

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

*Dipartimento di Ingegneria Elettrica*

APPLICAZIONE DELLE TRASFORMAZIONI DI SCHWARZ-CHRISTOFFEL

PER LA PROGETTAZIONE ASSISTITA DAL CALCOLATORE

DI DISPOSITIVI ELETTROMECCANICI

*Relatore: Prof. Paolo Di Barba*  
*Correlatori: Prof. Antonio Savini*  
*Ing. Fabio Arpino*

TESI DI LAUREA DI

*Stefano Costa*

*Anno Accademico 1998 - '99*

# Ringraziamenti

Vorrei esprimere qui la mia gratitudine verso tutte quante le persone che, in misura più o meno ampia, hanno contribuito alla realizzazione di questa Tesi. Ringrazio innanzitutto i professori Paolo Di Barba e Antonio Savini per l'aiuto costante e paziente, e la fiducia e l'attenzione dimostrate verso il mio lavoro durante tutto il suo svolgimento; gli ingegneri Fabio Arpino, Flavio G. Maggi e Paolo Navarra della BITRON unità di Cormano per le informazioni fornite, il tempo dedicatomi e la revisione critica dei risultati ottenuti; il PhD Tobin A. Driscoll dell'università del Colorado - Boulder per la sua gentilezza e disponibilità ad illustrarmi e discutere (a 7000 miglia di distanza) le caratteristiche del suo SC-Toolbox; gli amici e colleghi del Laboratorio CAD, in particolare l'ing. Marco Farina che mi ha introdotto il  $\text{\LaTeX}$  (cosa per cui non lo ringrazierò mai abbastanza). Il lavoro svolto in mesi di collaborazione con queste persone mi ha insegnato tanto, e spero che il prodotto sia all'altezza delle loro aspettative.

Dedico quest'opera a mio nonno, Vittorio Costa.

Pavia e Piacenza, 31 Gennaio 2000

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduzione alle trasformazioni conformi</b>	<b>5</b>
1.1 Introduzione . . . . .	5
1.2 Il metodo di trasformazione . . . . .	5
1.2.1 Funzioni coniugate . . . . .	5
1.2.2 La soluzione dell'equazione di Laplace . . . . .	6
1.2.3 Un semplice esempio . . . . .	8
1.2.4 Tipologie di problemi risolvibili . . . . .	9
1.3 Alcune considerazioni generali . . . . .	10
1.4 La trasformazione bilineare . . . . .	14
1.4.1 Proprietà della trasformazione . . . . .	14
1.4.2 Il rapporto in croce . . . . .	14
1.5 Contorni non equipotenziali . . . . .	15
<b>2 Le trasformazioni di Schwarz-Christoffel</b>	<b>17</b>
2.1 Introduzione . . . . .	17
2.2 La trasformazione dal semipiano complesso . . . . .	17
2.3 La trasformazione dal disco unitario . . . . .	21
2.4 Altre variazioni sulla formula originale . . . . .	23
2.5 Un esempio: l'elettrodo di Rogowski . . . . .	23
<b>3 La trasformazione numerica</b>	<b>28</b>
3.1 Introduzione . . . . .	28
3.2 Metodi numerici . . . . .	28
3.2.1 Soluzione del "problema dei parametri" . . . . .	28
3.2.2 Integrazione numerica della $f'(t)$ . . . . .	29
3.2.3 Valutazione della trasformazione inversa . . . . .	31
3.3 Implementazioni software . . . . .	31
3.3.1 SC-Toolbox per MATLAB . . . . .	32
3.3.2 Difficoltà numeriche . . . . .	33
3.3.3 Algoritmi alternativi . . . . .	35
3.3.4 Alcuni esempi . . . . .	41
3.4 Ottimizzazione dell'elettrodo di Rogowski . . . . .	42
3.4.1 Formulazione del problema . . . . .	43
3.4.2 Codice MATLAB e risultati della prova . . . . .	46

<b>4</b>	<b>La coppia d'impuntamento: analisi FEM</b>	<b>51</b>
4.1	Introduzione . . . . .	51
4.2	La coppia d'impuntamento . . . . .	51
4.2.1	Descrizione del fenomeno . . . . .	51
4.2.2	L'influenza di altri fattori . . . . .	52
4.2.3	Soluzioni costruttive . . . . .	53
4.3	Il motore MCE 6 poli $\Phi 71$ . . . . .	54
4.3.1	Descrizione del motore . . . . .	54
4.3.2	Analisi magnetica e coppia d'impuntamento . . . . .	56
<b>5</b>	<b>La coppia d'impuntamento: analisi SC</b>	<b>62</b>
5.1	Introduzione . . . . .	62
5.2	Impostazione del problema . . . . .	62
5.2.1	Il dominio d'integrazione . . . . .	62
5.2.2	I magneti permanenti . . . . .	64
5.2.3	Formule per l'energia e la coppia . . . . .	65
5.3	Utilizzo delle trasformazioni conformi . . . . .	66
5.3.1	L'energia magnetica in un dominio rettangolare . . . . .	67
5.3.2	Commento ai risultati e conclusioni . . . . .	77
5.4	Il calcolo della coppia d'impuntamento . . . . .	77
5.4.1	L'algoritmo di calcolo . . . . .	77
5.4.2	Risultati delle prove e commenti . . . . .	80
	<b>Conclusioni</b>	<b>88</b>
	<b>A Funzioni di una variabile complessa</b>	<b>89</b>
	<b>B Nozioni di teoria dei campi</b>	<b>93</b>
	<b>C Codici MATLAB</b>	<b>100</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>118</b>
	<b>Risorse Web</b>	<b>119</b>

# Elenco delle figure

1	analogie fra campi di diversa natura . . . . .	3
1.1	trasformazione di una curva dal piano $t$ al piano $z$ . . . . .	6
1.2	la soluzione del campo di Laplace nel semipiano complesso . . . . .	6
1.3	trasformazioni conformi da altri domini canonici . . . . .	8
1.4	l'effetto della trasformazione $z = t^{1/2}$ . . . . .	9
1.5	trasformazione di una regione del piano $t$ tramite la $z = t^{1/2}$ . . . . .	13
1.6	trasformazione della circonferenza di raggio unitario nell'asse reale . . . . .	15
2.1	esempi di contorni poligonali, con e senza vertici all'infinito . . . . .	17
2.2	le convenzioni adottate per gli angoli . . . . .	18
2.3	la trasformazione dal semipiano complesso . . . . .	18
2.4	l'effetto della scelta arbitraria dei parametri . . . . .	19
2.5	un semplice dominio ad un vertice . . . . .	20
2.6	la trasformazione dal disco unitario . . . . .	22
2.7	il campo elettrico presso i bordi di un condensatore piano . . . . .	24
2.8	i parametri della trasformazione dal semipiano complesso . . . . .	24
2.9	i campi nel piano $t$ e nel piano $z$ . . . . .	27
2.10	la trasformazione del flusso e del potenziale . . . . .	27
3.1	andamenti tipici di $f'(t)$ lungo i lati di $\mathbf{P}$ . . . . .	30
3.2	l'interfaccia grafica del Toolbox in ambiente MS-Windows . . . . .	33
3.3	gli effetti del crowding . . . . .	35
3.4	utilizzo del dominio a rettangolo per una regione fortemente allungata . . . . .	35
3.5	utilizzo del dominio a striscia unitaria per regioni allungate . . . . .	35
3.6	proprietà della triangolazione di Delaunay . . . . .	36
3.7	triangolazione di Delaunay di un poligono, senza e con l'aggiunta dei vertici ausiliari lungo i lati . . . . .	37
3.8	due distinte disposizioni dei prevertici . . . . .	39
3.9	un dominio "a labirinto" rettificato e trattato con CRDT . . . . .	41
3.10	mappe dal semipiano superiore e dal disco unitario per un dominio ad L . . . . .	42
3.11	poligoni con lati all'infinito e frastagliature . . . . .	42
3.12	mappe dal disco unitario all'esterno di poligoni . . . . .	43
3.13	mappe CRDT per un poligono allungato, dalla circonferenza unitaria e da un dominio rettificato (al centro) . . . . .	43
3.14	la geometria del problema considerato (a sinistra) e la geometria semplificata (a destra) . . . . .	44
3.15	il campo nel caso di armature infinite . . . . .	45
3.16	soluzione ottima: configurazioni ed errore percentuale nell'intensità del campo "01 <del>F</del> EE . . . . .	47

3.17	superficie d'errore per la funzione obiettivo 1 . . . . .	48
3.18	curve di livello per la funzione obiettivo 1 . . . . .	48
3.19	superficie d'errore per la funzione obiettivo 2 . . . . .	49
3.20	curve di livello per la funzione obiettivo 2 . . . . .	49
4.1	generazione della coppia d'impuntamento . . . . .	52
4.2	due soluzioni per ridurre la coppia d'impuntamento: dente arrotondato o scanalato	53
4.3	il motore MCE 6 poli $\Phi 71$ . Per gentile concessione della BITRON S.p.A. . . . .	54
4.4	le quote (in mm) dello statore. Per gentile concessione della BITRON S.p.A. . . . .	55
4.5	intensità (in T) dell'induzione a vuoto, in posizione di minima riluttanza . . . . .	56
4.6	linee di forza del campo magnetico (in As/m) a vuoto, in posizione di minima riluttanza . . . . .	57
4.7	andamento della coppia d'impuntamento . . . . .	57
4.8	induzione e linee di forza del campo . . . . .	58
4.9	dente liscio: la distribuzione dell'energia magnetica . . . . .	59
4.10	dente liscio: l'induzione al traferro . . . . .	60
4.11	dente scanalato: la distribuzione dell'energia magnetica . . . . .	61
4.12	dente scanalato: l'induzione al traferro . . . . .	61
5.1	il circuito magnetico semplificato ed il suo equivalente elettrico . . . . .	63
5.2	la geometria fondamentale . . . . .	64
5.3	il modello per il magnete permanente . . . . .	64
5.4	la geometria fondamentale ed i parametri del problema . . . . .	65
5.5	posizioni di minima (a) e massima (b) riluttanza . . . . .	66
5.6	utilizzo delle trasformazioni conformi . . . . .	67
5.7	la cava rettangolare del problema di prova . . . . .	68
5.8	il reticolo della parte esterna in ferro . . . . .	69
5.9	dettaglio del reticolo nella cava, presso una metà del conduttore . . . . .	69
5.10	densità di energia magnetica e linee di campo presso una metà del conduttore . . . . .	70
5.11	confronto QuickField - metodo della trasformazione dal semipiano . . . . .	72
5.12	confronto QuickField - metodo delle immagini ( $m = 25$ ) . . . . .	73
5.13	induzione e densità di energia al centro ( $u = 2,5$ mm) per $m = 25$ . . . . .	74
5.14	induzione e densità di energia al centro ( $u = 2,5$ mm) per $m = 50$ . . . . .	75
5.15	induzione e densità di energia al centro ( $u = 2,5$ mm) per $m = 100$ . . . . .	76
5.16	i punti del piano $z$ dove rilevare il campo e le loro controimmagini nel piano $t$ . . . . .	78
5.17	l'antitrasformato di un sottodominio generico . . . . .	79
5.18	dente liscio: densità di energia magnetica . . . . .	80
5.19	dente liscio: induzione al traferro . . . . .	81
5.20	dente liscio: energia magnetica e coppia d'impuntamento . . . . .	81
5.21	dente scanalato: densità di energia magnetica . . . . .	82
5.22	dente scanalato: induzione al traferro . . . . .	83
5.23	dente scanalato: energia magnetica e coppia d'impuntamento . . . . .	83
5.24	comparazione dei tempi medi per le operazioni . . . . .	84
5.25	dente liscio e dente scanalato: peso relativo dei tempi per le operazioni . . . . .	85
5.26	confronto analisi SC - analisi FEM . . . . .	87
B.1	equipotenziali e linee di flusso del campo "017EB di un conduttore rettilineo infinito	96
B.2	il metodo delle immagini per una superficie piana . . . . .	98
B.3	il metodo delle immagini per una cava semiinfinita . . . . .	98
B.4	il metodo delle immagini per una cavità rettangolare . . . . .	99

# Elenco delle tabelle

3.1	effetto numerico del crowding per il poligono in figura 3.3 . . . . .	34
3.2	i risultati dell'ottimizzazione . . . . .	47
4.1	i dati di targa del motore . . . . .	54
4.2	le caratteristiche dei magneti permanenti . . . . .	54
5.1	i parametri geometrici del problema . . . . .	66
5.2	distribuzione degli elementi del reticolo. . . . .	68
5.3	i risultati con i metodi della trasformazione e delle immagini. . . . .	71
5.4	i tempi medi (s) per le operazioni dell'analisi . . . . .	84

# Introduzione

La trasformazione di Schwarz-Christoffel (basata sull'omonima formula ricavata in modo indipendente dai due matematici tedeschi attorno al 1860), e, in generale, il metodo della trasformazione conforme, sono stati per un lungo periodo un capitolo molto importante dell'analisi complessa, con svariate applicazioni nei campi della fisica e della matematica. Uno dei maggiori pregi è senza dubbio la possibilità di fornire, quando possibile, la soluzione *analitica* ad un problema di campo elettrico o magnetico in domini per lo più aperti, insieme alla possibilità di studiare *come* cambi questa soluzione al variare dei parametri che figurano nel problema.

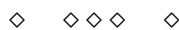
Sfogliando però i testi disponibili in letteratura ([2]) ci si rende subito conto di come una soluzione analitica sia estremamente difficile da ottenere in casi significativi per le applicazioni, anche se semplici: ci si imbatte immediatamente in pagine piene di calcoli lunghi e complicati, in cui compaiono integrali ellittici ed iperellittici, e loro espressioni in termini di funzioni ellittiche di Jacobi, riduzioni ad integrali di Legendre o sviluppi in serie degli integrandi. Queste difficoltà, assieme all'impossibilità di gestire un'ampia casistica di condizioni al contorno per i problemi, hanno portato al progressivo abbandono del metodo nel corso degli anni '70, soppiantato dall'introduzione del calcolatore e dagli emergenti metodi delle differenze finite (FDM) e degli elementi finiti (FEM), che hanno spostato (con successo) su un piano puramente numerico il modo di affrontare certi problemi: in particolare, il potente e versatile FEM è stato accuratamente ottimizzato per l'esecuzione su calcolatore, e viene oggi utilizzato, in tutte le sue varianti, per le simulazioni in quasi tutti i campi dell'ingegneria, dall'analisi elettromagnetica a quella meccanica, fino alla conduzione del calore.

La disponibilità di una grande potenza di calcolo, oltre ad essere impiegata per metodi già noti (si pensi ad esempio al tensore degli sforzi di Maxwell), ha determinato la comparsa di altri sofisticati strumenti di analisi fino a pochi anni fa impensabili in pratica per la mole di operazioni che richiedono, fra cui le reti neurali (NNM), le reti di riluttanze (RNM) e gli algoritmi genetici (GA): queste tecniche, utilizzate singolarmente o associate ([11]), consentono un'accurata ottimizzazione dei parametri caratterizzanti un sistema, migliorandone notevolmente le prestazioni. Queste metodologie presentano tuttavia dei costi di implementazione in termini di tempo, talvolta indubbiamente onerosi: anche utilizzando un hardware di ultima generazione, la verifica di un'idea di progettazione e la relativa ottimizzazione può richiedere giorni interi di calcolo. Si presenta quindi la necessità di disporre di tecniche che, senza pretendere di ottenere risultati estremamente accurati, consentano di verificare rapidamente la validità di un progetto, magari avvicinandosi ad un punto di ottimo, per poi condurre un'analisi più "fine" con altri strumenti.

Nel corso degli anni la trasformazione di Schwarz-Christoffel non è stata del tutto abbandonata: si è però preferito indirizzare gli sforzi ad un approccio numerico, in modo da affrontare problemi analiticamente intrattabili, e ciò ha determinato la comparsa di un certo numero di pacchetti software destinati a questo scopo. Sulla scia del successo di questi ultimi, e nel tentativo di venire a capo di difficoltà di natura numerica incontrate in questa



prima fase, la ricerca si è reindirizzata sulle proprietà algebriche e geometriche della trasformazione, giungendo a produrre algoritmi (ancora oggi in fase di studio ed approfondimento) che permettono di trattare problemi fino a poco tempo fa ritenuti inadatti o addirittura impossibili per un tipo di metodo che - precisiamolo - è di natura squisitamente geometrica.



Questo lavoro di Tesi sfrutta lo stato di conoscenza attuale sulle trasformazioni di Schwarz-Christoffel per cercare di capire se possano in qualche modo essere uno strumento di progettazione utile, e quindi venire incontro alle esigenze sopra discusse. Fermi restando certi limiti *intrinseci* nel metodo (come ad esempio la difficoltà di gestire le condizioni al contorno nei casi più generali), ci si chiede se si possa oggi impostare per mezzo di esso un'analisi che abbia insieme le caratteristiche dell'affidabilità e della velocità, rimandando ad altri strumenti la ricerca dell'accuratezza. A tal fine nel corso dei capitoli vengono affrontati due problemi: il primo, molto semplice, riguarda la forma che dovrebbero avere le armature di un condensatore piano per mantenere il campo elettrico il più uniforme possibile fra esse; un algoritmo di ottimizzazione sfrutta la trasformazione di Schwarz-Christoffel per minimizzare l'errore commesso. Il secondo problema, a cui sono dedicati gli ultimi due capitoli, per affrontare il quale vengono utilizzati i più moderni algoritmi di calcolo della trasformazione, si presenta in tutte le macchine rotanti a magneti permanenti: la coppia parassita d'impuntamento. Questa analisi è già stata condotta in passato da altri Autori ([2] e [12] ad esempio) con l'ausilio della trasformazione di Schwarz-Christoffel in modo semianalitico, ma introducendo per forza di cose drastiche semplificazioni; d'altro canto il problema non può considerarsi al giorno d'oggi risolto in modo completo ed univoco, come mostrano le pubblicazioni più recenti ([11]). Uno studio di questo tipo costituisce quindi un banco di prova di sicuro interesse, e viene condotto su una macchina in produzione già analizzata sotto questo aspetto con il metodo degli elementi finiti, in modo da poter paragonare i risultati ottenuti.

*Nel Capitolo I* viene descritto il metodo della trasformazione conforme in modo del tutto generale. La parte fondamentale del capitolo, base su cui poggia tutta la Tesi, è la sezione 1.3, dove vengono illustrate le relazioni (che abbiamo ricavato in modo *analitico*) fra i campi vettoriali nei domini trasformati; i semplici esempi, presi da [2], chiariscono i concetti esposti e verificano tali relazioni fondamentali. Un certo spazio è dedicato alla definizione dei campi (e dei limiti) di applicabilità del metodo.

*Nel Capitolo II* è presentata la trasformazione di Schwarz-Christoffel formulata in modo *analitico* con alcune sue varianti; gli esempi esposti nel capitolo precedente sono ora ripresi alla luce dei nuovi argomenti, ed un nuovo esempio è sviluppato in modo analitico, per introdurre il problema dell'ottimizzazione delle armature del condensatore.

*Il Capitolo III* introduce il linguaggio dell'analisi numerica: vengono descritti i principali algoritmi (impiegati da tempo) per il calcolo delle trasformazioni, ed un particolare software che realizza questo scopo. L'attenzione si sposta quindi sulle maggiori difficoltà numeriche che si incontrano in questo campo, e sugli algoritmi (ancora in fase di studio) che permettono di aggirarle. Quest'ultima parte, senza dubbio la più difficile - ed interessante - dal punto di vista teorico, descrive le recenti idee, grazie solamente alle quali è stato possibile affrontare con successo un problema complesso come quello dello studio della coppia d'impuntamento. Il capitolo termina con l'ottimizzazione della forma delle armature del condensatore piano, come introduzione all'utilizzo del software di calcolo.

*Nel Capitolo IV*, dopo una breve illustrazione dei fattori che generano ed influenzano la coppia d'impuntamento, e di alcune comuni soluzioni costruttive adottate per ridurla, viene

Quantità	Elettrostatica	Conduzione elettrica	Magnetostatica	Termodinamica	Fluidodinamica	Gravitazione
Potenziale scalare	Potenziale $V$	Potenziale $V$	Potenziale $\Omega$	Temperatura	Potenziale di velocità	Potenziale Newtoniano
Gradiente del potenziale	Campo elettrico $E$	Campo elettrico $E$	Campo magnetico $H$	Gradiente di temperatura	Velocità	Forza gravitazionale
Costante del mezzo	Permettività $\epsilon$	Conduttività $\sigma$	Permeabilità $\mu$	Conduttività termica	Densità $\rho$	Reciproco della costante di gravitazione
Densità del flusso	Spostamento elettrico $D$	Densità di corrente $J$	Induzione magnetica $B$	Densità di flusso termico	Flusso massico	
Sorgenti del campo	Densità di carica $\rho_c$	Densità di corrente $J$	Densità di poli $\rho_m$	Densità di sorgenti termiche	Densità di punti di deflusso	Densità di massa
Conduttanza del campo	Capacità $C$	Conduttanza $G$	Permeanza $\Lambda$	Conduttanza termica		

Figura 1: analogie fra campi di diversa natura

descritto il motore brushless su cui verrà condotta un'analisi magnetica del fenomeno; in questo capitolo sono riportati i risultati ottenuti dalla Ditta produttrice, assieme ad ulteriori analisi condotte con il metodo degli elementi finiti, svolte per consentire un paragone più ampio con quelle del Capitolo V.

*Il Capitolo V* affronta il problema della coppia d'impuntamento con il metodo della trasformazione di Schwarz-Christoffel, sfruttando i risultati della sezione 1.3 e le possibilità offerte dai più recenti algoritmi di calcolo numerico. Nel corso del capitolo, oltre all'impostazione del problema, viene discussa un'alternativa di calcolo basata sul metodo delle immagini allo scopo di verificare per confronto la correttezza e la praticabilità delle idee alla base dell'*analisi SC*; si prosegue quindi con la descrizione dei singoli passi che compongono quest'ultima e con il commento ai risultati ottenuti riguardo allo studio della coppia d'impuntamento, assieme ad una tabella comparativa fra l'analisi FEM e l'analisi SC.

*Infine le Conclusioni* riassumono brevemente i fatti più importanti emersi dallo sviluppo dei vari argomenti.

Per quanto riguarda le Appendici A e B, abbiamo ritenuto opportuno raccogliere brevemente in esse gli strumenti matematici e i concetti di teoria dei campi necessari per la piena comprensione degli argomenti sviluppati; in particolare nell'Appendice B sono introdotte delle notazioni rivelatesi molto utili, dal punto di vista della sinteticità di scrittura e della programmazione in linguaggio MATLAB, per esprimere il campo magnetostatico generato in un punto da un conduttore rettilineo infinito, delle quali ci si è serviti con profitto nell'esposizione del Capitolo V e nella scrittura dei codici MATLAB. L'Appendice C non è nient'altro che la collezione di questi codici, accompagnati da una breve descrizione, scritti per risolvere i problemi che di volta in volta si incontrano nel corso dei capitoli.



Vorremmo infine brevemente ricordare come le applicazioni possibili per questi algoritmi numerici non si esauriscano con quelle di tipo elettromagnetico, nè tantomeno in ambito ingegneristico o fisico, dove tanti fenomeni possono essere trattati in modo formalmente identico: si veda in proposito la figura 1, che mostra l'equivalenza fra le varie quantità che compaiono nei diversi tipi di campi con potenziale scalare. Si consideri inoltre il fatto che il campo magnetico in una regione dove sono presenti correnti distribuite è analogo, ad esempio, a quello dovuto al flusso vorticoso di un liquido. La trasformazione di Schwarz-

Christoffel e le sue numerose varianti possono trovare applicazioni in problemi di generazione di reticoli per il metodo delle differenze finite, in problemi di derivate oblique al contorno (che compaiono in teoria delle code e nello studio dell'effetto Hall classico), nel calcolo dei coefficienti dei polinomi di Faber (utili ad esempio in analisi complessa, e per la soluzione di sistemi non simmetrici di equazioni lineari) o per le funzioni di Green per domini connessi multipli, per non parlare di frattali, superfici di Riemann poligonali o calcolo matriciale ([16]). Se è da un lato corretto ritenere che questa trasformazione possa risultare utile per applicazioni geometriche in generale, non va dimenticato che la sua particolarità consiste nel risolvere un problema *esattamente*, fornendo una soluzione semianalitica che dipende da un piccolo numero di parametri; e dove è possibile ottenere una tale soluzione, il metodo della trasformazione ha prestazioni di gran lunga superiori rispetto a strumenti intesi per un uso generico.

# Capitolo 1

## Introduzione alle trasformazioni conformi

### 1.1 Introduzione

Il metodo della trasformazione conforme è di gran lunga lo strumento più potente per la soluzione *analitica* dei campi di Laplace, essendo in grado di gestire contorni di forma molto più complicata di ogni altro metodo analitico. Può essere usato ad esempio per analizzare il campo in guide d'onda, in linee di trasmissione ad alta frequenza di varia sezione, all'esterno di conduttori a sezione poligonale o nel traferro di una macchina elettrica rotante; inoltre, la soluzione in genere ha una forma abbastanza semplice e fornisce immediatamente delle espressioni per densità di flusso e permeanza nei campi magnetici (o per potenziale elettrico e capacità nei campi elettrici), consentendo spesso di calcolare direttamente le linee di campo. La maggior limitazione all'applicazione delle tecniche di trasformazione è il fatto che, per la maggior parte dei problemi, i contorni devono essere equipotenziali (infinitamente permeabili o infinitamente conduttori) o coincidenti con linee di flusso, o una combinazione di questi due tipi.

Questo capitolo descrive il metodo, le sue applicazioni ed i suoi limiti in linee generali. Ulteriori dettagli ed approfondimenti, ad eccezione di quanto esposto nelle sezioni 1.2.2 e 1.3, si trovano in [2].

### 1.2 Il metodo di trasformazione

#### 1.2.1 Funzioni coniugate

Consideriamo le proprietà di una funzione regolare<sup>1</sup> del tipo:

$$z = f(t) = x(u, v) + jy(u, v) \tag{1.1}$$

che definisce una variabile complessa  $z = x + jy$  come funzione di un'altra variabile complessa  $t = u + jv$ . Un particolare valore  $t'$  può essere rappresentato da un punto nel piano complesso  $t$ ; attraverso la (1.1) un certo valore (o alcuni valori)  $z'$  corrisponde a  $t'$ , e può essere rappresentato per mezzo di un punto nel piano complesso  $z$ . A causa inoltre della

---

<sup>1</sup>Una funzione continua e monodroma è regolare se le sue derivate parziali  $\partial x/\partial u$ ,  $\partial x/\partial v$ ,  $\partial y/\partial u$ ,  $\partial y/\partial v$  esistono, sono continue e soddisfano alle condizioni di Cauchy-Riemann (A.1).

regolarità della  $f$ , ad una curva  $t't''$  corrisponde una curva  $z'z''$  (figura 1.1), e si dice che quest'ultima è stata *trasformata* o *mappata* dalla  $t't''$  attraverso la (1.1).

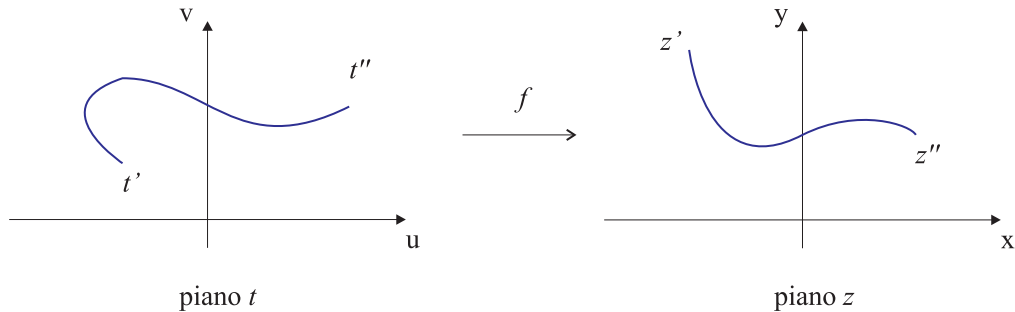


Figura 1.1: trasformazione di una curva dal piano  $t$  al piano  $z$

Trasformazioni del tipo (1.1) sono dette *conformi*: questo per indicare che, se due curve si intersecano in un piano formando un certo angolo, le curve trasformate si intersecano in un altro piano formando lo stesso angolo e in modo tale che i versi di percorrenza degli angoli sono gli stessi; in particolare se due curve si intersecano formando un angolo retto, lo stesso avviene per quelle trasformate: questa proprietà di ortogonalità è una caratteristica di tutte le funzioni coniugate (si veda in proposito l'Appendice A).

### 1.2.2 La soluzione dell'equazione di Laplace

Oltre a possedere la proprietà di ortogonalità citata sopra, le funzioni coniugate sono soluzioni dell'equazione di Laplace; da ciò discende che ogni trasformazione conforme fornisce una relazione fra due campi di Laplace. L'uso delle tecniche di trasformazione per il calcolo della soluzione di un campo consiste nel determinare un'opportuna equazione che metta in relazione il campo incognito con un altro, la cui soluzione sia nota o facilmente calcolabile. Consideriamo il piano complesso  $t$  in figura 1.2, in cui è rappresentato un campo uniforme

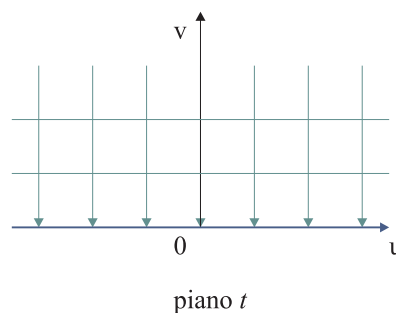


Figura 1.2: la soluzione del campo di Laplace nel semipiano complesso

parallelo agli assi coordinati, ove le linee ad  $u$  costante sono linee di flusso e quelle a  $v$  costante equipotenziali. Sia ora il gradiente della funzione potenziale (proporzionale alla densità del flusso) pari a  $k$  in tutti i punti; allora, preso per comodità l'asse  $u$  a potenziale zero, la funzione potenziale  $\psi$  in ogni punto  $(u, v)$  è  $\psi = kv$ ; e la funzione flusso  $\phi$ , presa la linea  $u = 0$  come linea a  $\phi = 0$ , è  $\phi = ku$ . Combinando queste due equazioni, l'espressione per il potenziale complesso  $w$  di ogni punto del piano  $t$  è (si veda in proposito l'appendice B):

$$w = \phi + j\psi = k(u + jv)$$

o equivalentemente:

$$w = kt \tag{1.2}$$

Questo campo uniforme, rappresentato nel piano  $t$ , è il più semplice di tutti i campi di Laplace, e ad esso sono riportate tutte le altre soluzioni. E' possibile pensare il potenziale complesso come una trasformazione verso un ulteriore piano  $w$ : in questo modo l'equazione (1.2) definisce una semplice forma di trasformazione consistente in un cambiamento di scala pari a  $k$ . Per quanto detto, il procedimento di soluzione per mezzo delle trasformazioni conformi consiste sostanzialmente nel trovare un'equazione

$$w = g(z) \tag{1.3}$$

che metta in relazione i punti nel piano  $z$  con quelli nel piano  $w$ ; più precisamente ciò significa che la forma del contorno e le condizioni su di esso nei due piani sono connesse tramite la (1.3). Come si vedrà in seguito, la ricerca della (1.3) comporta spesso l'introduzione di più piani e variabili di trasformazione.

In generale è possibile utilizzare altri domini canonici diversi dal semipiano complesso per applicare il metodo della trasformazione conforme: un esempio può essere la circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine del piano  $t$ ; in questi casi, la trasformazione è ricavata prima trasformando dal dominio verso semipiano complesso, e da qui verso il piano  $z$ . In altre parole, consideriamo di nuovo la (1.3):

$$w = g(z) = kt \quad \Rightarrow \quad z = g^{-1}(kt) = f(t)$$

ove la  $f$  è la trasformazione che correla i punti nel semipiano complesso  $t$  ai punti nel piano  $z$ ; supponiamo inoltre di avere un insieme di  $n$  contorni nei piani  $\{z_k\}$  a cui risultano associati due insiemi  $\{g_k\}$  e  $\{f_k\}$  di funzioni di trasformazione biietive. Vogliamo ora utilizzare il piano  $z_m \in \{z_k\}$  come dominio canonico, e da qui trasformare verso il piano  $z_l \in \{z_k\}$ : ci chiediamo quale forma abbia la funzione  $f_{m,l}$  che realizza il nostro scopo, cioè valga  $z_l = f_{m,l}(z_m)$ ; la figura 1.3 chiarisce gli aspetti del problema. Dalle uguaglianze:

$$\begin{cases} w = kt = g_m(z_m), & z_m = g_m^{-1}(kt) = f_m(t) \\ w = kt = g_l(z_l), & z_l = g_l^{-1}(kt) = f_l(t) \end{cases} \tag{1.4}$$

si ricava per la prima delle (1.4):

$$t = (f_m^{-1} \circ g_m^{-1})(kt)$$

da cui:

$$z_l = (f_l \circ f_m^{-1} \circ g_m^{-1})(kt) = (f_l \circ f_m^{-1})(z_m)$$

cioè:

$$f_{m,l} = (f_l \circ f_m^{-1})$$

relazione che può essere letta direttamente dalla figura 1.3:  $z_l$  è ricavato da  $z_m$  prima anti-trasformando dal piano  $z_m$  al piano  $t$  attraverso la  $f_m^{-1}$ , e quindi trasformando verso il piano  $z_l$  attraverso la  $f_l$ . Si noti come le  $\{g_k\}$  non compaiano nella formulazione della  $f_{m,l}$ : essa è in altre parole una funzione che investe solamente la geometria del problema, indipendente dal valore del potenziale complesso  $w$  e da come sono formulate le condizioni al contorno. Questo risultato verrà impiegato sistematicamente nel prossimo capitolo per ricavare le trasformazioni di Schwarz-Christoffel da vari domini canonici.

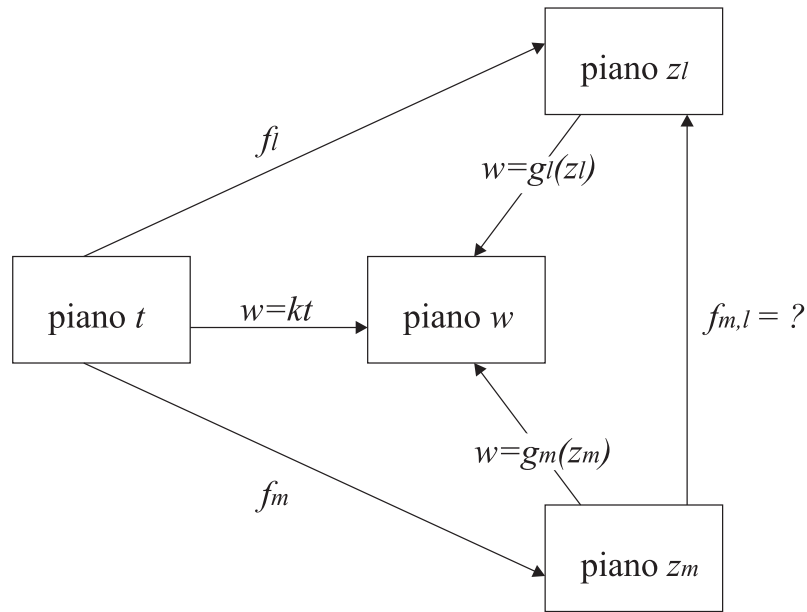


Figura 1.3: trasformazioni conformi da altri domini canonici

E' infine possibile trarre la seguente importante conclusione: il potenziale complesso  $w$  associato ad un punto è un *invariante conforme* della trasformazione; in base a ciò è lecito scrivere in forma sintetica:

$$w(z) = w(f(t)) = w(t) \tag{1.5}$$

volendo in tal modo indicare come il valore del potenziale complesso associato ad un punto non subisca variazioni una volta che il punto è stato trasformato. Questo fatto sarà molto utile nello sviluppo degli argomenti applicativi.

### 1.2.3 Un semplice esempio

A chiarimento dei concetti esposti, consideriamo come opera la trasformazione:

$$z = t^{1/2} \tag{1.6}$$

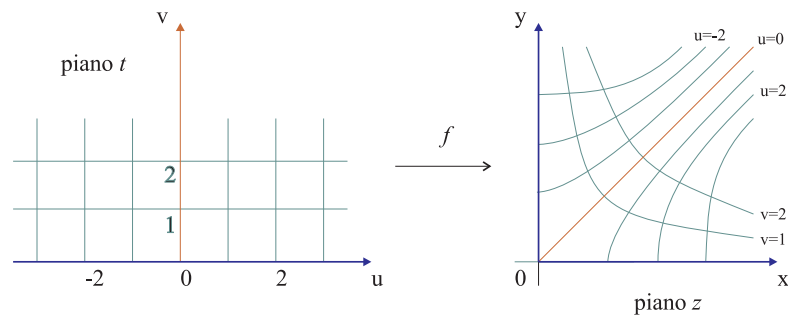
sul campo uniforme formato da linee parallele agli assi del piano  $t$ . E' immediato vedere come il semiasse reale positivo del piano  $t$  venga trasformato nel semiasse reale positivo del piano  $z$ , mentre la metà negativa dell'asse reale venga trasformata nel semiasse immaginario fra 0 e  $+j\infty$  del piano  $z$ : in altri termini l'equazione trasforma la metà superiore del piano complesso  $t$  nel primo quadrante del piano  $z$ . L'equazione delle trasformate delle linee parallele si può ricavare eliminando  $u$  o  $v$  dalla (1.6): quadrando ed uguagliando le parti reali ed immaginarie si ottiene:

$$x^2 - y^2 = u$$

e

$$2xy = v$$

dalle quali si legge che le linee parallele all'asse  $v$  vengono trasformate in iperboli equilateri, come del resto succede per quelle parallele all'asse  $u$  (figura 1.4). E' inoltre evidente la corrispondenza fra *regioni* appartenenti ai due piani: ad esempio il rettangolo nel piano  $t$  compreso fra le linee  $v = 0$ ,  $v = 2$ ,  $u = 1$  e  $u = 2$  viene mappato nell'area delimitata dai


 Figura 1.4: l'effetto della trasformazione  $z = t^{1/2}$ 

quattro segmenti di iperbole corrispondenti a tali linee (l'iperbole per  $v = 0$  degenera, come si vede in figura, nel contorno ad angolo retto).

Il significato fisico della trasformazione è che le linee rette di flusso, che entrano in una superficie equipotenziale coincidente con l'asse reale del piano  $t$ , diventano iperboli nel piano  $z$  che entrano in una superficie equipotenziale coincidente con i semiassi positivi reale ed immaginario; le condizioni al contorno nei due piani sono le stesse in quanto la trasformazione conserva gli angoli. Analogamente, il contorno nel piano  $z$  è una linea limite ( $\psi = 0$ ) di un insieme di iperboli equipotenziali.

Le equazioni delle linee di flusso e potenziale nel piano  $z$  si ricavano eliminando  $t$  dalla (1.2) e dalla (1.6):

$$kz^2 = w \quad (1.7)$$

cioè per il flusso:

$$\phi = k(x^2 - y^2)$$

e per il potenziale:

$$\psi = 2kxy$$

Per un dato valore di  $\phi$  o  $\psi$  queste equazioni trasformano nel piano  $z$  le linee di flusso o potenziale corrispondenti (incluso il contorno); analogamente, la (1.7) fornisce il potenziale complesso  $w$ , rispetto ad un'origine appropriata, in ogni punto  $(x, y)$  del piano  $z$ .

### 1.2.4 Tipologie di problemi risolubili

Per ricavare la soluzione di un campo attraverso il metodo della trasformazione conforme sono necessarie due cose: si deve trovare un'equazione che metta in relazione tale campo con uno più semplice, e si deve conoscere una soluzione per quest'ultimo. La seconda condizione dipende dalla possibilità di individuare ed utilizzare le condizioni al contorno nel dominio canonico: in generale questo problema può essere molto difficile o addirittura impossibile, ma per molte importanti tipologie di problemi è relativamente semplice. E' utile classificare tutti i problemi in due gruppi:

- quelli in cui i valori di  $\phi$  o  $\psi$  sono noti al contorno, o, se non noti, sono costanti (e quindi le condizioni al contorno per il campo possono essere specificate in modo indipendente su ogni lato);
- quelli in cui si hanno condizioni al contorno di tipo gradiente (eccetto quelli con componenti normale o tangenziale nulle, che ricadono nel primo gruppo).



Il primo di questi gruppi è di gran lunga il più importante, e praticamente tutte le trasformazioni note ricadono in esso; comprende tutti i problemi con contorni equipotenziali o coincidenti con linee di flusso, o combinazioni di questi due tipi ( $\phi$  o  $\psi$  costante), ed inoltre quei problemi per i quali è specificata la distribuzione del potenziale lungo il contorno (i problemi di Dirichlet, vedere la sezione 1.5). Soluzioni numeriche per quest'ultimo tipo sono sempre possibili, ammesso di conoscere la trasformazione per il dominio in esame dal disco unitario o dal semipiano complesso, mentre soluzioni analitiche sono estremamente difficili anche per i casi più semplici.

Il secondo gruppo di problemi, con contorni di permeabilità o permittività finita, è stato poco esplorato. La trasformazione di campi con condizioni al contorno di tipo gradiente, che ne descrivono la variazione nel passaggio attraverso un'interfaccia, è un'operazione corretta, dal momento che il campo trasformato è ancora di Laplace e le condizioni al contorno vengono conservate (gli angoli con i quali le linee di flusso attraversano le superfici sono conservati ed il potenziale rimane continuo). In generale, le trasformazioni conformi sono uno strumento di scarsa efficacia per affrontare questi problemi, e si preferiscono per essi metodi di soluzione diretti (immagini, separazione delle variabili, introduzione di un potenziale vettore) o numerici. Comunque, per ogni problema per cui esista un'equazione che trasformi *tutte assieme* le regioni in cui è presente il campo, la soluzione per mezzo delle trasformazioni conformi è relativamente semplice.

