiddetta *SIC* (Sensitivity to initial conditions).

Egli sostenne che per quanto il battito delle ali di una farfalla sia una perturbazione piccola, essa è in grado di modificare le condizioni atmosferiche dei giorni successivi in un altro luogo. Notiamo che questa affermazione è ben lontana dal dire che una farfalla che batte le ali in Cina farà piovere a Londra dopo cinque giorni. (Una farfalla cinese non ha questo potere!)

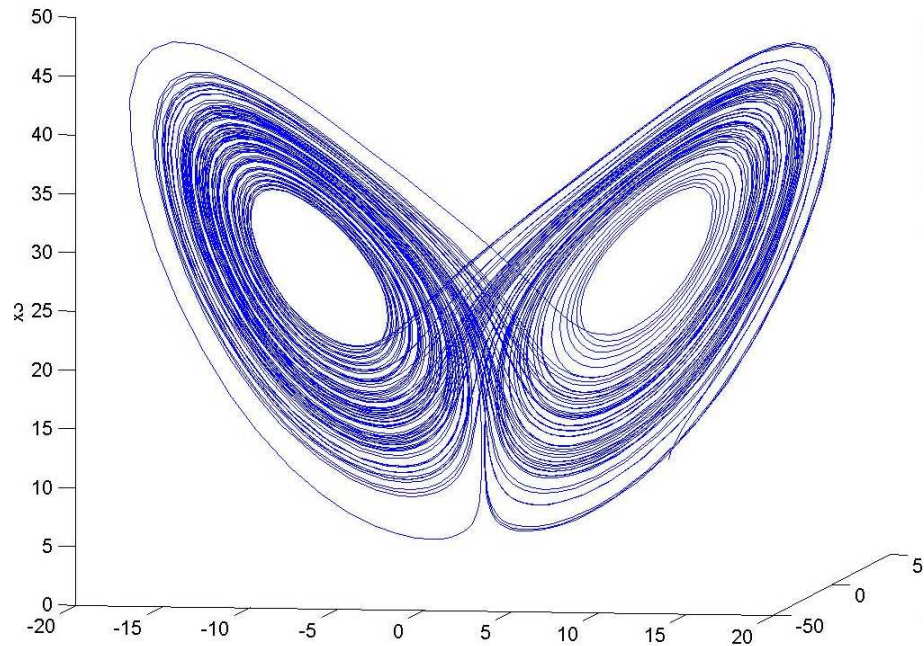


Figura 5.32: Attrattore di Lorenz.

In presenza di soluzioni caotiche di questo tipo, non esiste una definizione rigorosa, nè tantomeno è possibile effettuare previsioni sul comportamento generale dell'orbita; si possono tuttavia, individuare degli attrattori strani. Quello di Lorenz, come quello di Rossler, presentato nel paragrafo precedente, ne sono esempi tipici.

Capitolo 6

Sistemi dinamici e musica

Abbiamo finora affrontato lo studio del suono, delle sue basi matematiche, della teoria fondamentale dei sistemi dinamici e abbiamo presentato due software che, nei loro settori diversi, sono fra i più utilizzati al mondo: Matlab e Csound.

Vediamo ora come questi “ingredienti” possono essere messi insieme per produrre una fusione fra matematica e musica.

Il risultato di questa tesi, infatti, è la creazione di un programma (**SDM**) capace di ricevere un sistema di equazioni differenziali del primo ordine, di visualizzare il suo ritratto nel piano (o eventualmente nello spazio) delle fasi e, a partire da tutto ciò, creare musica!

6.1 Uso di Matlab, non solo da utente

Studiare i sistemi dinamici mediante il programma *pplane5* è stato molto utile. Questa fruizione di Matlab, però, è piuttosto semplice, in quanto non presuppone la conoscenza del suo linguaggio di programmazione. Ogni utente interessato a

questi argomenti può infatti usufruire di tutte le informazioni date da *pplane5*, senza dover entrare nei codici veri e propri.

Matlab, in realtà, è uno strumento molto potente e sarebbe uno spreco utilizzarlo solo da “spettatori”. Per questo motivo non mi sono fermata alla semplice interazione con *pplane5*, ma, a partire da questo programma, ne ho creato un altro che introduce due innovazioni:

- Mentre *pplane5* ci consente di effettuare lo studio dei sistemi dinamici solo nel caso bidimensionale e con al più quattro parametri, con *SDM* si possono studiare sistemi di dimensione superiore (fino a nove variabili) con ben nove parametri a disposizione.
- Il carattere completamente nuovo che emerge in *SDM* è l’opportunità di creare musica a partire dal sistema dinamico.

Di seguito analizzeremo questo secondo aspetto più in dettaglio e spiegheremo per bene cosa si intende per “creare musica” .

6.2 SDM

SDM è un programma che si sviluppa in due momenti:

1. Dapprima si fa uno studio del sistema dinamico, che può essere inserito dall'utente, oppure può essere scelto fra alcuni già presenti nel programma. Tale studio consiste nel ritratto delle soluzioni nel piano (o spazio) delle fasi e nella visualizzazione dei grafici delle singole soluzioni nel tempo.
2. Nella seconda fase, invece, si ricevono i risultati dell'integrazione numerica (ottenuta con il comando *ode45* di Matlab che utilizza il metodo di Runge Kutta) e si è pronti per musicare le soluzioni e il piano delle fasi. *SDM*, in realtà, non crea musica vera e propria, ma crea degli spartiti: i file *score* a cui si è brevemente accennato nel paragrafo 3.4 e i file *Met* che possono essere facilmente tradotti in Midi e ascoltati con un qualsiasi lettore MIDI.

Nei prossimi paragrafi vedremo in dettaglio come avviene la creazione degli spartiti musicali per Csound e per il lettore MIDI.

6.2.1 I file *score*

Abbiamo già detto che questi *file-spartito* devono dare a Csound tutte le informazioni per “dirigere” l'orchestra. Sono necessarie dunque le seguenti indicazioni:

- Quale strumento dell'orchestra deve essere suonato.
- Quale deve essere l'istante di attacco di tale strumento.
- Per quanto tempo deve suonare.

- A quale frequenza deve suonare.
- Con quale ampiezza deve essere emesso il suono.

Ovviamente tutte queste informazioni non possono essere date in modo arbitrario, ma devono seguire la sintassi di Csound, per cui un tipico *file.sco* è costituito da diverse righe della forma:

$$ip_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 \quad p_5$$

dove *i* sta per *instrument*, p_1 indica lo strumento dell'orchestra che deve essere suonato (nel *file orchestra* gli strumenti vengono definiti come: *instr p₁*), p_2 indica l'istante in cui lo strumento deve iniziare a suonare, p_3 dà informazioni sulla durata del suono, p_4 e p_5 , infine, ne stabiliscono le caratteristiche fondamentali: ampiezza e frequenza.

A volte potrebbero esserci anche degli altri parametri legati strettamente al tipo di strumento in uso, ma noi agiremo solo su quelli fondamentali, descritti sopra.

6.2.2 I file *Met*

La creazione dei file *met* segue per grandi linee la stessa strada percorsa per i file *score* di Csound. Si tratta sempre di creare dei file di tipo testo che hanno una sintassi propria, adeguata per poterli trasformare in file *.mid*. La codifica deve rispettare le seguenti regole:

- Tutte le righe del file *.met* devono terminare con il carattere “;”.
- La prima linea deve riportare il numero di canali totali della melodia (numero totale degli strumenti utilizzati).

- Ogni canale deve essere indicato con la seguente stringa: “#canale#” seguito dal numero dello strumento che si vuole utilizzare.
- Le note devono essere inserite in un’unica riga separando ogni informazione su di esse mediante la virgola. Le informazioni che devono essere date per ogni nota sono:
 - Numero dell’ottava (che può variare da 1 a 7).
 - Diesis (che può essere 1 se si vuole indicare la presenza del diesis e 0 altrimenti).
 - Lettera della nota in notazione inglese (C=Do, D=Re, E=Mi, F=Fa, G=Sol, A=La, B=Si).
 - Tempo di durata della nota che viene espresso in quarti e che può assumere i seguenti valori: 1/4, 2/4, 3/4, 4/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64.
- La chiusura del file deve essere effettuata con il carattere “:”.

