S.S.I.S. - Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento
Secondario della Toscana

Sede di Firenze

Laboratorio di Informatica - Cabri

Metodi geometrici per l'algebra

Maria Rita Lungo

Anno accademico 2007/2008

Introduzione

Si propone un metodo grafico per la risoluzione di equazioni di primo e secondo grado, allo scopo di sottolineare il rapporto strettissimo che intercorre tra l'algebra e la geometria.

Questo rapporto, com'è noto, non si stabilisce solo con la geometria cartesiana ma ha la sua origine nella cosiddetta *algebra geometrica* di Euclide, sviluppata anche dalla tradizione algebrista italiana.

Con la presente attività, a partire da semplici equazioni e traducendo in oggetti geometrici i suoi termini si vuole evidenziare il significato delle equazioni e delle relazioni che sussistono tra i coefficienti dei suoi termini, al di là del mero calcolo risolutivo.

A supporto della teoria, si farà uso del software *Cabri* che permette di realizzare ambienti didattici fortemente interattivi nei quali si moltiplicano le possibilità di verificare le proprie intuizioni, di "vedere" gli oggetti matematici, di capire più a fondo gli aspetti teorici della disciplina.

La possibilità di realizzare figure dinamiche con un software di semplice utilizzo (anche se, purtroppo, commerciale) investe la geometria di un fascino nuovo, verso il quale gli studenti non sono, in genere, insensibili. Inoltre la visualizzazione grafica aiuta probabilmente la memoria a fissare meglio i concetti appresi.

Il metodo di completamento dei quadrati e la prima figura (*equazione2grado1.fig*) sono tratti dal sito `http://users.libero.it/prof.lazzarini`

TITOLO UNITA' DIDATTICA: Metodi geometrici per l'algebra.

UNITA' DI LAVORO: Risoluzione di alcuni tipi di equazioni di primo e secondo grado per via grafica.

DESTINATARI: Studenti del I biennio della scuola secondaria superiore.

PREREQUISITI:

1. area delle figure piane e figure equivalenti;
2. concetto di equazione di primo e secondo grado ad una incognita;
3. conoscenza base di Cabri (solo se l'insegnante intende far costruire le figure dinamiche, invece di utilizzarle esclusivamente a supporto didattico).

TEMPI PREVISTI: Per ciascun tipo di equazione: 1h di lezione in aula e 1h di laboratorio di informatica, se si utilizzano le immagini didattiche senza farle costruire agli studenti (per un totale di 4h). Naturalmente i tempi si dilatano notevolmente se si intende far ricostruire le figure agli studenti.

OBIETTIVI DIDATTICI: Proporre un'ampia riflessione tra le equazioni e le loro soluzioni ricercate in determinati insiemi numerici.

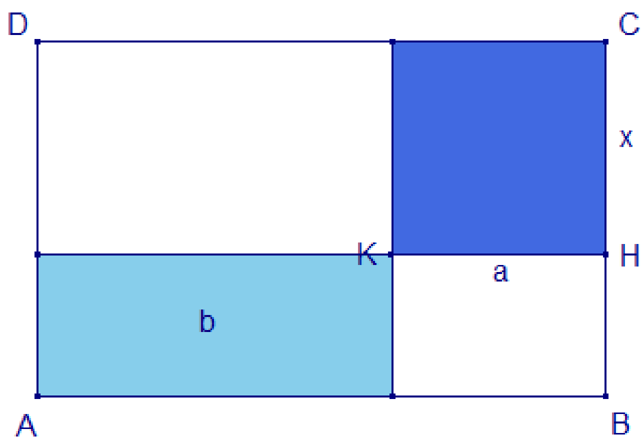
APPROCCIO METODOLOGICO: Dopo aver descritto l'interpretazione geometrica delle equazioni di primo e secondo grado, si propongono delle attività con Cabri che ne facilitano la comprensione, facendo interagire tra loro il pensiero logico verbale con quello immaginativo.

1 Approccio geometrico alle equazioni di primo grado

Si consideri l'equazione di primo grado in una incognita:

$$ax = b \text{ con } a \text{ e } b \text{ positivi} \tag{1}$$

E' possibile pensare ai coefficienti a e b e all'incognita x come a grandezze geometriche, precisamente: risolvere l'equazione $ax = b$ consiste nel trovare il lato x di un rettangolo che ha l'altro di lunghezza a e l'area uguale all'area b di un rettangolo anch'esso assegnato, come mostrato in figura:



1.1 Attività con Cabri

Prima di descrivere la figura dinamica che rappresenta il problema in esame, è forse il caso di ricordare l'enunciato del cosiddetto teorema dello gnomone:

Teorema 1.1 (dello gnomone)**.** *Se per un punto di una diagonale di un parallelogramma si conducono le parallele ai lati, il parallelogramma rimane scomposto in altri 4 parallelogrammi dei quali i due non attraversati dalla diagonale sono equivalenti. Vale anche il viceversa.*

Questo permette di concludere che l'area del rettangolo blu è uguale all'area del rettangolo azzurro quando il prolungamento del segmento BK incontra il vertice D del rettangolo, ossia coincide con la sua diagonale.