### 1.3 Alcune considerazioni generali

Sia  $f : \mathbf{C}_t \rightarrow \mathbf{C}_z$  una trasformazione conforme *biunivoca*;  $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{C}_t$  un sottoinsieme *aperto* e semplicemente connesso del piano  $t$ , e  $f(\mathbf{P}) \subseteq \mathbf{C}_z$  la sua immagine nel piano  $z$  attraverso la  $f$ ;  $\vec{C}_t = C_u + jC_v$  e  $\vec{C}_z = C_x + jC_y$  due campi vettoriali definiti su  $\mathbf{P}$  e  $f(\mathbf{P})$  rispettivamente; sia infine  $w = \phi + j\psi$  il potenziale complesso associato a  $\vec{C}_t$  e a  $\vec{C}_z$ . La soluzione del campo nel piano  $t$  è data da:

$$\vec{C}_t = -\nabla\psi \quad \Rightarrow \quad C_u = -\frac{\partial\psi}{\partial u} \quad \text{e} \quad C_v = -\frac{\partial\psi}{\partial v}$$

Consideriamo ora la quantità  $\vec{C}_t^* = C_u - jC_v$ ; questa può essere riscritta come:

$$\begin{aligned} \vec{C}_t^* &= -\frac{\partial\psi}{\partial u} + j\frac{\partial\psi}{\partial v} \\ &= j\left(\frac{\partial\phi}{\partial u} + j\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) \\ &= j\frac{\partial w}{\partial u} \\ &= j\frac{dw}{dt} \frac{dt}{du} \\ &= j\frac{dw}{dt} \end{aligned}$$

grazie alle equazioni di Cauchy-Riemann (A.1), e ricordando che  $dt/du = d(u + jv)/du = 1$ . Da ciò discende che:

$$|\vec{C}_t| = |\vec{C}_t^*| = \left| \frac{dw}{dt} \right|$$

Analogamente per il piano  $z$  si trova:

$$\vec{C}_z^* = j \frac{dw}{dz} \quad \text{e} \quad |\vec{C}_z| = \left| \frac{dw}{dz} \right|$$

Una prima importante conseguenza delle ultime relazioni trovate è che:

$$\vec{C}_z^* \frac{dz}{dt} = j \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dt} = j \frac{dw}{dt} = \vec{C}_t^* = C_u - jC_v$$

ed uguagliando le parti reale ed immaginaria:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\left(\vec{C}_z^* \frac{dz}{dt}\right) = C_u \\ -\operatorname{Im}\left(\vec{C}_z^* \frac{dz}{dt}\right) = C_v \end{cases} \quad (1.8)$$

Risulta inoltre:

$$|\vec{C}_z| \left| \frac{dz}{dt} \right| = \left| \frac{dw}{dz} \right| \left| \frac{dz}{dt} \right| = \left| \frac{dw}{dt} \right| = |\vec{C}_t| \quad (1.9)$$

In questo modo abbiamo ricavato il legame esistente fra le componenti e le intensità dei due campi vettoriali nei piani  $t$  e  $z$ . Possiamo andare oltre calcolando esplicitamente il modulo della derivata della trasformazione conforme  $|dz/dt|$ ; per questo teniamo conto del fatto che un punto  $p = a + jb$  del piano complesso è rappresentato in modo equivalente dal vettore  $(a, b)$ , per cui è lecito applicare alla  $z = f(t)$  tutti i risultati del calcolo vettoriale:

$$\begin{aligned} \left| \frac{dz}{dt} \right| &= \left| \frac{dx}{dt} + j \frac{dy}{dt} \right| \\ &= |(\nabla x) \cdot t + j(\nabla y) \cdot t| \\ &= \left| [(\partial_u x)u + (\partial_v x)v] + j[(\partial_u y)u + (\partial_v y)v] \right| \\ &= \sqrt{[(\partial_u x)^2 + (\partial_u y)^2](u^2 + v^2) + 2uv[(\partial_u x)(\partial_v x) + (\partial_u y)(\partial_v y)]} \\ &= \sqrt{(\partial_u x)^2 + (\partial_u y)^2} \end{aligned}$$

avendo utilizzato le (A.1) nella semplificazione dell'espressione, e ricordando che  $t$  è un versore. In vista di ulteriori sviluppi, ricaviamo un'altra proprietà della funzione  $f$ . Poiché  $\mathbf{C}$  è isomorfo ad  $\mathbf{R}^2$ , è possibile pensare ad  $f$  come ad una funzione da  $\mathbf{R}_t^2$  in  $\mathbf{R}_z^2$  e scriverne la matrice Jacobiana  $Jf$ ; il modulo del determinante di quest'ultima risulta, utilizzando di nuovo le (A.1):

$$\begin{aligned} |\det(Jf)| &= \left| \det \begin{pmatrix} \partial_u x & \partial_v x \\ \partial_u y & \partial_v y \end{pmatrix} \right| \\ &= |(\partial_u x)(\partial_v y) - (\partial_v x)(\partial_u y)| \\ &= (\partial_u x)^2 + (\partial_u y)^2 \end{aligned}$$

e pertanto:

$$\left| \frac{dz}{dt} \right|^2 = |\det(Jf)| \quad (1.10)$$

Poichè per ipotesi stiamo considerando funzioni biettive (e quindi invertibili in ogni punto del dominio di definizione), allora i determinanti della Jacobiana e della sua inversa devono essere non nulli in ogni punto; per questo, anche le derivate  $dz/dt$  e  $dt/dz$  non si annullano mai, e le relazioni (1.8) e (1.9) risultano sempre invertibili.

Sia ora  $u(\vec{C}_z)$  una funzione di  $f(\mathbf{P})$  in  $\mathbf{R}^m$  integrabile, e  $\{\mathbf{K}_{t_n}\}$  e  $\{\mathbf{K}_{z_n}\}$  due successioni di compatti misurabili che invadono  $\mathbf{P}$  e  $f(\mathbf{P})$  rispettivamente; utilizzando il teorema del cambiamento di variabile si ha:

$$\int_{f(\mathbf{P})} u(\vec{C}_z) dz = \int_{\mathbf{P}} u(\vec{C}_t) |\det(Jf)| dt \quad (1.11)$$

se esistono finiti i limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{K}_{z_n}} u(\vec{C}_z) dz = \int_{f(\mathbf{P})} u(\vec{C}_z) dz$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{K}_{t_n}} u(\vec{C}_t) |\det(Jf)| dt = \int_{\mathbf{P}} u(\vec{C}_t) |\det(Jf)| dt$$

(ovviamente, se  $\mathbf{P}$  o  $f(\mathbf{P})$  è misurabile, non c'è bisogno della corrispondente successione di compatti e del passaggio al limite, e l'enunciato si semplifica).

Se in particolare  $u(\vec{C}_z)$  è del tipo  $u(\vec{C}_z) = \alpha |\vec{C}_z|^2$ , ove  $\alpha$  è una costante, sfruttando la (1.9) e la (1.10) otteniamo:

$$\int_{f(\mathbf{P})} u(\vec{C}_z) dz = \int_{\mathbf{P}} \alpha \frac{|\vec{C}_t|^2}{|dz/dt|^2} \left| \frac{dz}{dt} \right|^2 dt = \int_{\mathbf{P}} \alpha |\vec{C}_t|^2 dt = \int_{\mathbf{P}} u(\vec{C}_t) dt \quad (1.12)$$

L'ultima forma della  $u$  può essere letta come un'espressione per la densità di energia elettrica o magnetica di un sistema; con questo abbiamo dimostrato che *l'energia totale di un sistema è un invariante conforme*. In altri termini, è lo stesso calcolare l'energia del sistema operando nel piano  $t$  ovvero nel piano  $z$ .

Riprendiamo l'esempio sviluppato nella sezione precedente e verifichiamo su di esso quanto esposto. Poichè il potenziale complesso è un invariante conforme è lecito scrivere:

$$w = \phi + j\psi = kt = k(u + jv) = ku + jkv = k(x^2 - y^2) + j2kxy = kz^2$$

e la derivata della funzione di trasformazione è:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2t^{1/2}} \quad (1.13)$$

Per il campo elettrico nel piano  $t$  si ha:

$$\vec{E}_t^* = E_u - jE_v = j \frac{dw}{dt} = jk \quad \Rightarrow \quad E_u = 0 \quad \text{e} \quad E_v = -k$$

$$|\vec{E}_t| = \left| \frac{dw}{dt} \right| = |k|$$

mentre nel piano  $z$ :

$$\vec{E}_z^* = j \frac{dw}{dz} = j2kz$$

$$|\vec{E}_z| = \left| \frac{dw}{dz} \right| = |2kz|$$

da cui ricaviamo:

$$\operatorname{Re}\left(j2kz \frac{1}{2t^{1/2}}\right) = 0 = E_u \quad \text{e} \quad -\operatorname{Im}\left(j2kz \frac{1}{2t^{1/2}}\right) = -k = E_v$$

$$|\vec{E}_z| \left| \frac{dz}{dt} \right| = |2kz| \left| \frac{1}{2t^{1/2}} \right| = |k| = |\vec{E}_t|$$

cioè proprio quanto asserito dalla (1.8) e dalla (1.9). Per quanto riguarda le considerazioni fatte sull'energia, in questo caso, essendo il campo uniforme in una regione non limitata del piano  $t$ , essa è infinita in tale regione; possiamo però verificare che la quantità di energia contenuta in due regioni *corrispondenti* è la stessa. Si consideri dunque nel piano  $t$  la regione rettangolare delimitata dalle linee  $v = v_1$  e  $v = v_2$ , e da  $u = u_1$  e  $u = u_2$ ; ad esse corrispondono nel piano  $z$  le curve  $2xy = v_1$  e  $2xy = v_2$ , e  $x^2 - y^2 = u_1$  e  $x^2 - y^2 = u_2$  (figura 1.5). La

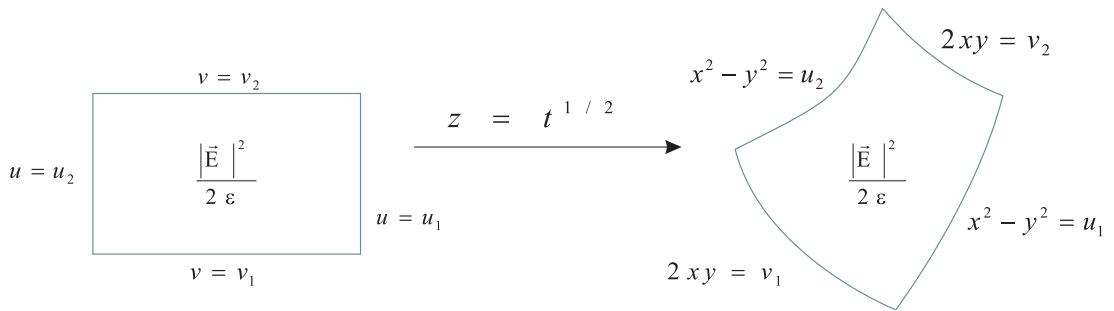


Figura 1.5: trasformazione di una regione del piano  $t$  tramite la  $z = t^{1/2}$

densità di energia elettrica si può scrivere come  $|\vec{E}|^2/(2\epsilon)$  in entrambi i piani, cioè nel caso in esame:

$$\frac{k^2}{2\epsilon} \quad \text{e} \quad \frac{4k^2|z|^2}{2\epsilon}$$

Poichè la trasformazione è invertibile, vale la relazione:

$$|\det^{-1}(Jf)| = |\det(Jf^{-1})|$$

con

$$f(t) = z = t^{1/2}$$

e

$$f^{-1}(z) = t = z^2 = (x^2 - y^2) + j(2xy)$$

ed in questo caso risulta<sup>2</sup>:

$$|\det(Jf^{-1})| = \left| \det \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2y & 2x \end{pmatrix} \right| = 4(x^2 + y^2) = 4|z|^2 = |\det^{-1}(Jf)|$$

<sup>2</sup> $|\det(Jf^{-1})| = 0$  in  $z = 0$ ; tuttavia questo punto non appartiene all'aperto  $\mathbf{P} = \{t \in \mathbf{C}_t \text{ t.c. } \operatorname{Im}(t) > 0\}$ , ma al suo bordo  $\partial\mathbf{P} = \{t \in \mathbf{C}_t \text{ t.c. } \operatorname{Im}(t) = 0\}$ .

da cui:

$$|\det(Jf)| = \frac{1}{4|z|^2} = \left| \frac{dz}{dt} \right|^2$$

Integrando ora nei due piani sulle regioni corrispondenti ed utilizzando la (1.11), cioè il teorema del cambiamento di variabile per il piano  $z$ , si ottiene:

$$\int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{k^2}{2\varepsilon} du dv = \frac{k^2}{2\varepsilon} (u_2 - u_1)(v_2 - v_1) \quad \text{per il piano } t$$

$$\int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{4k^2|z|^2}{2\varepsilon} \frac{1}{4|z|^2} du dv = \frac{k^2}{2\varepsilon} (v_2 - v_1)(u_2 - u_1) \quad \text{per il piano } z$$

che conferma quanto espresso dalla (1.12).

## 1.4 La trasformazione bilineare

### 1.4.1 Proprietà della trasformazione

Una particolare trasformazione conforme per trattare contorni circolari, che verrà utilizzata nei prossimi capitoli, è la cosiddetta trasformazione *bilineare* o *di Möbius*, ovvero la

$$z = \frac{at + b}{ct + d} \tag{1.14}$$

ove  $a, b, c$  e  $d$  sono costanti reali o complesse. E' una trasformazione biettiva che può essere pensata come composizione di tre trasformazioni più semplici:

$$\begin{aligned} t_1 &= ct + d \\ t_2 &= \frac{1}{t_1} \end{aligned} \tag{1.15}$$

e

$$z = \frac{a}{c} + (bc - ad) \frac{t_2}{c} \tag{1.16}$$

La prima e la terza di queste introducono un cambiamento di scala, una traslazione ed una rotazione del campo a seconda dei valori che assumono le costanti, ma non ne cambiano la *forma*. La quantità  $(bc - ad)$  è detta *determinante* della (1.14), e dalla (1.16) risulta chiaro come non possa essere nullo; solo la (1.15), detta trasformazione *di inversione* (in quanto una variabile è l'inversa dell'altra), cambia la forma del campo: in definitiva la trasformazione bilineare completa determina per un certo campo lo stesso cambiamento di forma della sola trasformazione di inversione.

### 1.4.2 Il rapporto in croce

Consideriamo di nuovo la (1.14), e siano  $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$  e  $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$  due insiemi di punti corrispondenti; sostituendo nella (1.14):

$$\begin{aligned} z_1 - z_4 &= \frac{at_1 + b}{ct_1 + d} - \frac{at_4 + b}{ct_4 + d} \\ &= \frac{ad - bc}{(ct_1 + d)(ct_4 + d)} (t_1 - t_4) \end{aligned}$$

Procedendo analogamente per  $z_3 - z_2$ ,  $z_1 - z_2$  e  $z_3 - z_4$ , è possibile combinare le espressioni ottenute per eliminare le costanti  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  ricavando:

$$\frac{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)} = \frac{(t_1 - t_4)(t_3 - t_2)}{(t_1 - t_2)(t_3 - t_4)} \tag{1.17}$$

Il secondo membro della (1.17) è detto *rapporto in croce* dei quattro punti  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  e  $t_4$ ; è un invariante della trasformazione (1.14) e la relazione

$$\frac{(z_1 - z)(z_3 - z_2)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z)} = \frac{(t_1 - t)(t_3 - t_2)}{(t_1 - t_2)(t_3 - t)} \tag{1.18}$$

definisce l'unica trasformazione bilineare che mette in relazione le curve passanti per gli insiemi di punti  $\{t_1, t_2, t_3\}$  e  $\{z_1, z_2, z_3\}$ .

Come esempio di utilizzo della (1.18) ricaviamo la trasformazione che collega l'asse reale del piano complesso alla circonferenza di raggio unitario, e che sarà richiamata frequentemente nei prossimi capitoli. I punti  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 1$  e  $t_3 = \infty$  definiscono l'asse reale del piano  $t$ ; la circonferenza unitaria nel piano  $z$  può essere definita dai punti corrispondenti  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = j$  e  $z_3 = -1$  (figura 1.6). Sostituendo questi valori nella (1.18) otteniamo l'equazio-

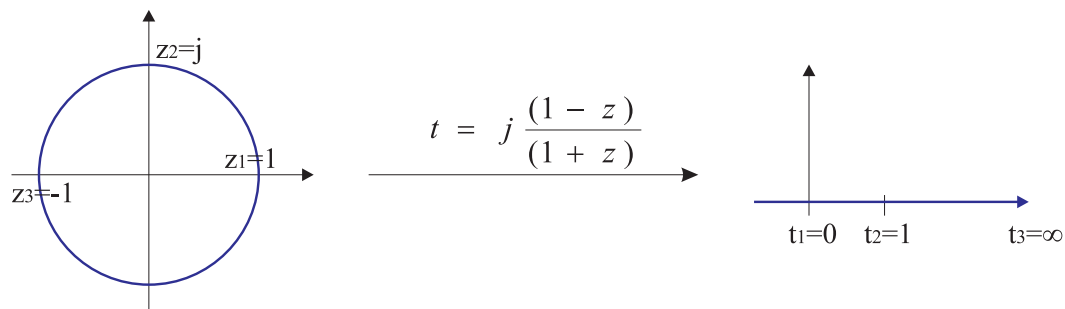


Figura 1.6: trasformazione della circonferenza di raggio unitario nell'asse reale

ne che trasforma la circonferenza unitaria nel piano  $z$  nell'asse reale del piano  $t$ : essa, a causa della scelta dei punti corrispondenti operata, fa corrispondere la parte superiore della circonferenza al semiasse reale positivo. Si ottiene dunque:

$$t = j \frac{(1 - z)}{(1 + z)} \tag{1.19}$$

Non è difficile dimostrare che la regione interna alla circonferenza unitaria corrisponde alla metà superiore del piano  $t$ , e la regione esterna alla metà inferiore.

## 1.5 Contorni non equipotenziali

Le considerazioni precedenti sono state fatte soprattutto riguardo a contorni equipotenziali o coincidenti con linee di flusso; vediamo ora le tre classi fondamentali di problemi definiti da condizioni sul contorno (chiuso): la prima ha definita su di esso una certa distribuzione di potenziale, per la seconda è definita la componente normale del campo e la terza è una combinazione dei primi due tipi.

**I** Un problema in cui i valori del potenziale siano specificati in tutti i punti lungo il contorno è detto *di prima specie* o *di Dirichlet*. E' sempre possibile ottenere una soluzione per tali problemi per l'interno del disco unitario o per il semipiano complesso, e quindi utilizzare questa soluzione, attraverso un'opportuna trasformazione conforme, per un'ampia gamma di forme del contorno.

- *Campo all'interno della circonferenza unitaria.* La soluzione al suo interno si ottiene per mezzo della *funzione potenziale complesso di Schwarz*: se  $\psi'(\theta')$  descrive la distribuzione del potenziale lungo la circonferenza, con  $\theta'$  angolo sotteso al centro, allora la soluzione è espressa da:

$$\phi + j\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{j\theta'} + t}{e^{j\theta'} - t} \psi'(\theta') d\theta' \quad (1.20)$$

spesso non esiste un'espressione analitica per questa soluzione, e si deve forzatamente ricorrere a metodi numerici.

- *Campo nel semipiano complesso.* La formula (1.20) si può modificare per ricavare una soluzione nel semipiano complesso dovuta ad una certa distribuzione di potenziale lungo l'asse reale semplicemente componendola con la (1.19); si ottiene:

$$\phi + j\psi = \frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + v't}{(1 + v'^2)(t - v')} \psi'(v') dv'$$

ove  $\psi(v')$  è la distribuzione di potenziale lungo l'asse reale del piano  $t$ .

**II** Se le condizioni al contorno specificano la componente normale del campo, il problema è detto *di seconda specie* o *di Neumann*; se invece definiscono il potenziale su alcune parti di esso ed il gradiente del potenziale su altre, il problema è detto *misto*. In generale, è molto difficile se non impossibile utilizzare le tecniche di trasformazione in questi due ultimi tipi di problemi.

# Capitolo 2

## Le trasformazioni di Schwarz-Christoffel

### 2.1 Introduzione

Spesso si incontrano dei contorni composti da segmenti, o che possono essere trattati come tali: ad esempio le armature di un condensatore o il traferro e le cave di una macchina elettrica. Ogni poligono ha un contorno composto da segmenti, e per comodità indichiamo con *poligonali* tutti i contorni del tipo di quelli descritti. Inoltre, è possibile considerare le regioni illimitate come se i loro contorni si chiudessero all'infinito (figura 2.1); in un caso o nell'altro il punto di incontro di due lati viene indicato con *vertice*, e l'angolo formato come *angolo al vertice*.

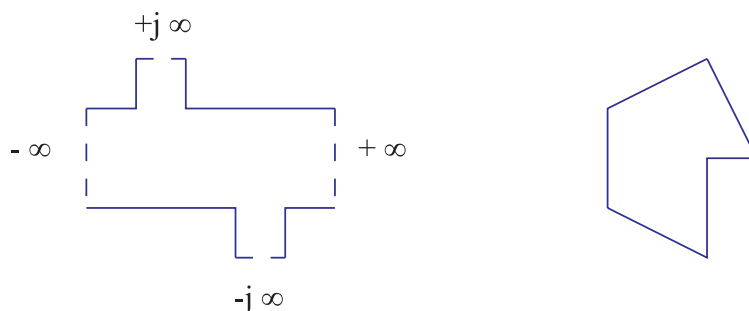


Figura 2.1: esempi di contorni poligonali, con e senza vertici all'infinito

Questo capitolo descrive i metodi standard che consentono di trasformare un contorno poligonale in una linea infinita o in una circonferenza attraverso l'integrazione di un'equazione differenziale i cui parametri dipendono dalle caratteristiche del contorno stesso; tali metodi sono validi *per ogni forma del contorno*, e l'integrazione può essere effettuata con strumenti analitici e/o numerici. Gli esempi di questo capitolo, volti ad illustrare il metodo di trasformazione, utilizzano solo funzioni facilmente integrabili con metodi analitici.

### 2.2 La trasformazione dal semipiano complesso

Consideriamo un poligono  $P$  nel piano  $z$  di vertici  $z_1, z_2, \dots, z_n$  assegnati in ordine antiorario; alcuni di essi possono essere all'infinito. Assumendo come positivo il verso di rotazione antiorario, ad ogni vertice  $z_k$  corrisponde un cambiamento di direzione di un angolo  $-\beta_k\pi$ ,



o in modo equivalente un angolo interno di  $(1 + \beta_k)\pi$  (figura 2.2). Se  $z_k \neq \infty$ , allora  $-1 < \beta_k \leq 1$ , altrimenti  $-3 < \beta_k \leq -1$ ; in ogni caso deve risultare:

$$\sum_{k=1}^n \beta_k = -2 \tag{2.1}$$

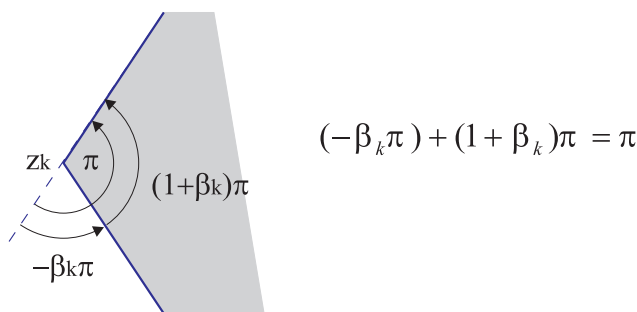
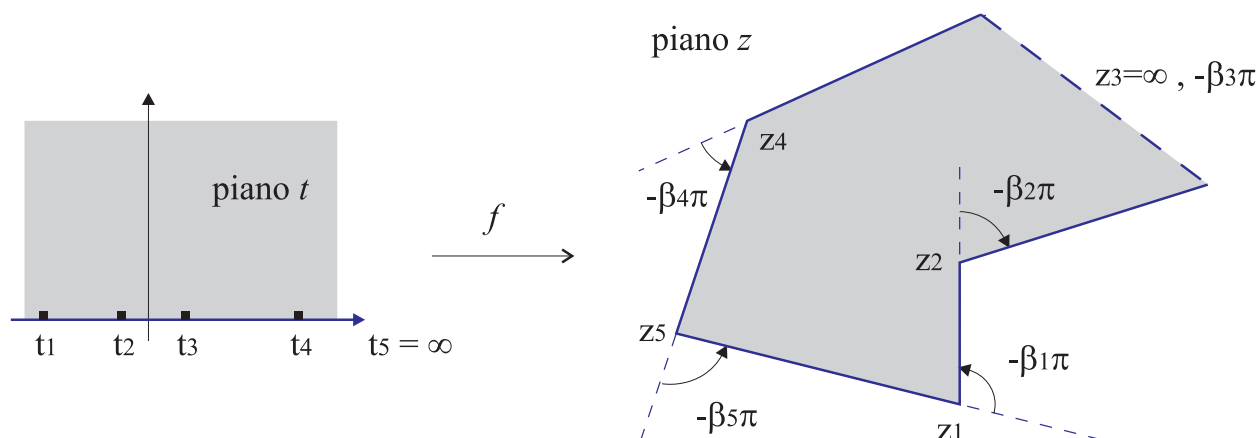


Figura 2.2: le convenzioni adottate per gli angoli

Sia ora  $C^+ = \{t \in C \text{ t.c. } Im(t) > 0\}$ , insieme che nel seguito per brevità indicheremo con *semipiano complesso*, e  $t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = \infty$  dei punti incogniti a priori (eccetto  $t_n$  che risulta fissato: la ragione di ciò sarà chiarita più avanti), detti *prevertici*, appartenenti all'asse reale del piano  $t$ ; consideriamo quindi l'equazione:

$$f'(t) = \frac{dz}{dt} = c \prod_{k=1}^{n-1} (t - t_k)^{\beta_k} \tag{2.2}$$

Questa è l'equazione differenziale di Schwarz-Christoffel, ove  $c$  è una costante (incognita) che determina un cambiamento di scala ed una rotazione, e i  $\{\beta_k\}$  i coefficienti (noti) che determinano gli angoli al vertice del poligono  $\mathbf{P}$  (figura 2.3). E' possibile esprimere in altri



$$\begin{cases} f'(t) = c \cdot (t - t_1)^{\beta_1} (t - t_2)^{\beta_2} (t - t_3)^{\beta_3} (t - t_4)^{\beta_4} \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 = -2 \end{cases}$$

Figura 2.3: la trasformazione dal semipiano complesso

modi la (2.2): ad esempio, indicando con  $\{\alpha_k = (1 + \beta_k)\pi\}$  gli *angoli interni*, si ha:

$$f'(t) = \frac{dz}{dt} = c \prod_{k=1}^{n-1} (t - t_k)^{(\alpha_k/\pi)-1}$$

La (2.2) descrive la lunghezza e l'inclinazione di un elemento  $dz$  in termini di lunghezza ed inclinazione del corrispondente elemento  $dt$ ; poichè la direzione di tutti gli elementi  $dt$  dell'asse reale del piano  $t$  è costante, l'argomento di questa equazione differenziale definisce immediatamente l'inclinazione dell'elemento  $dz$  appartenente a  $\mathbf{P}$ :

$$\arg(f'(t)) = \arg(c) + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \arg(t - t_k)$$

Per ogni valore  $t_{r-1} < t < t_r$ ,  $\arg(f'(t))$  rimane costante poichè i termini fra parentesi nella sommatoria sono o negativi, con argomento  $-\pi$ , o positivi, con argomento nullo; quando  $t$  passa attraverso  $t_r$ ,  $(t - t_r)$  diventa positivo, determinando un cambiamento di direzione pari a  $-\beta_r\pi$ . Questo avviene per ogni prevertice  $t_k$ , e la variazione di  $t$  da  $-\infty$  a  $+\infty$  traccia il contorno del poligono. Infine, il modulo della (2.2) determina la lunghezza di un elemento  $dz$  in funzione della lunghezza del corrispondente elemento  $dt$ , e quindi, per la trasformazione dell'asse reale del piano  $t$  nel contorno di un poligono di dimensioni assegnate, è necessario scegliere i prevertici  $\{t_k\}$  in modo tale da ritrovare i vertici nel piano  $z$  nella posizione desiderata.

L'integrazione della (2.2) definisce la funzione

$$z = f(t) = a + c \int_0^t \prod_{k=1}^{n-1} (\tau - t_k)^{\beta_k} d\tau \quad (2.3)$$

nota come *formula integrale di Schwarz-Christoffel*; si dimostra che la  $f(t)$  è olomorfa in  $\overline{C^+} \setminus \{t_1, \dots, t_{n-1}\}$  e può essere definita continua in ogni  $t_k$  per cui si abbia  $\beta_k > -1$ . Il

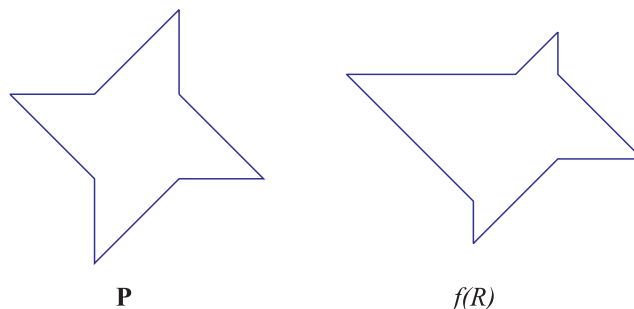


Figura 2.4: l'effetto della scelta arbitraria dei parametri

problema è ora scegliere i prevertici  $\{t_k\}$  in modo che  $f(t_k) = z_k$ ; assegnato un generico insieme di prevertici, mentre l'angolo al vertice in  $f(t_k)$  corrisponde a quello in  $z_k \in \mathbf{P}$ , le lunghezze dei lati possono non corrispondere: è chiaramente impossibile scegliere i prevertici e le costanti  $a$  e  $c$  in modo del tutto arbitrario (figura 2.4). Un teorema di Riemann garantisce comunque che esiste una trasformazione conforme da  $C^+$  a  $\mathbf{D}$ , l'interno di  $\mathbf{P}$ , ed il teorema fondamentale della trasformazione di Schwarz-Christoffel ci assicura che una scelta appropriata dei parametri fornisce proprio tale trasformazione:

**Teorema 2.1** *Sia  $D$  una regione poligonale aperta, semplicemente connessa e racchiusa da un poligono  $P$  di vertici  $z_1, z_2, \dots, z_n$  (anche all'infinito) e con angoli al vertice individuati dai parametri  $\{\beta_k\}$ . Allora ogni funzione che trasforma  $C^+$  in  $D$  può essere espressa nella forma (2.3).*

Inoltre, ogni trasformazione come dal teorema enunciato può essere definita continua in  $\overline{C^+}$  (eccetto che nelle controimmagini di punti all'infinito) come trasformazione verso  $\overline{D}$ . Poichè la trasformazione di Möbius (1.14) consente tre gradi di libertà, è possibile scegliere ad arbitrio tre prevertici; dal momento che si è posto  $t_n = \infty$ , altri due prevertici possono essere fissati a piacere, i rimanenti prevertici e le costanti  $a$  e  $c$  essendo determinati in modo univoco da  $P$ . La determinazione di tali quantità, nota come *problema dei parametri*, può avvenire solo in semplici casi scegliendo opportunamente alcuni punti corrispondenti nei piani  $t$  e  $z$  o ricorrendo a funzioni ellittiche; più spesso è necessario impostare sistemi di equazioni non lineari per la soluzione dei quali si deve far uso di metodi numerici, e questo sarà argomento del prossimo capitolo.

Ricordiamo per completezza che è anche possibile effettuare una trasformazione dal semipiano complesso all'esterno di un poligono  $P$ :

$$f'(t) = \frac{dz}{dt} = c(t^2 + 1)^{-2} \prod_{k=1}^{n-1} (t - t_k)^{\beta_k} \tag{2.4}$$

Questa equazione differisce dalla (2.2) solamente per il termine  $(t^2 + 1)^{-2}$  che però comporta una complicazione nel procedimento d'integrazione: per questo motivo, assieme al fatto che non può essere usata per derivare direttamente il campo soluzione nel piano  $w$ , è poco usata, preferendole la trasformazione dal disco unitario illustrata più avanti. Ulteriori dettagli ed approfondimenti al riguardo si trovano in [2].

Come semplice esempio dell'uso dell'equazione differenziale di Schwarz-Christoffel consideriamo la trasformazione dell'asse reale del piano  $t$  nel poligono formato da due semirette che si incontrano nel punto  $z = 0$  formando un angolo retto (figura 2.5), in modo tale che la metà superiore del piano complesso  $t$  corrisponda al primo quadrante del piano  $z$ : questo problema, benchè posto in altri termini, è già stato analizzato nel capitolo precedente. Facciamo corrispondere i punti  $t = -\infty$  a  $z = +j\infty$  e  $t = +\infty$  a  $z = +\infty$ ; poniamo infine

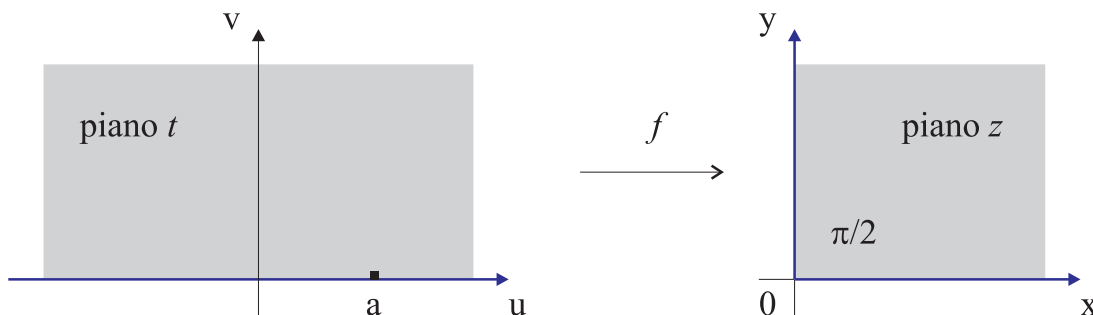


Figura 2.5: un semplice dominio ad un vertice

in corrispondenza al punto  $t = a$  il vertice in  $z = 0$ . L'angolo *interno* del poligono in  $z = 0$  è  $\pi/2$ , e l'equazione di Schwarz-Christoffel si scrive:

$$\frac{dz}{dt} = c(t - a)^{-1/2}$$

che per integrazione fornisce:

$$z = c'(t - a)^{1/2} + k \tag{2.5}$$

Ora il vertice nel piano  $z$  può esser messo in corrispondenza con qualsiasi punto nel piano  $t$ , dal momento che ciò equivale semplicemente a traslare l'origine di tale piano; la scelta più semplice è  $a = 0$ , che riduce la (2.5) a:

$$z = c't^{1/2} + k$$

I valori delle costanti  $c'$  e  $k$  dipendono da come i punti nei due piani vengono posti in corrispondenza; il problema è stato formulato in modo che i punti  $z = 0$  e  $t = a$  corrispondano, e per sostituzione di questi valori la (2.5) fornisce  $k = 0$ . Più in generale, lasciando l'origine di un piano libera di assumere qualsiasi valore opportuno, la costante  $k$  può sempre essere ridotta a zero. La costante  $c'$  può assumere in questo semplice caso qualsiasi valore; volendo invece definire un'ulteriore coppia di punti corrispondenti nei due piani, allora il suo valore risulta fissato: se ad esempio si vuole porre in corrispondenza i punti  $z = 2$  e  $t = 4$ , deve essere  $c' = 1$  e l'equazione di trasformazione risulta infine:

$$z = t^{1/2}$$

In pratica la scelta dei punti corrispondenti nei due piani non è arbitraria, ma dipende dalla natura del campo da risolvere: ciò diverrà più chiaro con l'esempio proposto alla fine del capitolo.

## 2.3 La trasformazione dal disco unitario

Per alcuni problemi può essere conveniente trasformare il contorno di un poligono non da una retta, ma da una circonferenza: tipicamente quando potrebbe in questo modo risultare più semplice determinare ed esprimere l'equazione del campo, o quando si debba utilizzare l'integrale di Poisson. E' possibile determinare in tutto quattro equazioni di trasformazione che connettono contorni poligonalì alla circonferenza: la regione interna o esterna ad un contorno può essere trasformata in quella interna o esterna all'altro; tali equazioni sono derivate combinando la trasformazione bilineare con la (2.2) o la (2.4).

Consideriamo l'equazione che trasforma la circonferenza di raggio unitario, indicata in seguito con *circonferenza unitaria*, in un contorno poligonale, in modo tale che le regioni *interne* ad entrambi si corrispondano. Poniamo il poligono nel piano  $z$  e la circonferenza nel piano  $t$ ; introduciamo quindi un piano  $p$  ausiliario: la circonferenza è prima trasformata nell'asse reale del piano  $p$ , e da qui nel contorno poligonale (figura 2.6). L'equazione che trasforma il disco unitario nel semipiano complesso è:

$$p = j \frac{1 - t}{1 + t} \tag{2.6}$$

e differenziandola si ottiene:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{2j}{(1 + t)^2} \tag{2.7}$$

L'equazione che trasforma il semipiano complesso nell'interno del poligono è (vedere la (2.2)):

$$\frac{dz}{dp} = c \prod_k (p - p_k)^{\beta_k} \tag{2.8}$$

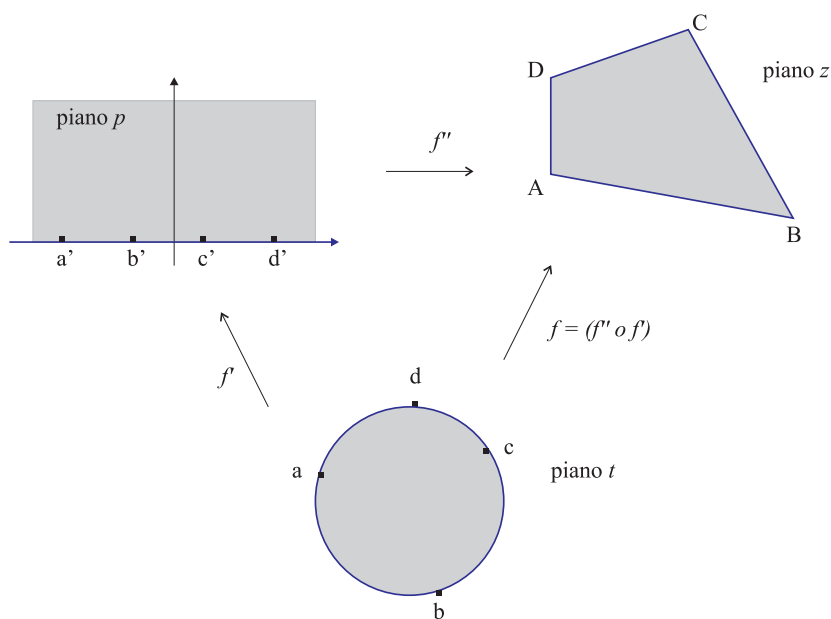


Figura 2.6: la trasformazione dal disco unitario

Ora, l'equazione che trasforma la circonferenza nel poligono si ottiene valutando:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dp} \frac{dp}{dt}$$

in termini delle espressioni trovate per  $dz/dp$  e  $dp/dt$ : sostituendo queste derivate con le equazioni (2.8) e (2.7) e  $p$  con la (2.6) si ottiene:

$$\frac{dz}{dt} = c \prod_k \left( j \frac{1-t}{1+t} - p_k \right)^{\beta_k} \frac{2j}{(1+t)^2} \quad (2.9)$$

Ricordando ora che deve valere la (2.1), è possibile riscrivere la (2.9) nella forma:

$$\frac{dz}{dt} = 2jc \prod_k [j(1-t) - p_k(1+t)]^{\beta_k} = 2jc \prod_k \left[ \left( \frac{j-p_k}{j+p_k} - t \right) (p_k + j) \right]^{\beta_k}$$

Dal momento che  $(p_k + j)$  è costante, e  $(j - p_k)/(j + p_k)$  è il punto  $t_k$  nel piano  $t$  che corrisponde a  $p = p_k$  (cosa che si vede facilmente scrivendo la (2.6) per  $t$  in funzione di  $p$ , cioè invertendola), l'equazione di trasformazione può essere scritta finalmente come:

$$\frac{dz}{dt} = 2jc \prod_k (p_k + j)^{\beta_k} \prod_k (t_k - t)^{\beta_k} = c' \prod_k (t_k - t)^{\beta_k}$$

che ha una forma identica all'equazione differenziale di Schwarz-Christoffel (2.2), eccetto che per l'ordine di sottrazione in ogni termine che risulta invertito. Va notato che i punti  $\{t_k\}$ , corrispondenti ai vertici del poligono, sono in generale numeri complessi con modulo unitario; inoltre i termini della produttoria sono  $n$  anzichè  $n - 1$ .

L'equazione che trasforma la regione *interna* alla circonferenza in quella *esterna* al poligono si ricava in modo analogo utilizzando la (2.6) e la (2.4):

$$\frac{dz}{dt} = c t^{-2} \prod_k (t - t_k)^{\beta_k}$$

Il termine  $t^{-2}$  indica come l'origine del piano  $t$  (tipicamente il centro del disco unitario, se non è stata effettuata una trasformazione di Möbius) venga trasformato in un punto all'infinito nel piano  $z$ ; per questo, solo un unico prevertice può esser scelto in modo arbitrario.

Le rimanenti due equazioni che mettono in relazione la circonferenza unitaria ad un poligono (dall'esterno della circonferenza all'interno del poligono e dall'esterno della circonferenza all'esterno del poligono) vengono utilizzate raramente e non sono qui riportate; si ricavano in modo analogo a quello indicato sopra.

L'utilizzo di una trasformazione dal disco unitario non rende automaticamente possibile la soluzione di qualsiasi problema che non può esser risolto trasformando dal semipiano complesso, e, per entrambi i metodi, nell'integrazione dell'equazione differenziale si incontrano difficoltà simili (dato un poligono, le funzioni coinvolte hanno la stessa forma); per regioni esterne ad un poligono, comunque, è spesso preferibile trasformare dalla circonferenza, in quanto il campo soluzione è più facile da visualizzare.

La soluzione generalizzata per il campo all'interno del disco unitario, dovuto ad una distribuzione arbitraria del potenziale lungo il suo contorno, è fornita dall'integrale di Poisson: grazie ad esso è possibile ottenere la soluzione del campo all'interno di un poligono, dovuto ad una *qualsiasi* distribuzione del potenziale al suo contorno, ammesso che il poligono possa essere trasformato dalla circonferenza unitaria.

## 2.4 Altre variazioni sulla formula originale

Componendo la (2.2) con altre trasformazioni conformi standard porta a varianti della formula originaria di Schwarz-Christoffel per trasformare da altri domini fondamentali. Una variante è la trasformazione dalla *striscia unitaria*  $\{t \text{ t.c. } 0 < \text{Im}(t) < 1\}$ , particolarmente utile quando  $\mathbf{P}$  ha l'aspetto di un "canale" (un dominio tipico da problema di dinamica dei fluidi); in questo caso la (2.2) diviene:

$$\frac{dz}{dt} = c e^{\theta t} \prod_k \left[ \sinh \left( \frac{\pi}{2} (t - t_k) \right) \right]^{\beta_k} \quad (2.10)$$

ove  $\theta$  dipende dall'angolo di divergenza agli estremi del canale, ed i prevertici (complessi)  $\{t_k\}$  giacciono su entrambi i lati della striscia unitaria. Combinando la (2.10) con una funzione ellittica di Jacobi, è possibile utilizzare un rettangolo come dominio fondamentale, utile quando  $\mathbf{P}$  è fortemente allungato in una direzione. In questo caso il rapporto fra le dimensioni lineari del rettangolo, detto *modulo conforme* del poligono, può essere determinato non a priori, ma risolvendo un opportuno problema dei parametri vincolato sulla fascia unitaria. Sono possibili molte altre varianti della trasformazione di Schwarz-Christoffel per composizione con altre trasformazioni.