Sotto viene riportato un esempio di file.MET che permette di suonare 3 canali differenti contemporaneamente:

```
3;  
#canale#0;  
2,0,F,4/4;  
#canale#10;  
1,0,E,1/32;  
#canale#8;  
4,0,A,1/4 :
```

Per capire nei dettagli come sono stati associati i valori del sistema dinamico ai parametri che caratterizzano i due file (*.sco* e *.met*), rimandiamo al capitolo 7 in cui si descrive l'intera esecuzione di SDM.

6.3 Corrispondenze fra musica e immagini

Il programma SDM è stato quindi creato per studiare i sistemi dinamici e produrre musica. Tuttavia, anche nella composizione musicale ci siamo posti degli obiettivi da raggiungere.

Essa non deve rimanere fine a se stessa, ma deve fornirci delle informazioni utili sul sistema dinamico. Gli obiettivi principali che ci siamo posti per investigare le caratteristiche del sistema e dell'eventuale caos presente in esso sono:

- Individuare ricorrenze e riconoscere musicalmente i punti di equilibrio del sistema.
- Osservare come, in presenza di attrattori stabili, più soluzioni, pur partendo da condizioni iniziali differenti, tendono ad assestarsi ad una nota fissa con il passare del tempo.
- Indagare sulla natura del caos, osservando il comportamento del sistema di fronte a piccole variazioni delle condizioni iniziali.

A partire da variabili generiche (quelle del sistema dinamico), si può passare a diversi tipi di variabili musicali:

1. In un primo caso ho musicato l'andamento di una singola variabile del sistema, in funzione del tempo. Le variabili di musicazione sono, in questo caso, il tempo e la frequenza.

Un esempio di questo tipo di musicazione è quello nelle figure 6.1 e 6.2, in cui sono rappresentati l'andamento periodico del pendolo in assenza di

attrito e le corrispondenti note sul pentagramma. Analogamente è rappresentato l'andamento di una popolazione secondo il modello della mappa logistica.

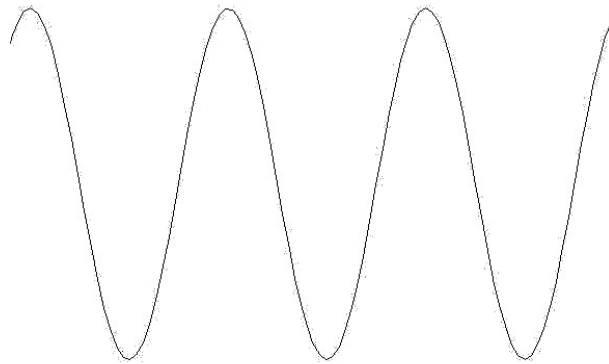


Figura 6.1: Andamento di una variabile nel tempo.



Figura 6.2: Note per una variabile del pendolo.

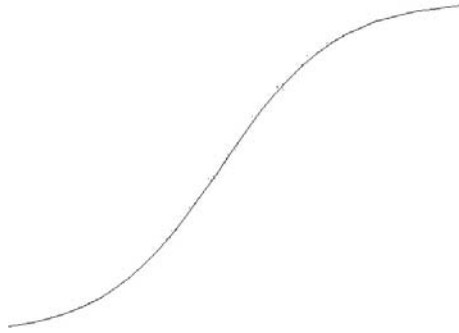


Figura 6.3: Andamento di una variabile nel tempo.

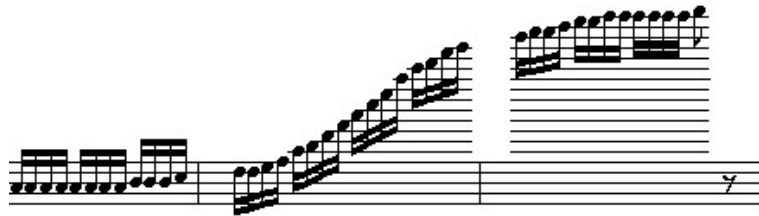


Figura 6.4: Note per una variabile.

2. Successivamente ho prodotto musica a partire dai grafici situati nel piano delle fasi. Le variabili musicali coinvolte, in questo caso, non sono solo il tempo e la frequenza, ma anche l'ampiezza. Alla variabile del sistema posta sull'asse delle ascisse del piano delle fasi, ho assegnato la frequenza, mentre a quella sulle ordinate, l'ampiezza, cioè il volume della nota. Nella figura 6.5 è rappresentata un'orbita che è attratta da un punto di equilibrio e, dal suo spartito, si può osservare una variazione di frequenza iniziale, che poi tende pian piano a svanire fino all'assestamento ad una nota fissa.

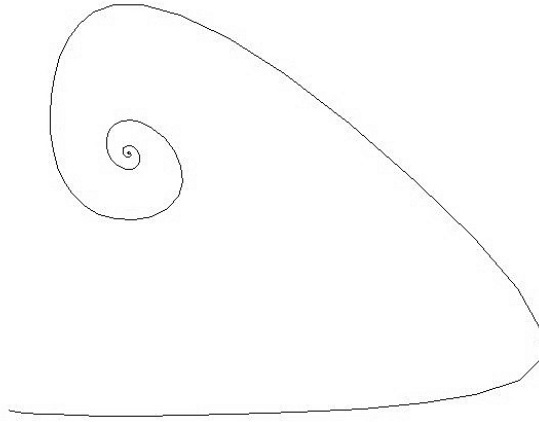


Figura 6.5: Piano fasi.

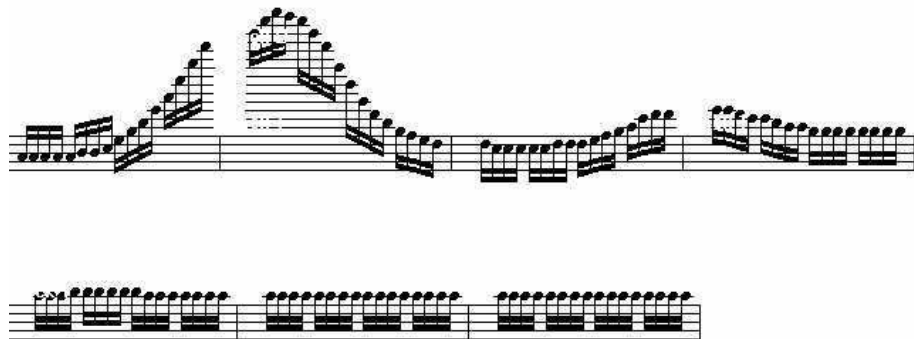


Figura 6.6: Spartito delle ascisse della figura 6.5.

Con questo tipo di musicazione si può inoltre ascoltare la presenza di un ciclo limite, come nel caso di Van der Pol, il cui spartito è rappresentato in figura 6.8. Dalle ultime battute si può percepire una ciclica ripetizione delle note.

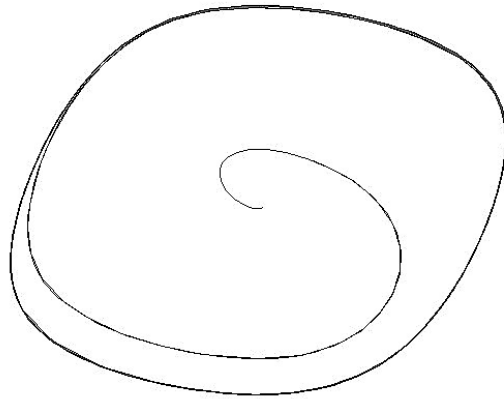


Figura 6.7: Ciclo limite di Van der Pol.