Nella figura animata, realizzata con Cabri, a è rappresentato dal segmento nero, mentre b dall'area azzurra. Muovendo il punto H varia la lunghezza del segmento a; muovendo il punto A varia l'area del rettangolo azzurro, cioè b; muovendo infine il punto C si varia il valore di x.

La soluzione x dell'equazione viene determinata quando l'area ax del rettangolo blu è uguale all'area b del rettangolo azzurro e quindi, per il teorema dello gnomone, quando il prolungamento del segmento BK coincide con la diagonale del rettangolo.

In questa posizione, il segmento rosso rappresenta il secondo lato del rettangolo equivalente a b che stiamo cercando (cioè il valore di x che risolve l'equazione).

Modificando i dati iniziali a e b si osserva ad esempio che, tenendo fisso b e aumentando il coefficiente a di x, la soluzione diventa sempre più piccola mentre diminuendo a la soluzione diventa sempre più grande.

1.2 Prove di verifica

1. Risolvi con i metodi spiegati in classe le seguenti equazioni e poi verifica i risultati ottenuti con la figura di Cabri:

   (a) $3x = 2x + 6$;

   (b) $3x + 4 + x = 6x - 4$;

   (c) $2(3x + 1) - 3(5 - 2x) = -1$.

2. Dopo aver ridotto le seguenti equazioni a forma normale ($ax = b$ con a e b positivi), verifica - utilizzando la figura dinamica di Cabri - che $x = 4$ è una soluzione:

   (a) $7x + 2 = 12x - 18$;

   (b) $5x - 6 = 3x + 2$;

   (c) $4x + 8 = x + 20$.

3. E' noto che se riducendo i termini simili di una equazione ci si riconduce alla forma $0 \cdot x = b$, con $b \neq 0$ l'equazione non ammette soluzioni, perché è impossibile trovare un numero che moltiplicato per 0 dia un valore $b \neq 0$; sapresti "dimostrare" questa affermazione usando la figura di Cabri?

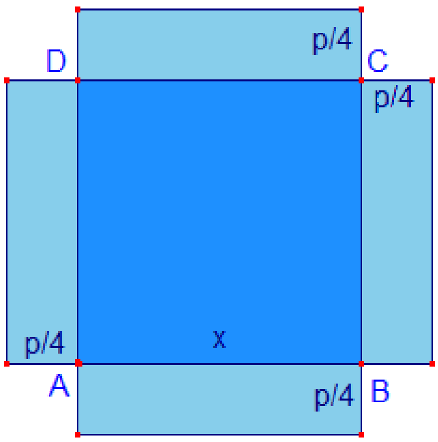
4. Se dopo la riduzione a forma normale un'equazione si presenta nella forma $0 \cdot x = 0$, allora si dice che è *indeterminata*, ossia ammette infinite soluzioni, perché qualsiasi numero moltiplicato per 0 dà come risultato 0. Riscontri la veridicità di questa affermazione sulla figura di Cabri?

2 Il metodo di completamento dei quadrati

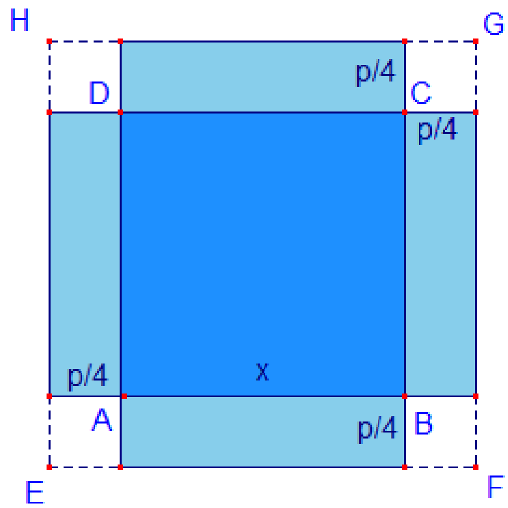
Si consideri l'equazione di secondo grado ad una incognita:

$$x^2 + px = q \text{ con } p \text{ e } q \text{ positivi} \tag{2}$$

di cui si cercano le soluzioni positive. I termini dell'equazione (2) possono essere interpretati come aree: x^2 rappresenta l'area di un quadrato di lato x e px l'area di un rettangolo di dimensioni p e x (ci si è limitati a considerare il caso $x > 0$). Quest'ultimo rettangolo equivale ovviamente a 4 rettangoli di dimensioni x e $p/4$. Il primo membro dell'equazione si può quindi rappresentare come l'area del quadrato e dei quattro rettangoli come mostrato in figura:



Ci si convince facilmente del fatto che il disegno si potrebbe "completare" ad un quadrato aggiungendo quattro opportuni quadrati: ogni quadrato "aggiuntivo" deve avere il lato lungo $p/4$:



L'area del quadrato più grande, cioè l'area del quadrato $EFGH$, è data da:

$$\underbrace{x^2}_{\substack{area\\quadrato\\azzurro}} + \underbrace{px}_{\substack{area\\rettangoli}} + \underbrace{4 \cdot \left(\frac{p}{4}\right)^2}_{\substack{area\\quadrati\\aggiunti}} = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

cioè da

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

(in effetti, anche senza conoscere l'espressione del quadrato di binomio, $p/4 + x + p/4 = x + p/2$ è proprio la misura del lato del quadrato $EFGH$). Affinché l'equazione sia soddisfatta tale area deve essere uguale a $q + p^2/4$ (che è una quantità positiva perché somma di due positive e $p^2/4$ è il termine che abbiamo aggiunto al primo membro), quindi:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = q + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2 + 4q}{4}$$

da cui:

$$x + \frac{p}{2} = \frac{\sqrt{p^2 + 4q}}{2} \Rightarrow x = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

che fornisce la soluzione positiva dell'equazione (2).

2.1 Attività con Cabri

Relativamente alle equazioni di secondo grado, sono state realizzate due immagini dinamiche con Cabri: la prima (*equazione2grado1.fig*) rappresenta il metodo appena esposto, cosiddetto di completamento del quadrato; la seconda (*equazione2grado2.fig*) permette di determinare il valore di x, assegnati i valori di p e q nell'equazione (2).

2.1.1 Prima figura (*equazione2grado1.fig*)

In questa figura, puoi muovere il punto P o il punto X: trascinando il punto P modifichi il coefficiente p dell'equazione (p positivo), trascinando X vari la misura x del lato del quadrato. Dato un certo valore q positivo, risolvere l'equazione

$$x^2 + px = q \text{ con } p \text{ e } q \text{ positivi}$$

significa trascinare il punto X fino a quando l'area della parte colorata (quadrato azzurro più rettangoli) non sia (approssimativamente) uguale a q. Ti accorgi facilmente che puoi sempre trovare un valore x (positivo) tale che l'equazione sia soddisfatta: ciò significa che un'equazione di questo tipo con p e q positivi ammette sempre soluzioni reali.

2.1.2 Seconda figura (*equazione2grado2.fig*)

In questa figura, p è rappresentato dal segmento nero, mentre q dall'area blu. Muovendo il punto P varia la misura di p; muovendo il punto Q varia l'area del rettangolo blu, cioè q; muovendo infine il punto X varia il valore di x.

La soluzione x dell'equazione viene determinata quando l'area px del rettangolo azzurro aggiunta all'area del quadrato celeste è uguale all'area q del rettangolo blu e quindi, per il teorema dello gnomone (come nel caso delle equazioni di primo grado), quando il prolungamento del segmento BK coincide con la diagonale del rettangolo.

In questa posizione, il segmento rosso rappresenta il lato del quadrato la cui area sommata a quella del rettangolo azzurro è uguale a q che stiamo cercando (cioè il valore di x che risolve l'equazione).

A questo punto è possibile quindi modificare i dati iniziali p e q, per trovare a colpo d'occhio la soluzione dell'equazione.

2.2 Prove di verifica

1. Determina la soluzione positiva delle seguenti equazioni, utilizzando la figura *equazione2grado2.fig*. Verifica poi i risultati ottenuti sostituendo alla x il valore trovato.

   (a) $x^2 + x = 2$;

   (b) $x^2 + 2x = 35$;

   (c) $2(3x + 1) - 3(5 - 2x) = -1$.

2. Verifica, utilizzando la figura *equazione2grado2.fig*, che $x = 2$ è una soluzione delle seguenti equazioni:

   (a) $x^2 + 2x = 8$;

   (b) $x^2 + x = 6$;

   (c) $x^2 + 4x = 12$.

3. Dimostra che esistono (solo) due numeri tali che sommando al loro quadrato il loro triplo si ottiene 4. Dopo avere impostato l'equazione di secondo grado che risolve il problema (ed aver quindi individuato i valori di p e q della (2)), determina il numero positivo utilizzando la figura *equazione2grado2.fig*.

4. Dividi il segmento AB di lunghezza 2 in due parti tali che il quadrato costruito sulla parte maggiore sia equivalente al rettangolo che ha per lati l'intero segmento e la parte rimanente. Verifica il risultato ottenuto con la figura di Cabri.

Siti web consultati

http://users.libero.it/prof.lazzarini/

http://www.ciim26.unimore.it/abstract/abs_ghione.pdf

http://matematica.unibocconi.it/cardano/equazioni-algebra.htm

http://umi.dm.unibo.it/italiano/Matematica2003/seconda/MAT_2009.PDF