## 2.5 Un esempio: l'elettrodo di Rogowski

Come esempio di trasformazione per un contorno poligonale analizziamo il campo elettrico ai bordi di un condensatore piano (figura 2.7). Le armature, ad una distanza  $2d$ , vengono

per semplicità considerate di spessore trascurabile, ai potenziali  $\psi_1$  e  $-\psi_1$  rispettivamente. Il campo è simmetrico ed il bordo può esser rappresentato nel piano  $z$  come mostrato in figura 2.8, dove l'asse reale corrisponde all'asse di simmetria. L'equazione di Schwarz-Christoffel

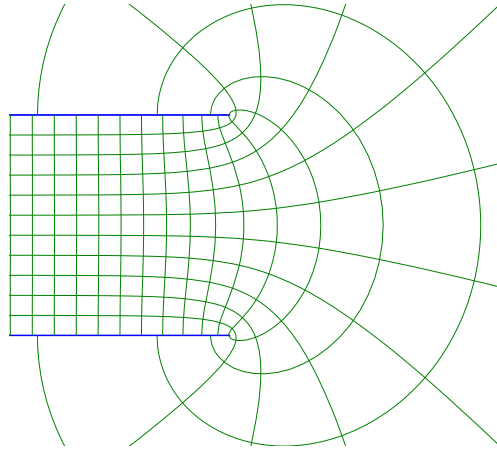


Figura 2.7: il campo elettrico presso i bordi di un condensatore piano

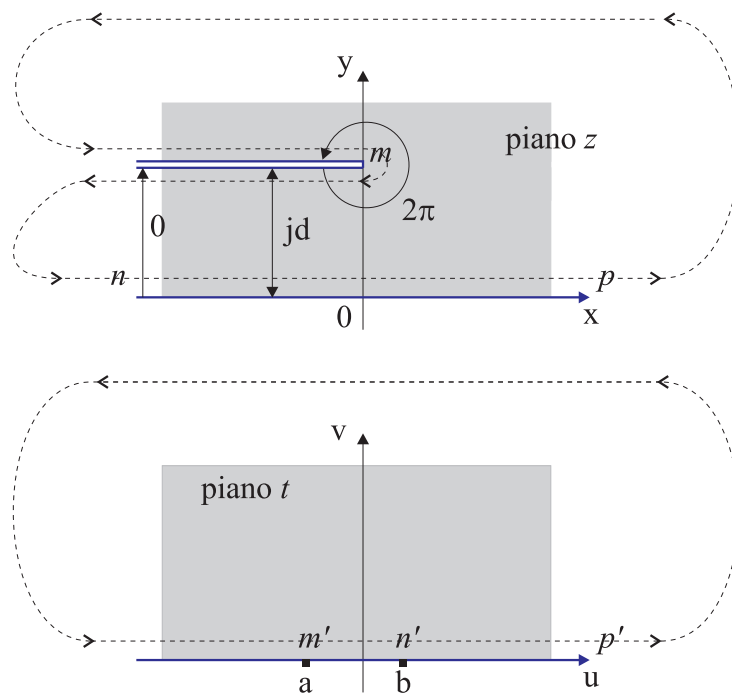


Figura 2.8: i parametri della trasformazione dal semipiano complesso

viene utilizzata per trasformare l'asse reale del piano  $t$  nel contorno nel piano  $z$ : la faccia superiore dell'armatura è rappresentata dalla parte di asse reale del piano  $t$  compresa fra  $-\infty$  ed  $a$ , e quella inferiore dalla parte fra  $a$  e  $b$ . Percorrendo i cammini rappresentati in figura 2.8 con una linea tratteggiata nel verso indicato dalle frecce, i punti corrispondenti fra i due piani sono:

$$\begin{aligned} t = a \quad (m') & \quad z = 0 + jd \quad (m) \\ t = b \quad (n') & \quad z = -\infty + j0 \quad (n) \\ t = +\infty \quad (p') & \quad z = +\infty + j0 \quad (p) \end{aligned}$$

e, dal momento che gli angoli interni sono  $2\pi$  in  $z = 0 + jd$  (equivalente ad un cambiamento di direzione di  $-\pi$ , da cui  $\beta_m = 1$ ) e  $0$  in  $z = -\infty + j0$  (equivalente ad un cambiamento di direzione di  $\pi$ , da cui  $\beta_n = -1$ ), la (2.2) fornisce:

$$\frac{dz}{dt} = c(t-a)(t-b)^{-1} \quad (2.11)$$

Inoltre, dal momento che in  $z = +\infty + j0$  avviene un cambiamento di direzione<sup>1</sup> di  $2\pi$ , si ha  $\beta_p = -2$  e risulta:

$$\sum_k \beta_k = \beta_m + \beta_n + \beta_p = 1 - 1 - 2 = -2$$

Le costanti  $c$ ,  $a$  e  $b$  vanno scelte in modo tale che l'equazione di trasformazione, ottenuta integrando la (2.11) fornisca le dimensioni e la forma corrette per il contorno nel piano  $z$ ; in questo semplice caso il numero di gradi di libertà concessi dalla trasformazione di Möbius (3) supera il numero di prevertici incogniti (2): prendiamo per comodità  $a = -1$  e  $b = 0$ , ottenendo dalla (2.11)

$$\frac{dz}{dt} = c \frac{(t+1)}{t} \quad (2.12)$$

la quale fornisce per integrazione:

$$z = c(t + \ln t) + k \quad (2.13)$$

Per la valutazione della costante  $c$ , notando che  $dz/dt$  è olomorfa<sup>2</sup> con un polo semplice in  $t = 0$ , applicando il teorema dei residui alla (2.12) nel modo descritto in conclusione all'Appendice A (sezione sui residui) si ottiene facilmente:

$$c = \frac{d}{\pi}$$

Poichè i punti  $t = -1$  e  $z = jd$  sono stati posti in corrispondenza fra loro, sostituendo nella (2.13) si trova  $k = d/\pi$ , e l'equazione di trasformazione risulta finalmente:

$$z = \frac{d}{\pi}(1 + t + \ln t) \quad (2.14)$$

I contorni nel piano  $z$  hanno una differenza di potenziale  $\psi_1$  pari alla metà di quella esistente fra le armature del condensatore; per questo nel piano  $t$  il potenziale è espresso, tramite la (B.4), da:

$$w = \frac{\psi_1}{\pi} \ln t \quad (2.15)$$

e la soluzione per il campo nel piano  $z$  risulta, eliminando  $t$  dalla (2.14) e dalla (2.15):

$$z = \frac{d}{\pi} \left( 1 + e^{w\pi/\psi_1} + \frac{w\pi}{\psi_1} \right)$$

<sup>1</sup>Il valore di questo cambiamento di direzione non ha comunque alcuna rilevanza ai fini della scrittura della (2.11), essendo la produttoria (2.2) estesa fino al termine  $n-1$ .

<sup>2</sup>Il suo sviluppo in serie di Laurent risulta:  $dz/dt = c/t + c$ , con  $c$  parte analitica e  $c/t$  parte principale.



che fornisce come valori corrispondenti:  $z = -\infty$ ,  $w = -\infty$  e  $z = jd$ ,  $w = j\psi_1$ .

Dal momento che le costanti  $a$  e  $b$  sono state scelte come  $-1$  e  $0$  invece di, ad esempio,  $0$  ed  $1$ , il punto di divisione del potenziale nel piano  $t$  si ha per  $t = 0$  e la soluzione per il campo ha l'espressione più semplice, la (2.15). Ancora, sarebbe stato possibile imporre  $k = 0$  nella (2.13) ottenendo come equazione di trasformazione:

$$z = \frac{d}{\pi}(t + \ln t)$$

l'origine del piano  $z$  risultando in questo modo traslata ad una distanza  $d/\pi$  alla destra della sua posizione precedente.

Nelle figure 2.9 e 2.10 si vede chiaramente come opera la trasformazione di Schwarz-Christoffel: il campo nel piano  $t$  dovuto ai due semipiani equipotenziali (vedere l'Appendice B) viene trasformato tramite la (2.14) per ottenere il campo nel piano  $z$ ; il flusso  $\phi$  ed il potenziale  $\psi$  sono rappresentati da superfici in spazi tridimensionali che vengono "deformate" in altre superfici: poichè, come sappiamo, il potenziale complesso  $w = \phi + j\psi$  è un invariante conforme, punti aventi lo stesso colore sono caratterizzati dallo stesso flusso o dallo stesso potenziale.

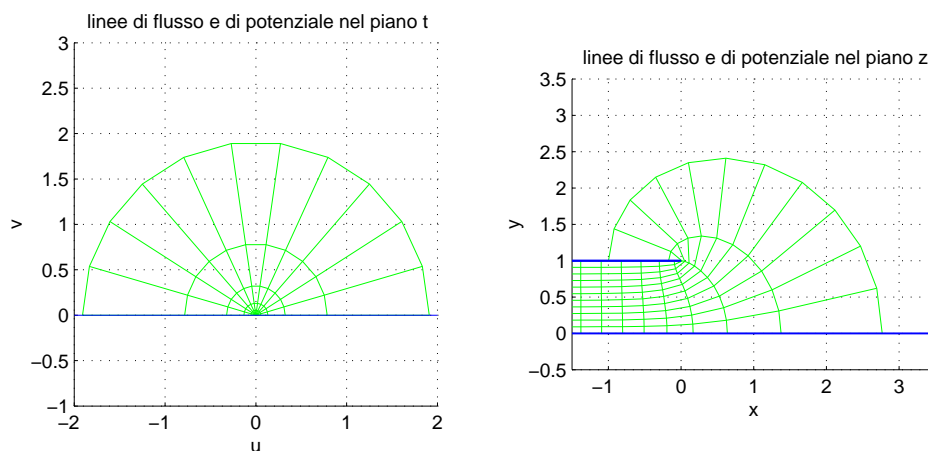


Figura 2.9: i campi nel piano  $t$  e nel piano  $z$

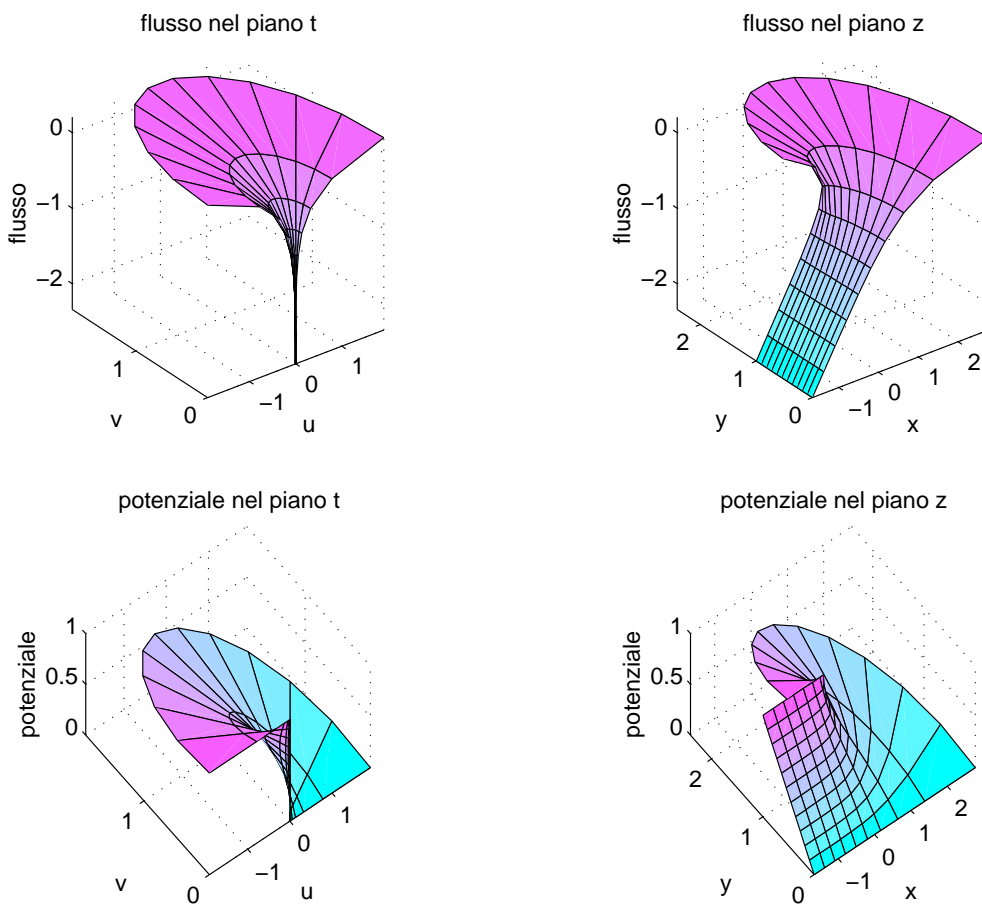


Figura 2.10: la trasformazione del flusso e del potenziale

# Capitolo 3

## La trasformazione numerica

### 3.1 Introduzione

Nella prima parte di questo capitolo si presentano brevemente i metodi numerici che permettono di valutare la funzione  $f(t)$  per la trasformazione di Schwarz-Christoffel, che riscriviamo qui nella sua formulazione fondamentale come:

$$z = f(t) = a + c \int_0^t \prod_{k=1}^{n-1} (\tau - t_k)^{\beta_k} d\tau \quad (3.1)$$

Queste tecniche sono maturate soprattutto negli ultimi vent'anni grazie a nuovi algoritmi e ad una potenza di calcolo cresciuta in modo vertiginoso: questi due rilevanti fattori hanno determinato la comparsa di un certo numero di pacchetti software, ad uso generico, per trattare numericamente le trasformazioni conformi.

Nella seconda parte del capitolo viene descritto il software che, al momento, rappresenta lo "stato dell'arte" in questo senso e si affronta un semplice problema di ottimizzazione sfruttando per la sua risoluzione proprio tale strumento.

### 3.2 Metodi numerici

E' già stato notato come metodi puramente analitici siano spesso inadeguati (o addirittura impraticabili) per contorni poligonali a molti vertici, in modo particolare quando gli angoli in gioco non siano multipli interi di  $\pi/2$ : in un caso del tutto generale (1) i prevertici sono il risultato di un sistema di equazioni non lineari, (2) l'integrale (3.1) ha raramente una forma chiusa ed infine (3) è spesso impossibile invertire la  $f(t)$  in modo esplicito. Per tali contorni il ricorso a metodi numerici consente di ampliare sensibilmente la classe dei problemi trattabili<sup>1</sup>. Ulteriori dettagli sono reperibili in [2] e [7].

#### 3.2.1 Soluzione del "problema dei parametri"

Consideriamo come dominio canonico il semipiano complesso. Nella (3.1) vanno determinati  $n - 3$  degli  $n$  prevertici  $\{t_k\}$ . Come visto nel precedente capitolo, per ogni insieme di  $n$  prevertici gli angoli sono comunque corretti; dobbiamo dunque utilizzare le lunghezze dei

---

<sup>1</sup>Tali metodi sono stati sviluppati inizialmente proprio per risolvere problemi riguardanti le macchine elettriche.

lati del poligono  $\mathbf{P}$  per ricavare  $n - 3$  condizioni reali. Le relazioni fra i lati di  $\mathbf{P}$  ed i prevertici nel piano  $t$  si possono esprimere come:

$$\begin{cases} z_{1,2} = c \int_{t_1}^{t_2} f'(\tau) d\tau \\ z_{2,3} = c \int_{t_2}^{t_3} f'(\tau) d\tau \\ \vdots \\ z_{n-1,n} = c \int_{t_{n-1}}^{t_n} f'(\tau) d\tau \end{cases}$$

ove con  $z_{l,m}$  si intende la distanza complessa fra i punti del piano  $z$  corrispondenti a  $t_l$  e  $t_m$ ; queste equazioni vanno risolte rispetto a  $c$  ed ai  $\{t_k\}$ . Se tutti i vertici  $\{z_k\}$  sono finiti, è naturale imporre:

$$\frac{|\int_{t_k}^{t_{k+1}} f'(\tau) d\tau|}{|\int_{t_1}^{t_2} f'(\tau) d\tau|} = \frac{|z_{k+1} - z_k|}{|z_2 - z_1|} \quad 2 \leq k \leq n - 2 \quad (3.2)$$

Da notare che le costanti  $a$  e  $c$  (che determinano una traslazione e una rotazione ed un cambiamento di scala) non compaiono, e le equazioni sono divise per la lunghezza di un lato di  $\mathbf{P}$ . Se tutte le  $n - 3$  equazioni sono soddisfatte, allora i  $\{z_k\}$  sono collocati in modo corretto l'uno rispetto all'altro, e  $z_n$  risulta quindi dall'intersezione dei due lati a lui adiacenti. Come conseguenza di questo,  $z_n$  non può essere un vertice finito i cui lati adiacenti siano collineari: in altre parole  $\beta_n$  non può essere 0 o 1.

Le (3.2) ci forniscono un sistema di equazioni non lineari, vincolato da:

$$t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = \infty \quad (3.3)$$

Un cambiamento di variabile consente di tenerne conto in modo implicito:

$$y_k = \log(t_{k+2} - t_{k+1}) \quad 1 \leq k \leq n - 3$$

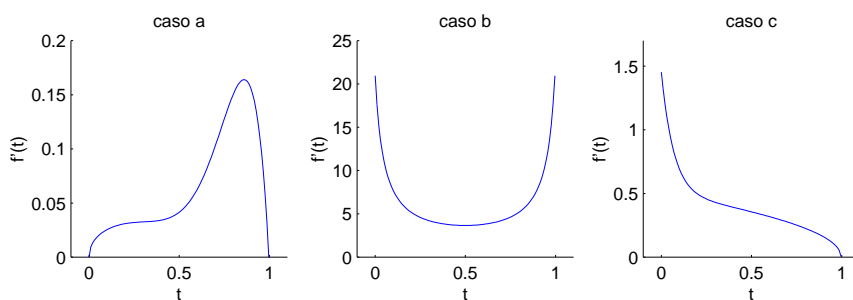
In tal modo le condizioni di ordinamento dei prevertici (3.3) vengono eliminate: ora abbiamo un sistema di equazioni non lineari senza vincoli, per la soluzione numerica del quale sono applicabili vari metodi standard. Come cammini di integrazione nella (3.2) si scelgono i segmenti fra i prevertici appartenenti all'asse reale, cosicché i logaritmi necessari per il calcolo degli integrandi risultano anch'essi reali. Questo è un vantaggio proprio della trasformazione dal semipiano complesso.

Se un vertice  $z_\xi$  è all'infinito, le equazioni (3.2) per  $k = \xi - 1$  e  $k = \xi$  non possono essere utilizzate. E' invece possibile integrare fra i prevertici  $t_{\xi-1}$  e  $t_{\xi+1}$ , e risolvere la (3.2) rispetto alle parti reale ed immaginaria separatamente. Comunque, per aggirare la singolarità, questo cammino d'integrazione deve passare per il semipiano complesso, e si perde il vantaggio di trattare con logaritmi reali.

Notiamo infine che  $z_1$  e  $z_2$  devono essere finiti, in quanto compaiono al denominatore della (3.2), e  $z_{n-1}$  deve essere finito per evitare integrazioni con un punto finale all'infinito. Sistemi analoghi al (3.2) vengono risolti per altri domini canonici.

### 3.2.2 Integrazione numerica della $f'(t)$

Il calcolo della (3.1) non è banale, in quanto la  $f'(t)$  presenta zeri e poli nei prevertici  $\{t_j\}$  e questi spesso compaiono come estremi d'integrazione. Gli algoritmi più usati per


 Figura 3.1: andamenti tipici di  $f'(t)$  lungo i lati di  $\mathbf{P}$ 

risolvere questo problema fanno uso di una routine principale di integrazione (solitamente realizzata tramite la nota formula di Simpson, con un opportuno passo d'integrazione) che viene interrotta sufficientemente vicino alle singolarità per lasciare il posto al metodo di quadratura di Simpson o al metodo di quadratura di Gauss-Jacobi.

Per quanto riguarda il metodo di quadratura di Simpson, l'integrale della  $f'(t)$  lungo una linea corrispondente ad un segmento  $\overline{z_l z_m}$  del contorno di  $\mathbf{P}$  ha per estremi  $t_l = f^{-1}(z_l)$  e  $t_m = f^{-1}(z_m)$ , corrispondenti a zeri o poli della funzione. L'attenzione va rivolta proprio a tali singolarità e, per ciascuna di esse, alla determinazione, nel suo intorno, del punto da cui è possibile utilizzare l'algoritmo di quadratura. La figura 3.1 mostra i tipici andamenti della  $f'(t)$  lungo i lati di  $\mathbf{P}$  terminanti rispettivamente<sup>2</sup>

- a. con due zeri della  $f'(t)$ : la funzione si annulla agli estremi d'integrazione e presenta in tali punti una derivata infinita; presenta inoltre il massimo in prossimità di uno degli zeri;
- b. con due poli: la funzione cresce rapidamente in prossimità di essi ma l'integrale rimane finito;
- c. con un polo ed uno zero: se l'angolo interno al vertice che determina il polo è zero, l'integrale (3.1) diverge; per altri valori dell'angolo si ha la convergenza.

E' pertanto necessario interrompere o iniziare la routine principale d'integrazione in un punto  $t_\delta = a + \delta$  ad un'opportuna distanza  $\delta$  dalla singolarità  $a$ : il criterio di scelta dipende in modo significativo dalla scelta delle costanti "libere" del piano  $t$ . Il risultato dell'integrazione di  $f'(t)$  per mezzo del metodo di quadratura fra la singolarità e  $t_\delta$  può essere trascurabile o infinito, a seconda dell'angolo interno al vertice in questione. Per chiarire, consideriamo una  $f'(t)$  avente un polo in  $t = a$  e scritta come<sup>3</sup>:

$$f'(t) = \tilde{f}(t) (t - a)^{(\alpha/\pi) - 1}$$

allora  $\int f'(\tau) d\tau$  fra  $a$  e  $t_\delta$  diviene:

$$\int_a^{a+\delta} \tilde{f}(\tau) (\tau - a)^{(\alpha/\pi) - 1} d\tau \quad (3.4)$$

<sup>2</sup>In altri termini, l'integrando nei prevertici o perde la differenziabilità o diviene illimitato. Per questo è necessario intervenire localmente con apposite tecniche.

<sup>3</sup>Ricordiamo che, volendo utilizzare gli angoli *interni*, la formula di Schwarz Christoffel si scrive:

$$f'(t) = \frac{dz}{dt} = c \prod_k (t - t_k)^{(\alpha_k/\pi) - 1}$$

Ora, se  $\delta$  è sufficientemente piccolo, la  $\tilde{f}(t)$  si può ritenere costante nell'intervallo d'integrazione, dal momento che in un intorno di  $a$  non contiene singolarità ( $a$  è infatti per ipotesi una singolarità isolata); l'integrale (3.4) risulta:

$$\tilde{f}(a) \left| \frac{\pi}{\alpha} (t-a)^{\alpha/\pi} \right|_a^{a+\delta}$$

cioè:

$$\int_a^{a+\delta} f'(\tau) d\tau = \tilde{f}(a) \frac{\pi}{\alpha} (\delta)^{\alpha/\pi} \quad (3.5)$$

Come già osservato, quando l'angolo interno  $\alpha$  al vertice è zero la (3.5) diverge. In caso contrario, tale quantità viene aggiunta al risultato della routine principale di integrazione interrotta nei pressi della singolarità.

Il metodo di quadratura di Gauss-Jacobi compensato (*compound Gauss-Jacobi quadrature*) si presta molto bene per trattare questo tipo di singolarità agli estremi della funzione, ed una realizzazione con algoritmi di tipo adattativo permette di trattare in modo opportuno le singolarità prossime all'intervallo d'integrazione<sup>4</sup>. L'esperienza conferma l'osservazione di L. N. Trefethen per cui  $n$  nodi d'integrazione per sottointervallo sono sufficienti ad assicurare risultati con una precisione dell'ordine di  $10^{-n}$ .

### 3.2.3 Valutazione della trasformazione inversa

Per quanto riguarda il calcolo della  $f^{-1}(z)$ , differenziando la  $z = f(t)$  si ottiene un'equazione differenziale ordinaria con  $z$  come variabile indipendente (come si vede, la derivata  $f'(t)$  è l'integrando della (3.1)):

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = \frac{df(t)}{dt} = f'(t) \\ (f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))} = \frac{1}{f'(t)} \end{cases}$$

In alternativa, è possibile applicare il metodo di Newton per trovare la soluzione di:

$$f(t) - z = 0$$

Spesso la via migliore è quella di risolvere numericamente l'equazione differenziale in modo anche molto approssimato, per fornire all'algoritmo di Newton un buon punto di partenza.

## 3.3 Implementazioni software

Il primo importante pacchetto software per trattare la trasformazione di Schwarz-Christoffel è stato SCPACK, scritto in FORTRAN nei primi anni '80 da L. N. Trefethen<sup>5</sup>, per trasformare fra il dominio a disco e l'interno di un poligono. Questo pacchetto è stato utilizzato in diverse applicazioni.

Attualmente, il software, ad uso generico, che permette di trattare la trasformazione di Schwarz-Christoffel in modo numerico utilizzando vari domini canonici e consente l'inversione

<sup>4</sup>Ciò è importante per ridurre l'influenza del fenomeno detto "crowding", descritto più avanti.

<sup>5</sup>Oxford University, Computing Laboratory

della  $f(t)$ , è l'SC-Toolbox per MATLAB, derivato da SCPACK, scritto da T. A. Driscoll<sup>6</sup> e giunto attualmente alla versione 2.16 per MATLAB versione 5 ([6]).

L'SC-Toolbox presenta due importanti miglioramenti rispetto a SCPACK: innanzitutto tratta molte più variazioni sulla formula originale di Schwarz-Christoffel (mappe dal semipiano complesso, dal disco unitario, dalla fascia unitaria e dal rettangolo, e mappe all'esterno di poligoni); inoltre permette di gestire facilmente i dati in modo grafico grazie all'ambiente MATLAB, il quale consente inoltre di integrare le funzioni del Toolbox con altre funzioni scritte in MATLAB, FORTRAN o C.

A proposito della scelta dell'ambiente MATLAB per lo sviluppo del pacchetto, che determina una lentezza di esecuzione generalmente maggiore rispetto a SCPACK, l'Autore ritiene (crediamo a ragione) che la sua facilità d'uso e la sua larga diffusione nell'ambiente scientifico siano le caratteristiche più idonee per un software ad uso generico. Se la velocità divenisse essenziale per una particolare applicazione, allora le routines più significative potrebbero essere facilmente riscritte in FORTRAN o C ed integrate in MATLAB ([13]).

### 3.3.1 SC-Toolbox per MATLAB

Il Toolbox, utilizzato per trattare le trasformazioni di Schwarz-Christoffel in questo lavoro di tesi, è scritto interamente in linguaggio MATLAB, ed implementa cinque variazioni sulla formula di Schwarz-Christoffel: trasformazioni dal semipiano complesso, dal disco unitario, dalla striscia unitaria e dal rettangolo all'interno di un poligono (anche non limitato), e trasformazioni dal disco all'esterno di un poligono; sono incluse funzioni per:

- input/output grafico;
- risolvere il problema dei parametri, calcolare le trasformazioni dirette ed inverse per ogni variante e valutare la derivata della funzione nel dominio canonico;
- esaminare i dati dell'analisi (prevertici, tolleranze, parametri, ...).
- formulazioni con algoritmi alternativi (CRDT (*Cross Ratio of the Delaunay Triangulation*), "mappe rettificate") per particolari tipi di poligoni, difficili da trattare numericamente;
- per il dominio a disco, funzioni per variare a piacimento il centro della trasformazione e per trasportare le soluzioni da/verso il semipiano complesso; è inoltre presente una variante per poligoni che presentano elongazioni (*cross-ratio formulation*).

Le funzioni di output grafico del Toolbox tracciano l'immagine di un reticolo ortogonale standard nel dominio fondamentale: tale reticolo è cartesiano per il semipiano superiore, la striscia unitaria ed il rettangolo, e polare per il disco unitario. E' comunque possibile utilizzare tali funzioni, passando loro opportuni parametri, per trasformare altri reticoli.

Per la risoluzione del sistema non lineare (3.2) derivante dal problema dei parametri, l'SC-Toolbox si appoggia a sua volta sul pacchetto NESOLVE per MATLAB scritto da R. Behrens: l'algoritmo utilizzato è il metodo di Gauss-Newton con aggiornamento di Broyden dello Jacobiano. Il pacchetto FSOLVE disponibile attualmente nell'Optimization Toolbox per MATLAB calcola lo Jacobiano solamente per differenze finite; il metodo di aggiornamento di Broyden comporta un miglioramento significativo, evitando il costo elevato, in termini computazionali, della valutazione di funzioni non lineari. Detto  $\mathbf{v}$  il vettore delle funzioni

<sup>6</sup>University of Colorado, Boulder, Department of Applied Mathematics

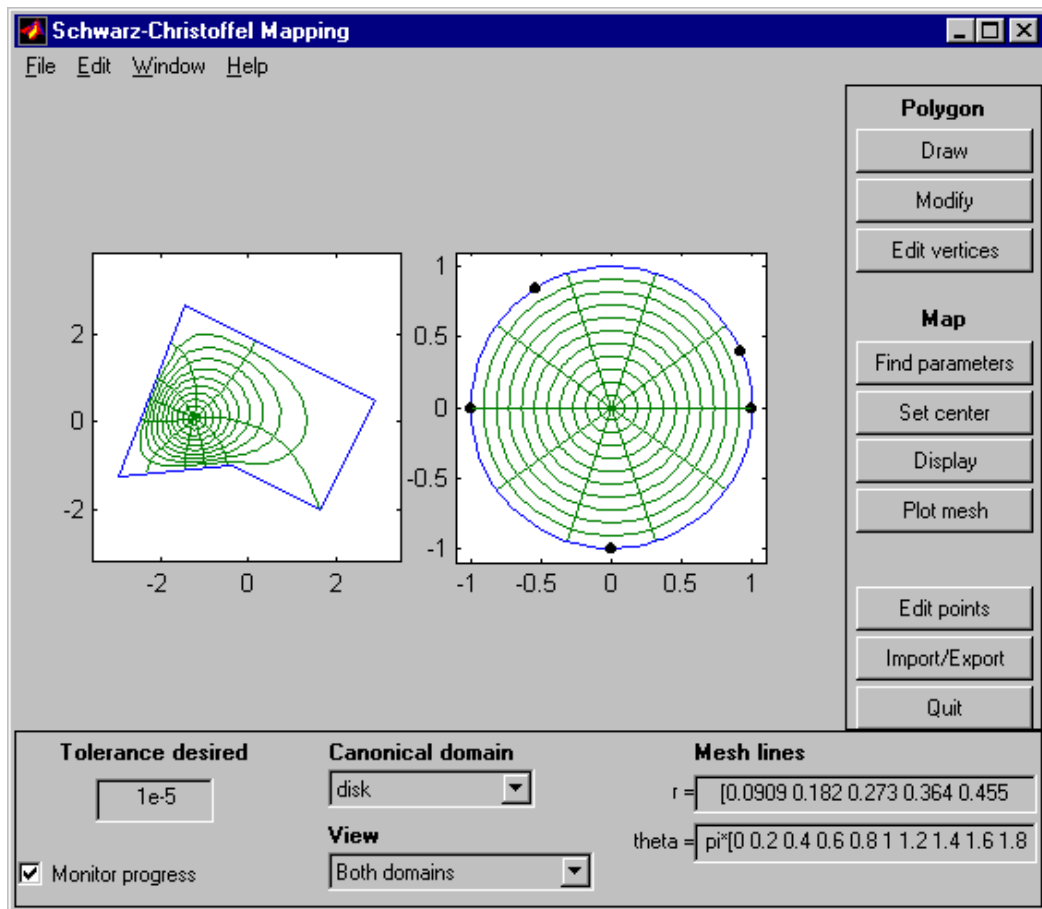


Figura 3.2: l'interfaccia grafica del Toolbox in ambiente MS-Windows

non lineari (3.2), le iterazioni vengono continuate finchè  $\|\mathbf{v}\|_2 < \varepsilon$ , ove  $\varepsilon$  è una tolleranza definibile dall'utente. L'esperienza indica che in genere i valori trovati per i prevertici e la funzione di trasformazione hanno un'accuratezza almeno pari a questa tolleranza, e spesso le mappe risultano più accurate lontano dalle singolarità.

Il vantaggio di lavorare con logaritmi logaritmi reali nella soluzione del problema dei parametri dal semipiano complesso è sfruttato automaticamente da MATLAB: per questa ragione il calcolo della soluzione dei problemi formulati con tale dominio canonico è solitamente circa due volte più veloce di quella dal disco unitario. Tutto il codice del Toolbox è vettorizzato per evitare cicli inutili (un fattore cruciale per la velocità di esecuzione in MATLAB); tuttavia un paragone con SCPACK svolto dall'Autore indica che quest'ultimo è solitamente più veloce nella risoluzione del problema dei parametri, sebbene le routines del Toolbox debbano trattare due incognite in meno nel sistema non lineare. Il valore tipico del rapporto fra le velocità di calcolo del Toolbox e di SCPACK è 2, sebbene possa variare fra 0.8 e 5: questo sembra inevitabile, essendo in parte dovuto al modo in cui MATLAB gestisce la memoria ed esegue il codice.

### 3.3.2 Difficoltà numeriche

Nella realizzazione di un software numerico per trattare le trasformazioni conformi, i due maggiori problemi che si incontrano (e per cui non si conosce una soluzione definitiva) sono i minimi locali nei sistemi non lineari e il fenomeno del "crowding".



## Minimi locali

Una difficoltà con i metodi di soluzione tradizionali è che i sistemi non lineari che si incontrano tendono a presentare punti di sella e di minimo locale che possono impedire o addirittura interrompere la procedura di soluzione. I problemi vengono segnalati dal messaggio **Warning: Nonlinear equations solver did not terminate normally**. Non si conosce nessun algoritmo per la scelta di un buon punto iniziale.

E' raro che il solutore del sistema non lineare fallisca completamente, ma è possibile notare una convergenza molto lenta. Spesso è possibile accelerare la procedura riprendendo il calcolo da una regione meno "complicata".

## "Crowding"

L'ostacolo maggiore nella trattazione numerica della trasformazione di Schwarz-Christoffel è senza dubbio il fenomeno detto "crowding", segnalato dal Toolbox con il messaggio **Warning: Severe crowding**, che si presenta ogni volta si debba trattare un poligono di aspetto allungato, all'esterno o all'interno. In tabella 3.1 sono riportati i risultati forniti dal Toolbox relativamente al poligono di figura 3.3 per cui è stata calcolata la trasformazione dal semipiano complesso: come si vede, molti prevertici risultano estremamente addensati in un'unica zona dell'asse reale del piano  $t$  (i prevertici 1, 7 e 8 sono fissati). In generale, i prevertici di una regione allungata si avvicinano esponenzialmente con il rapporto fra le dimensioni lineari della regione, e diventa impossibile distinguerli, utilizzando un'aritmetica in doppia precisione, per un rapporto fra le dimensioni maggiore di circa 20 (in pratica anche un rapporto inferiore può rendere estremamente lenta la convergenza del problema parametrico).

Il crowding può essere aggirato per regioni allungate principalmente in *una sola* direzione

Prevertice	$z$	$\beta$	$t$
1	-2.5+i	0.31283	-1
2	-3.5+2.5i	-0.81283	-0.999999999999997
3	-3.5-i	-0.81283	-0.999999999999996
4	-2.5+0.5i	0.31283	-0.999999999999993
5	2.5+0.5i	0.31283	-0.2006449163244
6	3.5-i	-0.81283	0.4108401303086
7	3.5+2.5i	-0.81283	1
8	2.5+i	0.31283	$\infty$

Tabella 3.1: effetto numerico del crowding per il poligono in figura 3.3

usando il rettangolo o la striscia unitaria come dominio fondamentale, soluzioni dovute ad Howell e Threfethen (1990) che riducono il fenomeno da esponenziale ad algebrico: la figura 3.4 mostra la mappa dal dominio a rettangolo di un poligono per il quale non è possibile utilizzare nè il disco nè il semipiano superiore. In stretta relazione con il rettangolo è la fascia unitaria: tipicamente questo dominio è utile quando l'obiettivo è un "canale", e le estremità della fascia corrispondono agli estremi di questo. Un'altra situazione interessante è quando si desidera una sorgente o un pozzo di campo in un punto del poligono (figura 3.5). Per regioni con elongazioni multiple, è possibile scegliere domini canonici più generali, come "fasce con fessure", ma questa tecnica comporta parecchi inconvenienti: complicate formule integrali, la necessità di predeterminare parte del poligono, convergenza meno robusta degli algoritmi e domini canonici di limitata utilità.

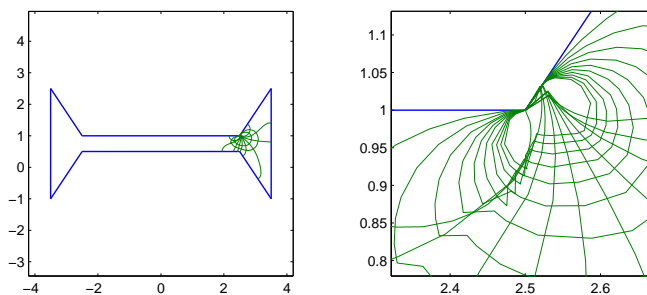


Figura 3.3: gli effetti del crowding

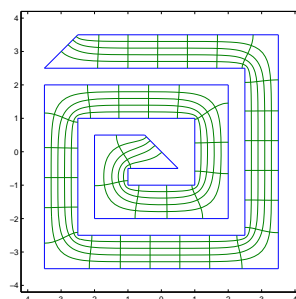


Figura 3.4: utilizzo del dominio a rettangolo per una regione fortemente allungata

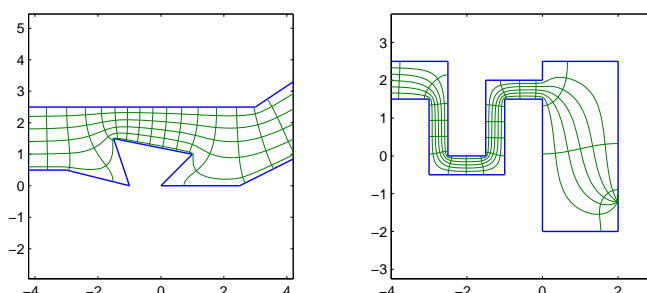


Figura 3.5: utilizzo del dominio a striscia unitaria per regioni allungate

### 3.3.3 Algoritmi alternativi

Descriviamo ora un nuovo potente algoritmo (CRDT), in fase avanzata di studio, il cui obiettivo è porre rimedio ad entrambi i problemi sopra descritti. Il secondo algoritmo (mappe rettificate) si basa sul CRDT e risolve un ulteriore problema di rappresentazione delle linee di campo. Maggiori dettagli si possono trovare in [8], dove gli Autori parlano anche di applicazioni all'equazione di Laplace  $\nabla^2 u = 0$  con condizioni di Dirichlet al contorno e alla generazione di reticoli per il metodo delle differenze finite, e di possibili sviluppi ed estensioni dell'algoritmo.

#### CRDT

CRDT (*Cross Ratio of the Delaunay Triangulation*) è un algoritmo sviluppato da T. A. Driscoll e S. A. Vavasis<sup>7</sup> in grado di risolvere il problema della trasformazione dal disco unitario

<sup>7</sup>Cornell University, Ithaca (NY), Department of Computer Science

per qualsiasi poligono limitato e con elongazioni arbitrariamente lunghe e sottili (anche multiple) grazie ad un metodo alternativo di rappresentazione dei prevertici. Inoltre, il sistema non lineare che in questo caso va risolto sembra essere sempre monotono, permettendo una soluzione numerica priva di problemi, sebbene questa osservazione dipenda da congetture che non si è ancora stati in grado di dimostrare. Spendiamo infine due parole sulle proprietà della trasformazione prodotta da questo algoritmo: essa, per quanto costruita con metodi numerici, è ancora una trasformazione *conforme* e *biiettiva*, e come tale gode di tutte quelle proprietà che rendono valide anche per essa le considerazioni svolte nella sezione 1.3. Prima di illustrare i passi dell'algoritmo è opportuno introdurre alcune definizioni.

**Definizione 3.1** *Sia  $\mathbf{P}$  un poligono limitato non degenere. Una triangolazione di  $\mathbf{P}$  è una suddivisione di  $\mathbf{P}$  in triangoli non degeneri, i vertici dei quali sono tutti e soli i vertici di  $\mathbf{P}$ .*

E' noto che un poligono di  $n$  vertici possiede almeno una triangolazione di  $n - 2$  triangoli ed  $n - 3$  distinte *diagonali*, cioè lati di triangoli che non appartengono al bordo di  $\mathbf{P}$  (è la triangolazione di ordine minimo, cioè la suddivisione nel minor numero di triangoli).

**Definizione 3.2** *Una triangolazione di Delaunay è una triangolazione che gode della seguente proprietà: se  $d$  è una diagonale, detto  $Q(d)$  il quadrilatero associato a  $d$ , cioè l'unione dei due triangoli che hanno  $d$  in comune, allora la somma dei due angoli interni di  $Q(d)$  secati da  $d$  è almeno  $\pi$ . Si dimostra che ogni poligono possiede almeno una triangolazione di Delaunay.*

Si dimostra che ogni poligono possiede almeno una triangolazione di Delaunay.

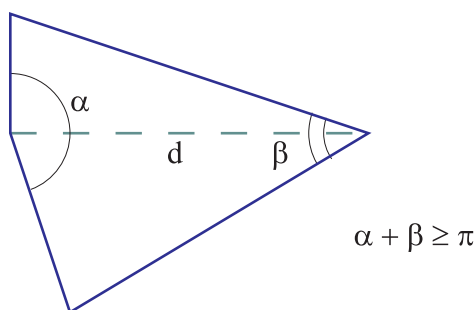


Figura 3.6: proprietà della triangolazione di Delaunay

**Definizione 3.3** *Siano  $a, b, c, d$  quattro punti distinti del piano complesso assegnati in ordine antiorario, tali che  $abcd$  sia un quadrilatero ed  $ac$  sia una diagonale di  $abcd$ . Si chiama rapporto in croce<sup>8</sup> dei punti il numero complesso:*

$$\rho(a, b, c, d) = \frac{(d - a)(b - c)}{(c - d)(a - b)}$$

Notiamo che  $\rho(a, b, c, d) = \rho(c, d, a, b)$ , cioè il rapporto in croce dipende solo dal quadrilatero e dalla diagonale scelta. Non è inoltre difficile vedere che il rapporto in croce è invariante per similitudine.