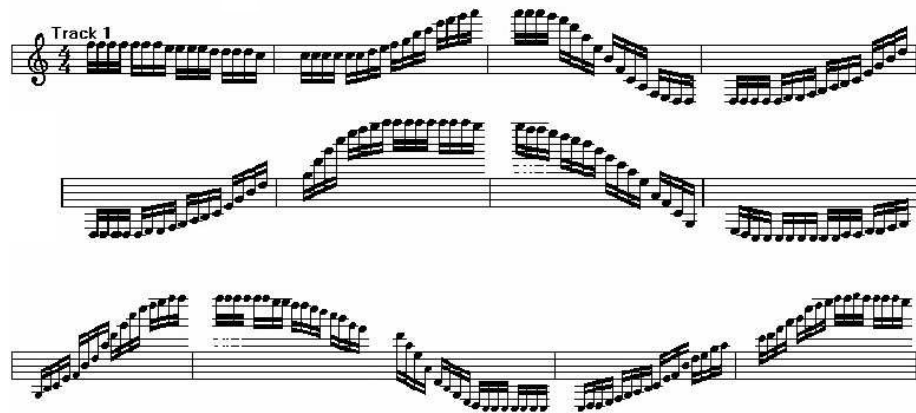


Figura 6.8: Note per il ciclo limite.

3. Un altro tipo di musicazione l'ho prodotta considerando più variabili contemporaneamente. In questo caso, oltre a far variare le note nel tempo, ho dovuto assegnare ad ogni variabile uno strumento diverso, in modo da poterla distinguere rispetto alle altre, anche nella musica.

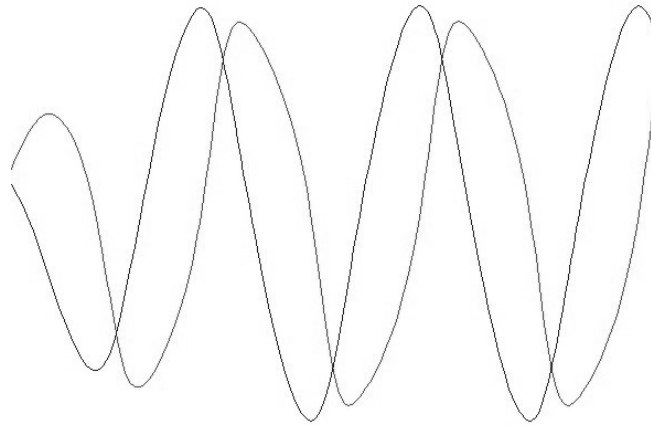


Figura 6.9: Più variabili.



Figura 6.10: Note per più variabili.

4. Per evidenziare le caratteristiche di un attrattore stabile, ho musicato, inoltre, l'andamento di due soluzioni del sistema con condizioni iniziali differenti. Il risultato ottenuto è stato quello di due strumenti che inizialmente producevano melodie diverse e con il passare del tempo tendevano ad uniformarsi alla stessa nota.

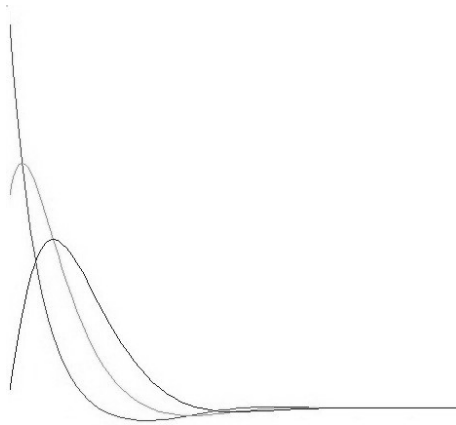


Figura 6.11: Soluzioni con condizioni iniziali diverse.

Musical notation for three tracks. Track 1 is in bass clef, and tracks 2va and 3va are in treble clef. All tracks are in 4/4 time. The notation shows complex rhythmic patterns with many notes, including some that are beamed together. The tracks are arranged vertically, with Track 1 at the top, 2va in the middle, and 3va at the bottom.

Figura 6.12: Note per più soluzioni.

5. Infine, per esplorare gli andamenti caotici di alcuni sistemi, ho deciso di musicare tre soluzioni del sistema di Lorenz, con condizioni iniziali leggermente differenti, osservando che i suoni prodotti dai diversi strumenti conducevano a melodie indipendenti l'una dalle altre.

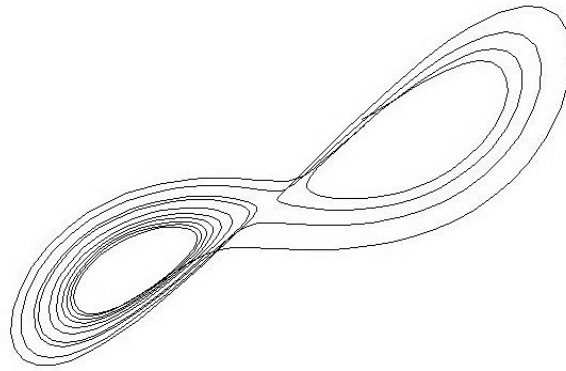


Figura 6.13: Attrattore di Lorenz.

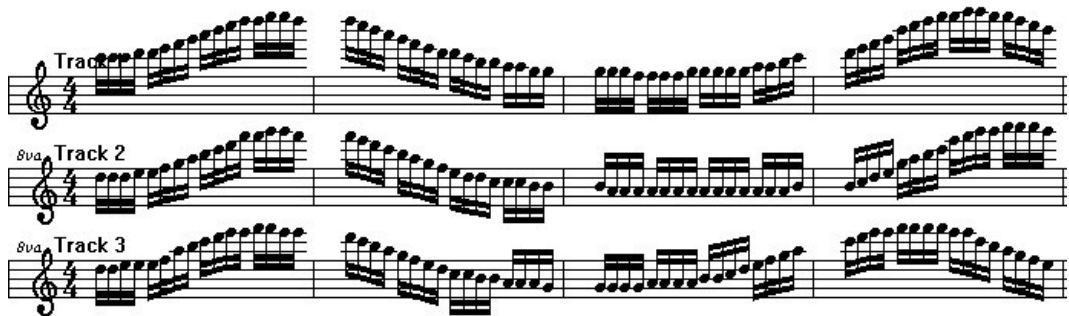


Figura 6.14: Tre soluzioni con condizioni iniziali leggermente differenti.

The image displays two musical staves, each containing three tracks. The top staff is labeled 'Track 1', 'Track 2', and 'Track 3' from top to bottom. The bottom staff is also labeled 'Track 1', 'Track 2', and 'Track 3' from top to bottom. Each track contains a series of notes and rests, with varying dynamics and rhythmic patterns. The notes are often grouped in small clusters, and the overall structure is highly complex and non-linear, characteristic of a chaotic system. The tracks are arranged in a way that suggests a multi-layered or multi-instrumental composition.

Figura 6.15: Continua lo spartito per l'attrattore di Lorenz.

Capitolo 7

SDM, Csound e Midi

7.1 Eseguiamo SDM

Digitando, all'interno di Matlab, *SDM* e premendo invio, comparirà una finestra grafica come quella riportata in figura 7.1. Nel riquadro bianco si può inserire un sistema di equazioni differenziali (che può essere anche salvato mediante il tasto “Salva sistema”), oppure si può utilizzare uno dei sistemi presenti nel menù “Sistemi presenti su disco”. Una volta effettuata questa scelta si può proseguire mediante il pulsante “Passa ai grafici”. A questo punto comparirà una finestra per la gestione dei parametri e delle condizioni iniziali (figura 7.2). Qui si può scegliere se selezionare con il *mouse* il punto iniziale (“Mouse tracing”) o identificarlo mediante i valori delle variabili.

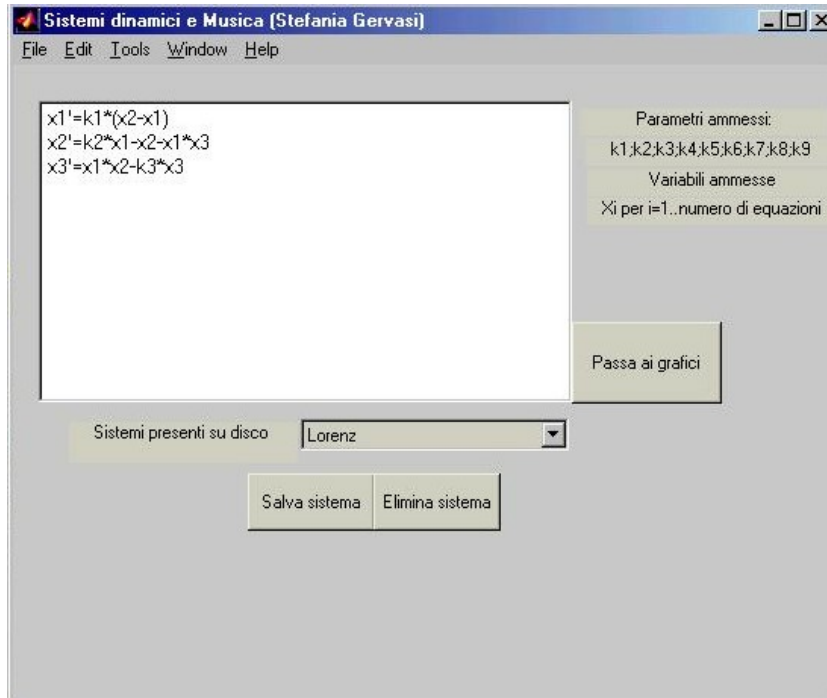


Figura 7.1: Finestra iniziale di SDM.

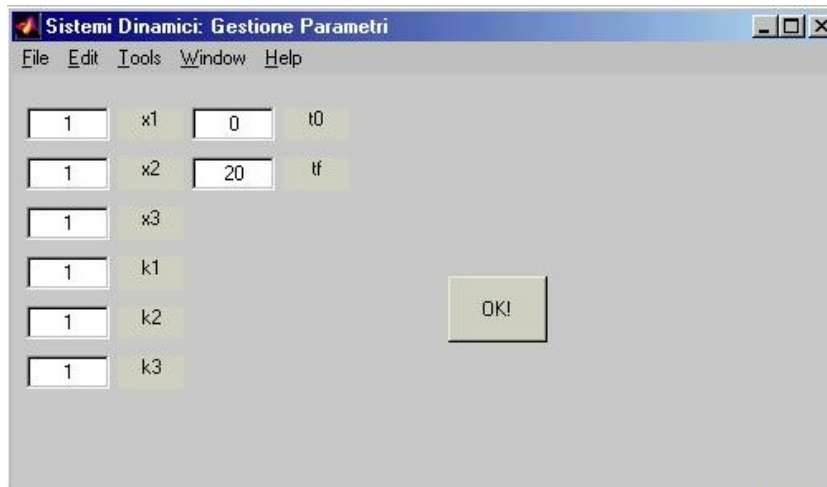


Figura 7.2: Finestra per gestire i parametri e le condizioni iniziali.

Premendo il pulsante “OK” si passa alla finestra “Grafici e Musica” rappresentata in figura 7.3, nella quale si può scegliere di tracciare i grafici delle soluzioni nel piano delle fasi, o semplicemente rappresentare gli andamenti delle variabili nel tempo, mediante opportune scelte nella parte destra della finestra.

I pulsanti in basso, invece, hanno le seguenti funzioni:

- **Nuova funzione.** Premendo questo pulsante il programma riparte dall’inizio e si può scegliere un nuovo sistema.
- **Gestione parametri.** É un pulsante che apre la finestra per la gestione dei parametri e consente di modificare le condizioni iniziali, l’intervallo di tempo da esaminare, nonché gli eventuali parametri.

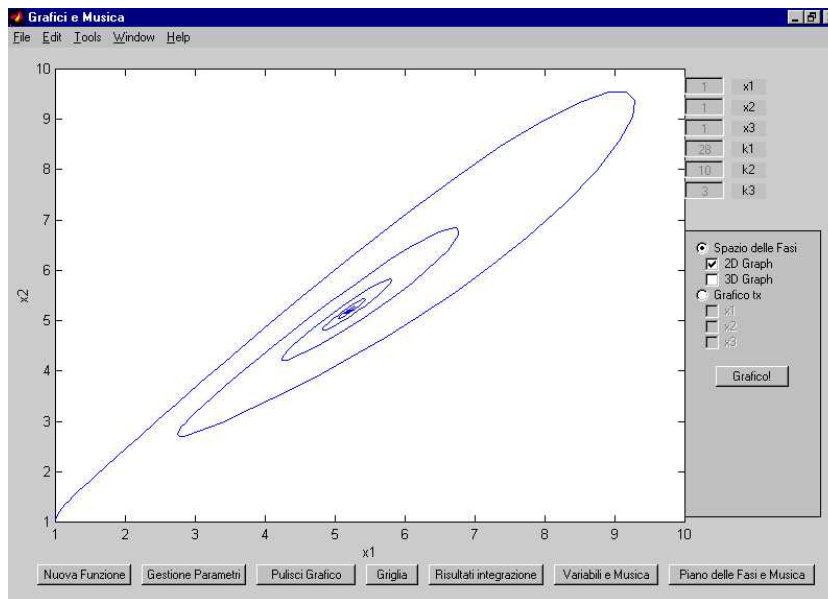
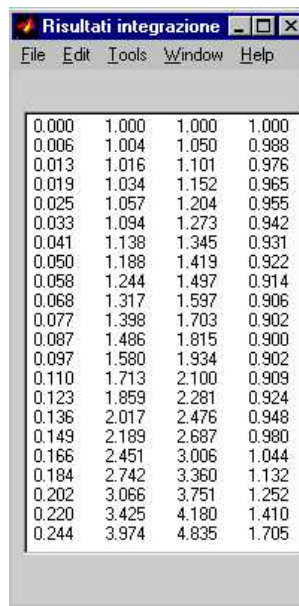


Figura 7.3: Finestra principale di SDM.

- **Pulisci grafico.** Esegue semplicemente la pulizia del grafico corrente.

- **Griglia.** Permette di disegnare la griglia sul piano dei grafici, o eliminarla, se questa è già presente.
- **Risultati integrazione.** Visualizza i valori ottenuti dall'integrazione numerica. In particolare: nella prima colonna sono espressi i tempi, nelle altre sono presenti i valori delle variabili x_1, x_2, \dots, x_n (vedi figura 7.4).



Time	x_1	x_2	x_3
0.000	1.000	1.000	1.000
0.006	1.004	1.050	0.988
0.013	1.016	1.101	0.976
0.019	1.034	1.152	0.965
0.025	1.057	1.204	0.955
0.033	1.094	1.273	0.942
0.041	1.138	1.345	0.931
0.050	1.188	1.419	0.922
0.058	1.244	1.497	0.914
0.068	1.317	1.597	0.906
0.077	1.398	1.703	0.902
0.087	1.486	1.815	0.900
0.097	1.580	1.934	0.902
0.110	1.713	2.100	0.909
0.123	1.859	2.281	0.924
0.136	2.017	2.476	0.948
0.149	2.189	2.687	0.980
0.166	2.451	3.006	1.044
0.184	2.742	3.360	1.132
0.202	3.066	3.751	1.252
0.220	3.425	4.180	1.410
0.244	3.974	4.835	1.705

Figura 7.4: Finestra con i risultati dell'integrazione.

- **Variabili e musica.** È il pulsante che permette di musicare fino a tre soluzioni contemporaneamente, con alcuni strumenti scelti direttamente dall'utente, mediante finestre come quelle rappresentate nelle figure 7.6, 7.5, 7.7 e 7.8.
- **Piano delle fasi e musica.** È un pulsante analogo a quello precedente, ma consente di musicare un grafico del piano delle fasi.



Figura 7.5: Finestra per scegliere le variabili da musicare.



Figura 7.6: Finestra per scegliere lo strumento con cui musicare le soluzioni.

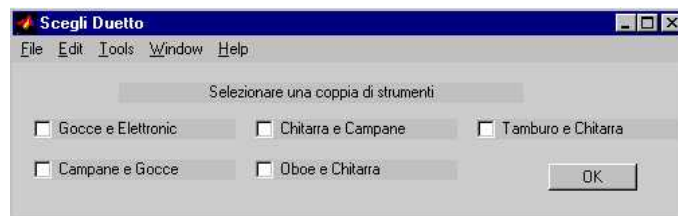


Figura 7.7: Finestra per scegliere una coppia di strumenti.