Il primo passo dell'algoritmo è aggiungere opportuni vertici ai lati di  $\mathbf{P}$ , vertici ai quali corrisponde un angolo interno pari a  $\pi$  e che scompongono il bordo in un'unione di segmenti

<sup>8</sup>E' lo stesso della sezione 1.4.2.

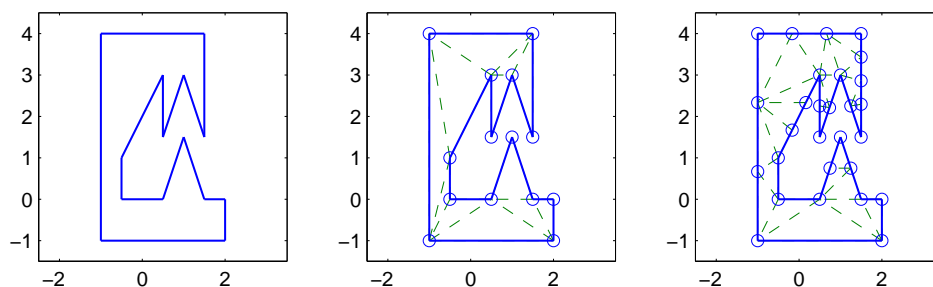


Figura 3.7: triangolazione di Delaunay di un poligono, senza e con l'aggiunta dei vertici ausiliari lungo i lati

più corti. Questa operazione non influenza ovviamente la formula di Schwarz Christoffel, in quanto un vertice con angolo interno di  $\pi$  ha un'esponente pari a 0 in tale formula; il suo scopo è rendere ogni singolo quadrilatero della triangolazione di Delaunay "ben condizionato", cioè con un rapporto in croce in modulo prossimo ad 1. In particolare, si vogliono evitare quadrilateri lunghi e stretti, in quanto i loro prevertici sul disco unitario sarebbero praticamente indistinguibili a causa del crowding.

**Lemma 3.1** *Siano  $a, b, c, d \in C$  disposti su una circonferenza. Allora  $\rho(a, b, c, d) \in R^-$ .*

L'idea è quella di risolvere un sistema non lineare che abbia come variabili gli  $n - 3$  rapporti in croce dei *prevertici*. Il lemma precedente assicura che questi rapporti sono numeri reali negativi; comunque, per tenere conto implicitamente di questo, le variabili del sistema sono i logaritmi degli opposti di tali rapporti in croce. Spieghiamo meglio: indichiamo con  $z_1, \dots, z_n$  i vertici di  $\mathbf{P}$ ; con  $d_1, \dots, d_{n-3}$  e  $Q_1 = Q(d_1), \dots, Q_{n-3}$  le diagonali ed i quadrilateri associati alla triangolazione di Delaunay di  $\mathbf{P}$  come definito sopra; con  $(z_{k(i,1)}, z_{k(i,2)}, z_{k(i,3)}, z_{k(i,4)})$  i vertici di  $Q_i$ ,  $i = 1, \dots, n - 3$  cosicchè  $(k(i, 1), k(i, 2), k(i, 3), k(i, 4))$  è una quaterna di indici distinti in  $\{1, \dots, n\}$ . Allora le variabili  $\sigma_i$  sono definite come:

$$\sigma_i = \ln(-\rho(t_{k(i,1)}, t_{k(i,2)}, t_{k(i,3)}, t_{k(i,4)})), \quad i = 1, \dots, n - 3 \quad (3.6)$$

E' evidente come, dati i prevertici  $t_1, \dots, t_n$ , sia facile attraverso la (3.6) calcolare le variabili  $\sigma_i$ ; ma nell'algorithm CRDT questo procedimento va invertito: date le  $\sigma_i$  bisogna trovare i prevertici sulla circonferenza che soddisfano la (3.6).

**Teorema 3.1** *Sia  $T_0$  un qualunque triangolo risultante dalla triangolazione di Delaunay di  $\mathbf{P}$  di vertici  $z_\phi, z_\psi, z_\chi$  in ordine antiorario. Siano inoltre i relativi prevertici  $t_\phi, t_\psi, t_\chi$  punti distinti sulla circonferenza unitaria in ordine antiorario. Allora, assegnati comunque dei valori reali positivi per le variabili  $\sigma_i$ , esiste un unico modo per scegliere i rimanenti  $n - 3$  prevertici sulla circonferenza unitaria in modo da soddisfare la (3.6). Indichiamo con disposizione un tale posizionamento dei prevertici.*

Il teorema dice in sostanza che, assegnati i valori per le  $\sigma_i$  e la posizione di tre prevertici corrispondenti ad un triangolo di Delaunay, possiamo calcolare univocamente la posizione di tutti gli altri prevertici. Si dimostra quindi che *qualsiasi* triangolo della triangolazione può essere scelto: tutte le disposizioni hanno per immagine lo stesso poligono, a meno di una similitudine:

**Teorema 3.2** *Siano assegnate le  $\sigma_i$ . Siano  $T_0$  e  $T'_0$  due triangoli di Delaunay di vertici  $(z_\phi, z_\psi, z_\chi)$  e  $(z_{\phi'}, z_{\psi'}, z_{\chi'})$  rispettivamente. Siano  $(t_\phi, t_\psi, t_\chi)$  e  $(t_{\phi'}, t_{\psi'}, t_{\chi'})$  delle disposizioni dei loro prevertici sulla circonferenza unitaria come dal teorema 3.1; si costruiscano quindi le due disposizioni  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  e  $(t'_1, t'_2, \dots, t'_n)$  rispettivamente. Siano  $\tilde{\mathbf{P}}$  e  $\tilde{\mathbf{P}}'$  le immagini del disco unitario utilizzando i due insiemi di prevertici. Allora  $\tilde{\mathbf{P}}$  e  $\tilde{\mathbf{P}}'$  sono simili, cioè coincidono a meno di una traslazione, una rotazione ed un cambiamento di scala.*

Siamo ora pronti ad illustrare l'algoritmo CRDT nei suoi passi fondamentali.

1. **Aggiunta di vertici e suddivisione del poligono.** Indichiamo ancora con  $\mathbf{P}$  il poligono ottenuto dopo tale operazione; sia  $n$  il numero complessivo dei vertici  $z_k$ .
2. **Triangolazione di Delaunay di  $\mathbf{P}$ .** Possiamo quindi ordinare le diagonali ed i quadrilateri della triangolazione; definiamo

$$c_i = \ln(|\rho(z_{k(i,1)}, z_{k(i,2)}, z_{k(i,3)}, z_{k(i,4)})|) \quad i = 1, \dots, n-3 \quad (3.7)$$

In generale tali rapporti in croce sono dei numeri complessi, quindi il segno di valore assoluto indica la loro ampiezza.

3. **Risoluzione del sistema non lineare  $\mathbf{F}(\sigma) = \mathbf{0}$ .** La funzione  $\mathbf{F} : R^{n-3} \rightarrow R^{n-3}$  è definita nel modo seguente: indicate con  $\zeta_k$  le immagini di una disposizione di prevertici, con le notazioni della (3.6) scriviamo:

$$F_i(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-3}) = \ln(|\rho(\zeta_{k(i,1)}, \zeta_{k(i,2)}, \zeta_{k(i,3)}, \zeta_{k(i,4)})|) - c_i \quad i = 1, \dots, n-3$$

Fissate le  $\sigma_i$ , come visto, è individuato  $\mathbf{P}$  a meno di una similitudine. Per ogni  $i$  dobbiamo dunque trovare i quattro vertici  $\zeta_{k(i,1)}, \dots, \zeta_{k(i,4)}$ : per questo costruiamo un'opportuna disposizione  $D_i$  di prevertici. Dal teorema 3.2 sappiamo che dato  $\sigma$  possiamo disporre a piacere tre prevertici  $t_{k(i,1)}, t_{k(i,2)}, t_{k(i,3)}$ , e lo facciamo in modo tale che, una volta trovato  $t_{k(i,4)}$ , questi quattro punti siano disposti su un rettangolo centrato nell'origine e con opportuno rapporto in croce. Allora, utilizzando il teorema 3.1, disponiamo i prevertici rimanenti per completare  $D_i$ . Questa disposizione definisce una trasformazione  $f_i$ , cioè la (3.1) con  $a = 0$  e  $c = 1$ , che utilizziamo per calcolare i vertici immagine  $\zeta_{k(i,1)}, \dots, \zeta_{k(i,4)}$ . Nel punto ove  $\mathbf{F}(\sigma) = \mathbf{0}$  si ha:

$$|\rho(\zeta_{k(i,1)}, \zeta_{k(i,2)}, \zeta_{k(i,3)}, \zeta_{k(i,4)})| = |\rho(z_{k(i,1)}, z_{k(i,2)}, z_{k(i,3)}, z_{k(i,4)})|, \quad i = 1, \dots, n-3$$

Questo poligono è proprio quello cercato:

**Teorema 3.3** *Sia  $\mathbf{P}$  un poligono limitato e triangolato di  $n$  vertici. Allora  $\mathbf{P}$  è determinato in modo univoco, a meno di una similitudine:*

1. *dalla sequenza degli angoli interni ai vertici e*
2. *dagli  $n-3$  valori assoluti dei rapporti in croce relativi ai quadrilateri determinati dalla triangolazione di  $\mathbf{P}$ .*

La risoluzione di  $\mathbf{F}(\sigma) = \mathbf{0}$  è il punto cruciale dell'algoritmo. Utilizzando il metodo di Newton si ha:

$$\begin{cases} \sigma^{(0)} = \mathbf{c} \\ \mathbf{F}(\sigma) = \mathbf{0} \simeq \mathbf{F}(\sigma^{(k)}) + \mathbf{F}' \Delta \sigma^{(k)} \\ \sigma^{(k+1)} = \sigma^{(k)} + \Delta \sigma^{(k)} = \sigma^{(k)} - (\mathbf{F}')^{-1} \mathbf{F}(\sigma^{(k)}) \end{cases}$$

ove  $\mathbf{c}$  è il vettore dei  $c_i$  sopra definito. Esperimenti mostrano come in realtà basti una semplice iterazione lineare:

$$\sigma^{(k+1)} = \sigma^{(k)} - \mathbf{F}(\sigma^{(k)}) \quad (3.8)$$

cioè la Jacobiana sembra essere sempre prossimo alla matrice identità. Sembra inoltre che le iterazioni soddisfino sempre la relazione  $\|\mathbf{F}(\sigma^{(k+1)})\|_2 \leq \alpha \|\mathbf{F}(\sigma^{(k)})\|_2$ , ove  $\alpha$  dipende dal problema, ma è sempre  $\alpha < 1$ . La convergenza "pulita" della (3.8) lascia supporre che  $\mathbf{F}$  sia fortemente monotona: ci si aspetta quindi che  $\|\mathbf{F}\|_2$  non abbia minimi locali e che  $\mathbf{F}$  sia iniettiva. La convergenza della (3.8) è però in pratica troppo lenta: viene quindi utilizzato per la risoluzione il pacchetto NESOLVE già descritto in questo capitolo.

**4. Calcolo delle costanti della trasformazione affine.** Quando  $\mathbf{F}(\sigma) = \mathbf{0}$ , sappiamo che la trasformazione  $f_i$  applicata ai prevertici del quadrilatero  $Q_i$  nella disposizione  $D_i$  produce un quadrilatero  $Q'_i$  simile a  $Q_i$ . Due punti di ciascun quadrilatero definiscono la trasformazione fra essi, così ora è possibile risolvere un sistema lineare o un problema di minimi quadrati per trovare le costanti  $a_i$  e  $c_i$  che compaiono nella (3.1). Questo completa la trasformazione da  $D_i$  a  $\mathbf{P}$ .

Osserviamo che il CRDT essenzialmente calcola simultaneamente  $n-3$  trasformazioni dal disco verso  $\mathbf{P}$ ; vediamo ora come ciascuna trasformazione sia *localmente* accurata in una parte del poligono. Se  $\mathbf{P}$  contiene parti strette ed allungate, allora per ogni possibile posizionamento dei prevertici alcuni di essi saranno estremamente addensati, ma un posizionamento  $D_i$  per il calcolo di  $f_i$  assicura che non lo saranno certi  $t_{k(i,1)}, \dots, t_{k(i,4)}$ , nè fra di loro nè rispetto agli altri prevertici; pertanto il crowding non ha alcuna influenza sull'accuratezza della quadratura per questi prevertici, in quanto il cammino d'integrazione non passa vicino ai prevertici addensati. Sfruttando questo fatto è possibile aggirare *globalmente* il crowding. In figura 3.8 è mostrato un poligono triangolato con due quadrilateri distinti le cui diago-

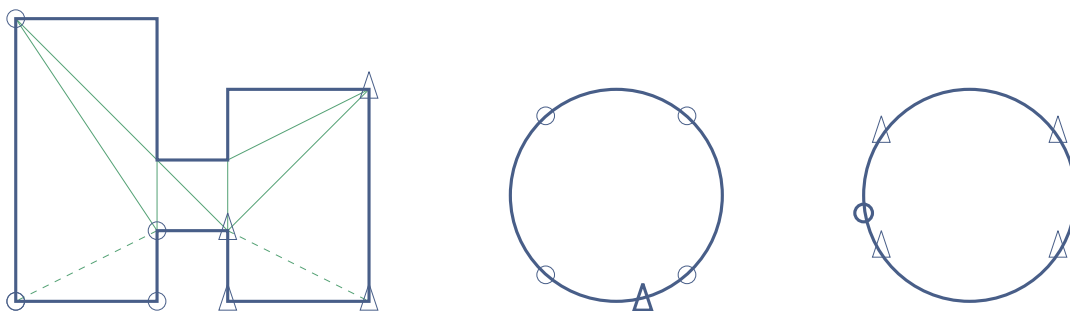


Figura 3.8: due distinte disposizioni dei prevertici

nali sono indicate con linee tratteggiate; nessuna disposizione dei prevertici è non affetta da crowding: al centro ne vediamo una dove i prevertici del primo quadrilatero (segnati con cerchietti) sono ben distanziati, mentre quelli dell'altra (segnati con triangoli) sono fortemente addensati attorno ad un punto, troppo vicini per essere distinti; sulla destra la situazione è rovesciata.

Vediamo per finire come utilizzare insieme le disposizioni  $D_i$  per trasformare i punti dal disco. Ricordiamo che ogni trasformazione conforme dal disco unitario in se stesso è frazionaria del tipo:

$$g(z) = e^{i\theta} \frac{z - r}{1 - \bar{r}z}$$

ove  $r$  è un numero complesso con  $|r| < 1$  e  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Come conseguenza, esiste un'unica trasformazione di questo tipo che trasforma tre punti distinti sulla circonferenza unitaria in altri tre punti conservandone l'ordinamento.

**Definizione 3.4** *Diciamo che due quadrilateri  $Q_i$  e  $Q_j$  della triangolazione di  $\mathbf{P}$  sono adiacenti quando hanno tre vertici in comune. Se  $D_i$  e  $D_j$  sono le disposizioni relative a tali quadrilateri, anch'esse si dicono adiacenti.*

Come si vede, quadrilateri adiacenti sono parzialmente sovrapposti. La disposizione  $D_i$  fornisce una trasformazione corretta in  $Q_i$ ; se  $Q_i$  è adiacente a  $Q_j$  allora questi hanno in comune tre vertici e quindi tre prevertici, consentendo di calcolare la trasformazione frazionaria  $g$  fra  $D_i$  e  $D_j$ . Ancora, poichè i prevertici di un quadrilatero sono ben distanziati nella propria disposizione, la  $g$  può esser calcolata con grande accuratezza.

Il primo passo è quello di scegliere una particolare disposizione di riferimento del disco in cui specificare i punti: per questo si fissa  $t_n = 1$  ed il centro della trasformazione  $z_0 = f(0)$ ; ciò in sostanza equivale a fissare i tre gradi di libertà e, implicitamente, a scegliere una disposizione per i prevertici. Sia ora  $Q_k$  un quadrilatero che contiene  $z_0$ : possiamo invertire numericamente la trasformazione affine  $f_k$  definita da  $a_k$  e  $b_k$  per trovare la controimmagine  $t_0$  di  $z_0$  in  $D_k$ . Poichè  $D_k$  è associato ad una trasformazione localmente accurata per  $Q_k$ , ci aspettiamo che  $t_0$  non sia troppo vicino al bordo del disco; ora, assegnato un punto  $t$  nella disposizione di riferimento, è possibile calcolare la sua immagine nella disposizione  $D_k$  e da qui le sue immagini in tutte le disposizioni adiacenti a  $D_k$ . Il procedimento è continuato in modo iterativo finchè gli equivalenti di  $t$  sono noti in tutte le disposizioni. A questo punto ogni  $D_i$  può essere in linea di principio utilizzato per calcolare l'immagine di  $t$ , ma dal momento che, presumibilmente, ogni trasformazione locale è più accurata vicino all'origine, si sceglie la disposizione in cui l'equivalente di  $t$  è minore in ampiezza.

La trasformazione inversa è analoga: dato  $z \in \mathbf{P}$  si inverte  $z$  numericamente in una disposizione corrispondente ad un quadrilatero contenente  $z$ ; quindi si trasforma questa controimmagine attraverso disposizioni adiacenti a  $D_k$ , e da qui a quella di riferimento.

## Mappe rettificate

Per molte applicazioni con regioni allungate, il disco unitario non è il dominio fondamentale ideale, anche se si è in grado di calcolare la trasformazione con precisione: ad esempio, se si vuole generare un reticolo ortogonale utilizzando il disco si devono trasformare punti che si avvicinano esponenzialmente al suo bordo per ottenere le linee di campo dentro le parti allungate.

In alternativa, supponiamo di conoscere una disposizione dei prevertici per il poligono: se manteniamo tali prevertici e cambiamo gli angoli della trasformazione, ne risulterà un nuovo poligono conformalmente equivalente a quello originario, essendo ad esso correlato da una trasformazione inversa e da una diretta. Una scelta conveniente è scegliere questi nuovi angoli interni  $\alpha_k$  multipli interi di  $\pi/2$ : il *poligono rettificato* risultante, a meno di una rotazione, avrà ogni lato parallelo ad uno degli assi, e si parla in questo caso di una *mappa di Schwarz-Christoffel rettificata*. In un tale poligono è banale trovare un reticolo ortogonale. Da notare che, una volta specificati gli angoli, si perde il controllo sulla lunghezza dei lati, a meno di un cambiamento di scala (nel caso importante in cui quattro  $\alpha_k$  sono  $\pi/2$  e tutti gli altri  $\pi$  il poligono rettificato è un rettangolo); le lunghezze dei lati del poligono rettificato vengono determinate durante la ricerca delle trasformazioni affini per i raggruppamenti dell'algoritmo

CRDT. Essendo possibile scegliere in più modi diversi gli angoli del poligono rettificato, il procedimento non è stato automatizzato e vanno quindi forniti dall'utente; l'unico vincolo per essi rimane  $\sum \alpha_j = -2\pi$ .

In figura 3.9 è mostrato un quadrilatero che presenta numerose frastagliature (segmenti blu) al suo interno, e le immagini in esso di alcune linee di campo da un rettangolo di lati 1 e 8,65 circa (il poligono rettificato). Le linee piene (in verde) sono le immagini di linee di campo ben distanziate dai lati lunghi del rettangolo, e si mantengono lontane dalle "anse" del quadrilatero; le linee tratteggiate (in rosso) hanno invece controimmagini estremamente vicine ai lati lunghi del rettangolo ( $10^{-2}$ ,  $10^{-4}$  e  $10^{-6}$ , sebbene sia possibile andare molto oltre) e seguono da vicino i bordi del "labirinto". Attualmente, nessun altro algoritmo riesce a calcolare tali curve con una simile precisione.

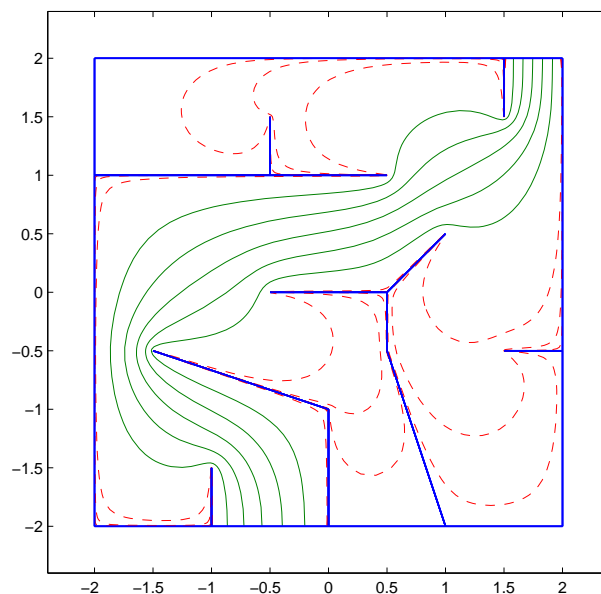


Figura 3.9: un dominio "a labirinto" rettificato e trattato con CRDT

### 3.3.4 Alcuni esempi

Vediamo alcuni semplici esempi per illustrare le capacità del Toolbox. Sono disponibili una dimostrazione automatica, una guida in linea ed una guida dell'utente, reperibile con il software, per i dettagli di utilizzo e programmazione.

La figura 3.10 mostra le trasformazioni per una regione ad L dal semipiano complesso (a sinistra) e dal disco unitario (a destra). La prima è l'immagine del reticolo standard per il semipiano complesso: le immagini delle linee verticali convergono con un'estremità in un vertice  $z_\xi = f(\infty)$ , e quelle orizzontali nello stesso punto con entrambe le estremità. La seconda figura è l'immagine di un reticolo polare dal disco unitario. Come si vede, le intersezioni fra le linee avvengono ad angoli retti.

La figura 3.11 mostra alcune trasformazioni dal semipiano complesso e dal disco unitario per alcuni poligoni con vertici all'infinito e frastagliature. Le mappe standard dal semipiano complesso richiamano alla mente le linee di flusso di un fluido, mentre quelle dal disco ricordano il campo elettrostatico dovuto ad una carica puntiforme.



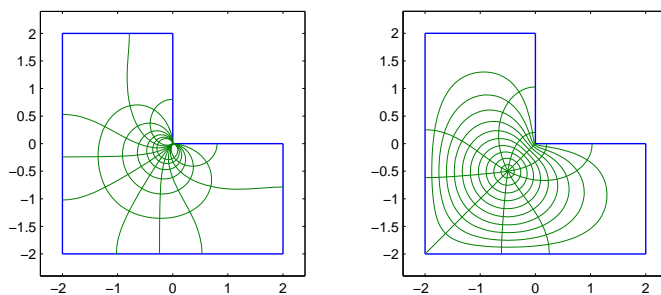


Figura 3.10: mappe dal semipiano superiore e dal disco unitario per un dominio ad L

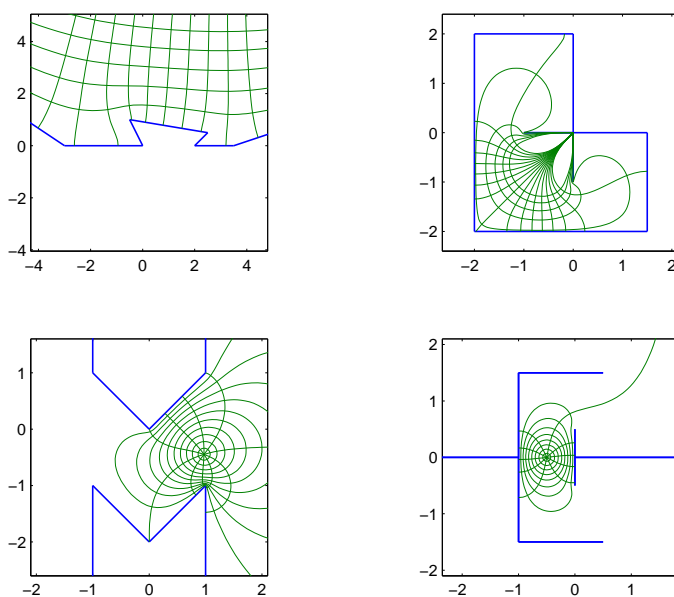


Figura 3.11: poligoni con lati all'infinito e frastagliature

La figura 3.12 è relativa alle trasformazioni all'esterno di poligoni (per l'utente del Toolbox ciò non comporta alcuna sostanziale differenza rispetto alle altre mappe): un'interpretazione può essere quella delle linee di flusso ed equipotenziali all'esterno di un conduttore.

Infine, per trattare il poligono in figura 3.13 viene utilizzato (a sinistra) l'algoritmo CRDT, grazie al quale è possibile trasformare dal disco a poligoni con elongazioni arbitrarie. Il disco unitario non è comunque il dominio canonico più idoneo: come si vede il reticolo è concentrato in una piccola parte del poligono. E' allora possibile costruire due mappe utilizzando il disco come "dominio intermedio": quella solita ed un'altra con gli stessi prevertici della prima ed "angoli rettificati" (al centro); le linee di campo sono quindi trasformate (a destra) a partire da quest'ultima.

### 3.4 Ottimizzazione dell'elettrodo di Rogowski

L'SC-Toolbox descritto nella sezione precedente viene ora utilizzato per risolvere un semplice problema di ottimizzazione di campo elettrico. Il problema proposto è descritto in [1], dove viene però affrontato con il metodo BEM (*Boundary Element Method*). Tutti i calcoli sono stati effettuati con un PC con processore AMD K6-II a 350 MHz e 64 Mbyte di RAM, piattaforma MS-Windows 95, MATLAB ver. 5.2.0.3084 ed SC-Toolbox ver. 2.16.

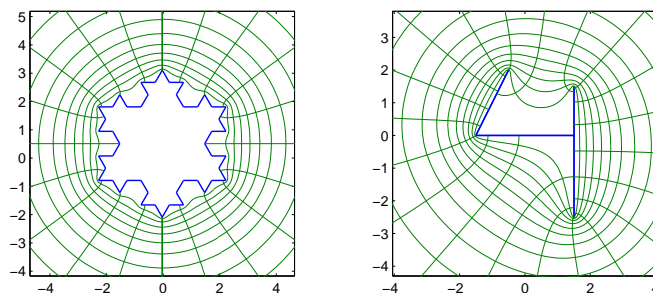


Figura 3.12: mappe dal disco unitario all'esterno di poligoni

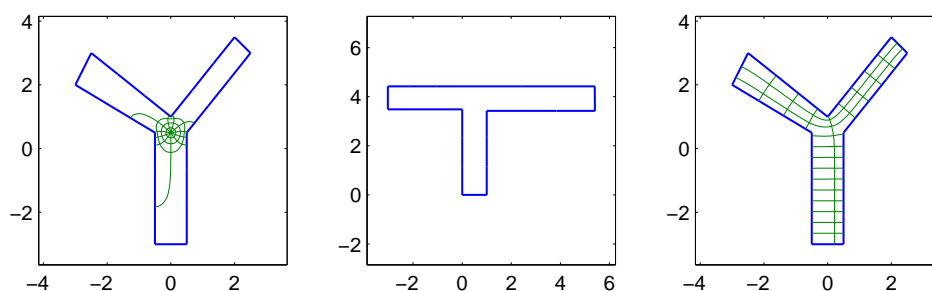


Figura 3.13: mappe CRDT per un poligono allungato, dalla circonferenza unitaria e da un dominio rettificato (al centro)

### 3.4.1 Formulazione del problema

Consideriamo la sezione di un condensatore in aria, piano e di lunghezza finita. L'obiettivo è cambiare opportunamente la forma delle armature al fine di mantenere il campo elettrico il più possibile uniforme: per questo definiamo una "regione controllata" prossima ai bordi del condensatore e richiediamo che il campo in tale regione si discosti il meno possibile da quello che si ha nel centro del dispositivo (dove gli effetti di bordo sono trascurabili). Nell'enunciato e nella soluzione del problema non vengono indicate le unità di misura, ritenendo tutte le quantità che compaiono espresse in (pu) rispetto ad un opportuno insieme di grandezze di riferimento.

Definiamo una parte mobile del contorno composta da quattro nodi, liberi di muoversi perpendicolarmente rispetto alle armature; le armature si trovano ad una distanza di 1,5, alle ordinate  $-0,75$  e  $0,75$ , ed i quattro nodi liberi (a cui corrispondono i quattro segmenti mobili visibili in figura 3.14 a sinistra) ad una distanza fissa lungo l'asse delle ascisse di 1. La regione controllata è quella compresa fra i punti di ascissa 0 e 2 e di ordinata  $-0,25$  e  $0,25$ . Consideriamo infine una differenza di potenziale fra le armature pari a 1,5.

Dal momento che con questo esempio siamo interessati più a verificare l'utilità della trasformazione in un problema di tipo inverso che al mero risultato numerico del problema stesso, ci sembra utile limitare i gradi di libertà a due: questo ci consentirà di visualizzare l'andamento della funzione obiettivo per verificare la consistenza del procedimento di soluzione; pertanto imponiamo che i quattro punti mobili si debbano muovere in modo simmetrico a due a due rispetto all'asse delle ascisse. In questo modo anche il campo sarà sempre simmetrico rispetto allo stesso asse e, ricordando l'esempio dell'elettrodo di Rogowski considerato alla fine del capitolo precedente, è possibile semplificare la geometria del problema come in figura 3.14 a destra e verificare solo la metà superiore della regione controllata: fissiamo a 0 il potenziale lungo l'asse delle ascisse e a  $0,75$  quello dell'armatura superiore (l'armatura

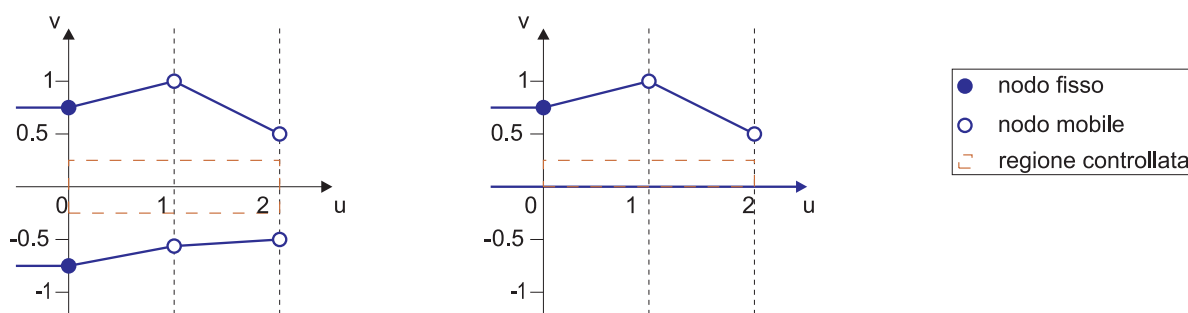


Figura 3.14: la geometria del problema considerato (a sinistra) e la geometria semplificata (a destra)

inferiore essendo ad un potenziale di  $-0,75$ ).

Troviamo ora un'adeguata espressione per la funzione obiettivo. Benchè il problema sia formulato in termini di campo elettrico, conviene tuttavia spostare l'attenzione sulla grandezza fisica, ad esso intimamente collegata, che meglio si presta ad essere manipolata da una trasformazione conforme: il potenziale complesso. Consideriamo le relazioni:

$$\vec{E} = -\nabla\psi \quad (3.9)$$

$$w(z) = w(f(t)) = w(t) = \phi + j\psi \quad (3.10)$$

la seconda delle quali ci dice semplicemente che il potenziale complesso  $w$ , come sappiamo, è un invariante conforme. Utilizzando la (3.9) e la (3.10) con le equazioni di Cauchy-Riemann (A.1) otteniamo:

$$\begin{cases} E_x = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ E_y = -\frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \end{cases} \quad (3.11)$$

Sufficientemente lontano dai bordi, o equivalentemente nel caso di armature di lunghezza infinita, si ha  $E_x = 0$  ed  $E_y = -k$ , ove  $k$  è una costante; in questo caso le (3.11) diventano:

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial x} = k \end{cases} \quad (3.12)$$

L'interpretazione geometrica delle (3.12) è ovvia: il potenziale  $\psi$  ammette una variazione costante solamente lungo l'asse  $y$ , mentre il flusso  $\phi$  solo lungo l'asse  $x$ ; pertanto le linee di campo formano un reticolo cartesiano ortogonale come quello in figura 3.15, e ciò che noi vogliamo si riduce in definitiva a mantenere un reticolo di campo nella regione controllata che sia il più possibile "vicino" a questo. Le (3.12) si riscrivono quindi per il piano  $t$  e  $z$  rispettivamente:

$$\begin{cases} w = \phi + j\psi = k_t(u - \bar{u}) + jk_t(v - \bar{v}) \\ w = \phi + j\psi = k_z(x - \bar{x}) + jk_z(y - \bar{y}) \end{cases} \quad (3.13)$$

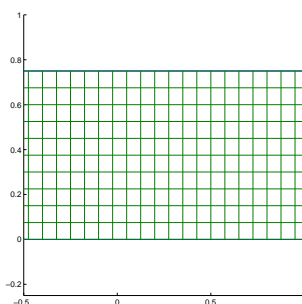


Figura 3.15: il campo nel caso di armature infinite

Scegliamo ora un dominio canonico appropriato per la trasformazione. Ricordando ancora l'esempio dell'elettrodo di Rogowski potremmo anche qui utilizzare il semipiano complesso, ma la figura 3.15 ci suggerisce di utilizzare la striscia unitaria, che è già di per sè uguale ad un condensatore infinito ed inoltre si presta bene a trattare domini con due vertici opposti all'infinito.

Le caratteristiche per il potenziale complesso  $w$  in questo dominio canonico sono le seguenti: l'armatura inferiore è a  $\psi = 0$  e quella superiore a  $\psi = 0,75$ ; in questo modo ad un punto  $t = u + jv$  corrisponde grazie alla (3.13) un potenziale  $w = 0,75(u - \bar{u}) + j0,75v$ .

Consideriamo ora  $N$  punti  $\{t_i\}$  del piano  $t$  disposti su un reticolo ideale nella parte che viene trasformata attraverso la  $f(t)$  nella regione controllata del piano  $z$ : ad essi ed alle loro immagini  $\{z_i\}$  saranno associati gli stessi potenziali  $\{w_i\}$ , ma in generale le immagini di punti che nel dominio canonico avevano le stesse ascisse (ordinate) non avranno le stesse ascisse (ordinate). Questo è l'effetto di deformazione delle linee di campo dovuto al bordo. Volendo però fare in modo che la (3.13) valga nella regione controllata, al limite ad un punto  $z = x + jy$  appartenente a tale regione sarebbe associato un potenziale  $w = (x - \bar{x}) + jy$ , pertanto le relazioni con la sua controimmagine sarebbero:

$$\begin{cases} \phi = x - \bar{x} = 0,75(u - \bar{u}) \\ \psi = y = 0,75v \end{cases} \quad (3.14)$$

e la regione controllata corrisponderebbe nel piano  $t$  alla regione compresa fra i punti di ascissa<sup>9</sup>  $f^{-1}(0)$  e  $f^{-1}(2)$  e di ordinata 0 e  $(0,25/0,75)=1/3$ . L'idea è allora la seguente: per ogni configurazione delle armature nel piano  $z$ , determinata dalla posizione dei punti mobili, calcoliamo la trasformazione di Schwarz-Christoffel dalla fascia unitaria, costruiamo il reticolo di  $N = N_x \times N_y$  punti nel piano  $t$  come indicato sopra e trasformiamolo; un confronto con il reticolo ideale di  $N = N_x \times N_y$  punti che dovremmo trovare nel piano  $z$  se non ci fossero distorsioni ci fornisce la funzione obiettivo da minimizzare. Dette  $\{z_i = x_i + jy_i\}$  le immagini dei punti del reticolo dal piano  $t$  e  $\{z_i^{id} = x_i^{id} + jy_i^{id}\}$  le posizioni che le immagini dovrebbero assumere nel caso ideale, due formulazioni significative sono

$$\text{funzione obiettivo 1 : } \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \{(x_i^{id} - x_i)^2 + (y_i^{id} - y_i)^2\}}{\sum_{i=1}^N \{(x_i^{id})^2 + (y_i^{id})^2\}}} \quad \text{da minimizzare}$$

<sup>9</sup>Notiamo che mentre per le ordinate il modo con cui i punti corrispondono fra loro è determinabile a priori in modo univoco essendo fissati i valori del potenziale, per le ascisse, non imponendo *quali* linee di flusso debbano entrare nella regione controllata e limitandoci a richiedere che formino un reticolo ortogonale con le equipotenziali, si devono per forza sfruttare le controimmagini di due punti opportuni che delimitino tale regione nel piano  $z$ .

**funzione obiettivo 2:**  $\max \|z_i^{id} - z_i\|_2 \quad i = 1, \dots, N$  da minimizzare

Questo metodo presenta il vantaggio di eliminare operazioni di derivazione numerica per la valutazione del campo  $\vec{E}$ , utilizzando solamente delle semplici relazioni geometriche di distanza fra punti.

### 3.4.2 Codice MATLAB e risultati della prova

Il codice MATLAB per la soluzione del problema (`condens.m`, `funzerr.m`, `pltparam.m` e `maperr.m`) è completamente riportato in Appendice C ed ampiamente commentato; basterà qui descriverne le caratteristiche fondamentali.

Le variabili di input/output di cui è necessario conoscere il significato per la comprensione dei risultati sono le seguenti:

- `posiz_iniz` definisce il valore iniziale delle ordinate dei punti liberi; il valore di partenza per essa è impostato a `[0.75,0.75]`, cioè assenza di deformazione delle armature. E' possibile specificare valori diversi, e quindi partire con una certa deformazione iniziale, e si verifica che questo non porta ad un punto di ottimo differente (esiste in altre parole un'unica soluzione ottima).
- `posiz` riporta il valore delle ordinate dei punti liberi alla fine del processo di ottimazione;
- `elapsed_time` indica il tempo trascorso per la soluzione (il tempo per il tracciamento dei grafici è escluso);
- `miglioramento` indica di quanto è migliorata la funzione obiettivo rispetto al punto di partenza al termine del procedimento di ricerca del minimo; detto `err` il valore in un punto della funzione obiettivo considerata, vale

$$\text{miglioramento} = \frac{\text{err}_{\text{iniziale}} - \text{err}_{\text{finale}}}{\text{err}_{\text{finale}}}$$

Il reticolo di campo nella regione controllata è composto da  $N = 200$  punti ( $N_x = 40$ ,  $N_y = 5$ ); per l'ottimazione si utilizza la funzione `fminu` (algoritmo BFGS, *Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno, unconstrained quasi-Newton minimization*) disponibile in MATLAB richiedendo una tolleranza sulla funzione obiettivo `funzerr.m` di  $10^{-6}$ . Il grafico dell'errore di intensità del campo  $\vec{E}$  è ottenuto, una volta terminata l'ottimazione, valutando in modo numerico il gradiente del potenziale scalare  $\psi$  associato alle controimmagini di un reticolo di punti nella regione controllata (nel piano  $t$  è immediato risalire a  $\psi$  data la posizione geometrica di un punto; bisogna comunque moltiplicare per 0,75 per tener conto delle (3.14)) e calcolando il modulo di questo; in ogni punto l'errore vale:

$$\varepsilon = \frac{E(x, y) - E_{ideale}}{E_{ideale}}$$

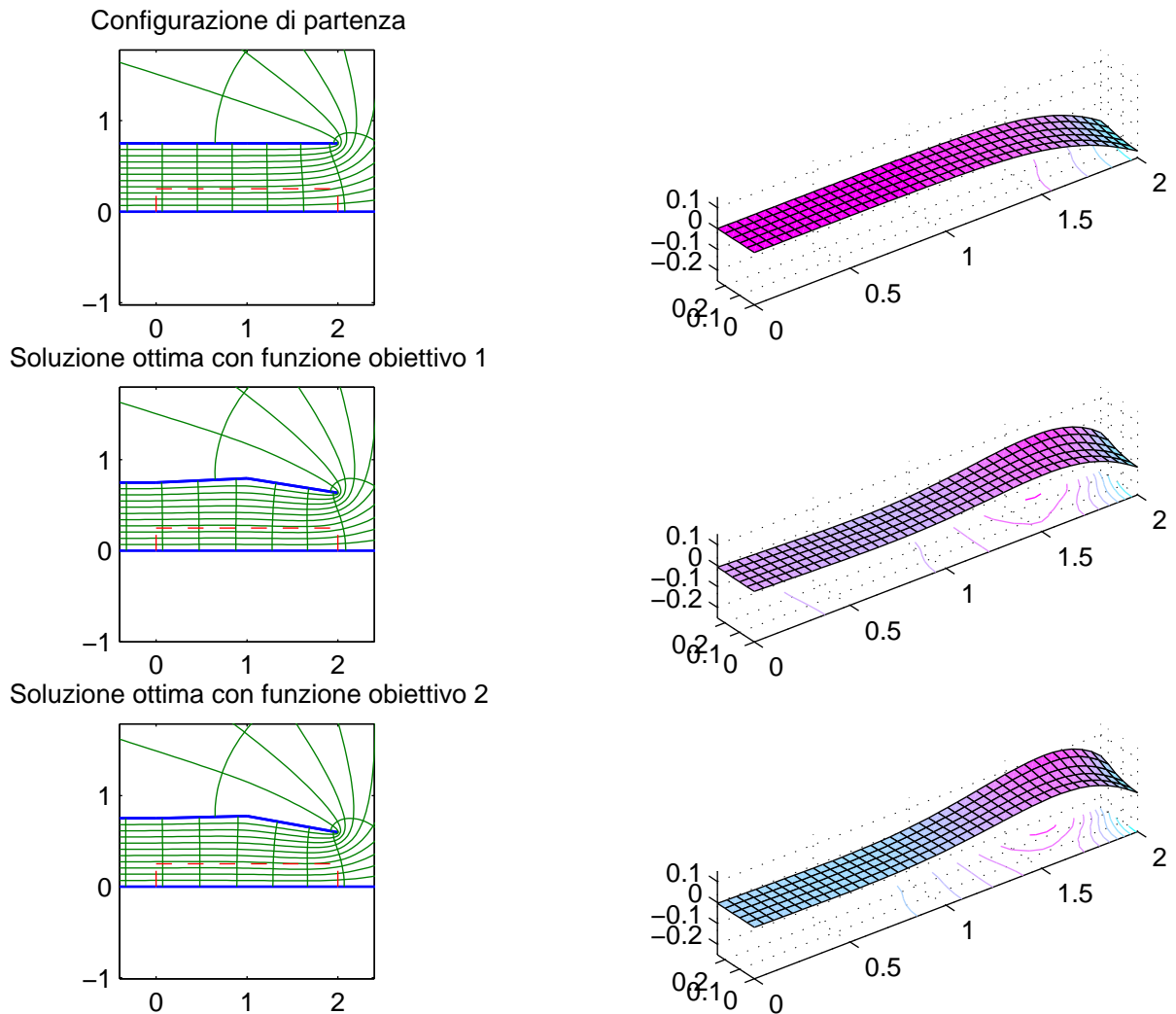
ove  $E_{ideale} \equiv E_y$  è il valore dell'intensità del campo che si ha lontano dai bordi (nel nostro caso  $E_{ideale} = 1$ ).