Figura 7.8: Finestra per scegliere un trio.

7.2 Creazione dei file *.sco* e *.met* da SDM

Per creare un file *score* o *met* da Matlab sono disponibili dei comandi che, con opportuni parametri, ci consentono di aprire, scrivere e modificare il file stesso: *fopen*, *fprintf*, *fclose*.

In questo modo viene generato un file di tipo testo, leggibile, mediante l'estensione *sco* o *met*, rispettivamente da Csound o da Midi.exe.

A questo punto cerchiamo di capire come vengono estratte le informazioni per assegnare i valori ai parametri che devono essere inseriti nei file.

7.2.1 File score

I file *score* necessitano, per produrre uno spartito, dei parametri p_i . È il sistema dinamico che qui entra in gioco, con le sue soluzioni. Dall'integrazione numerica si ricava una matrice (visualizzabile con il pulsante "Risultati integrazione") in cui sono presenti $n+1$ colonne (n è il numero di equazioni del sistema) che indicheremo con t, x_1, \dots, x_n . La prima colonna (t) contiene le coordinate temporali dei punti risultati dall'integrazione numerica. Questi vengono inseriti nella posizione p_2 del *file score*.

Per stabilire la durata adeguata da assegnare all'emissione sonora sembra naturale rispondere ad un'esigenza: rimanere il più possibile fedeli all'andamento delle soluzioni nel tempo. Così l' i -esimo parametro p_3 sarà pari alla differenza

$$t(i+1) - t(i).$$

Restano ora da collocare nel *file score* l'ampiezza e la frequenza. È necessario, però, fare una distinzione fra il caso in cui viene musicata una o più soluzioni e il caso in cui viene musicato un grafico nel piano delle fasi.

1. *File score* per soluzioni.

In questo primo caso, come si è visto nell'esecuzione del programma, si può scegliere quanti strumenti suonare contemporaneamente (fino a tre). Si potrebbero anche musicare quattro soluzioni contemporaneamente, ma in tal caso risulterebbe molto difficile distinguere le diverse soluzioni e di conseguenza la rappresentazione musicale perderebbe la sua utilità.

Nella creazione di un *file score* per uno strumento, l'ampiezza del suono è fissata e la frequenza si ottiene dal vettore colonna corrispondente alla soluzione da musicare (x_i).

Naturalmente inserire x_i in modo diretto nella posizione delle frequenze, avrebbe creato musica atonale; con semplici passaggi, invece, è possibile riportare i valori di x_i in corrispondenza con le frequenze relative a cinque ottave del pianoforte, considerando la scala diatonica ben temperata (cioè solo i tasti bianchi).

Come primo passo è necessario creare un vettore che contenga i valori delle frequenze delle 35 note prese in considerazione. Attraverso una proporzione, otteniamo, associato all'elemento j –esimo del vettore x_i , un numero (r , da 0 a 34) a cui corrisponderà, con un opportuno arrotondamento, una delle nostre frequenze:

$$(x_i(j) - \text{minimo}(x_i)) : (\text{massimo}(x_i) - \text{minimo}(x_i)) = r : 34. \quad (7.1)$$

Questo ci consente di ottimizzare l'utilizzo delle 35 note: infatti il *range* dei

valori assunti da x_i viene diviso equamente in 35 intervalli, e ad ognuno è associata una nota. Il programma si adatterà, quindi, alla rappresentazione sia di funzioni ad ampio *range*, sia di quelle che presentano piccole variazioni. Gli *m-file* che implementano questa procedura sono quelli che hanno il nome *music*(*nome-strumento*). Essi, inoltre, creano dei vettori contenenti la sequenza di note che viene suonata, restituiti come output nel *workspace*. I file score per due o tre strumenti sono creati in modo analogo, facendo solo alcune ulteriori osservazioni:

- Il parametro p_1 assumerà dapprima il valore relativo al primo strumento, poi quello relativo al secondo e così via.
- I parametri degli istanti di attacco e della durata delle note saranno gli stessi per tutti gli strumenti.
- L'ampiezza sarà fissata in modo da rendere udibili al meglio tutti gli strumenti.
- La frequenza è calcolata nello stesso modo presentato in precedenza, con l'accortezza di calcolare, ora, il minimo e il massimo su tutti i vettori delle soluzioni da musicare, e non sulle singole colonne, in modo da rendere confrontabili i suoni emessi dai diversi strumenti.

2. *File score per grafici nel piano delle fasi.*

Anche in questo caso si può scegliere uno degli strumenti della finestra rappresentata in figura 7.6. La creazione dello spartito per questo strumento utilizzerà i valori dei tempi come descritto nel punto (1). La peculiarità di

questa rappresentazione è che anche l'ampiezza assume un ruolo significativo, descrivendo l'andamento della variabile delle ordinate del piano delle fasi attraverso una proporzione simile a quella impostata per le frequenze (7.1).

L'andamento dell'altra variabile è descritto tramite la variazione delle note musicali.

Ascoltando, nel tempo, la musica generata con il contributo di entrambe le variabili, non sarà udibile solo l'orbita del sistema nel piano delle fasi (che è la proiezione della soluzione nel piano $t = 0$), ma si ascolteranno le soluzioni vere e proprie. Ciò che nel primo caso musicavamo con due strumenti è ora compattato in uno solo, grazie all'aggiunta di variazioni di volume.

7.2.2 File Met

Per creare questo tipo di file con SDM, l'assegnazione delle note è analoga a quella usata per i file score, con l'unica accortezza di far corrispondere alle frequenze delle note, la relativa notazione inglese nelle rispettive ottave. Per i tempi, invece, poichè la sintassi dei file *.met* non accetta tutti i valori numerici, ma solo alcune frazioni, si è stabilito di fissare la durata ad $1/32$.

Una volta ottenuto questo file, lo si può modificare a piacimento all'interno del programma "Midi.exe", con l'accortezza di inserire il carattere ":" alla fine del file, inserire il numero dei canali scelti per l'esecuzione sonora e il numero totale degli strumenti utilizzati.

7.3 Dallo spartito alla musica

Siamo ora forniti di uno spartito pronto per dirigere una certa orchestra. Abbiamo a che fare però con spartiti e orchestre “virtuali”, quindi necessitiamo di un mezzo che ci consenta di ascoltare veramente la musica generata in modo algoritmico con Matlab e, anche qui, dobbiamo fare una distinzione fra Midi e Csound.

- Per i file *.met* basta entrare nel programma *Midi.exe* (rappresentato in figura 7.9) e, dopo aver effettuato le opportune variazioni descritte nel paragrafo 7.2.2, premere il pulsante “Play” per ascoltare la musica, oppure salvare il file in formato midi per ascoltarlo con un qualsiasi altro lettore MIDI.

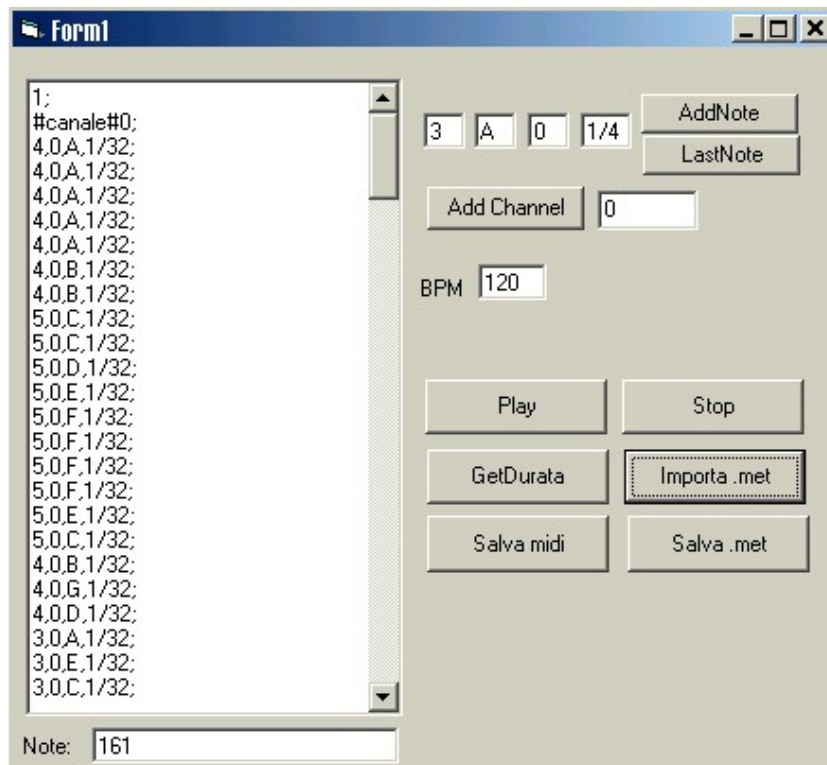


Figura 7.9: Finestra di *Midi.exe*.

- In Csound ci si trova di fronte ad una finestra come quella rappresentata in figura 7.10, e non ci resta altro che selezionare, fra i *file orchestra*, lo strumento per il quale in Matlab abbiamo scelto di creare lo spartito e, fra i *file score*, lo spartito creato.

La compilazione di un *file* di tipo WAV avviene mediante il tasto *CSOUND*.

A questo punto basta un semplice “click” su *PLAY* per “ascoltare” finalmente il nostro sistema dinamico!

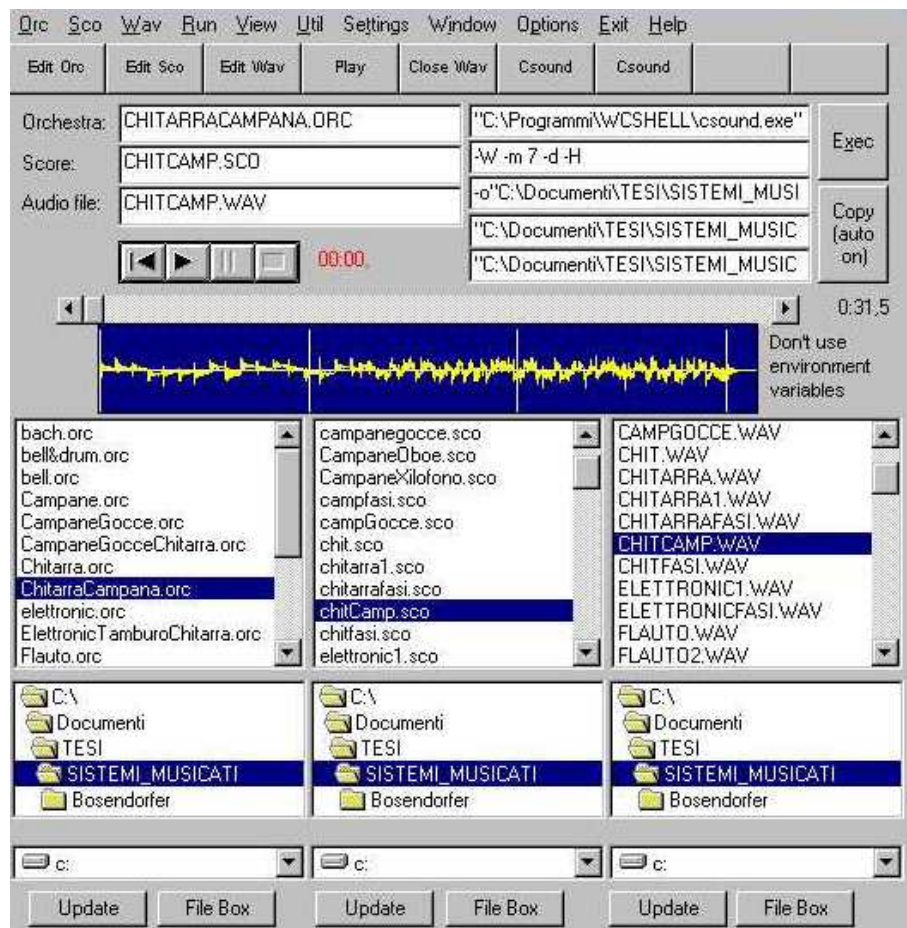


Figura 7.10: Finestra di Csound.

Appendice A

File di programmazione per SDM

Presentiamo di seguito alcuni *file* di programmazione, che contengono i codici Matlab necessari per la realizzazione del programma SDM.

Riportiamo solo quelli più significativi, utili per comprendere la creazione dei *file score* e dei *file met*, scopo del nostro lavoro.

A partire da un programma principale (*SDM.m*) che viene eseguito nel momento in cui si digita SDM nel *workspace* di Matlab, si dipartono varie procedure che consentono all'utente di scegliere, mediante diverse finestre di dialogo, quante variabili musicare, per quali di queste generare il *file score*, con quale strumento si vuole ascoltare la musica prodotta, etc.

Di seguito sono riportati due file di questo tipo: *SDM.m*, che crea la finestra principale del programma, e *Sceglistrumento.m*, il quale produce una finestra di dialogo che consente all'utente di scegliere uno strumento. Il *file Butsceglistr.m*, richiamato da *Sceglistrumento.m* è un altro *m-file* che controlla le scelte effettuate dall'utente e indirizza il programma verso la creazione del *file score* per lo strumento prescelto.

Analoghi a questo *m-file* sono quelli che controllano la scelta delle variabili da musicare, che non riportiamo nel testo.

In base allo strumento scelto, il programma proseguirà con un opportuno *m-file*

che creerà il *file score* adatto a quel tipo di *orchestra* (di seguito riportiamo quello relativo allo xilofono). All’inizio del file *score*, infatti, è necessario inserire delle righe di comando che sono specifiche dello strumento prescelto.

Gli *m-file* che portano il nome di *music<nomestrumento>.m* sono quelli che creano la corrispondenza fra i vettori delle soluzioni e le frequenze relative ad alcune ottave della scala diatonica del pianoforte (è riportato, qui di seguito, quello relativo alla chitarra).

Questi file, inoltre, consentono di creare i file *.met* per Midi.exe e di salvarli con il nome desiderato.

SDM.m (Sistemi Dinamici e Musica)

```

h0=figure('Units','points', 'Color',[0.8 0.8 0.8],...
'Colormap',mat0, 'CreateFcn','RiempiCasellaSistemi', ...
'FileName','C:\MATLABR11\work\VALUTA.m',...
'Name','Sistemi dinamici e Musica (Stefania Gervasi)', ...
'NumberTitle','off', 'PaperPosition',[18 180 576 432], ...
'PaperUnits','points', 'Position',[123.75 93 408 314.25], ...
'Tag','Ins', 'ToolBar','none','CreateFcn','RiempiCasellaSistemi');
h1 = uicontrol('Parent',h0, 'Units','points', ...
'BackgroundColor',[1 1 1], 'ButtonDownFcn','clear all', ...
'Callback','CmdValutaEspr', 'FontSize',12, ...
'HorizontalAlignment','left', 'ListboxTop',0, ...
'Max',2, 'Position',[12.75 147 264 149.25], ...
'Style','edit', 'Tag','StrSistema');
h1 = uicontrol('Parent',h0, 'Units','points', ...
'BackgroundColor',[0.831372549019608 0.815686274509804 0.784313725490196],...
'Callback','butValuta', 'ListboxTop',0, ...
'Position',[276.75 146.25 74.25 40.5], ...