I risultati della prova sono riassunti in tabella 3.2; in figura 3.16 sono mostrate le configurazioni delle armature alla partenza ed alla fine dei processi di ottimazione sfruttando le due funzioni obiettivo proposte. In entrambi i casi si ottiene una riduzione della deformazione

accentuata del campo elettrico presso i bordi del condensatore, a prezzo però di una leggera "deformazione globale" in tutta la regione controllata. Notiamo che il tempo richiesto nel caso della seconda funzione obiettivo è notevolmente maggiore di quello richiesto per la prima; la ragione di ciò appare chiara non appena si confrontino le superfici d'errore associate a tali curve (figure 3.17 e 3.19): la seconda presenta in prossimità del punto di ottimo una regione "piatta" che rallenta l'algoritmo di ricerca del minimo. E' infine riportato il testo dell'output a video.

funzione obiettivo	tempo (s)	miglioramento (%)	$y_1^{finale}$ (pu)	$y_2^{finale}$ (pu)
funzione 1	89,310	294,98	0,79639	0,63582
funzione 2	462,48	160,71	0,77457	0,59660

Tabella 3.2: i risultati dell'ottimazione


 Figura 3.16: soluzione ottima: configurazioni ed errore percentuale nell'intensità del campo  $\vec{E}$

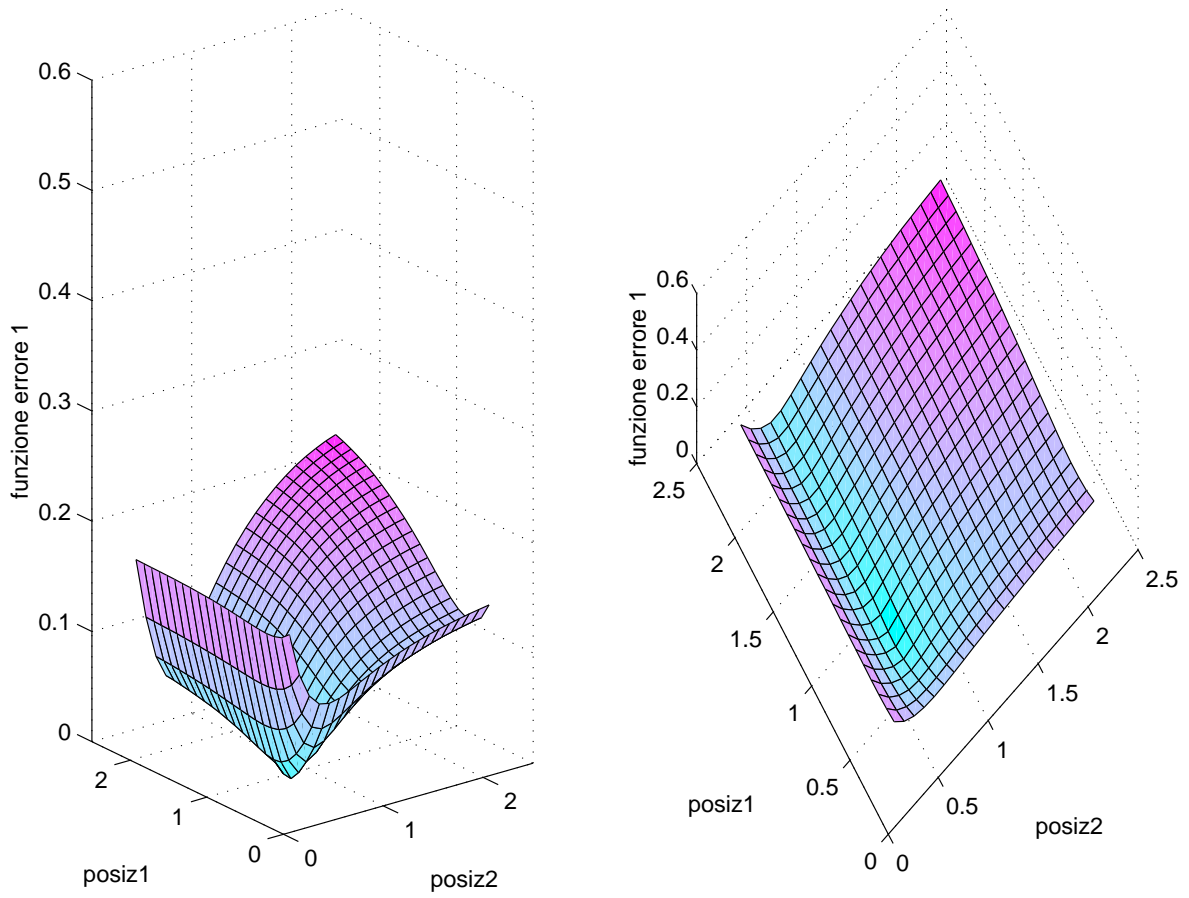


Figura 3.17: superficie d'errore per la funzione obiettivo 1

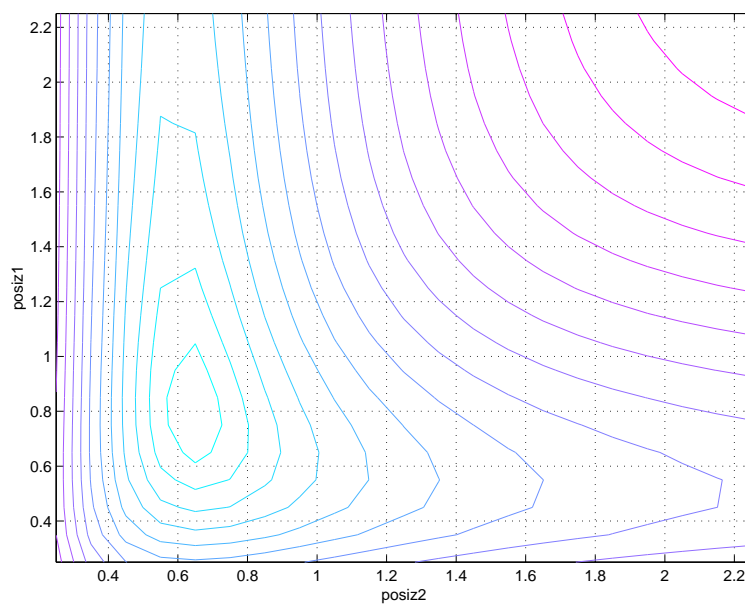


Figura 3.18: curve di livello per la funzione obiettivo 1

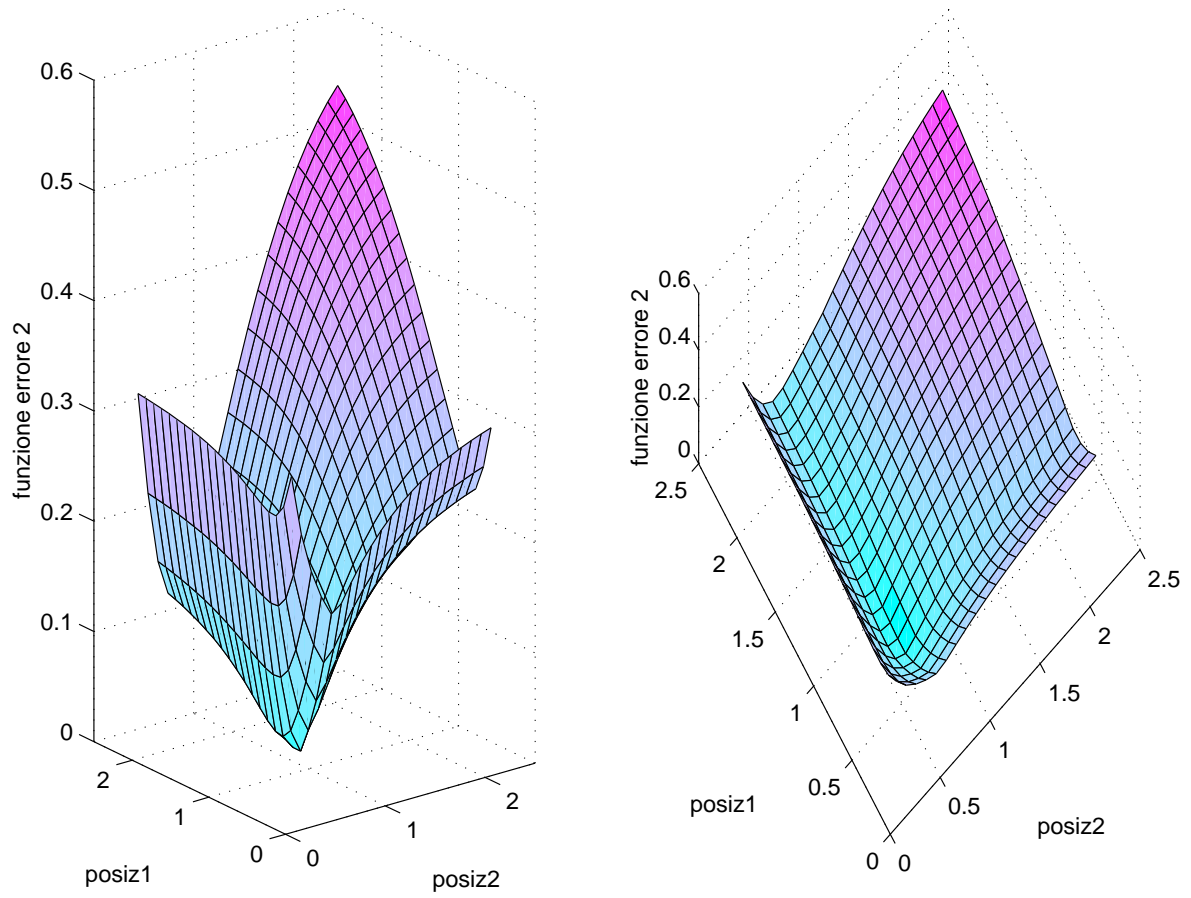


Figura 3.19: superficie d'errore per la funzione obiettivo 2

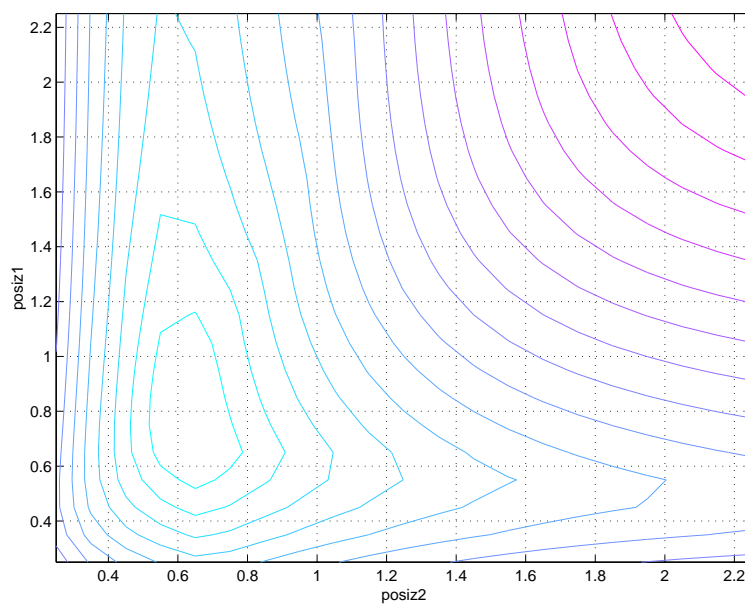


Figura 3.20: curve di livello per la funzione obiettivo 2



posiz\_iniz = 7.5000e-001 7.5000e-001

\* Ottimizzazione con funzione obiettivo 1 \*

f-COUNT	FUNCTION	STEP_SIZE	GRAD/SD	LINE-SEARCH
4	0.0265895	1	-0.038	
9	0.00865907	0.536011	-0.00761	incstep
14	0.00778718	0.241427	0.000458	
20	0.0067357	0.656798	0.0000597	
26	0.00673195	0.823361	-1.5e-008	incstep

Optimization Terminated Successfully

Gradient less than options(2)

NO OF ITERATIONS=26

posiz = 7.9639e-001 6.3582e-001

elapsed\_time = 8.9310e+001

miglioramento = 2.9498e+000

\* Ottimizzazione con funzione obiettivo 2 \*

f-COUNT	FUNCTION	STEP-SIZE	GRAD/SD	LINE-SEARCH
4	0.0664785	1	-0.097	
9	0.0305628	0.509803	0.132	
14	0.0270535	0.163764	0.0135	
19	0.0263167	0.535905	-0.00136	incstep
25	0.0259131	0.010825	-0.037	incstep
31	0.0257613	0.00502053	-0.0301	incstep
38	0.0257304	0.00103248	-0.0299	incstep
45	0.0257176	0.000517507	0.0639	
51	0.0256433	1.19518	1.46e-007	int_st
56	0.0256135	1	0.0000115	int_st
61	0.0255852	0.914924	3.76e-006	int_st
67	0.0255649	1.43774	3.7e-009	int_st
72	0.0255403	1	0.0000111	int_st
77	0.0255256	0.899193	6.52e-006	
83	0.0255148	1.25239	-4.21e-010	incstep
88	0.0255101	0.365166	7.42e-006	
93	0.0255079	0.365166	-5.79e-006	incstep
99	0.0255053	0.0120394	0.000119	
105	0.0255024	1.59389	-1.14e-009	incstep
110	0.0255013	0.402911	1.63e-006	
115	0.0255007	0.402911	-1.34e-006	incstep
120	0.0255001	0.015339	0.000021	
126	0.0254996	0.935771	-9.6e-010	incstep

Optimization Terminated Successfully

Gradient less than options(2)

NO OF ITERATIONS=126

posiz = 7.7457e-001 5.9660e-001

elapsed\_time = 4.6248e+002

miglioramento = 1.6071e+000

# Capitolo 4

## La coppia d'impuntamento: analisi FEM

### 4.1 Introduzione

Questo capitolo ed il successivo trattano lo studio della coppia parassita d'impuntamento (o coppia di cogging), presente in tutte le macchine elettriche rotanti a magneti permanenti. Per quanto il problema sia ben noto e già da tempo studiato, può dirsi tutt'altro che risolto, essendo dovuto ad una complessa concomitanza di fattori dal comportamento fortemente non lineare: la prima parte di questo capitolo è quindi necessariamente volta ad illustrare il fenomeno sotto l'aspetto qualitativo; si descrivono quindi le soluzioni costruttive comunemente adottate per ridurne l'influenza.

Nella seconda parte del capitolo viene presentato un particolare motore elettrico i cui denti di statore sono stati ottimizzati per ridurre il picco di coppia d'impuntamento, assieme ad un'analisi magnetica condotta con il metodo degli elementi finiti (FEM); i risultati saranno paragonati alla fine del prossimo capitolo a quelli ottenuti da un'analisi basata sulla trasformazione di Schwarz-Christoffel.

### 4.2 La coppia d'impuntamento

Come accade per tutti i progetti, anche quello di un motore elettrico a magneti permanenti deve soddisfare ad un certo numero di specifiche, che possono essere le più varie a seconda dell'uso a cui è destinato l'oggetto: ad esempio nell'ambito dell'automazione industriale la movimentazione di un rullo può richiedere una coppia sviluppata che sia la più costante possibile; per un dispositivo come un hard-disk o un DVD è essenziale la precisione e la velocità del posizionamento; per un'impiego come potrebbe essere un sistema di ventilazione, pur non essendo richieste elevate prestazioni dinamiche, è necessario intervenire sui livelli di rumorosità. La progettazione in questi ambiti, pure tanto lontani fra di loro, deve tenere conto in ogni caso della coppia parassita d'impuntamento, una possibile causa di fluttuazioni di coppia, vibrazioni, oscillazioni e rumorosità.

#### 4.2.1 Descrizione del fenomeno

La coppia d'impuntamento ha origine dalle espansioni, destinate a supporto degli avvolgimenti, presenti nel dispositivo, e dipende, oltre che dalle non-linearità dei materiali utilizzati,

dalla sagomatura dei denti e dal tipo di magnetizzazione del magnete permanente: per ridurla è dunque necessario intervenire su uno o entrambi questi fattori. La produzione di magneti permanenti con particolari tipi di magnetizzazione è però un procedimento industrialmente complesso e costoso, e si preferisce in genere ottimizzare il tipo di sagomatura dei denti.

Si consideri dunque la figura 4.1: nella posizione di rotore (1) il magnete è completamente allineato con il dente ed il relativo flusso "vede" una riluttanza  $\mathcal{R}$  di minimo valore; quando il rotore si muove nella posizione (2), la riluttanza aumenta perchè il magnete si affaccia ad una porzione minore di dente: ne deriva una coppia  $\mathcal{C}$  che richiama il magnete nella posizione (1). Questa coppia è appunto la coppia parassita d'impuntamento, che può essere

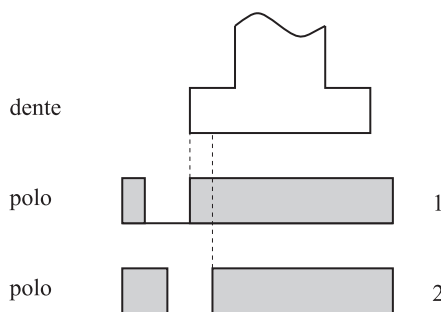


Figura 4.1: generazione della coppia d'impuntamento

valutata attraverso la variazione di energia magnetica  $\mathcal{E}$  con la posizione angolare  $\theta$  nel modo seguente:

$$\mathcal{C} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \theta} \quad \text{con} \quad \mathcal{E} = \int_{\mathbf{V}} \frac{1}{2} (\vec{H} \cdot \vec{B}) d\mathbf{V}$$

ove  $\mathbf{V}$  è il volume della macchina.

### 4.2.2 L'influenza di altri fattori

In realtà, la coppia d'impuntamento non dipende solamente dalla forma scelta per i denti e dal tipo di magnetizzazione dei magneti permanenti; elenchiamo qui brevemente quali altri fattori possono influenzarla, in misura minore ma non trascurabile ([3]).

1. La permeabilità relativa  $\mu_r$  del ferro varia a seconda dell'intensità del campo magnetico che lo investe; tale variazione può localmente essere anche molto accentuata, arrivando a valori addirittura prossimi a quelli dell'aria (saturazione). In una tale situazione, la forma del dente, dal punto di vista magnetico, è leggermente diversa da quella meccanica.
2. Il ferro ha un certo ciclo d'isteresi; anche la rapidità di variazione dell'induzione al traferro influenza dunque l'andamento della coppia parassita.
3. Gli effetti "di bordo" *tridimensionali* del dispositivo hanno un certa influenza sul fenomeno, in quanto concorrono alla variazione di energia.

Dei primi due aspetti si tiene normalmente conto in un'analisi FEM bidimensionale; diversamente il terzo comporta la necessità di operare su modelli tridimensionali. Cogliamo l'occasione per precisare come la coppia d'impuntamento sia un tipo di fenomeno il cui andamento dipende da piccole variazioni nei parametri costruttivi (è sensibilissima alle tolleranze sulla lavorazione dei pacchi di lamierini e alla forma dei denti) e da "effetti secondari" che si

manifestano durante il funzionamento del motore, e pertanto è necessario utilizzare reticoli estremamente fitti e regolari; non è a questo punto difficile immaginare quali tempi di calcolo possa richiedere un'analisi tridimensionale del dispositivo per una data geometria.

### 4.2.3 Soluzioni costruttive

Due soluzioni costruttive per ridurre la coppia d'impuntamento (figura 4.2) sono analizzate e discusse in [11] e [12]; in particolare la prima, consistente sostanzialmente nell'arrotondare la forma del dente alle estremità, era già largamente utilizzata in tutti i tipi di applicazione prima che venisse introdotta la forma del dente scanalato (oggi molto diffusa), ma in certi casi con risultati peggiori. La forma arrotondata infatti risulta essere l'ottima, alla luce di numerose analisi svolte, quando si consideri un magnete permanente a magnetizzazione parabolica: come si vede il fattore magnetizzazione può determinare soluzioni costruttive ottime anche notevolmente diverse fra di loro.

Gli effetti di una sagomatura scanalata si possono riassumere come segue:

1. le scanalature contribuiscono notevolmente a ridurre la coppia d'impuntamento, generata principalmente dalla seconda componente armonica della distribuzione di permeanza  $\mathcal{P}$  al traferro ([12]):

$$\mathcal{P} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \right)$$

esse quindi mirano a ridurre questa componente della permeanza;

2. gli effetti di altezza e larghezza delle scanalature si influenzano a vicenda, e minime variazioni di esse causano grandi variazioni nella coppia d'impuntamento. Gli effetti migliori si ottengono per piccole altezze e grandi larghezze;
3. molte scanalature sono utili nella riduzione della coppia d'impuntamento quando il dente è largo; inoltre opportune scanalature di ampiezza non uniforme possono ridurre il fenomeno senza diminuire la componente fondamentale della permeanza.



Figura 4.2: due soluzioni per ridurre la coppia d'impuntamento: dente arrotondato o scanalato

Una doverosa nota va fatta a questo punto sul modo in cui queste soluzioni intervengono per ridurre la coppia d'impuntamento. Come già sappiamo, essa è dovuta a forze di origine magnetica che, in generale, avranno componenti radiale e tangenziale non nulle. Ebbene le soluzioni fino ad oggi adottate tendono, in ultima analisi, a vincere queste forze non eliminandole all'origine, ma opponendo loro forze uguali e contrarie, specialmente lungo la direzione tangenziale. Si capisce quindi come risulti difficile eliminare del tutto queste forze; inoltre le componenti radiali non bilanciate saranno comunque causa di vibrazioni e rumore, non essendo la struttura infinitamente rigida. Un'analisi meccanica del fenomeno è molto complessa, e va oltre gli scopi di questo lavoro.

## 4.3 Il motore MCE 6 poli $\Phi 71$

### 4.3.1 Descrizione del motore

Il motore che considereremo per un'analisi della coppia d'impuntamento è il motore MCE 6 poli  $\Phi 71$  prodotto dalla BITRON S.p.A. (figura 4.3). E' un motore brushless bifase a rotore esterno progettato per la ventilazione dell'abitacolo delle automobili (fa parte del sistema di climatizzazione e condizionamento), a controllo elettronico a velocità variabile (PWM), pilotato dalla centralina di condizionamento. Il disegno dello statore quotato è riportato in

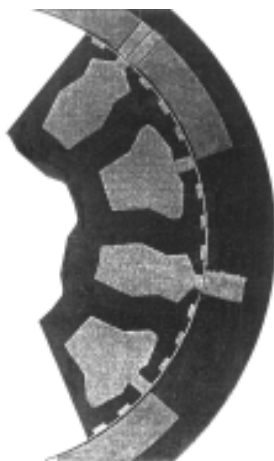


Figura 4.3: il motore MCE 6 poli  $\Phi 71$ . Per gentile concessione della BITRON S.p.A.

figura 4.4; l'altezza  $L$  del pacco di lamierini statorico è di 21 mm. La tabella 4.1 è relativa ai dati di targa del motore, mentre le caratteristiche dei magneti permanenti sono riportate in tabella 4.2.

alimentazione	12 V, da impianto automobile
velocità massima	5000 rpm
potenza	300 W resi
efficienza	65-75%
coppia @ 5000 rpm	0,25 Nm
coppia @ 3000 rpm	1 Nm
costante di coppia	0,023 Nm/A
fem	0,00245 V/rpm

Tabella 4.1: i dati di targa del motore

materiale	ferrite
tipo di magnetizzazione	radiale
campo magnetico di coercizione $H_c$	-282000 As/m
induzione magnetica residua $B_r$	0,4 T
permeabilità relativa $\mu_r$	1,129
altezza	6 mm

Tabella 4.2: le caratteristiche dei magneti permanenti

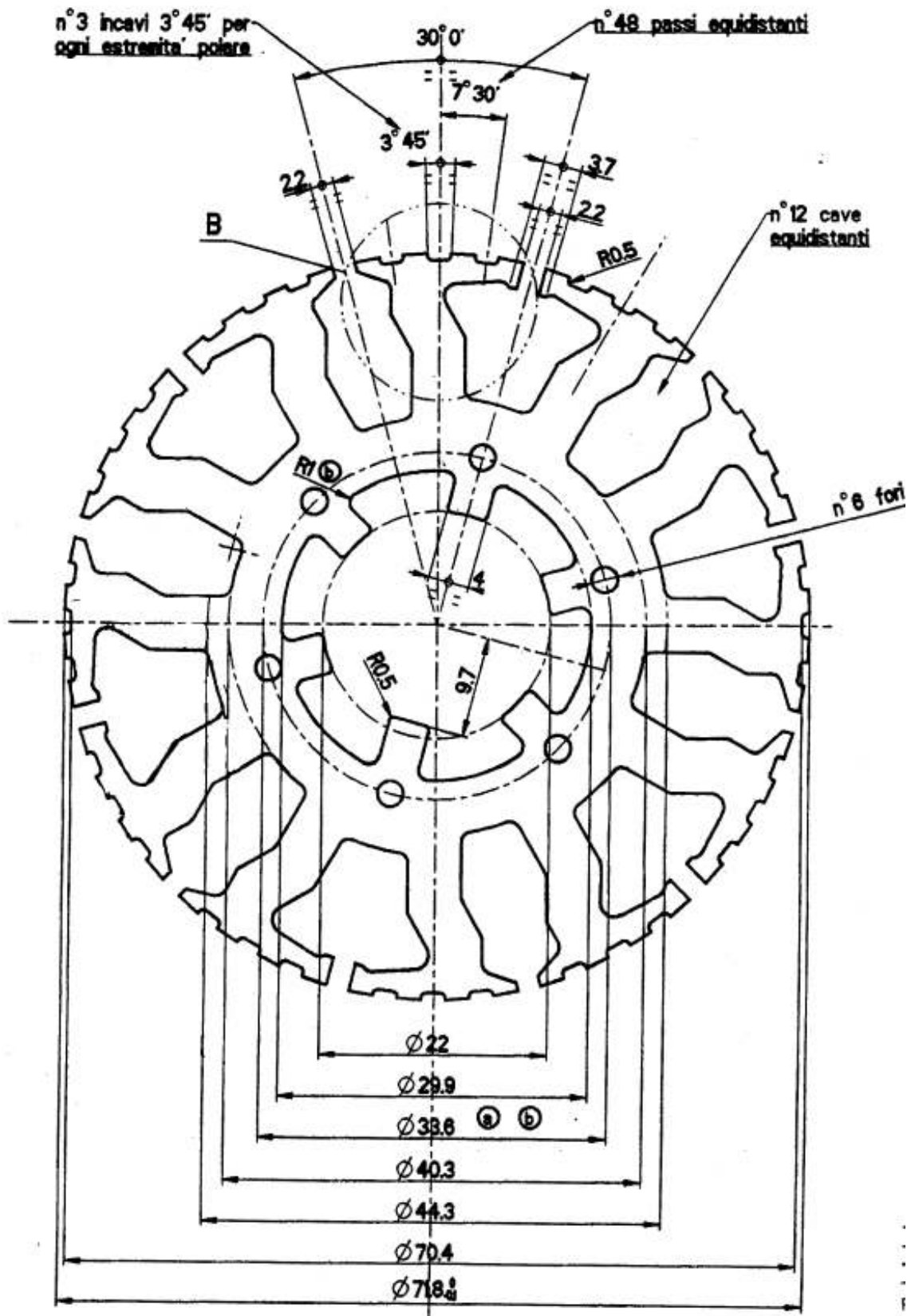


Figura 4.4: le quote (in mm) dello statore. Per gentile concessione della BITRON S.p.A.

### 4.3.2 Analisi magnetica e coppia d'impuntamento

L'analisi magnetica accurata del motore è stata condotta dalla BITRON (unità di Cormano) per mezzo del codice ANSYS ad elementi finiti; le dimensioni delle scanalature dei denti di statore sono state ottimizzate per ridurre al minimo l'ampiezza della coppia d'impuntamento. Le figure 4.5 e 4.6 mostrano l'intensità dell'induzione e le linee di forza del campo magnetico nel funzionamento a vuoto, nella posizione relativa statore-rotore a riluttanza minima (affacciamento massimo fra magneti e denti); la figura 4.7 descrive l'andamento della coppia d'impuntamento risultante dalla stessa analisi: il valore di picco è di 0,01 Nm.

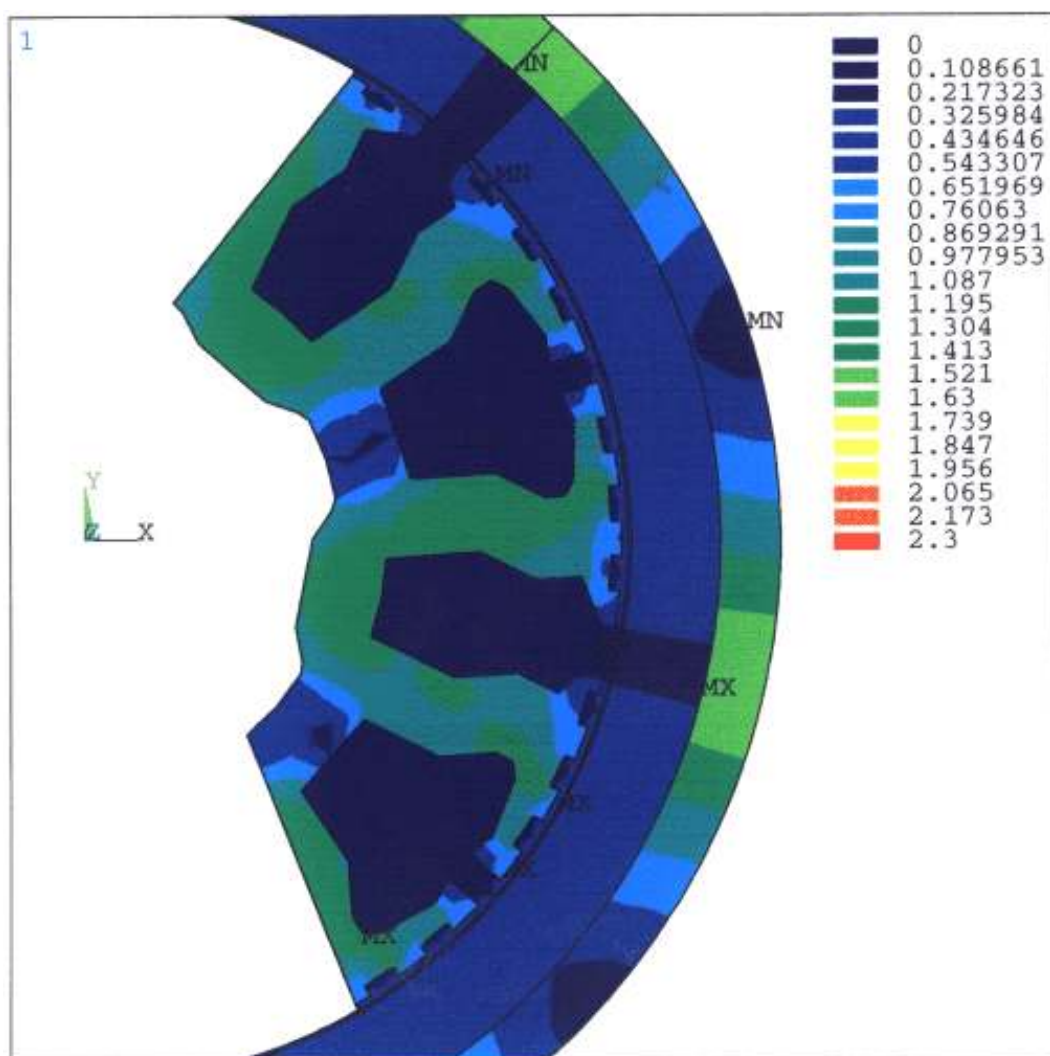


Figura 4.5: intensità (in T) dell'induzione a vuoto, in posizione di minima riluttanza

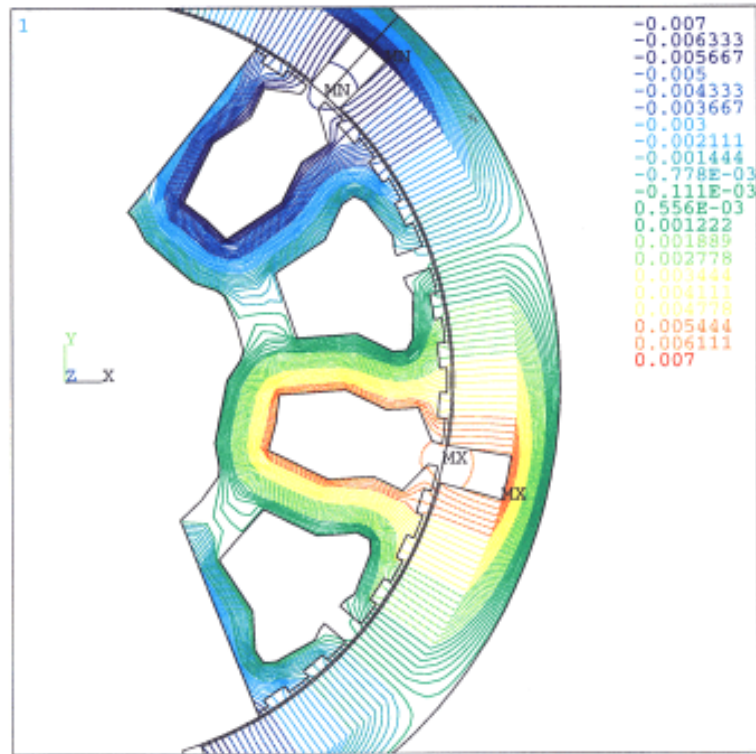


Figura 4.6: linee di forza del campo magnetico (in As/m) a vuoto, in posizione di minima riluttanza

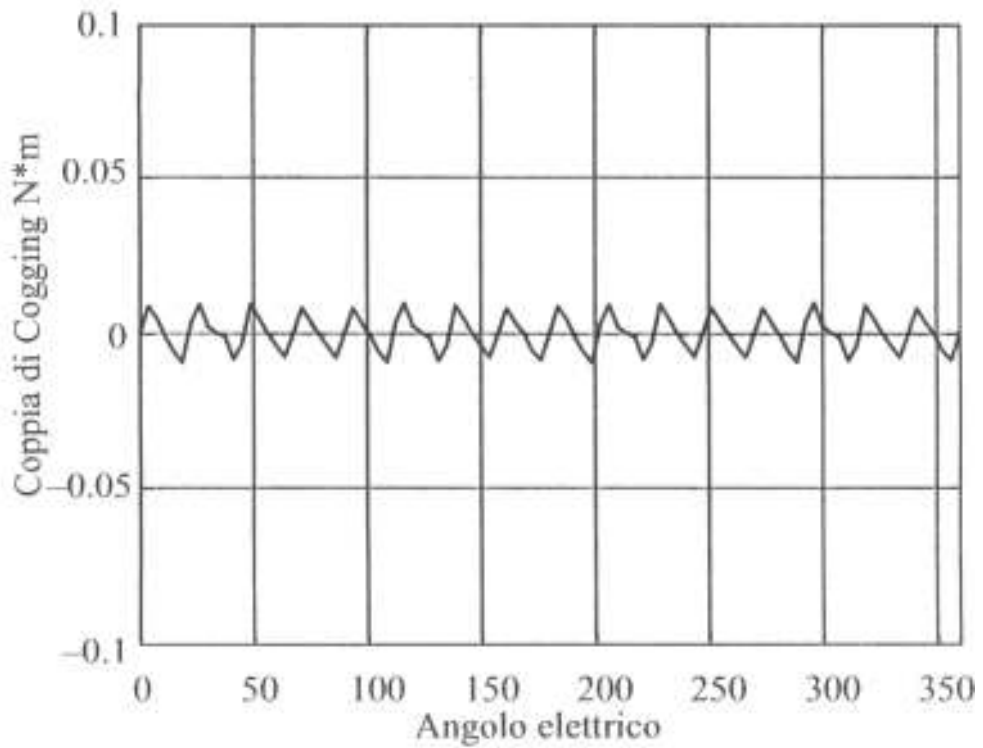


Figura 4.7: andamento della coppia d'impuntamento



Allo scopo di consentire un paragone più ampio fra l'analisi FEM e l'analisi SC che verrà condotta nel prossimo capitolo, abbiamo sviluppato ex novo una simulazione 2D del motore in esame con il codice QuickField versione 3.1; in particolare interessa rilevare (1) la distribuzione dell'energia magnetica nella struttura e (2) l'induzione al traferro. La geometria dei denti è stata opportunamente semplificata nella parte più interna, dove la loro forma (intesa solamente per facilitare la disposizione degli avvolgimenti) non influisce sulla coppia d'impuntamento; una prima analisi di massima viene condotta con i denti lisci, quindi aggiungendo le scanalature. Per il ferro è stata scelta una caratteristica lineare, con permeabilità  $\mu_r = 10000$ . La figura 4.8 mostra l'intensità dell'induzione e le linee di forza del campo nella struttura semplificata (le condizioni al contorno sono: componente normale dell'induzione  $B_n$  nulla sui bordi esterno ed interno).

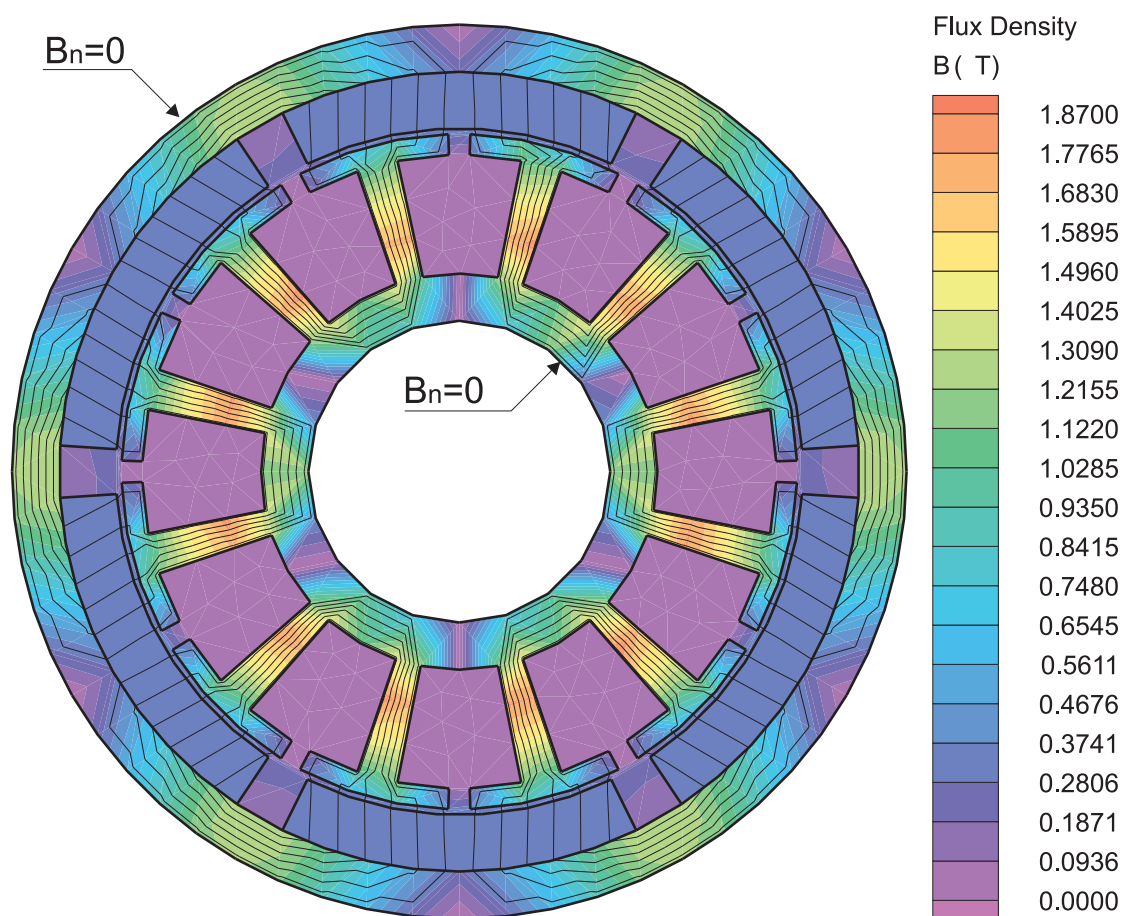


Figura 4.8: induzione e linee di forza del campo

L'analisi della distribuzione dell'energia mostra che la quantità di energia per unità di lunghezza contenuta in un sestante (10,828 J/m) è circa uguale ad 1/6 di quella contenuta nella struttura intera (62,457 J/m) (figura 4.9), almeno nella posizione a riluttanza minima: questa considerazione verrà ritenuta valida nel prossimo capitolo per tutte le posizioni relative statore-rotore, una volta dimostrata grazie all'analisi di un opportuno circuito magnetico equivalente<sup>1</sup>; inoltre, come si vede dalla figura 4.8, il campo magnetostatico è uguale in ciascuna delle sei regioni.

<sup>1</sup>In realtà, se si volesse tenere conto delle non-linearità del ferro, si vedrebbero delle piccole differenze fra i sestanti; ma per gli scopi di quest'analisi possono essere ritenute trascurabili.