```



```
'String','Passa ai grafici', 'Tag','CmdValuta');
h1 = uicontrol('Parent',h0, 'Units','points', ...
'BackgroundColor',[0.831372549019608 0.815686274509804 0.784313725490196], ...
'ListboxTop',0, 'Max',2, ...
'Position',[280.5 279 123.75 13.5], 'String','Parametri ammessi:', ...
'Style','text', 'Tag','StaticText1');
h1 = uicontrol('Parent',h0, 'Units','points', ...
'BackgroundColor',[0.831372549019608 0.815686274509804 0.784313725490196], ...
'ListboxTop',0, 'Max',2, ...
'Position',[283.5 264 123.75 13.5], 'String','k1;k2;k3;k4;k5;k6;k7;k8;k9', ...
'Style','text', 'Tag','StaticText1');
h1 = uicontrol('Parent',h0, 'Units','points', ...
'BackgroundColor',[0.831372549019608 0.815686274509804 0.784313725490196], ...
'ListboxTop',0, 'Max',2, ...
'Position',[284.25 249 123.75 13.5], 'String','Variabili ammesse', ...
'Style','text', 'Tag','StaticText1');
h1 = uicontrol('Parent',h0, 'Units','points', ...
'BackgroundColor',[0.831372549019608 0.815686274509804 0.784313725490196], ...
'ListboxTop',0, 'Max',2, ...
'Position',[284.25 234.75 123.75 13.5], 'String','Xi per i=1..numero di equazioni', ...
'Style','text', 'Tag','StaticText1');
h1 = uicontrol('Parent',h0, 'Units','points', ...
'BackgroundColor',[0.831372549019608 0.815686274509804 0.784313725490196], ...
'Callback','butSalvaS', 'ListboxTop',0, ...
'Position',[116.25 83.25 63 28.5], 'String','Salva sistema', ...
'Tag','PushSalva');
h1 = uicontrol('Parent',h0, 'Units','points', ...
'BackgroundColor',[0.831372549019608 0.815686274509804 0.784313725490196], ...
'Callback','butCarica', 'ListboxTop',0, ...
```

```
'Max',2, 'Position',[142.5 116.25 132.75 22.5], ...
'String',Fill, 'Style','popupmenu', ...
'Tag','Sistemi', 'UserData','[]', 'Value',2);
h1 = uicontrol('Parent',h0, 'Units','points', ...
'BackgroundColor',[0.831372549019608 0.815686274509804 0.784313725490196], ...
'ListboxTop',0, 'Position',[27.75 117 113.25 20.25], ...
'String','Sistemi presenti ', 'Style','text', ...
'Tag','StaticText2');
h1 = uicontrol('Parent',h0, 'Units','points', ...
'BackgroundColor',[0.831372549019608 0.815686274509804 0.784313725490196], ...
'Callback','butEliminaS', 'ListboxTop',0, ...
'Position',[178.5 83.25 63 28.5], ...
'String','Elimina sistema', 'Tag','PushSalva');
helpdlg('SELEZIONARE UNO DEI SISTEMI DINAMICI già presente nel program-
ma, oppure INSERIRE UN NUOVO SISTEMA! ...Buon divertimento!', 'Benvenuti in:
SISTEMI DINAMICI E MUSICA (Stefania Gervasi)');
end
```

Sceglistrumento.m

```
figure('Tag','sceglistrum','NumberTitle','off','Name','Scegli Strumento',...
'Position',[ 123 200.5 500.75 114 ]);
uicontrol('Style','text','Position',[ 80.25 84.75 300.25 15.75 ],'String','Selezionare uno
strumento');
kx=0; ky=0;
strcheck='cTamburo'; stretiq='Tamburo';
uicontrol('Style','checkbox','Tag',strcheck,'String',stretiq,...
'Position',[17.25+kx 57.75-ky 75 15 ]);
kx=kx+85; ky=0;
```

```
strcheck='cChitarra'; stretiq='Chitarra';
uicontrol('Style','checkbox','Tag',strcheck,'String',stretiq,...
'Position',[17.25+kx 57.75-ky 75 15 ]);
kx=kx+85; ky=0;
strcheck='cOboe'; stretiq='Oboe';
uicontrol('Style','checkbox','Tag',strcheck,'String',stretiq,...
'Position',[17.25+kx 57.75-ky 75 15 ]);
kx=kx+85; ky=0;
strcheck='cXilofono'; stretiq='Xilofono';
uicontrol('Style','checkbox','Tag',strcheck,'String',stretiq,...
'Position',[17.25+kx 57.75-ky 75 15 ]);
kx=0; ky=0;
strcheck='cElettronico'; stretiq='Elettronico';
uicontrol('Style','checkbox','Tag',strcheck,'String',stretiq,...
'Position',[17.25+kx 27.75-ky 75 15 ]);
kx=kx+85; ky=0;
strcheck='cGocce'; stretiq='Gocce';
uicontrol('Style','checkbox','Tag',strcheck,'String',stretiq,...
'Position',[17.25+kx 27.75-ky 75 15 ]);
kx=kx+85; ky=0;
strcheck='cCampane'; stretiq='Campane';
uicontrol('Style','checkbox','Tag',strcheck,'String',stretiq,...
'Position',[17.25+kx 27.75-ky 75 15 ]);
kx=kx+85; ky=0;
strcheck='cFlauto'; stretiq='Flauto';
uicontrol('Style','checkbox','Tag',strcheck,'String',stretiq,...
'Position',[17.25+kx 27.75-ky 75 15 ]);
uicontrol('Style','pushbutton','Tag','sceglistrum',...
'Position',[380 43.5 65.5 20 ],'String','OK','Callback','butSceglistr');

```

MusicChitarra.m

Questo file riceve un vettore (soluzione del sistema dinamico scelto) e ne calcola le frequenze e le note corrispondenti. Si considerano 5 ottave della scala diatonica del pianoforte. Esso crea, inoltre, un file di testo, con estensione *met*, per riprodurre il suono mediante il programma Midi.exe.

```
function frequenze=music(x,minimo,massimo)
global Soluzioni
q=(x-minimo)*34/(massimo-minimo);
if minimo==massimo
temp=ones(length(x),1);
q=minimo*temp;
end
y=floor(q);
notediat=str2mat('do1','re1','mi1','fa1','sol1','la1','si1',...
'do2','re2','mi2','fa2','sol2','la2','si2',...
'do3','re3','mi3','fa3','sol3','la3','si3',...
'do4','re4','mi4','fa4','sol4','la4','si4',...
'do5','re5','mi5','fa5','sol5','la5','si5');
mididiat=str2mat('1,0,C,1/32;', '1,0,D,1/32;', '1,0,E,1/32;', '1,0,F,1/32;', '1,0,G,1/32;',...
'1,0,A,1/32;', '1,0,B,1/32;', '2,0,C,1/32;', '2,0,D,1/32;', '2,0,E,1/32;', '2,0,F,1/32;',...
'2,0,G,1/32;', '2,0,A,1/32;', '2,0,B,1/32;', '3,0,C,1/32;', '3,0,D,1/32;', '3,0,E,1/32;',...
'3,0,F,1/32;', '3,0,G,1/32;', '3,0,A,1/32;', '3,0,B,1/32;', '4,0,C,1/32;', '4,0,D,1/32;',...
'4,0,E,1/32;', '4,0,F,1/32;', '4,0,G,1/32;', '4,0,A,1/32;', '4,0,B,1/32;', '5,0,C,1/32;',...
'5,0,D,1/32;', '5,0,E,1/32;', '5,0,F,1/32;', '5,0,G,1/32;', '5,0,A,1/32;', '5,0,B,1/32;');
frequenzediat=str2mat('65.41', '73.42', '82.41', '87.31', '98.00', '110.0', '123.5',...
'130.8', '146.8', '164.8', '174.6', '196.0', '220.0', '246.9',...
```

```
'261.6','293.7','329.6','349.2','392.0','440.0','493.9',...
'523.3','587.3','659.3','698.5','784.0','880.0','987.8',...
'1047','1175','1319','1397','1568','1760','1976');
note=notediat(y+1,:);
Messaggio = 'Inserire il nome del file MET';
titolo = 'Salva file MET';
linee = 1;
nf= inputdlg(Messaggio,titolo,linee);
nomefile=strcat('C:\Programmi\Wcshell\',char(nf),'.met');
if strcmp(nomefile,'C:\Programmi\Wcshell\.met')==0
esistefile=exist(nomefile);
risposta='Sì';
if esistefile ==0
risposta=questdlg('File già presente. Sovrascrivere ??','Domanda','Sì','No','No');
if risposta=='No'
break;
end
end
met=mididiat(y+1,:);
dim=length(met);
uno='1';
canale='#canale#0';
fid=fopen(nomefile,'w');
fprintf(fid,'%s\n',uno);
fprintf(fid,'%s\n',canale);
fclose(fid);
for i=1:dim
fid=fopen(nomefile,'a');
fprintf(fid,'%s\n',met(i,:));
```

```
fclose(fid);
end
helpdlg('Il file musicale è stato salvato correttamente in: C:\Programmi\Wcshell','Avviso');
end
frequenze=frequenzediat(y+1,:);
```