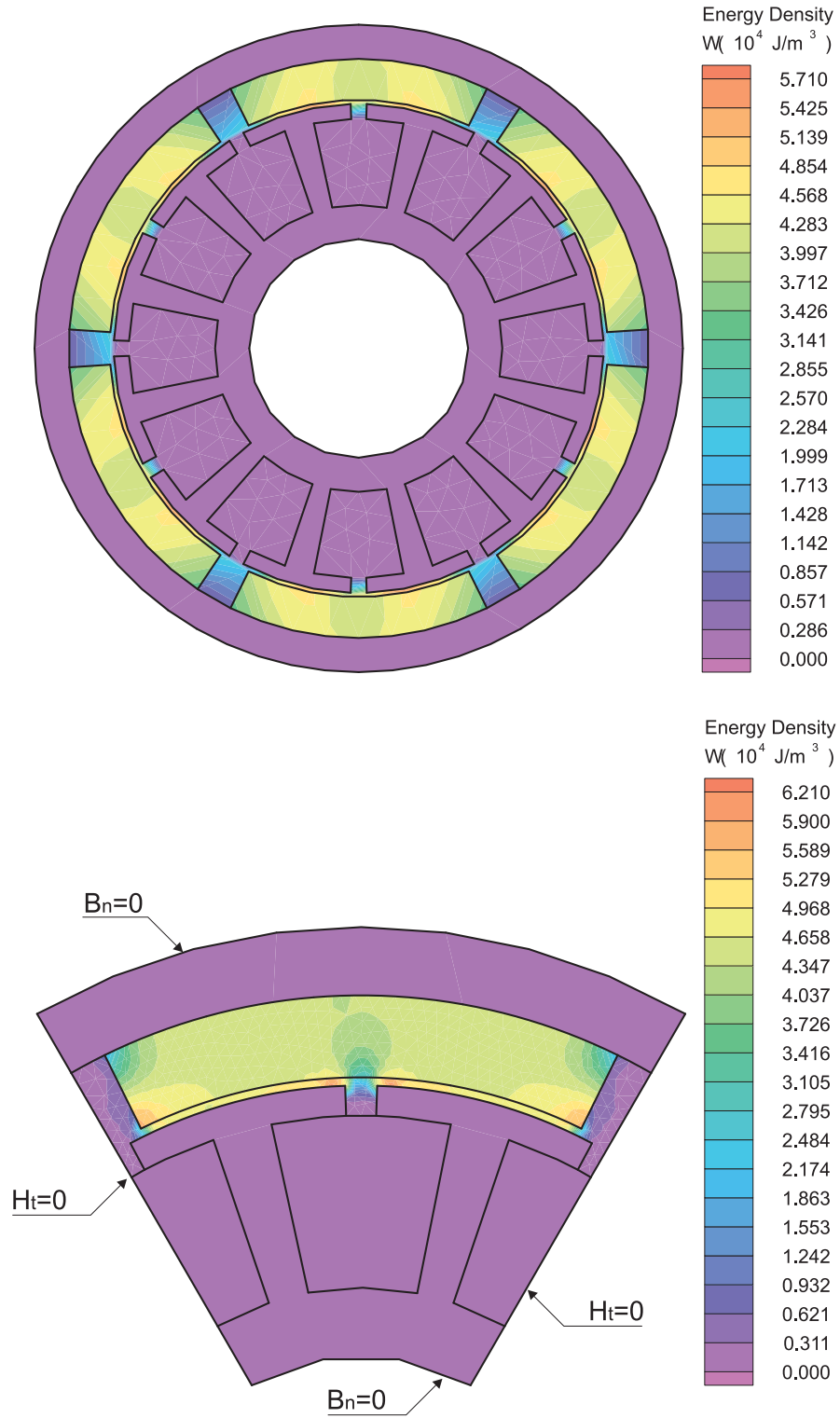


Figura 4.9: dente liscio: la distribuzione dell'energia magnetica

In virtù di questi fatti, concentriamo l'analisi magnetica sul sestante superiore della struttura imponendo opportune condizioni al contorno (vale a dire la condizione di Neumann  $H_t = 0$  sui lati destro e sinistro del bordo, come mostrato in figura 4.9). L'energia magnetica presente nel ferro e nelle cave di un sestante è  $0,019579 \text{ J/m}$ , vale a dire lo  $0,181\%$  del totale, la rimanenza essendo concentrata nel magnete permanente e nel traferro; l'andamento dell'induzione lungo la linea mediana di quest'ultimo è mostrata in figura 4.10: come si vede la componente prevalente è quella radiale  $B_r$ .

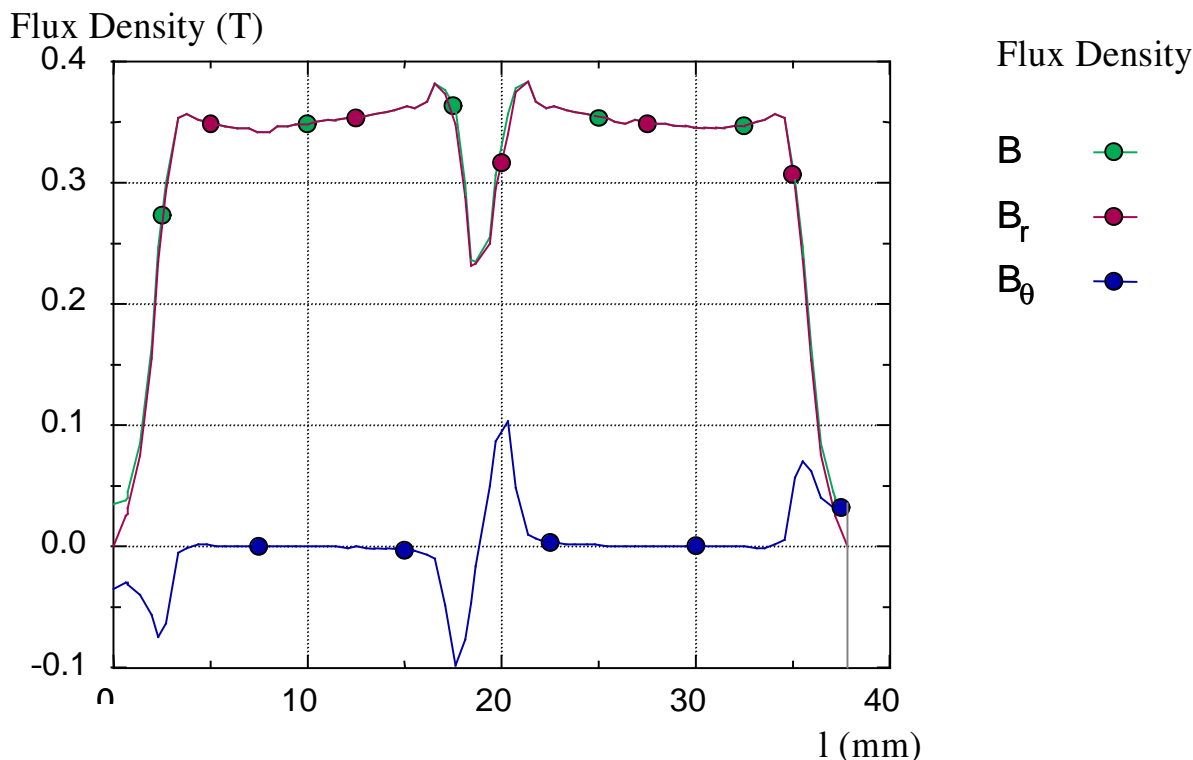


Figura 4.10: dente liscio: l'induzione al traferro

Analoghi risultati si ottengono aggiungendo le scanalature ai denti (figure 4.11 e 4.12). Confrontando le figure 4.10 e 4.12 è possibile trarre le seguenti conclusioni: le scanalature dei denti di statore, se da un lato introducono un maggior numero di componenti armoniche nell'andamento dell'induzione al traferro rispetto ad una forma dei denti liscia, dall'altro contribuiscono a rendere più "uniforme" la variazione dell'induzione al traferro (e quindi dell'energia magnetica) durante lo spostamento del rotore, determinando in questo modo una riduzione della coppia d'impuntamento: nel primo caso infatti si avrebbe una brusca diminuzione di induzione dovuto all'affacciarsi sul magnete permanente di un terzo dente (si noti infatti dalla figura 4.10 come queste diminuzioni avvengano in corrispondenza degli spazi che separano i denti). Osserviamo infine che il valore medio di  $B_r$  al traferro è circa uguale nei due casi: in altri termini non si è costretti ad accettare una diminuzione della coppia meccanica utile al fine di ridurre la coppia parassita.

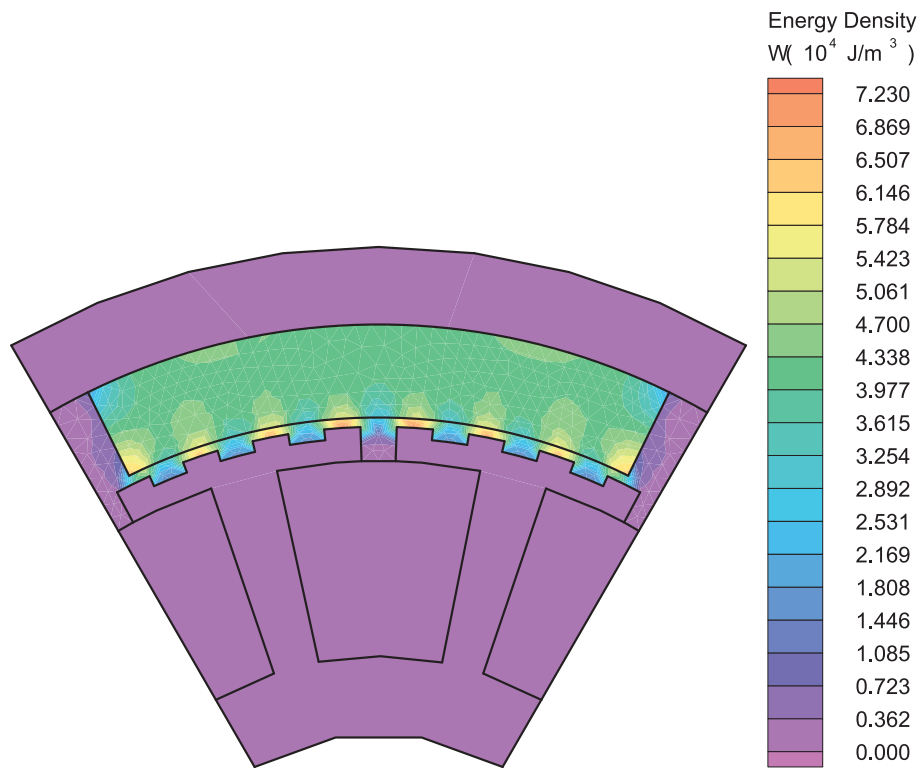


Figura 4.11: dente scanalato: la distribuzione dell'energia magnetica

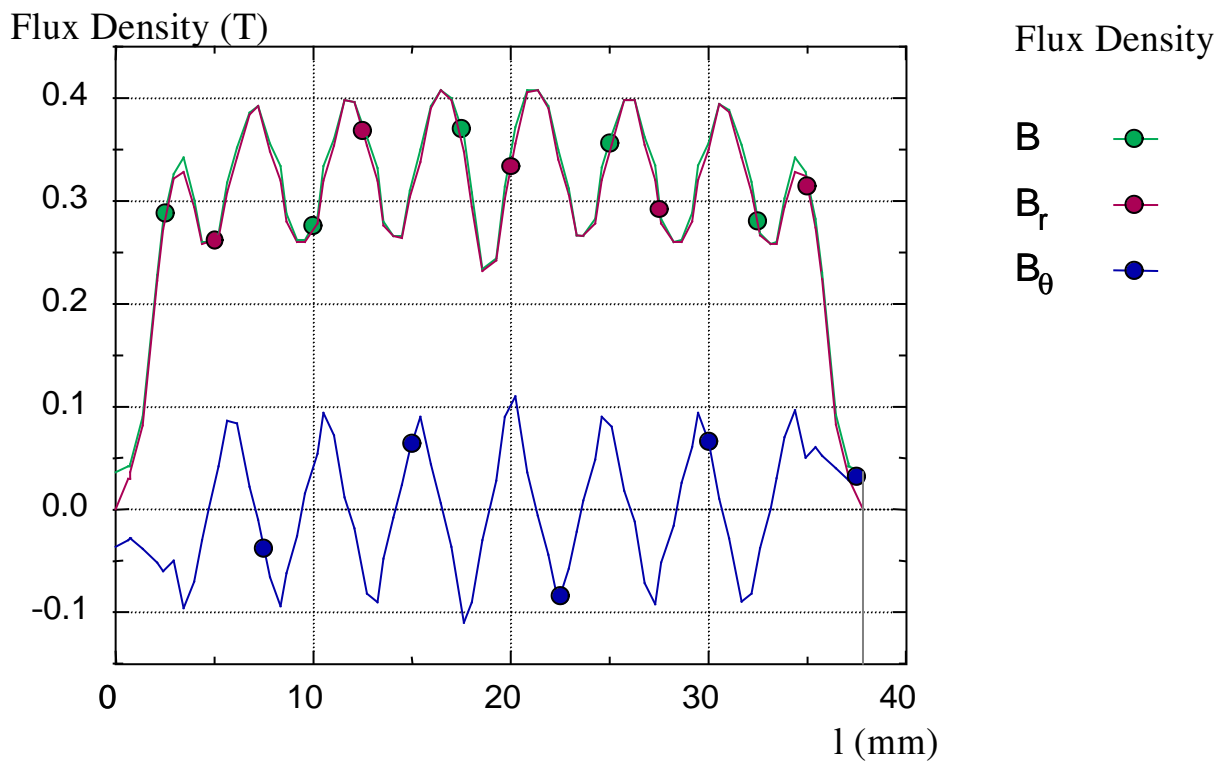


Figura 4.12: dente scanalato: l'induzione al traferro

# Capitolo 5

## La coppia d'impuntamento: analisi SC

### 5.1 Introduzione

In questo capitolo viene analizzata la coppia d'impuntamento presente nel motore MCE 6 poli  $\Phi 71$  prodotto dalla BITRON e descritto nel capitolo precedente sulla base dei risultati analitici presentati nella sezione 1.3 ed utilizzando per il calcolo numerico l'SC-Toolbox versione 2.16. Il confronto finale dei risultati ottenuti nei due capitoli, posto che quelli derivanti dall'analisi ad elementi finiti siano precisi ed affidabili data la sua ormai consolidata sicurezza, e quindi assunti questi ultimi come termine di paragone, serve a chiarire quanto sia opportuno un approccio basato sulle trasformazioni di Schwarz-Christoffel numeriche.

### 5.2 Impostazione del problema

La coppia d'impuntamento  $\mathcal{C}$  viene calcolata sulla base della variazione di energia magnetica  $\mathcal{E}$ , dovuta alla presenza dei magneti permanenti, per unità di variazione angolare  $\theta$ :

$$\mathcal{C} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \theta} \quad (5.1)$$

$$\mathcal{E} = \int_{\mathbf{P}} \frac{1}{2} (\vec{H} \cdot \vec{B}) d\mathbf{P} \quad (5.2)$$

ove  $\mathbf{P}$  è la regione di spazio interessata da una certa energia magnetica specifica  $\frac{1}{2}(\vec{B} \cdot \vec{H})$ . Precisiamo fin da subito che l'energia calcolata tramite la (5.2) ha le dimensioni di [J/m], essendo relativa ad una superficie: per ricavare l'energia totale immagazzinata nel motore sarà quindi necessario moltiplicare per la sua lunghezza; similmente la coppia calcolata tramite la (5.1) ha le dimensioni di [N], ed anche qui occorre moltiplicare per la lunghezza della macchina. Dobbiamo ora decidere come caratterizzare gli elementi della (5.2) e della (5.1) dal punto di vista delle trasformazioni conformi.

#### 5.2.1 Il dominio d'integrazione

Dall'analisi condotta con gli elementi finiti nel capitolo precedente sappiamo che la quasi totalità dell'energia magnetica del sistema è immagazzinata nei magneti permanenti e nel traferro: possiamo dunque concentrare l'analisi su questi elementi, trascurando il ferro di rotore e di statore (in altre parole lo si considera a riluttanza nulla, ovvero un corto circuito magnetico). Per la soluzione del circuito magnetico, rappresentato in figura 5.1, è possibile

risolvere il circuito elettrico equivalente utilizzando ad esempio il principio di sovrapposizione degli effetti (essendo il problema lineare) e riscrivere la soluzione in termini di grandezze magnetiche. Si noti come la resistenza  $R$ , equivalente elettrico della riluttanza  $\mathcal{R}$  dovuta al

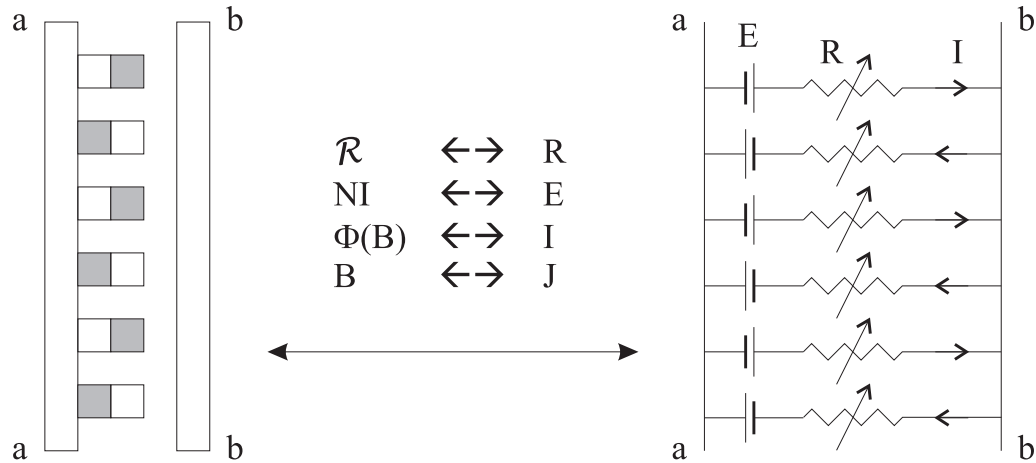


Figura 5.1: il circuito magnetico semplificato ed il suo equivalente elettrico

traferro, sia stata rappresentata con il segno grafico di resistenza variabile, volendo significare con questo come il suo valore cambi durante lo spostamento del rotore. Considerato dunque uno qualunque dei rami orizzontali del circuito elettrico e spegnendo gli altri generatori, si ha:

$$I' = \frac{E}{R + \frac{R}{5}} = \frac{5E}{6R}$$

e sommando i contributi degli altri rami:

$$I = I' + 3 \times \frac{1}{5} \left( \frac{5E}{6R} \right) - 2 \times \frac{1}{5} \left( \frac{5E}{6R} \right) = \frac{5E}{6R} + \frac{E}{6R} = \frac{E}{R}$$

in ogni ramo, ciascuna con il verso indicato in figura. Per quanto riguarda il circuito magnetico, il risultato trovato si riscrive:

$$\Phi(\vec{B}) = \frac{NI}{\mathcal{R}}$$

cioè basta considerare quello che accade per uno solo dei sei rami del circuito: l'energia associata ad esso è sempre pari ad  $1/6$  dell'energia associata al sistema complessivo, fatto peraltro confermato dall'analisi svolta con QuickField nel capitolo precedente.

In base a queste considerazioni, e tenuto conto del fatto che il dominio d'integrazione della (5.2) deve essere semplicemente connesso ed orlato di segmenti rettilinei per poter utilizzare la trasformazione di Schwarz-Christoffel, è possibile pensare ad un dominio semplificato del tipo di quello in figura 5.2, non in scala per maggiore chiarezza di spiegazione. Esso rappresenta l'unità geometrica fondamentale di cui si compone il traferro (ottenuto affiancando per sei volte tale unità, come suggerito dalle linee tratteggiate), ovvero un ramo orizzontale del circuito in figura 5.1. Sempre tenendo presenti i risultati ottenuti con QuickField nel capitolo precedente, l'unica condizione al contorno (tracciato in blu) per il problema è la condizione di Neumann:

$$H_t = 0$$

cioè il campo induzione magnetica è ovunque perpendicolare al contorno, la sua componente tangente  $B_t$  essendo nulla; il ferro di statore e di rotore viene dunque caratterizzato da una permeabilità relativa  $\mu_r$  infinita; lo stesso dicasi per i due tratti laterali, che il campo incide perpendicolarmente per ragioni di simmetria (le linee di campo nell'aria non possono formare delle cuspidi).

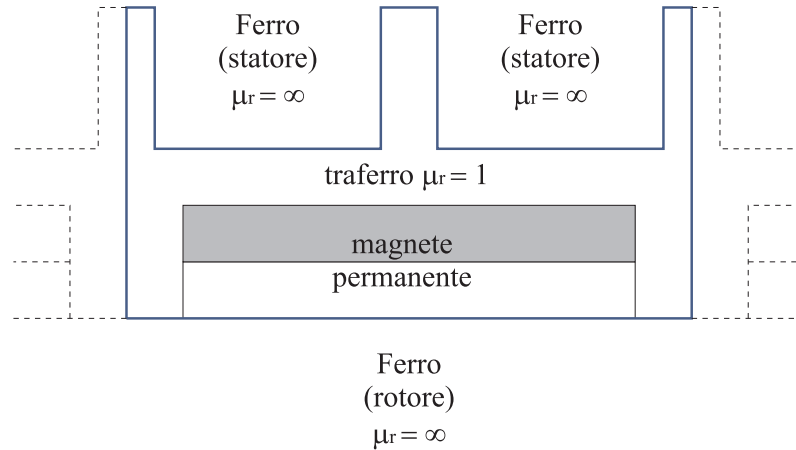


Figura 5.2: la geometria fondamentale

### 5.2.2 I magneti permanenti

E' opportuno modellizzare i magneti permanenti del motore con dei solenoidi caratterizzati da un numero equivalente di amperspire:

$$NI_{eq} = H_c \cdot h$$

ove  $H_c$  è il campo coercitivo del magnete considerato, ed  $h$  la sua altezza nella direzione di magnetizzazione (figura 5.3); nel caso qui considerato si ha, sulla base dei dati riportati nel capitolo precedente:

$$NI_{eq} = 1692 \text{ As}$$

Tale modellizzazione si presta bene ad essere trattata da una trasformazione conforme: permette innanzitutto di semplificare ulteriormente la geometria di figura 5.2, mantenendo solamente il contorno rappresentato in blu; inoltre è immediato trovare le posizioni dei fili conduttori nel dominio canonico, essendo queste coincidenti con le controimmagini dei punti in cui sono poste le correnti che modellizzano il magnete nel dominio fisico. Per queste

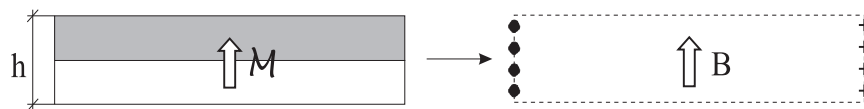


Figura 5.3: il modello per il magnete permanente

correnti si considera un potenziale complesso  $w$  monodromo: in tal modo risultano valide le considerazioni svolte nel paragrafo 1.3, ed è la stessa l'energia magnetica associata ai due sistemi (unità geometrica fondamentale e sua corrispondente nel dominio canonico).

### 5.2.3 Formule per l'energia e la coppia

La (5.2) e la (5.1), espresse in forma di integrale e di derivata rispettivamente, si prestano poco ad una trattazione di tipo numerico. Innanzitutto vediamo come modificare l'espressione per la densità di energia magnetica: avendo eliminato il magnete permanente, e di conseguenza la magnetizzazione  $\mathcal{M}$  associata, e tenuto conto del fatto che per l'aria vale  $\mu \simeq \mu_0$ , si ha  $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ , e di conseguenza l'energia magnetica si scrive:

$$\mathcal{E} = \int_{\mathbf{P}} \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0} dz \quad (5.3)$$

risultando in tal modo essere un invariante conforme, per quanto esposto nella sezione 1.3. Suddividendo opportunamente il dominio d'integrazione in un'unione disgiunta di un numero finito di sottodomini  $\{\mathbf{P}_n\}$  su ciascuno dei quali la densità di energia magnetica può essere ritenuta costante, la (5.3) si approssima nel modo seguente:

$$\mathcal{E} \simeq \sum_n \frac{|\vec{B}_n|^2}{2\mu_0} \text{mis}(\mathbf{P}_n) \quad (5.4)$$

Per quanto riguarda il calcolo della coppia d'impuntamento, una soluzione possibile è quella di approssimare l'operazione di derivata con un rapporto incrementale per  $\Delta\theta$  "sufficientemente piccolo":

$$\mathcal{C} \simeq \frac{\Delta\mathcal{E}(\Delta\theta)}{\Delta\theta} \quad (5.5)$$

Un'indicazione di quanto possa valere questo  $\Delta\theta$  ci viene data ancora una volta dalla geometria del problema, questa volta descritta in maggior dettaglio in figura 5.4, relativa alla posizione a riluttanza minima (massimo affacciamento fra magnete permanente, rappresentato con una linea tratteggiata, e denti di statore). Assumiamo come spostamento elementare

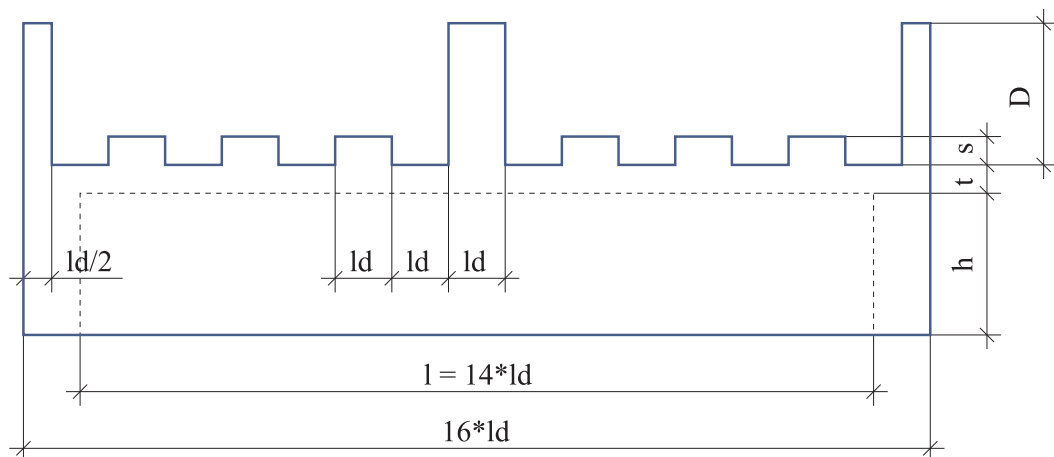


Figura 5.4: la geometria fondamentale ed i parametri del problema

quello corrispondente ad una traslazione pari a  $ld/2$ , cioè a mezza scanalatura del dente: a questo corrisponde una rotazione pari a  $\Delta\theta = ld/(2r)$ , il cui valore è, dalle quote, pari a  $3,75^\circ/2 = 1,875^\circ$ .

Partendo dalla posizione rappresentata, si calcola dunque l'energia magnetica variando di volta in volta la geometria fondamentale per tenere conto di questa rotazione, fino a giungere, dopo otto spostamenti elementari (equivalenti ad una rotazione di  $15^\circ$ ) alla posizione



di riluttanza massima, in cui un dente è centrato sul magnete ed i due denti adiacenti si affacciano ai lati (figura 5.5).

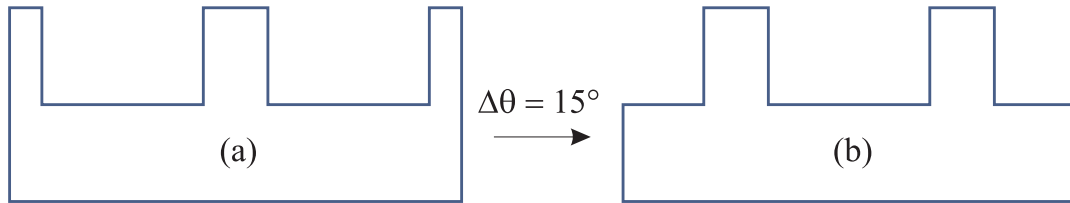


Figura 5.5: posizioni di minima (a) e massima (b) riluttanza

Riprendendo la figura 5.4, elenchiamo nella tabella seguente i valori numerici dei parametri indicati. Si noti come l'altezza del dente di statore  $D$  sia molto inferiore a quella che risulterebbe dalle quote riportate nel capitolo precedente; ma dal momento che, come è già stato osservato, praticamente tutta l'energia magnetica è concentrata nei magneti e nel traferro, sembra inutile cercare un'accuratezza maggiore in questa regione che contribuisce pochissimo al totale dell'energia, appesantendo con elongazioni troppo pronunciate il calcolo numerico della trasformazione conforme.

grandezza	valore (mm)
lunghezza di una scanalatura $ld$	2,2
altezza del magnete permanente $h$	6
lunghezza del magnete permanente $l$	30,8
traferro meccanico $t$	0,6
altezza di una scanalatura $s$	0,7
altezza del dente di statore $D$	6

Tabella 5.1: i parametri geometrici del problema

### 5.3 Utilizzo delle trasformazioni conformi

Impostato il problema e definite le grandezze che lo caratterizzano, dobbiamo ora decidere quale sia il dominio canonico più opportuno per eseguire i calcoli richiesti, e, cosa non meno importante, come scrivere la trasformazione di Schwarz-Christoffel (o una sua variante) in questo caso. Tralasciando per un momento il problema della scelta del dominio canonico, risulta evidente come un dominio quale quello rappresentato in figura 5.2 o, a maggior ragione, in figura 5.4, debba essere trattato utilizzando l'algoritmo CRDT a causa delle sue pronunciate elongazioni e numerose frastagliature, che causerebbero altrimenti dei seri (ed insormontabili) problemi di crowding. Detto questo, sembra opportuno calcolare una mappa rettificata utilizzando come dominio canonico un rettangolo (le cui lunghezze dei lati vengono fornite dall'algoritmo stesso): in questo modo risulta agevole calcolare l'induzione magnetica al suo interno, e quindi l'energia magnetica ad esso associata, utilizzando il metodo delle correnti immagine come esposto in Appendice B.

Ma il calcolo basato su tale metodo risulta presumibilmente molto lento, dovendosi considerare un gran numero di termini (teoricamente infinito, come infinite sono le correnti

immagine) per ogni spira utilizzata per modellizzare il magnete permanente; non è inoltre affatto chiaro quanto debba almeno valere  $m$  nella sommatoria che esprime il campo  $\vec{B}$  in ogni punto per garantire un errore contenuto entro una certa soglia. Ci chiediamo quindi se non sia possibile aggirare il problema ricorrendo ad altri metodi. Le osservazioni svolte nella sezione 1.3 vengono ancora una volta in aiuto: poichè l'energia complessiva è un invariante conforme, calcoliamo un'ulteriore trasformazione che vada dal semipiano complesso al rettangolo, troviamo le controimmagini dei punti di corrente (a loro volta controimmagini di alcuni punti del dominio fisico) e calcoliamo l'induzione nei punti di interesse, sempre attraverso il metodo delle immagini, ma questa volta senza che sia espresso attraverso una somma infinita di termini. La figura seguente chiarisce i concetti esposti.

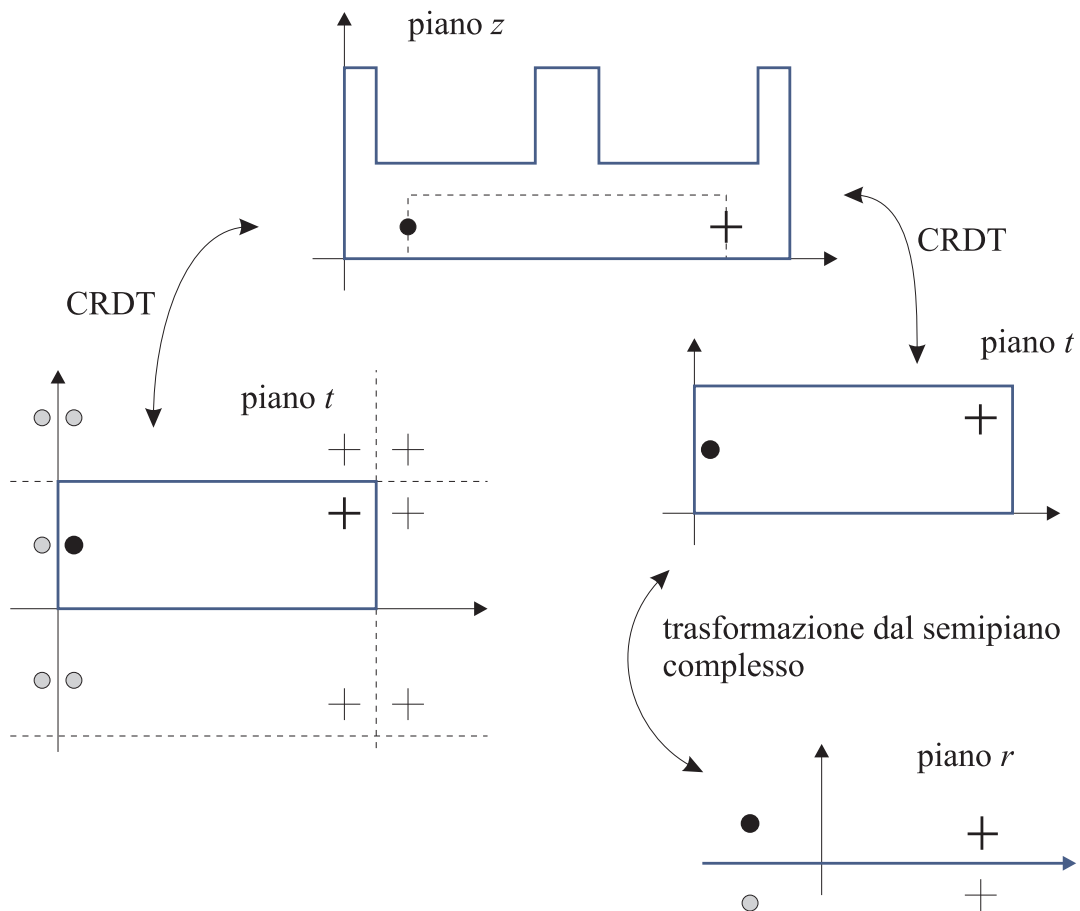


Figura 5.6: utilizzo delle trasformazioni conformi

E' ora necessario verificare la correttezza di questa idea; a tal fine risolviamo un semplice problema analogo a quello di nostro interesse in tre modi diversi: con gli elementi finiti, con il metodo delle correnti immagine e con una trasformazione dal semipiano complesso; il confronto dei risultati, preso come riferimento quello fornito dagli elementi finiti, confermerà o meno l'opportunità di utilizzare una seconda trasformazione conforme nel problema del calcolo della coppia d'impuntamento.

### 5.3.1 L'energia magnetica in un dominio rettangolare

Consideriamo un dominio infinito composto da materiale ferromagnetico ( $\mu_r = 10000$ ) in cui è ricavata una cava rettangolare di lati  $a = 5$  mm e  $b = 1$  mm; sia posta all'interno di questa

una spira percorsa da una corrente  $I = 1692$  A, disposta ad un'altezza  $h = 0,25$  mm ed in modo tale che disti  $d = 0,5$  mm dai lati (figura 5.7). In questa cava sia  $\mu = \mu_0$  (cioè aria); vogliamo calcolare l'energia magnetica del sistema.

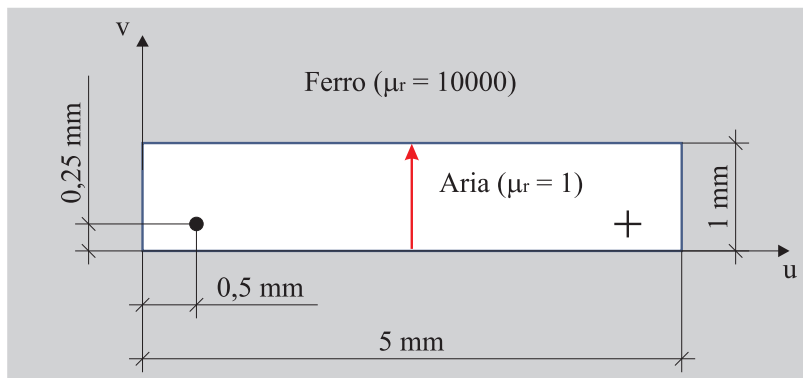


Figura 5.7: la cava rettangolare del problema di prova

Il problema viene risolto con gli elementi finiti tramite QuickField 3.1, descrivendo un rettangolo in ferro esterno alla cava sufficientemente ampio da potersi ritenere infinitamente esteso (figura 5.8) ed imponendo sul suo bordo esterno la condizione  $B_n = 0$ . La sezione del conduttore è modellizzata con due superfici quadrate di area<sup>1</sup>  $4 \times 10^{-4}$  mm<sup>2</sup>, con una densità di corrente di  $3,525 \times 10^{11}$  A/m<sup>2</sup>; il reticolo è infittito nell'aria, in modo particolare attorno alle due superfici quadrate dove l'energia magnetica è più concentrata, prestando meno attenzione al ferro esterno. La tabella 5.2 illustra la distribuzione degli elementi del reticolo fra le varie regioni in cui è stato suddiviso il sistema in esame; le figure 5.8, 5.9 e 5.10 mostrano alcuni dettagli dei reticoli e la densità di energia e le linee di campo.

regione	elementi (nodi)
ferro esterno	106
aria (nella cava)	174
aria (attorno al conduttore)	104 (per ciascuna superficie quadrata)
conduttore	13 (per ciascuna superficie quadrata)

Tabella 5.2: distribuzione degli elementi del reticolo.

L'energia magnetica totale accumulata all'interno della cava risulta in base a quest'analisi 0,060612 J/m: questo risultato viene preso come riferimento per giudicare la bontà degli altri due metodi. Infine, sempre per mezzo di QuickField viene rilevata l'intensità dell'induzione al centro della cava, lungo la linea verticale tracciata in rosso in figura 5.7, dove la sola componente non nulla del campo  $\vec{B}$  è quella diretta lungo l'asse  $v$ .

<sup>1</sup>Si è scelta una sezione estremamente ridotta per simulare un "conduttore di sezione infinitesima".

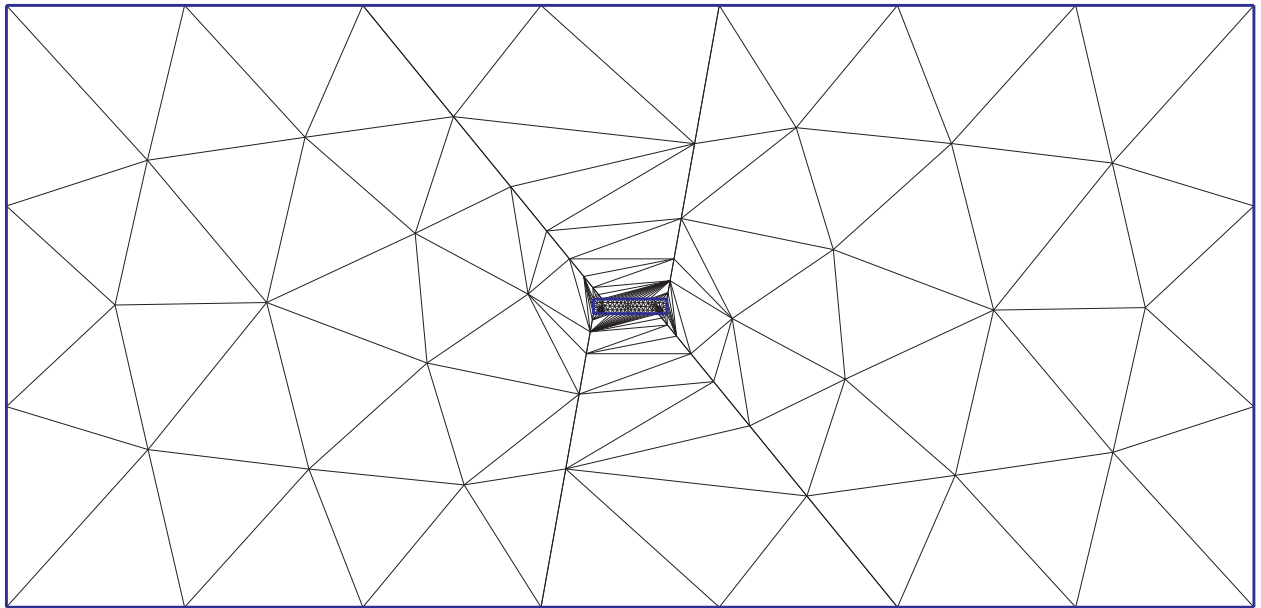


Figura 5.8: il reticolo della parte esterna in ferro

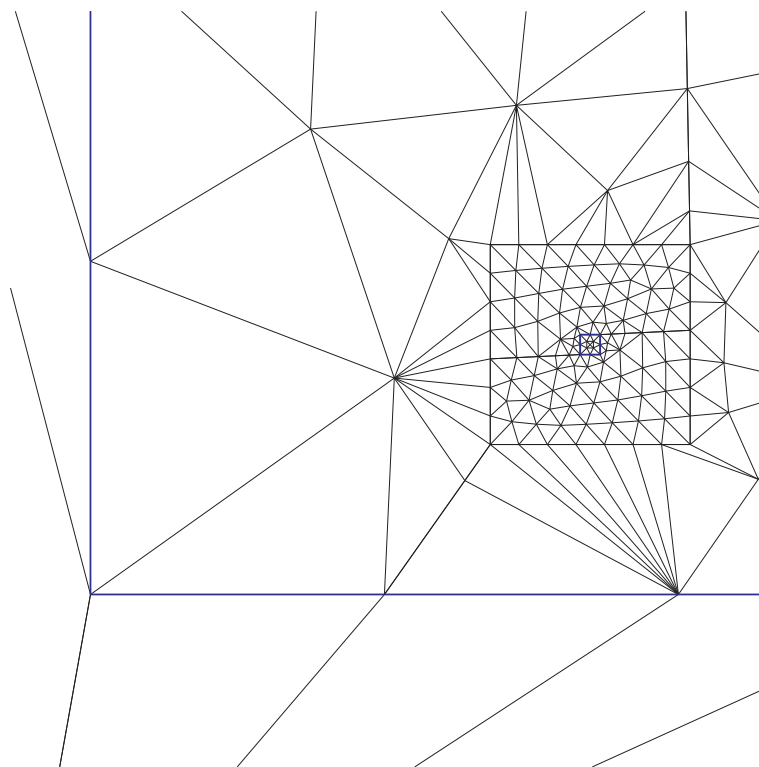


Figura 5.9: dettaglio del reticolo nella cava, presso una metà del conduttore

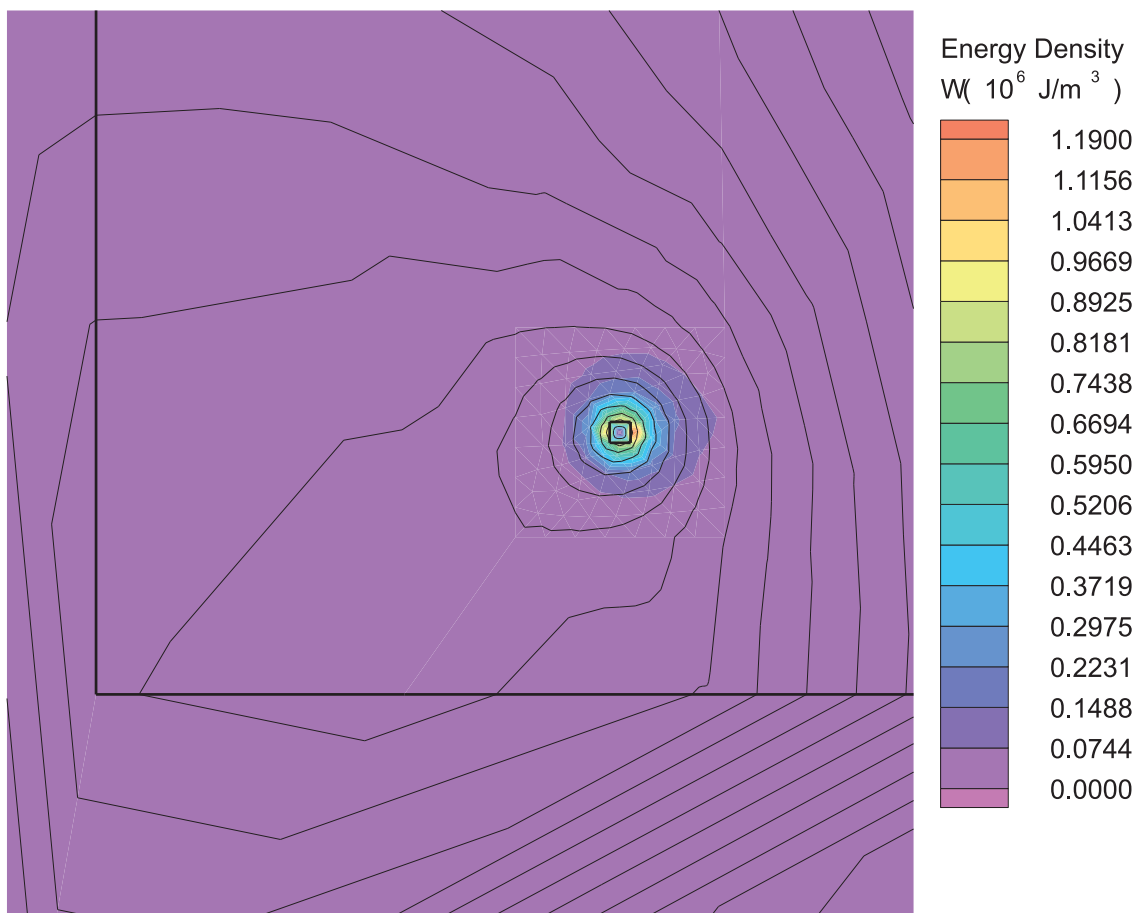


Figura 5.10: densità di energia magnetica e linee di campo presso una metà del conduttore

L'analisi viene successivamente condotta con il metodo delle immagini e con quello della trasformazione conforme dal semipiano complesso, in entrambi i casi suddividendo la cava in una griglia di  $50 \times 10 = 500$  punti nei quali rilevare il campo. L'energia magnetica totale è calcolata tramite la (5.4); per il metodo basato sulla trasformazione si procede:

- (1) calcolando le controimmagini dei punti della griglia nel semipiano complesso;
- (2) calcolando il valore della derivata della trasformazione<sup>2</sup> e dell'induzione magnetica in tali controimmagini;
- (3) ricavando il valore del modulo del campo in ogni punto del dominio fisico dividendo il modulo del campo calcolato nel semipiano complesso per il modulo della derivata della trasformazione, secondo quanto descritto nella sezione 1.3.

Le figure 5.11 e 5.12 sono relative alla densità di energia magnetica rilevata con QuickField e paragonata a quella rilevata con il metodo della trasformazione e con il metodo delle immagini rispettivamente (per quest'ultimo si è scelto di approssimare la serie che esprime il valore dell'induzione in ogni punto fermandosi al termine  $m = 25$ ; si veda al riguardo l'Appendice B): detta  $e_{QF}$  l'energia specifica rilevata con QuickField ed  $e^*$  l'energia specifica rilevata alternativamente con gli altri due metodi, si calcola in ogni punto della cava:

$$\text{Differenza} = e^* - e_{QF}$$

$$\text{Differenza percentuale (errore)} = \frac{e^* - e_{QF}}{e_{QF}}$$

Per la lettura loro e delle figure seguenti, si tenga conto delle seguenti abbreviazioni:

QF	analisi svolta utilizzando QuickField
HPMAP	analisi svolta con il metodo della trasformazione dal semipiano
IMMAGINI	analisi svolta con il metodo delle immagini

Le figure 5.13, 5.14 e 5.15 sono relative al valore dell'induzione e della densità di energia che si incontra al centro del rettangolo, procedendo nel verso indicato dalla freccia in figura 5.7, al variare di  $m$ . Infine, la tabella 5.3 mette a confronto i risultati ottenuti con i due metodi di calcolo; le prove sono state effettuate con un PC con processore AMD K6-II a 350 MHz e 64 Mbyte di RAM, piattaforma MS-Windows 95, MATLAB ver. 5.2.0.3084 ed SC-Toolbox ver. 2.16. Il codice MATLAB è riportato come al solito in Appendice C.

metodo	energia totale (J/m)	errore* (%)	tempo (s)
HPMAP	0,059198	-2,33	9
IMMAGINI ( $m = 25$ )	0,059111	-2,48	45
IMMAGINI ( $m = 50$ )	0,059159	-2,40	178
IMMAGINI ( $m = 100$ )	0,059183	-2,34	707

\*riferimento: analisi QF (energia totale: 0,060612 J/m)

Tabella 5.3: i risultati con i metodi della trasformazione e delle immagini.

<sup>2</sup>Si noti che, una volta ricavati i parametri della trasformazione in modo numerico, l'espressione di questa derivata è nota in modo *analitico*, essendo l'integrando della (3.1).

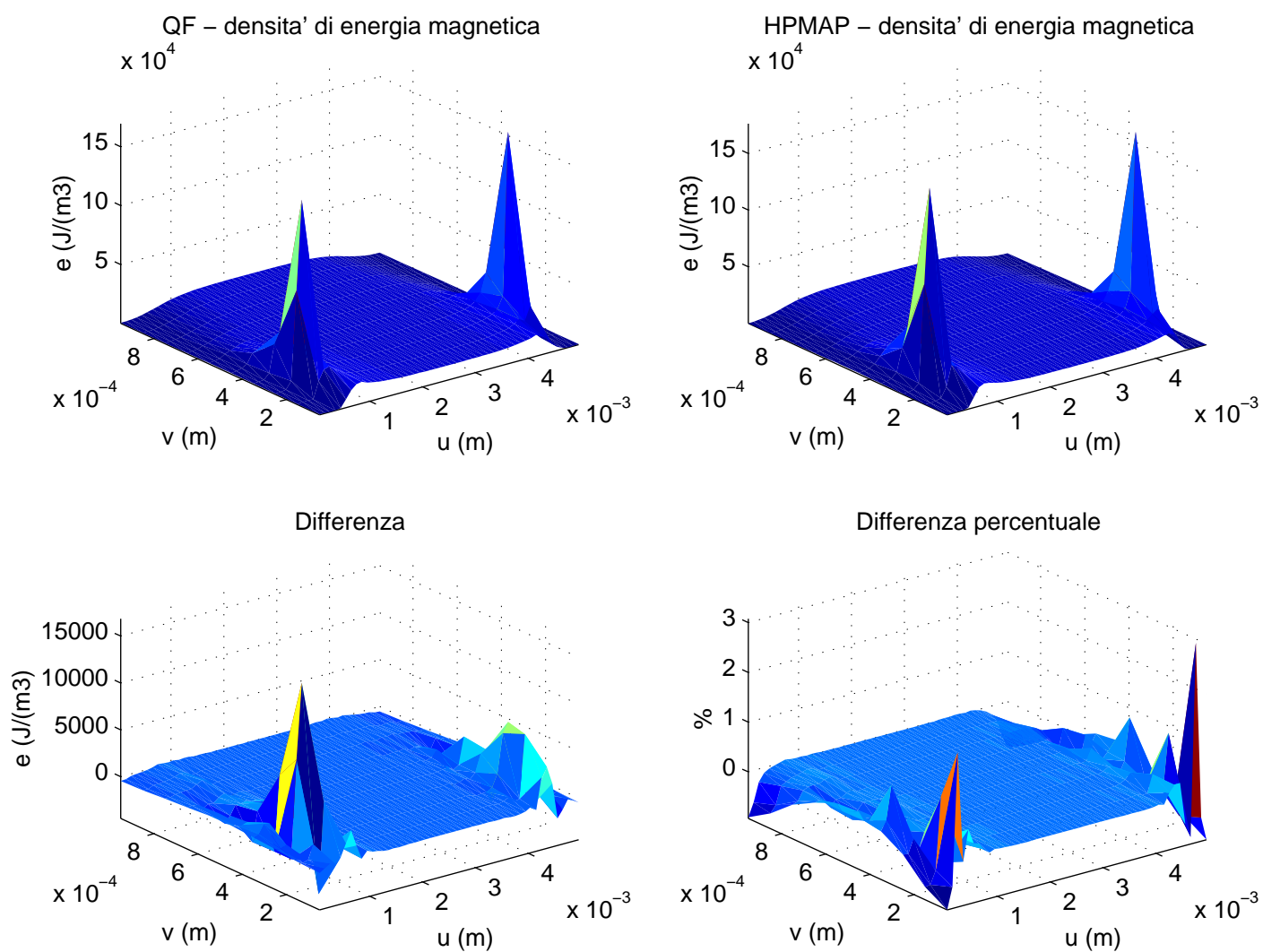


Figura 5.11: confronto QuickField - metodo della trasformazione dal semipiano

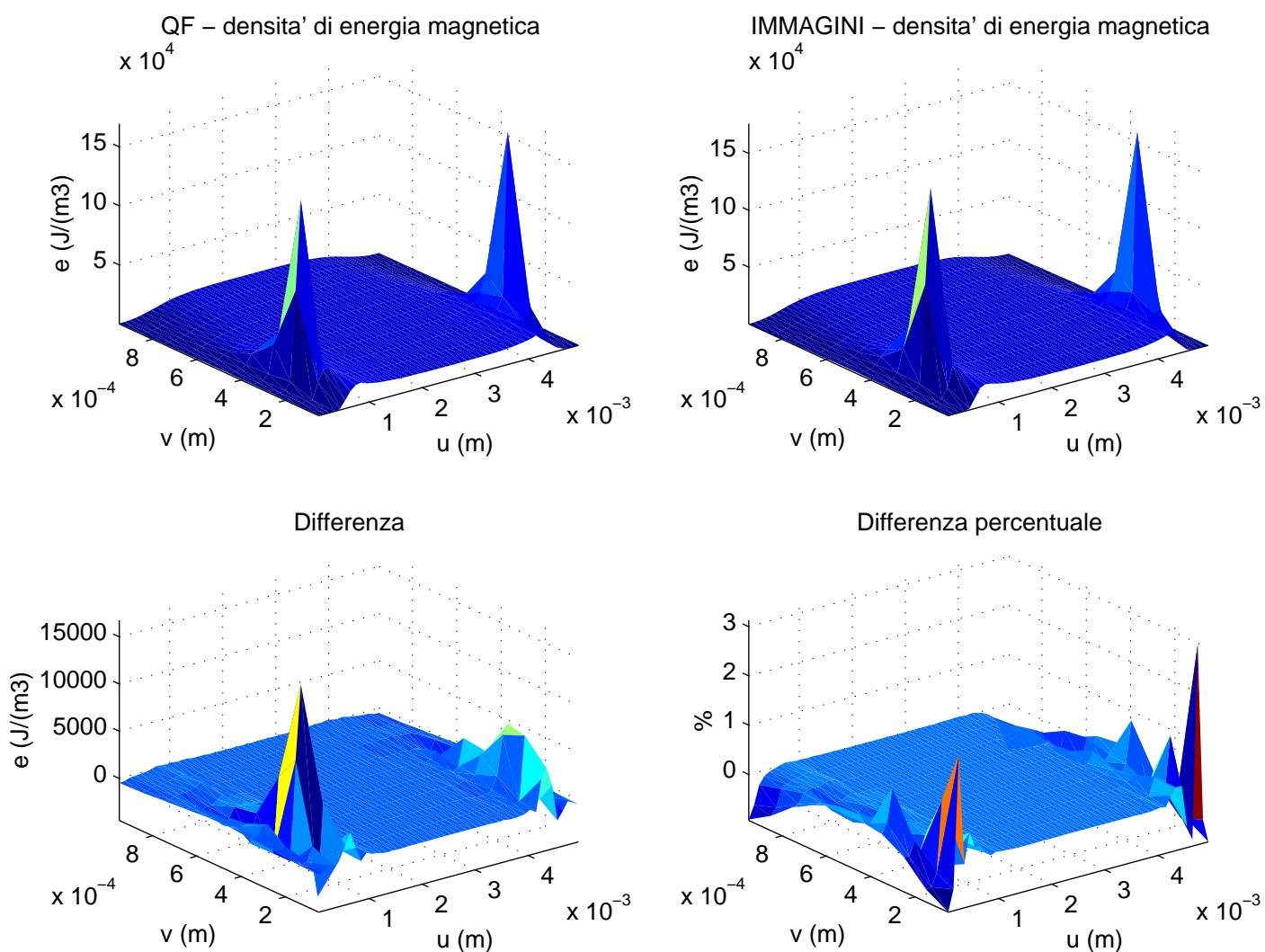


Figura 5.12: confronto QuickField - metodo delle immagini ( $m = 25$ )



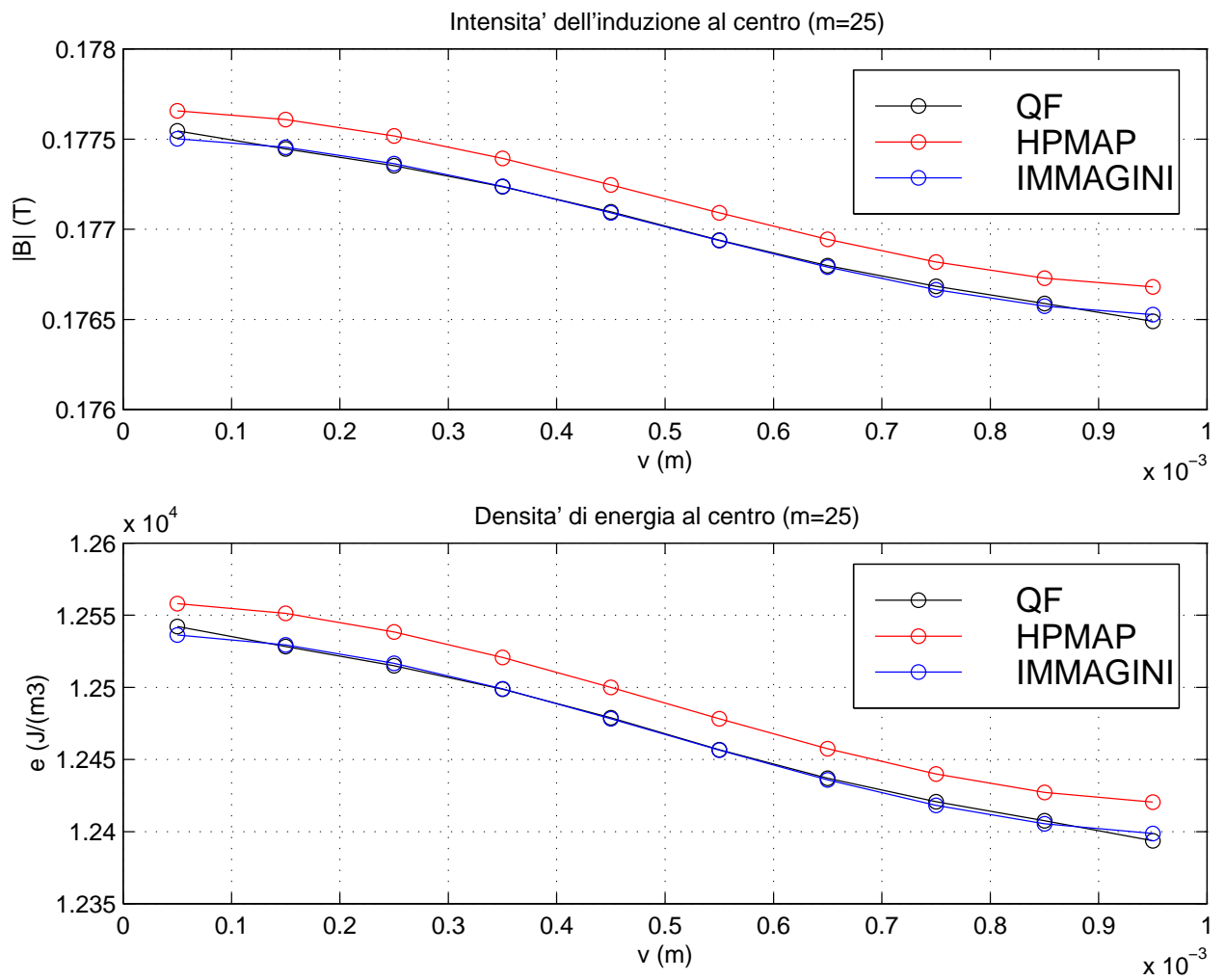


Figura 5.13: induzione e densità di energia al centro ( $u = 2,5$  mm) per  $m = 25$

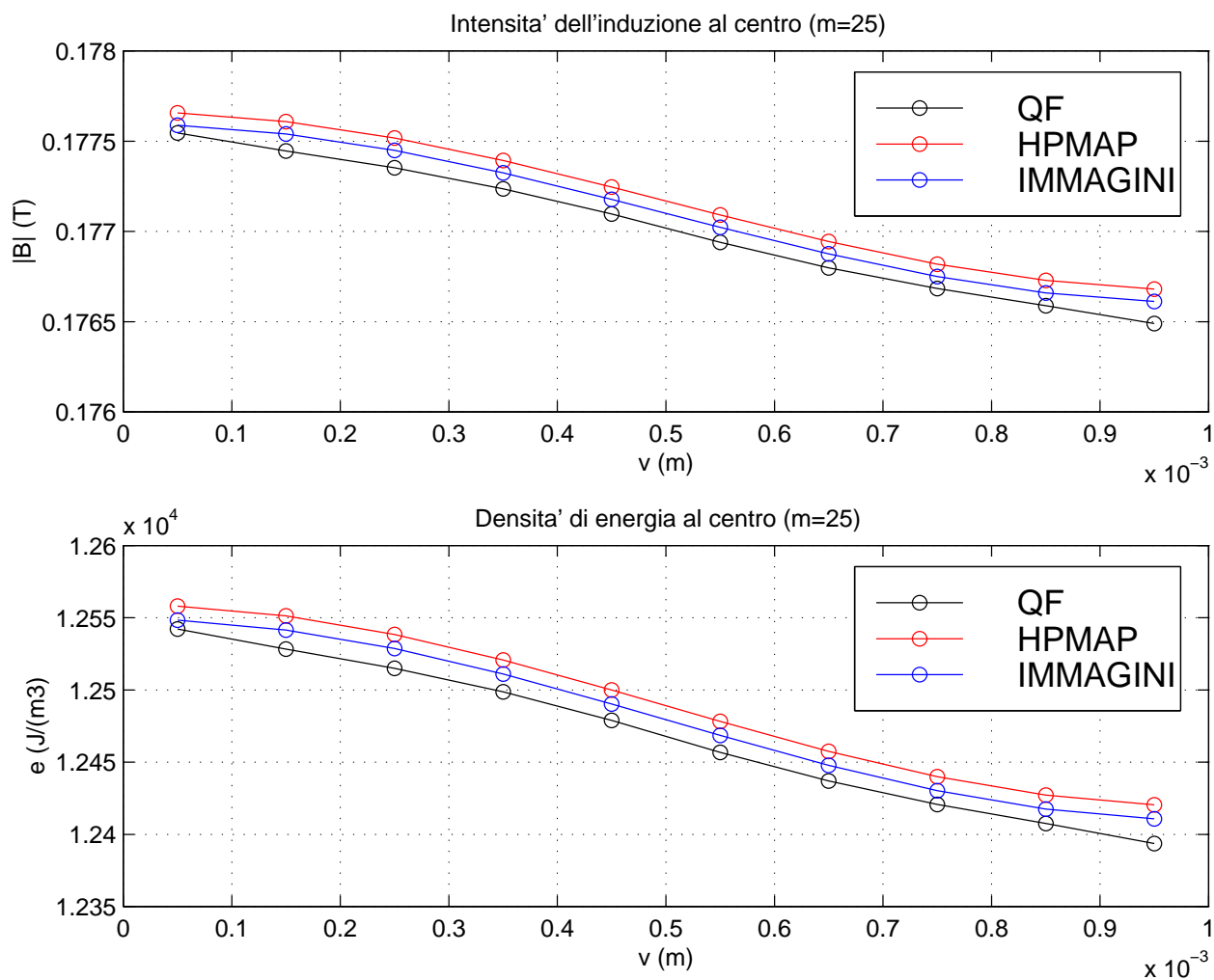


Figura 5.14: induzione e densità di energia al centro ( $u = 2,5$  mm) per  $m = 50$

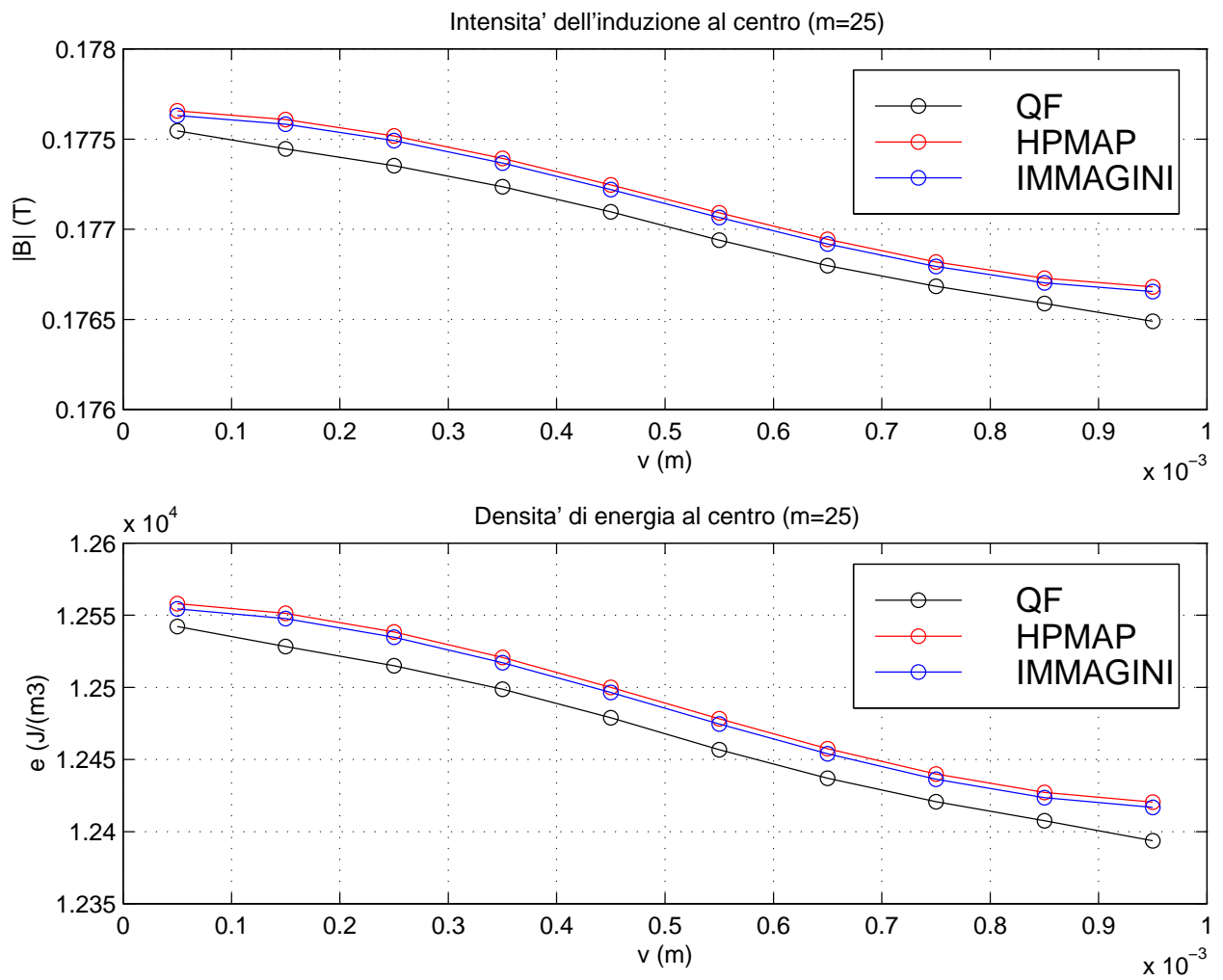


Figura 5.15: induzione e densità di energia al centro ( $u = 2,5$  mm) per  $m = 100$

### 5.3.2 Commento ai risultati e conclusioni

Dalle prove numeriche svolte risulta come il metodo consistente nell'applicare una trasformazione dal semipiano complesso, calcolando in questo nuovo dominio l'induzione per mezzo del metodo delle immagini, sia non solo più rapido, ma anche globalmente più preciso, risultando essere in ottimo accordo con quanto ottenuto per mezzo degli elementi finiti. Infatti, mentre dalle figure 5.11 e 5.12 non sono visibili differenze di rilievo, essendo l'errore commesso sulla densità di energia magnetica (rispetto all'analisi svolta con QuickField) compreso fra -1% e +3% in entrambi i casi<sup>3</sup> (da notare come tale errore sia concentrato prevalentemente attorno ai conduttori, dove la modellizzazione è sostanzialmente diversa rispetto a quella scelta per il metodo degli elementi finiti), le figure 5.13, 5.14 e 5.15 ci danno un'importante informazione per la scelta del metodo da seguire. Mentre la prima delle tre ( $m = 25$ ) sembra indicare che il metodo delle immagini sia il più preciso, fornendo un'induzione magnetica ed una densità di energia al centro circa uguali a quelli rilevati con QuickField, le due successive ( $m = 50$  e  $m = 100$  rispettivamente) mostrano come in realtà un'approssimazione migliore della sommatoria infinita che esprime il campo sposti la soluzione verso i risultati ottenuti con il metodo della trasformazione conforme. In altre parole l'apparente coincidenza dei risultati riscontrata nella prima delle tre figure è frutto più del caso che della effettiva bontà del metodo, ed il valore che l'intensità dell'induzione assume in un qualsiasi punto  $t$  posto all'interno del rettangolo, calcolato con l'utilizzo della trasformazione conforme, è il valore limite che si otterrebbe considerando il contributo di infinite correnti immagine, risultando in definitiva:

$$|\vec{B}(t)| = \left| \lim_{m \rightarrow \pm\infty} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_m \left[ \frac{(t - t_c - p)^\bullet}{|t - t_c - p|^2} + \frac{(t - \bar{t}_c - p)^\bullet}{|t - \bar{t}_c - p|^2} + \frac{(t + t_c - p)^\bullet}{|t + t_c - p|^2} + \frac{(t + \bar{t}_c - p)^\bullet}{|t + \bar{t}_c - p|^2} \right] \right|$$

$$= \frac{\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \frac{(r - r_c)^\bullet}{|r - r_c|^2} + \frac{(r - \bar{r}_c)^\bullet}{|r - \bar{r}_c|^2} \right]}{|dt/dr|}$$

ove  $p = 2ma + j2mb$ ,  $r_c$  è la controimmagine di  $t_c$  (punto in cui è posto il conduttore che genera il campo) e le notazioni utilizzate per esprimere l'induzione in un punto sono quelle riportate in Appendice B.

Un'ulteriore conferma dell'opportunità di utilizzare la trasformazione dal semipiano complesso è data dal fatto che, come risulta dalla tabella 5.3, l'errore percentuale sull'energia totale commesso utilizzando questo metodo è il minimo.

## 5.4 Il calcolo della coppia d'impuntamento

### 5.4.1 L'algoritmo di calcolo

La correttezza delle procedure alla base di un metodo per il calcolo della coppia d'impuntamento facendo uso delle trasformazioni di Schwarz-Christoffel è stata verificata. Descriviamo ora i passi che compongono l'algoritmo.

- 1. Suddivisione del dominio fisico in sottodomini opportuni**, come esposto nella sezione 5.2.3. Tale dominio è il poligono  $\mathbf{P}_z$  posto nel piano  $z$ ; la suddivisione si può facilmente operare con una griglia uniforme di punti  $\{z_n\}$  in cui rilevare l'intensità dell'induzione  $|\vec{B}_z|$ , ognuno dei sottodomini risultando di area  $S$ .

<sup>3</sup>L'errore rimane praticamente uguale a questo anche per  $m = 50$  e  $m = 100$ .

- 2. Utilizzo dell'algoritmo CRDT per il calcolo di un poligono rettificato.** Tale poligono  $\mathbf{P}_t$ , posto nel piano  $t$ , ha la forma di un rettangolo di opportuno rapporto fra i lati. Questa osservazione sul rapporto fra i lati è molto importante: ricordiamo infatti che la trasformazione numerica di Schwarz-Christoffel, nella sua formulazione fondamentale, può essere affetta da crowding se utilizzata per un poligono che presenti elongazioni pronunciate: in definitiva, l'utilizzo del CRDT serve a ricondurci ad un rettangolo "non troppo allungato", in modo da eliminare indesiderati problemi di natura numerica. Esperimenti suggeriscono come questo rapporto non debba essere superiore a  $4,8 \div 4,9$ . La scelta dei vertici del poligono triangolato a cui deve corrispondere un angolo interno di  $\pi/2$  nel poligono rettificato non è automatica e viene lasciata all'utente, che indica tali vertici all'SC-Toolbox mediante un'interfaccia grafica.
- 3. Calcolo delle controimmagini e delle derivate nel piano  $t$ .** Vengono a questo punto calcolate le controimmagini  $\{t_n\}$  dei punti  $\{z_n\}$  in cui si vuole rilevare il campo, e le controimmagini  $\{t_c\}$  dei punti  $\{z_c\}$  dove sono posti i conduttori che modellizzano il magnete permanente. Queste controimmagini si affollano lungo i bordi del rettangolo (si osservi la figura 5.16; il rapporto fra i lati del rettangolo è in questo caso 4,43 circa) a causa della rappresentazione interna della trasformazione, che risulta essere fondamentalmente una collezione di trasformazioni dal disco unitario. Nei punti  $\{t_n\}$  si calcola infine il valore della derivata della trasformazione.

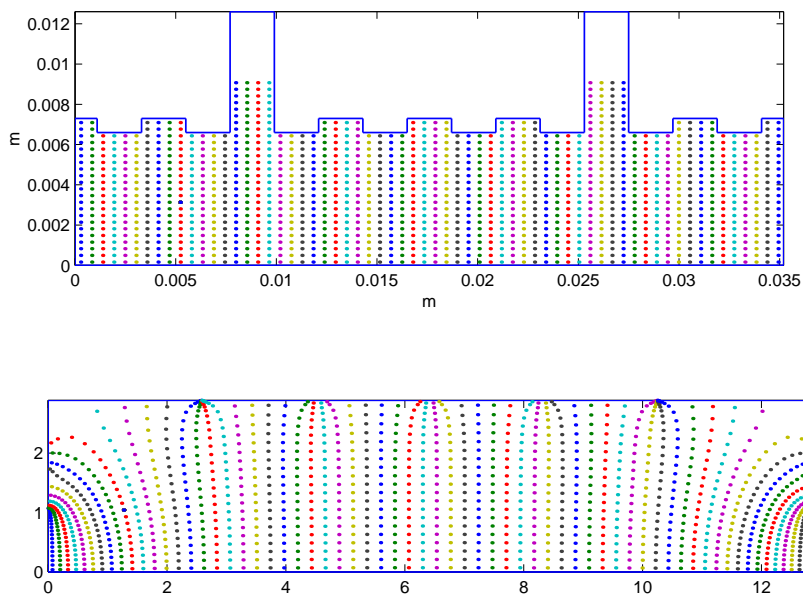


Figura 5.16: i punti del piano  $z$  dove rilevare il campo e le loro controimmagini nel piano  $t$

- 4. Calcolo delle controimmagini e delle derivate nel piano  $r$ .** Questa volta si calcola la trasformazione di Schwarz-Christoffel nella sua formulazione originaria come trasformazione dal semipiano complesso, e si trovano le controimmagini  $\{r_n\}$  dei punti  $\{t_n\}$  e le controimmagini  $\{r_c\}$  dei punti  $\{t_c\}$ ; anche qui vengono calcolate le derivate della trasformazione nei punti  $\{r_n\}$ .
- 5. Calcolo dell'induzione per mezzo delle correnti immagine.** Questo calcolo è molto veloce, in quanto, nel dominio canonico del semipiano complesso, è richiesta solamente

un'immagine per ogni conduttore; la formulazione in pseudocodice MATLAB di questo passo è la seguente:

```

 $\vec{\mathbf{B}}_r = \text{zeros}(\text{size}(\mathbf{r}));$ 
for  $m=1:\text{length}(\mathbf{r}_c)$ 
 $\vec{\mathbf{B}}_r = \vec{\mathbf{B}}_r + \frac{\mu_0 I(m)}{2\pi} \left[ \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_c(m))^\bullet}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_c(m)|^2} + \frac{(\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}_c(m))^\bullet}{|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}_c(m)|^2} \right]$ 
end;
    
```

ove le variabili in grassetto indicano matrici di punti; è ora possibile calcolare il valore dell'induzione magnetica nei punti  $\{\mathbf{r}_n\}$ .

**6. Calcolo dell'intensità dell'induzione nel piano  $z$ .** Questo calcolo è immediato tenendo presente i risultati esposti nella sezione 1.3: si tratta solamente di estenderli per due trasformazioni "in cascata". Si ottiene pertanto:

$$|\vec{\mathbf{B}}_z| = \frac{|\vec{\mathbf{B}}_r|}{|dz/dt| |dt/dr|}$$

e tutte queste quantità sono state calcolate nei passi precedenti.

**7. Calcolo dell'energia magnetica.** Detta  $L$  la lunghezza assiale del motore, l'energia magnetica si scrive, tenendo presente la (5.4):

$$\mathcal{E} = L \cdot S \cdot \sum_n \frac{1}{2\mu_0} \frac{|\vec{\mathbf{B}}_r(r_n)|^2}{\left( \left| \frac{dz}{dt}(t_n) \right| \left| \frac{dt}{dr}(r_n) \right| \right)^2} \quad (5.6)$$

Questi passi vengono ripetuti per ogni posizione relativa statore - rotore in cui si vuole calcolare l'energia magnetica; si ottiene in questo modo una serie di valori da cui si ricava la coppia d'impuntamento  $\mathcal{C}$  tramite la (5.5).

Ci si potrebbe chiedere a questo punto perchè non effettuare il calcolo dell'energia direttamente in uno dei due domini canonici (rettangolo o semipiano complesso), cosa che consentirebbe di evitare il calcolo delle controimmagini dei punti della griglia e delle derivate in questi punti. Tuttavia si noti che, per quanto riguarda il semipiano complesso, si avrebbe a che fare con un dominio d'integrazione infinito, o, più realisticamente, si avrebbe il problema di riuscire a definire un insieme  $\Omega_t$  del piano  $t$  in cui sia concentrata la maggior parte dell'energia magnetica, eseguendo su tale insieme un'integrazione numerica; non è affatto facile neppure stimare la forma e le dimensioni di tale insieme. Per quanto riguarda il ret-

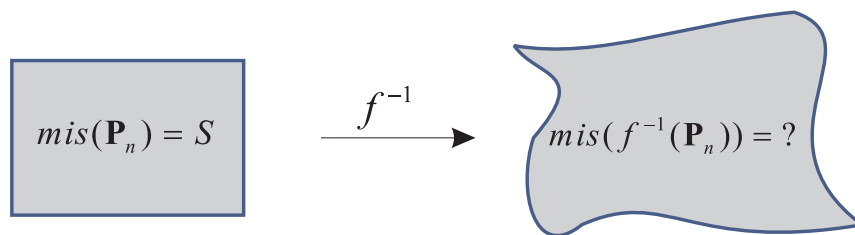


Figura 5.17: l'antitrasformato di un sottodominio generico

tangolo, posto nel piano  $t$ , la figura 5.16 ci lascia intendere come un punto controimmagine di un conduttore possa risultare posto per effetto dell'antitrasformazione anche estremamente

vicino ad un bordo, rendendo in questo modo inaccettabile un calcolo energetico basato su una griglia di punti uniforme nel piano  $t$ . In altri termini, certe zone del rettangolo necessiterebbero di un maggiore infittimento dei punti per fornire un risultato accurato: ciò equivale al fatto che, come si vede in figura 5.17, l'antitransformato di un generico sottodominio  $\mathbf{P}_n$  di  $\mathbf{P}$  ha forma e dimensioni ignote a priori.

### 5.4.2 Risultati delle prove e commenti

Nelle figure seguenti sono riportati i risultati ottenuti applicando questo algoritmo alla geometria del motore in esame, sia nel caso di dente di statore liscio, sia nel caso in cui questo presenti delle scanalature, come appare in figura 5.4. Il magnete permanente è stato modellizzato per entrambe le prove con 16 spire di corrente, ciascuna percorsa quindi da una corrente  $I = 1692/16 = 105,75$  A.

La figura (5.18) è relativa alla densità di energia magnetica che si trova nelle due configurazioni di minima e massima riluttanza rispettivamente (corrispondente ad una rotazione di  $15^\circ$ ) nel caso di denti lisci, visibili come regioni in blu scuro; viene rappresentata per comodità solo la parte del dominio fisico dove si è calcolato il campo e la densità di energia. L'energia magnetica specifica varia da un minimo di 0 J/m (in azzurro scuro) ad un massimo di  $5,9744 \times 10^4$  J/m (in rosso scuro); l'energia magnetica totale immagazzinata nell'intero dispositivo risulta nella prima delle posizioni di 1,0560 J contro i 1,3643 J trovati con l'analisi attraverso QuickField, cioè il 22,6% in meno di energia: questa differenza non deve preoccupare, essendo dovuta sostanzialmente alle due differenti modellizzazioni per il magnete permanente nell'analisi FEM e SC.

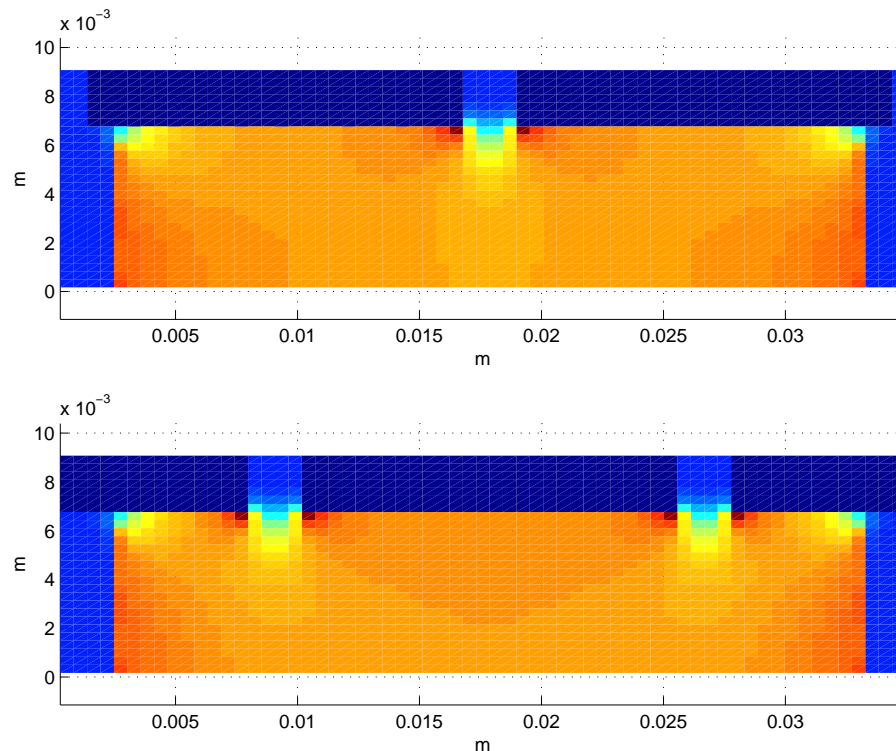


Figura 5.18: dente liscio: densità di energia magnetica

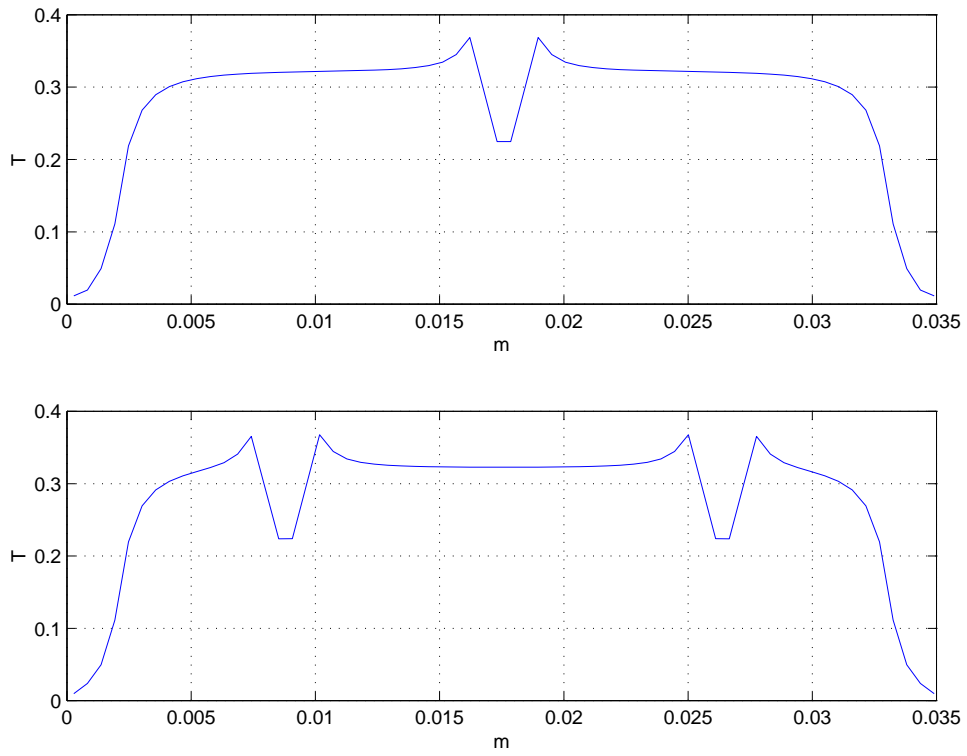


Figura 5.19: dente liscio: induzione al traferro

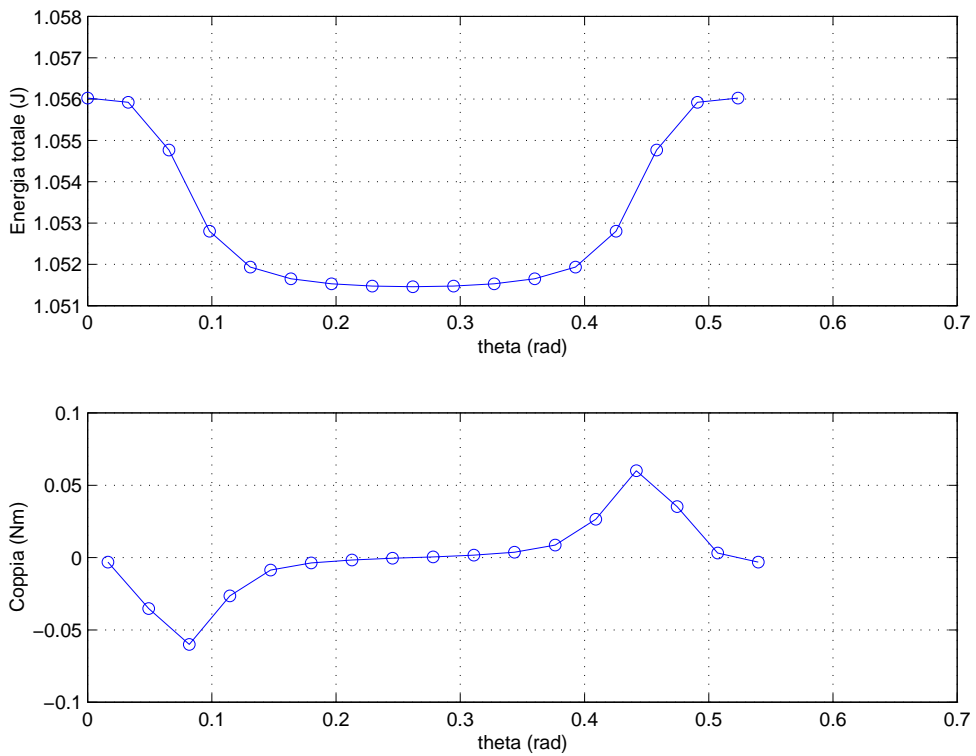


Figura 5.20: dente liscio: energia magnetica e coppia d'impuntamento



Alle posizioni raffigurate corrisponde un'intensità dell'induzione magnetica, rilevata lungo la mezzeria del traferro meccanico, visibile in figura 5.19: si paragoni questo risultato con quello ottenuto con QuickField nel capitolo precedente (figura 4.10).