SalvaXilofono

```
global t x tf var frequenze Soluzioni;
close 'Scegli Strumento'
% Messaggio che permette di scegliere il nome del file musicale da creare
Messaggio = 'Inserire il nome del file ';
titolo = 'Salva file musicale';
linee = 1;
nf= inputdlg(Messaggio,titolo,linee);
nomefile=strcat('C:\Programmi\Wcshell\',char(nf),'.sco');
if strcmp(nomefile,'C:\Programmi\Wcshell\.sco')==0
esistefile=exist(nomefile);
risposta='Sì';
if esistefile =0
risposta=questdlg('File già presente. Sovrascrivere?','Domanda','Sì','No','No');
if risposta=='No'
break;
end
end
Soluzioni=[t,x];
minimo=min(Soluzioni(:,var+1));
massimo=max(Soluzioni(:,var+1));
frequenze=musicXil(Soluzioni(:,var+1),minimo,massimo);
```

```
d=length(frequenze);
sco=[];
sco1=['; File score per XILOFONO'];
sco2=['f 2 0 512 7 0 43 1 171 1 84 -1 171 -1 43 0'];
sco3=['f 3 0 512 9 1 1 0'];
fid=fopen(nomefile,'w');
fprintf(fid,'%s\n',sco);
fprintf(fid,'%s\n',sco1);
fprintf(fid,'%s\n',sco2);
fprintf(fid,'%s\n',sco3);
fclose(fid);
for i=1:d-1
t0=num2str(Soluzioni(i,1));
delta=(Soluzioni(i+1,1)-Soluzioni(i,1));
if delta>=0.05
deltat=num2str(delta);
sco=['i1 ',t0,' ',deltat,' ', ' 1000 ', ' 15000 ',frequenze(i,:), ' 0.0010'];
idmusic=fopen(nomefile,'a');
fprintf(idmusic,'%s\n',sco);
fclose(idmusic);
end
end
deltat=num2str((tf-Soluzioni(d,1)));
t0=num2str(Soluzioni(d,1));
sco=['i1 ',t0,' ',deltat,' 1000 ', ' 15000 ',frequenze(d,:), ' 0.0010'];
idmusic=fopen(nomefile,'a');
fprintf(idmusic,'%s\n',sco);
fclose(idmusic);
helpdlg('Il file musicale è stato salvato correttamente in: C:\Programmi\Wcshell', 'Avviso').
```

Bibliografia

- [1] Edward Beltrami, “*Mathematics for dynamic modeling*”, Academic press, 1987.
- [2] Dave Benson, “*Mathematics and music*”, Department of Mathematics, University of Georgia, USA. <ftp://byrd.math.uga.edu/pub/html/index.html>.
- [3] E.Bilotta, P.Pantano, “*Artificial life music tells of complexity*”, ALMMA 2001 (pp.17 – 28).
- [4] M.Braun, “*Differential equations and their applications*”, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [5] Alberto Cavallo, Roberto Setola, Francesco Vasca, “*Guida operativa a MATLAB, SIMULINK e Control Toolbox*”, Liguori Editore, Novembre 1994.
- [6] Andrea Frova, “*Fisica nella musica*”, Zanichelli editore, Settembre 1999.
- [7] Enrico Giusti, “*Analisi Matematica 2*”, Bollati Borlinghieri editore, 1989.
- [8] James Gleick, “*Caos*”, Sansoni Editore, 1996.
- [9] Morris W. Hirsch, Stephen Smale, “*Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*”, Academic Press, New York, 1974.
- [10] D.W.Jordan, P.Smith, “*Nonlinear ordinary differential equations*”, Oxford University Press, 1977.

- [11] Daniel Kaplan and Leon Glass, “*Understanding nonlinear dynamics*”, Springer-Verlag New York, 1995.
- [12] Wifred Kaplan, “*Advanced Mathematics for engineers*”, Addison-Wesley Publishing Company, 1981.
- [13] A.Kolmogorov, S.Fomine, “*Elements de la theorie des fonctions et de l’analyse fonctionnelle*”, Editions Mir.Moscou, 1977.
- [14] A.Mihalic, “*DNA and Composition*”, ALMMA 2001 (pp.120 – 126).
- [15] Eduardo Reck Miranda, “*Computer sound syntesis for electronic musician*”, Focal press, 1998.
- [16] Eduardo Reck Miranda, “*Evolving Cellular Automata Music: From Sound Synthesis to composition*”, ALMMA 2001 (pp.87 – 98).
- [17] G.L.Nelson, “*Real time trasformation of musical material with fractal algorithms*”, in Computers mathematics with applications, Vol. 32, (pp.109 – 116) (1996).
- [18] C.D. Pagani, S. Salsa, “*Analisi matematica*”, Masson, vol. 2.
- [19] William J.Palm, “*MATLAB per l’ingegneria*”, McGraw-Hill Libri Italia srl, 1999.
- [20] Livio C.Piccinini, Guido Stampacchia, Giovanni Vidossich, “*Equazioni differenziali ordinarie in \mathbb{R}^n (problemi e metodi)*”, Liguori editore, 1978.
- [21] John R. Pierce, “*La scienza del suono*”, Zanichelli editore, febbraio 1988.
- [22] M.Prerau, “*On the possibilities of an analytic synthesis system*”, ALMMA 2001 (pp.8 – 16).
- [23] David A. Sanchez, “*Ordinary differential equations and stability theory: an introduction*”, W.H.Freeman and Company, San Francisco, 1968 .

- [24] Charles Sparks Rees, S.M. Shah, C.V. Stanojevic “*Theory and applications of Fourier analysis*”, Marcel Dekker, New York, 1981.
- [25] Barry Vercoe, Media Lab. MIT & contributors, *The public Csound Reference Manual*.
- [26] M.Witten, “*The sounds of science: Listening to dynamical systems towards a musical exploration of complexity*”, in Computers mathematics with applications, Vol. 32, (pp.145 – 173) (1996).
- [27] C.Ray Wylie, Louis C. Barrett, “*Advanced engineering mathematics*”, McGraw-Hill book company, 1985.
- [28] Igor Yevin, Alexander Koblyakov, “*Attractor network model of music tonality*”, ALMMA 2001 (pp.3 – 7).

**Siti per approfondimenti sulla musica generativa e sulle sperimentazioni
musico-matematiche:**

- [29] <http://brainop.media.mit.edu/online/net-music/net-instrument/thesis.html>.
- [30] <http://eamusic.dartmouth.edu/wowem/menu.html>.
- [31] <http://library.advanced.org/3493/>.
- [32] <http://math.bu.edu/DYSYS/dysys.html>.
- [33] <http://math.rice.edu/~dfield>
- [34] <http://music.dartmouth.edu/~wowem/hardware/algorithmdefinition.html>.
- [35] <http://pw1.netcom.com/~sjustus/geb.html>.
- [36] <http://reglos.de/musinum>.
- [37] <http://tqjunior.thinkquest.org/4116/Music/music.html>.
- [38] <http://www.calresco.org/applicat.htm>.
- [39] <http://www.ccsr.uiuc.edu/People/gmk/Projects/ChuaSoundMusic/>
- [40] <http://www.digitale-medien.de/beckert>.
- [41] <http://www.doc.ic.ac.uk/~jl99/ai/inventionmusic.html>.
- [42] http://www.ee.umd.edu/~blj/algorithmic_composition/.
- [43] <http://www.geocities.com/vienna/9349/index.html>.
- [44] <http://www.ipem.rug.ac.be/nfwo/meeting7.html>.
- [45] <http://www.ks.rus.uni-stuttgart.de/people/schulz/fmusic/recursion.html>.

[46] <http://www.math.sunysb.edu/dynamics>.

[47] <http://www.maths.gla.ac.uk/~km/dsystemus.htm>.

[48] <http://www.math.niu.edu/~rusin/uses-math/music/index.html>.

[49] <http://www.ucl.ac.uk/CNDA/resources/index.html>.