La figura 5.20 mostra l'andamento dell'energia magnetica totale contenuta nel traferro, nelle cave e nei magneti permanenti e della coppia d'impuntamento per una rotazione di  $30^\circ$ , nella quale avviene lo spostamento completo di un dente per tutta la lunghezza del magnete. Si noti come, pur comparando solamente due picchi di coppia, la loro ampiezza sia di  $0,06$  Nm. Il tempo medio necessario per il calcolo dei dati relativi ad una singola configurazione della geometria fondamentale, incluso il tempo richiesto dall'utente per specificare i vertici a cui deve corrispondere un angolo di  $90^\circ$ , è in questo caso  $89$  s circa sullo stesso calcolatore descritto nella sezione 5.3.1.

Allo stesso modo per quanto riguarda i denti con le scanalature, le figure seguenti, del tutto analoghe a quelle già descritte, confermano come una certa sagomatura del dente contribuisca in modo determinante ad una sensibile riduzione della coppia d'impuntamento, risultando ora un valore di picco di  $0,027$  Nm; l'energia magnetica specifica varia in questo caso da un minimo di  $0$  J/m (in azzurro scuro) ad un massimo di  $6,2819 \times 10^4$  J/m (in rosso scuro). In particolare dalla figura 5.22 si vede come l'induzione al traferro, pur con un contenuto armonico maggiore, presenti variazioni molto meno brusche durante lo spostamento del rotore, risultando in tal modo una coppia d'impuntamento di frequenza senz'altro maggiore rispetto a quella visibile in figura 5.20, ma di ampiezza più contenuta. Il tempo medio necessario per il calcolo dei dati relativi ad una singola configurazione della geometria fondamentale sale in questo secondo caso a  $150$  s circa.

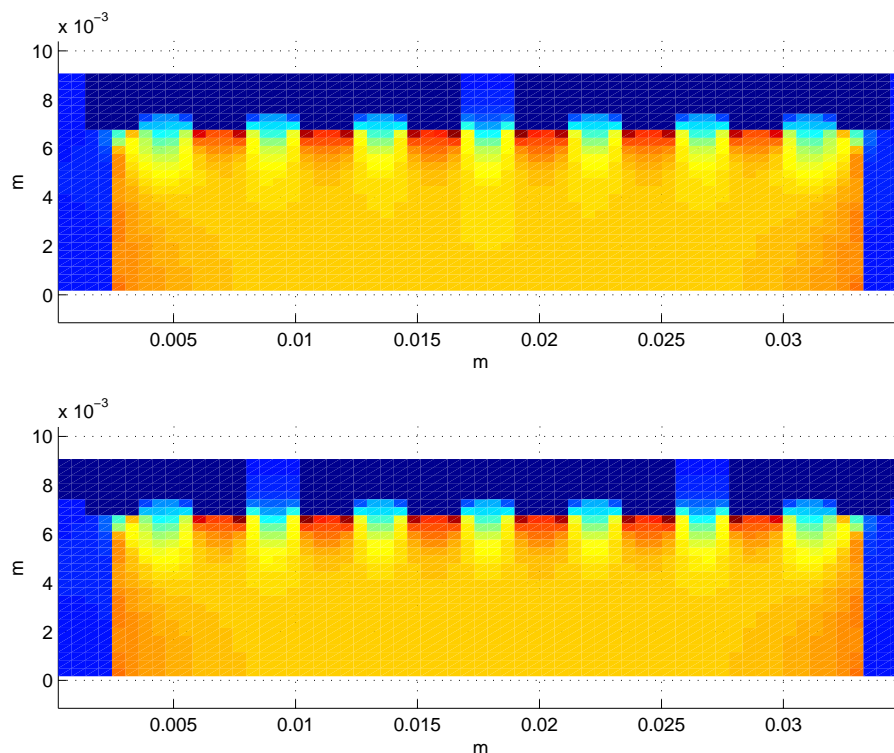


Figura 5.21: dente scanalato: densità di energia magnetica

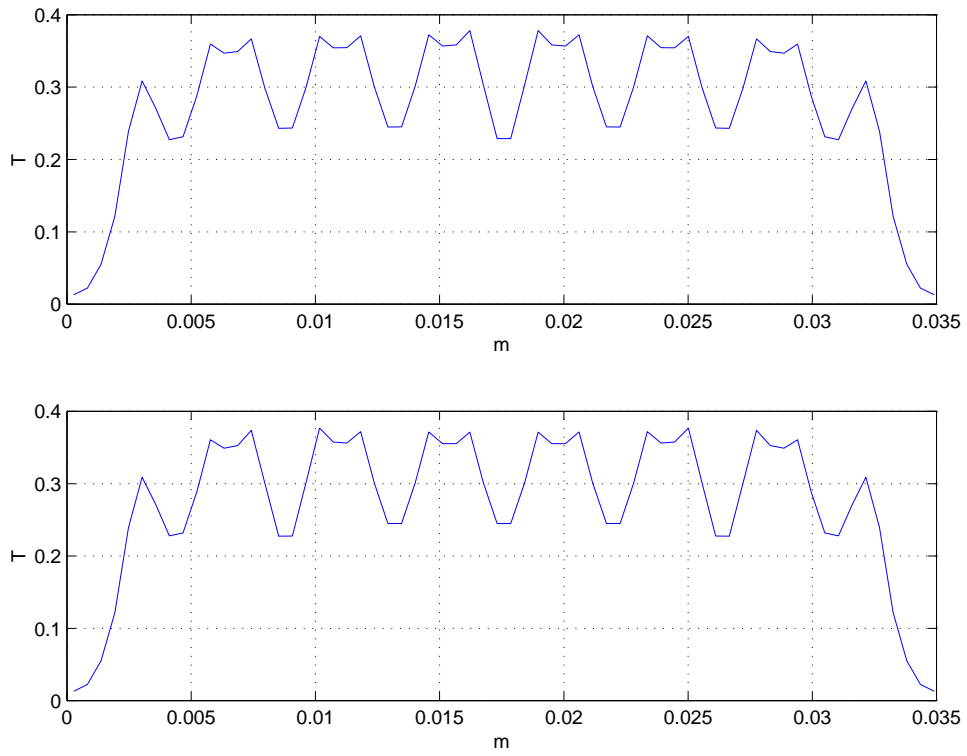


Figura 5.22: dente scanalato: induzione al traferro

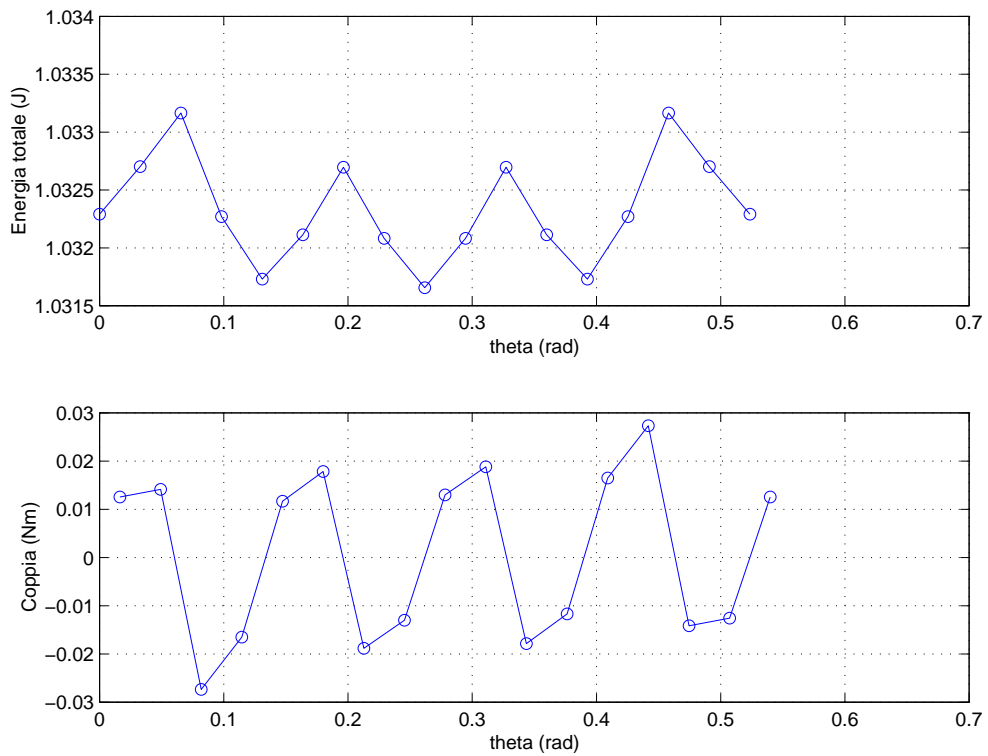


Figura 5.23: dente scanalato: energia magnetica e coppia d'impuntamento

I tempi medi di calcolo delle operazioni richieste per l'analisi di una posizione relativa statore-rotore sono riassunti in tabella 5.4 e confrontati in figura 5.24; per la loro lettura si tenga conto delle seguenti abbreviazioni:

CRRECTMAP	calcolo della trasformazione dal dominio rettificato
CRINV	calcolo delle controimmagini nel dominio rettificato
CRDIFF	calcolo delle derivate nei punti nel dominio rettificato
HPMAP	calcolo della trasformazione dal semipiano complesso
HPINV	calcolo delle controimmagini nel semipiano complesso
HPDIFF	calcolo delle derivate nei punti nel semipiano complesso
IMMAGINI	calcolo dell'induzione nel piano $r$
EM	calcolo dell'energia magnetica $\mathcal{E}$ per mezzo della (5.6)

operazione	CRRECTMAP	CRINV	CRDIFF	HPMAP	HPINV	HPDIFF	IMMAGINI	EM
dente liscio	37,967	15,238	10,849	0,4183	24,057	0	0,4628	0
dente scanalato	98,36	16,185	11,145	0,4550	23,755	0	0,4615	0

Tabella 5.4: i tempi medi (s) per le operazioni dell'analisi

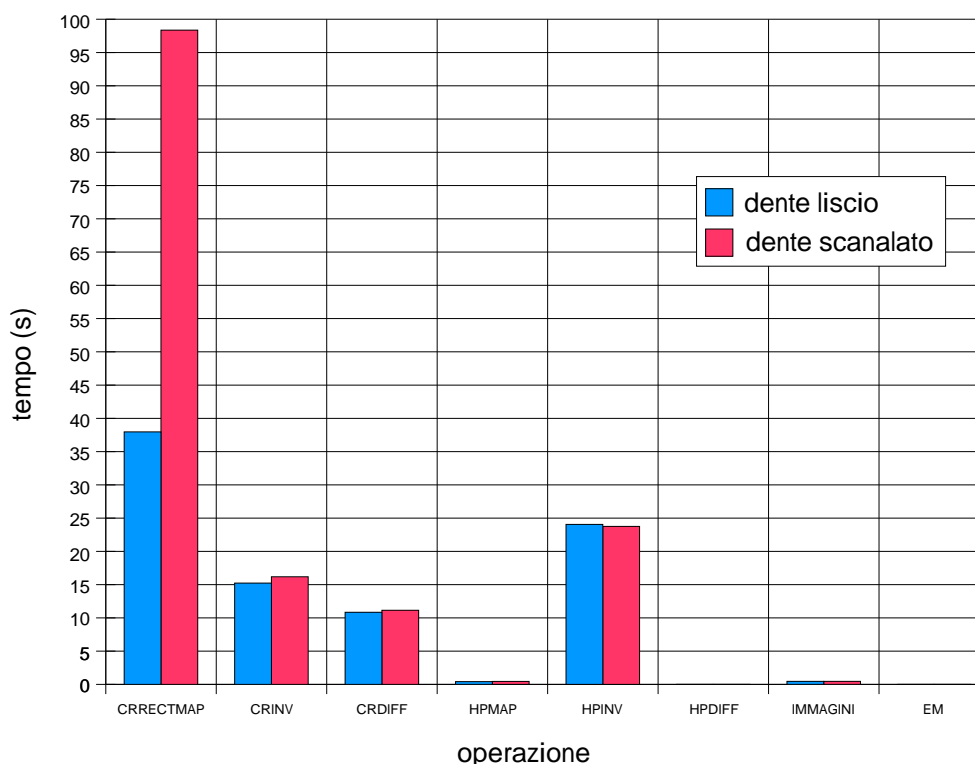


Figura 5.24: comparazione dei tempi medi per le operazioni

Si nota immediatamente come l'operazione che richiede più tempo sia in entrambi i casi il calcolo della trasformazione dal dominio rettificato (il rettangolo nel piano  $t$ ) per mezzo dell'algoritmo CRDT (CRRECTMAP), e come questo tempo aumenti fortemente con l'aggiunta dei vertici necessari a definire le scanalature del dente, la quale provoca una triangolazione più fitta del dominio fisico nel piano  $z$  e quindi il calcolo di un numero maggiore

di trasformazioni dalla circonferenza unitaria. I tempi rimangono pressochè uguali nei due casi per le altre operazioni, che non risentono dell'incremento della complessità di calcolo del passo precedente. Inoltre, il fatto che i tempi riportati per le operazioni di calcolo della derivata della funzione di trasformazione nel semipiano complesso (HPDIFF) e dell'energia magnetica  $\mathcal{E}$  (5.6) siano nulli vuole indicare come essi siano del tutto trascurabili rispetto agli altri (MATLAB stesso riporta un tempo di 0 s): ciò è dovuto al fatto che queste operazioni sono espresse da semplici formule analitiche, in cui tutti i parametri che compaiono sono stati in precedenza calcolati. In particolare, è nota in modo analitico l'espressione della derivata della funzione di trasformazione nel semipiano complesso (è la formula differenziale di Schwarz-Christoffel), in cui la costante  $c$  ed i prevertici sono stati in precedenza calcolati nella soluzione del problema dei parametri (HPMAP).

La figura seguente descrive infine quale sia il peso di ciascuna operazione che compone l'algoritmo di analisi dal punto di vista del tempo impiegato.

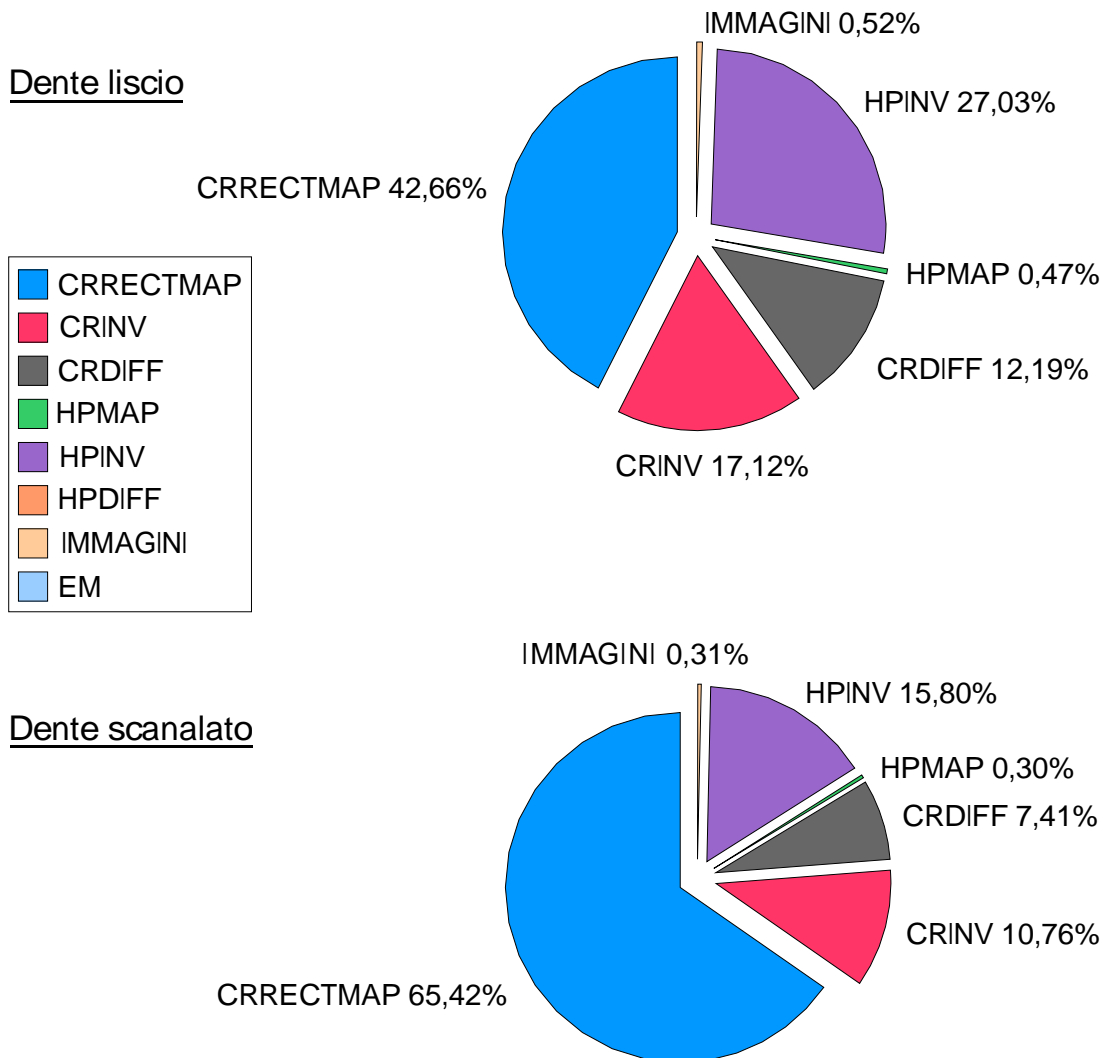


Figura 5.25: dente liscio e dente scanalato: peso relativo dei tempi per le operazioni

Confrontando i risultati ottenuti con i dati relativi alle analisi condotte dalla BITRON (unità di Cormanò), il primo fatto che balza all'occhio è la discrepanza fra i valori di picco della coppia d'impuntamento: l'analisi con le trasformazioni di Schwarz-Christoffel fornisce un valore, nel caso dei denti scanalati, che è almeno il doppio di quello che compare in figura 4.7. Ricordiamo tuttavia che per trattare questo problema con le trasformazioni conformi abbiamo dovuto:

- approssimare il magnete permanente con un solenoide;
- trascurare l'isteresi e le non-linearità del ferro, che presenta variazioni locali di permeabilità anche elevate<sup>4</sup>, a seconda dell'intensità del campo magnetico che lo investe;
- rettificare la geometria del problema, mentre in realtà il dominio fisico "reale" è incurvato, essendo parte di una macchina elettrica rotante;
- semplificare la geometria del problema per non appesantire troppo la trattazione numerica delle trasformazioni.

Tutte queste approssimazioni in qualche modo influiscono sull'accuratezza del risultato, in particolare quelle relative alla geometria del problema, la coppia d'impuntamento essendo estremamente sensibile alle più piccole variazioni di essa (variazioni di pochi centesimi di millimetro comportano sensibili differenze nel valore di picco). Tenuto conto di tutto ciò, i risultati ottenuti con questo metodo di analisi (che - ricordiamolo - non è inteso ad ottenere l'accuratezza dei risultati, ma a verificare i criteri di progettazione con grande rapidità) possono dirsi più che soddisfacenti.

I modi d'impiego della trasformazione numerica di Schwarz-Christoffel, con tutte le sue varianti, ovviamente non si fermano qui. La possibilità di trasformare un problema per renderlo più semplice agendo solamente sulla sua geometria è senza dubbio il punto di forza del metodo della trasformazione conforme, che, oltre a venire utilizzato in alternativa agli elementi finiti quando non fosse richiesta una grande accuratezza dei risultati, potrebbe dare luogo assieme a quest'ultimo ad un metodo "misto" in cui vengano a sommarsi i vantaggi dei due. Sarebbe possibile ad esempio adattare la geometria di un problema in modo tale da agevolare una successiva analisi FEM sul problema trasformato, le grandezze elettromagnetiche nei due domini essendo legate da relazioni del tipo (1.8) e (1.9). Nella figura 5.26 sono brevemente riassunti i maggiori pregi e limiti dei due metodi<sup>5</sup>. Un fatto che si nota dalla lettura di questa tabella è come certe caratteristiche siano "complementari": basti pensare alla capacità di gestire o meno domini con vertici, lati o sorgenti all'infinito; ciò rinforza la nostra opinione secondo la quale i due metodi potrebbero essere sfruttati in sinergia, facendo intervenire l'uno dove l'altro fallisce. Non va infine dimenticata la possibilità di "agganciare" i codici delle trasformazioni ad algoritmi di ricerca del minimo per l'analisi di problemi di tipo inverso, quale quello dell'ottimizzazione dell'elettrodo di Rogowski presentato in conclusione al Capitolo III.

<sup>4</sup>Come è già stato osservato nel capitolo precedente, in certi punti la permeabilità può arrivare ad essere addirittura pari a quella dell'aria, facendo apparire il dente, dal punto di vista del comportamento magnetico, di forma leggermente diversa.

<sup>5</sup>Riportiamo qui per comodità di lettura il sistema (3.2):

$$\frac{|\int_{t_k}^{t_{k+1}} f'(\tau) d\tau|}{|\int_{t_1}^{t_2} f'(\tau) d\tau|} = \frac{|z_{k+1} - z_k|}{|z_2 - z_1|} \quad 2 \leq k \leq n - 2$$

ove le incognite sono i prevertici  $\{t_k\}$ , che compaiono come estremi d'integrazione.

	<b>Analisi SC</b>	<b>Analisi FEM</b>
<b>PREGI</b>	Velocità di impostazione del problema, basata solo sulla geometria di questo	Gestisce contemporaneamente materiali con caratteristiche diverse, anche di tipo non lineare, e permette di specificare varie condizioni al contorno
	Non richiede di specificare esplicitamente le condizioni al contorno	Sicurezza ed affidabilità del metodo, ormai in uso da diversi anni
	In generale permette di trattare domini con lati, vertici e sorgenti all'infinito	
	Velocità e precisione di calcolo, pur dovendo affrontare sistemi del tipo (3.2)	
<b>LIMITI</b>	Non tutti i problemi possono essere trattati (ad es. problemi di Neumann, misti o con materiali non lineari)	L'accuratezza della soluzione richiede la costruzione di reticoli fitti e regolari
	Le condizioni al contorno possono essere trattate solo in certi casi	Le condizioni al contorno devono essere esplicitate lungo tutto il bordo per la convergenza del sistema risolvete
	L'algoritmo CRDT non gestisce poligoni con vertici, lati e sorgenti all'infinito	Non gestisce domini con vertici, lati e sorgenti all'infinito
	Crowding numerico, per certe varianti della trasformazione	Un reticolo fitto può richiedere parecchio tempo per il calcolo
	Le attuali applicazioni numeriche sono ancora in fase sperimentale	

Figura 5.26: confronto analisi SC - analisi FEM

Un ultimo doveroso commento va fatto in riguardo alla velocità di esecuzione su calcolatore degli algoritmi che fanno parte dell'analisi SC. Come è noto, il linguaggio di programmazione MATLAB è un linguaggio interpretato; ciò significa in termini concreti una velocità di esecuzione di un algoritmo nettamente inferiore rispetto a quella che si avrebbe se lo stesso algoritmo fosse scritto in linguaggio C o C++ ed ottimizzato in linguaggio Assemblato. E' noto infatti [13] che la sola operazione di trasformare uno script MATLAB in un file DLL compilandolo può risultare in una riduzione del tempo di esecuzione di quasi il 99%; anche volendo ammettere tempi di calcolo solamente venti volte inferiori a quelli necessari per l'analisi SC svolta in questo capitolo, una posizione relativa statore - rotore richiederebbe pochi secondi per la sua analisi magnetica. Questo conferma la nostra idea secondo la quale le trasformazioni numeriche di Schwarz-Christoffel, opportunamente impiegate, possono fornire un valido aiuto nell'abbattimento dei tempi di progettazione.

# Conclusioni

Le metodologie presentate e le analisi svolte nel corso dei vari capitoli hanno condotto a numerosi risultati che possono essere sintetizzati nel modo seguente:

- I** La trasformazione di Schwarz-Christoffel, con tutte le sue varianti, è oggi uno strumento di più immediato utilizzo, grazie al calcolatore e a nuovi ed efficienti algoritmi di calcolo numerico.
- II** Il calcolo dei parametri caratteristici della trasformazione è molto rapido, pur essendo effettuato in ambiente MATLAB: questo porta a supporre che, una volta riscritti gli algoritmi in un linguaggio di programmazione opportuno e compilati (e, quindi, in un confronto "uno-ad-uno" con gli elementi finiti), la trasformazione possa fornire un valido aiuto nell'abbattimento dei tempi di progettazione.
- III** Il metodo di analisi per mezzo della trasformazione poggia su basi analitico-geometriche solide e relativamente semplici, rendendo del tutto immediata l'impostazione di un problema.
- IV** I risultati delle prove condotte con questo metodo di analisi hanno un'ottima corrispondenza con quelli ottenuti utilizzando il metodo degli elementi finiti per gli stessi problemi. Per il problema particolare della coppia d'impuntamento la corrispondenza può dirsi più che soddisfacente, considerate le ipotesi semplificative che è stato necessario introdurre per rendere il problema trattabile.
- V** Un confronto con il metodo degli elementi finiti lascia intravedere la possibilità che i due possano essere sfruttati in sinergia, facendo intervenire il primo solo quando sia richiesta una maggiore accuratezza dei risultati.

# Appendice A

## Funzioni di una variabile complessa

In questa appendice sono richiamati le definizioni ed i risultati elementari della teoria delle funzioni di una variabile complessa che vengono sistematicamente usati nei vari capitoli. Una trattazione più completa ed approfondita si può trovare in [2], [5] e [10].



In tutto il seguito, con  $\Omega$  indicheremo un insieme aperto, con  $\partial\Omega$  il suo bordo e con  $\bar{\Omega}$  la sua chiusura; la notazione  $D_a(r)$  indicherà il disco (aperto) di centro  $a$  e raggio  $r$ .

### Funzioni

Siano  $\Omega_t, \Omega_z \subseteq C$ ,  $f : \Omega_t \rightarrow \Omega_z$ . Diciamo che  $f$  è una funzione di una variabile complessa se associa a  $t \in \Omega_t$  uno o più  $z \in \Omega_z$ , e scriviamo  $z = f(t)$ .

Una funzione  $f$  si dice *monodroma* se  $\forall t \in \Omega_t \exists! z \in \Omega_z$  t.c.  $z = f(t)$ ; in caso contrario  $f$  si dice *polidroma*. In generale si può scrivere  $z = x + jy = f(t) = f(u + jv)$ , quindi  $z = x(u, v) + jy(u, v)$ ;  $x$  ed  $y$  sono dette *parte reale* e *parte immaginaria* di  $f$  o *funzioni associate* ad  $f$ ;  $x$  ( $y$ ) si dice *armonica coniugata* di  $y$  (di  $x$ ).

Nel seguito considereremo solo funzioni monodrome.

### Limiti, continuità e derivate

Le definizioni di limite e continuità per una funzione di una variabile complessa sono analoghe a quelle per le funzioni reali di variabile reale; la derivata complessa  $f'(t)$  in un punto  $t_0$  è definita come:

$$f'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

a condizione che tale limite esista e sia indipendente da come  $\Delta t \rightarrow 0$ ; si dice allora che  $f(t)$  è derivabile in  $t_0$ . Una funzione dotata di derivata complessa in tutto  $\Omega_t$  si dice *analitica* o *olomorfa* in  $\Omega_t$ . Le regole del calcolo per le derivate complesse sono uguali a quelle per le derivate delle funzioni reali di variabile reale.



### Equazioni di Cauchy-Riemann

**Teorema A.1** *Condizione necessaria e sufficiente perchè  $f(t) = x(u, v) + jy(u, v)$  differenziabile sia olomorfa è che sia soddisfatta la condizione di Cauchy-Riemann:*

$$\frac{\partial f(t)}{\partial u} = \frac{1}{j} \frac{\partial f(t)}{\partial v}$$

equivalente alle condizioni

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\partial x}{\partial v} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Se le derivate seconde di  $x$  ed  $y$  rispetto ad  $u$  e  $v$  esistono e sono continue, derivando ulteriormente le (A.1) si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \nabla^2 x(u, v) = 0 \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = \nabla^2 y(u, v) = 0 \end{cases}$$

Poichè l'operatore di Laplace è lineare, ne discende che  $\nabla^2 f = 0$ .

### Formule integrali di Cauchy e proprietà generali

**Teorema A.2** *di Cauchy. Se  $f(t)$  è olomorfa in  $\bar{\Omega}$ , vale allora:*

$$\oint_{\partial\Omega} f(t) dt = 0$$

In altre parole, ciò equivale a dire che il valore di  $\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$  è indipendente dal percorso che collega  $t_1$  e  $t_2$ . Integrali del genere possono quindi essere calcolati come  $F(t_2) - F(t_1)$ , ove  $F'(t) = f(t)$ .

**Teorema A.3** *di Cauchy. Se  $f(t)$  è olomorfa in  $\bar{\Omega}$  ed  $a \in \Omega$  allora:*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\partial\Omega} \frac{f(t)}{t-a} dt$$

ove  $\partial\Omega$  è percorsa in senso positivo (antiorario). Inoltre, la derivata  $n$ -esima di  $f(t)$  in  $t = a$  è data da:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi j} \oint_{\partial\Omega} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt$$

Le formule integrali appena viste sono notevoli, in quanto affermano che se  $f(t)$  è olomorfa e nota su  $\partial\Omega$  allora è nota anche in  $\Omega$  e possono essere calcolate le sue derivate nei punti di  $\Omega$ ; pertanto se  $f$  ammette una prima derivata, ammette anche le derivate di tutti gli ordini superiori, come peraltro risulta dal seguente

**Teorema A.4** Sia  $f = x + jy$  olomorfa in  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ . Allora  $x$  e  $y$  sono di classe  $C^\infty$  ed armoniche in  $\Omega$ . Inoltre, data  $x$  armonica in  $\Omega$ , esiste  $y$  necessariamente armonica in  $\Omega$  ed unica a meno di una costante tale che  $x$  e  $y$  sono associate ad una stessa funzione  $f$  olomorfa in  $\Omega$ .

E' interessante notare che le linee di livello di due armoniche coniugate sono ortogonali: infatti in un punto soluzione del sistema

$$\begin{cases} x(u, v) = \alpha \\ y(u, v) = \beta \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

per le (A.1) il prodotto scalare delle due normali si annulla:  $\nabla x \cdot \nabla y = x_u x_v + y_u y_v = x_u x_v - x_v x_u = 0$ .

Se allora la funzione  $x$  rappresenta il potenziale di una forza piana irrotazionale, le sue linee di livello sono le linee equipotenziali, mentre le linee di livello della sua armonica coniugata rappresentano le cosiddette linee di forza o linee di flusso. Questo fatto, assieme all'invarianza dell'equazione di Laplace bidimensionale rispetto a cambiamenti di variabile del tipo (A.2) è alla base del metodo della *rappresentazione conforme*.

### Serie di Taylor

Se  $f(t)$  è olomorfa in  $\overline{D}_a(r)$ , allora per tutti i punti  $t \in D_a(r)$  vale lo sviluppo in serie di Taylor:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (t - a)^n$$

### Punti singolari

Un punto singolare di una funzione  $f(t)$  è un valore di  $t$  per il quale  $f$  non è olomorfa. Se  $f(t)$  è olomorfa in tutto  $\Omega$  tranne che per  $a \in \Omega$ ,  $a$  viene detta *singolarità isolata* di  $f(t)$ .

Le singolarità isolate si dividono in due categorie: i *poli*, per i quali  $f(t) \rightarrow \infty$  per  $t \rightarrow a$  e le *singolarità essenziali*, per le quali il  $\lim_{t \rightarrow a} f(t)$  non esiste. Le *singolarità rimosibili* vengono eliminate ponendo  $f(a) := \lim_{t \rightarrow a} f(t)$ .

Se  $f(t) = \frac{\tilde{f}(t)}{(t-a)^n}$ ,  $\tilde{f}(t) \neq 0$  con  $\tilde{f}(t)$  analitica in tutta una regione che comprende  $t = a$ , e se  $n$  è un intero positivo, allora  $f(t)$  ha una singolarità isolata in  $t = a$  che viene detta *polo di ordine  $n$* . Se  $n = 1$  il polo si dice *semplice*; se  $n = 2$  si dice *doppio*, ecc.

### Serie di Laurent

Se  $f(t)$  presenta un polo di ordine  $n$  in  $t = a$ , ma è olomorfa in tutti i punti  $t \in D_a(r)$  per un certo  $r > 0$ , allora  $(t - a)^n f(t)$  è olomorfa in  $\overline{D}_a(r)$  ed ammette intorno a  $t = a$  uno sviluppo in serie di Taylor per cui

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{-1} a_k (t - a)^k + \sum_{m=0}^{\infty} a_m (t - a)^m \quad (\text{A.3})$$

Questo sviluppo è detto *serie di Laurent* di  $f(t)$ . La prima delle due somme al secondo membro della (A.3), costituita da potenze negative di  $(t - a)$ , è detta *parte principale*, mentre la seconda è detta *parte analitica*. Una funzione olomorfa in una regione limitata

da due circonferenze concentriche di centro  $t = a$  può sempre essere sviluppata in serie di Laurent del tipo visto.

Se la parte principale ha un numero infinito di termini diversi da zero (cioè  $n = \infty$ ), allora  $t = a$  è una *singolarità essenziale* o un *polo di ordine infinito*.

### Residui

I coefficienti che figurano nella (A.3) possono essere determinati nel solito modo scrivendo i coefficienti della corrispondente serie di Taylor per  $(t - a)^n f(t)$ ; ai fini di ulteriori sviluppi, il coefficiente  $a_{-1}$ , detto *residuo* di  $f(t)$  nel polo  $t = a$ , assume una particolare importanza, e può essere determinato con la formula:

$$a_{-1} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(t-a)^n f(t)\}$$

ove  $n$  è l'ordine del polo. Per poli semplici, la formula si riduce a:

$$a_{-1} = \lim_{t \rightarrow a} (t-a) f(t)$$

**Teorema A.5** *Se  $f(t)$  è olomorfa in  $\Omega$  ad eccezione di un polo di ordine  $n$  in  $t = a$ , presa comunque una linea chiusa  $\Gamma \subset \Omega$  che racchiuda  $t = a$ , allora risulta:*

$$\oint_{\Gamma} f(t) dt = 2\pi j a_{-1}$$

cioè l'integrale di  $f(t)$  lungo un percorso chiuso che circonda un suo polo è uguale a  $2\pi j$  volte il residuo di  $f(t)$  in quel polo.

Il calcolo di vari integrali può spesso essere condotto sfruttando il teorema dei residui assieme ad un opportuno percorso o contorno  $\Gamma$ , la cui scelta può richiedere molta ingegnosità. Un caso importante per quello che riguarda il calcolo con metodi analitici della trasformazione di Schwarz-Christoffel è quello in cui  $f(t)$  ha un polo semplice in  $t = a$ ; mettiamolo dunque in evidenza scrivendo il suo sviluppo in serie di Laurent:

$$f(t) = \frac{c}{(t-a)} + \tilde{f}(t)$$

ove  $\tilde{f}(t)$  rappresenta la parte analitica di  $f(t)$ . Preso  $D_a(r)$  con  $r > 0$  e tale che in  $\overline{D}_a(r)$   $f(t)$  non abbia altre singolarità<sup>1</sup> al di fuori di  $t = a$ , tenendo conto che  $\tilde{f}(t)$  è olomorfa in  $\overline{D}_a(r)$  e sfruttando il teorema (A.2), abbiamo:

$$\oint_{\partial D_a(r)} f(t) dt = \oint_{\partial D_a(r)} \frac{c}{(t-a)} dt + \oint_{\partial D_a(r)} \tilde{f}(t) dt = 2\pi j c$$

essendo nullo l'integrale della parte analitica su un percorso chiuso, e  $c$  il residuo di  $f(t)$  in  $t = a$ .

---

<sup>1</sup>E' sempre possibile trovare un tale intorno per un certo valore di  $r$ , in quanto si considerano solo singolarità isolate.

# Appendice B

## Nozioni di teoria dei campi

Questa appendice riporta alcuni concetti sui campi bidimensionali elettrici e magnetici che riguardano i metodi di analisi descritti nei vari capitoli. Una trattazione completa di tali argomenti si può trovare in [14], [2] e [9].



### Funzioni flusso e potenziale

Nell'analisi dei campi è utile introdurre, quando possibile, una *funzione potenziale*  $\psi$  definita in modo che la variazione di tale funzione fra due punti qualsiasi sia proporzionale alla variazione di potenziale fra di essi. Il suo valore in ogni punto, rispetto a qualche riferimento, è una misura diretta del potenziale in quel punto; una linea congiungente punti che abbiano lo stesso potenziale è detta *equipotenziale*.

Similmente, si definisce una *funzione flusso*  $\phi$  in modo tale che  $\phi = 0$  identifica una linea di flusso, e due linee  $\phi = \phi_0$  e  $\phi = \phi_0 + n$  hanno  $n$  unità di flusso fra esse.

Dalle definizioni date, si vede come le differenze fra le funzioni flusso e potenziale rappresentino differenze di flusso e potenziale, lo zero di entrambe essendo scelto in modo arbitrario. Linee tracciate per valori costanti di flusso e potenziale, scelte in modo tale che  $\psi$  e  $\phi$  varino per uguali incrementi, formano un reticolo di campo in cui le linee si intersecano ad angoli retti. In un campo uniforme questo reticolo diviene composto di quadrati.

Dal momento che le funzioni flusso e potenziale sono ortogonali, una può essere derivata dall'altra attraverso l'equazione:

$$\left(\frac{dv}{du}\right)_{\phi=const} = -1 \left/\left(\frac{dv}{du}\right)_{\psi=const}\right.$$

Le equazioni che mettono in relazione direttamente  $\psi$  e  $\phi$  si derivano, in modo più semplice, non attraverso questa equazione, ma utilizzando la teoria delle funzioni di una variabile complessa.

### Funzioni flusso e potenziale come funzioni coniugate

Dalla teoria delle funzioni di una variabile complessa, sappiamo che famiglie di curve corrispondenti a valori costanti delle funzioni coniugate sono ortogonali. Poichè le funzioni

coniugate sono soluzione dell'equazione di Laplace e sono ortogonali, possono essere utilizzate per rappresentare le funzioni flusso e potenziale; consideriamo un campo nel piano  $(u, v)$ , e definiamo

$$\phi = f_1(u, v) = f_1(t) \qquad \psi = f_2(u, v) = f_2(t)$$

Allora, se  $\phi$  e  $\psi$  vengono viste come funzioni coniugate, possono essere combinate assieme in una singola funzione di una variabile complessa  $w(t)$ , con

$$w(t) = f_1(t) + jf_2(t)$$

Questa funzione  $w$  è detta *funzione potenziale complesso* ed è di fondamentale importanza nell'uso della teoria delle funzioni di una variabile complessa per la soluzione di problemi di campo; in termini di  $\phi$  e  $\psi$  si scrive:

$$w = \phi + j\psi \tag{B.1}$$

Va sottolineato che tutte le quantità di cui si è parlato sono numeri adimensionali; comunque, in certi problemi è spesso utile scegliere una costante di proporzionalità in modo che  $\phi$  o  $\psi$  forniscano direttamente una quantità con le dimensioni di un flusso o di una differenza di potenziale. Notiamo inoltre che  $\phi$  e  $\psi$  possono essere scambiate nella (B.1) quando ciò sia conveniente.

Come accennato prima,  $\phi$  e  $\psi$  possono essere derivate l'una dall'altra, e risulta ora evidente che, essendo funzioni coniugate, sono messe in relazione dalle equazioni di Cauchy-Riemann (A.1). Utilizzando tali equazioni, le relazioni sono:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} = -\frac{\partial \phi}{\partial v} \end{cases}$$

E' ovviamente possibile esprimerle in altra forma da quella appropriata per un sistema cartesiano; in coordinate polari si ha ad esempio:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{cases}$$

### Potenziale magnetostatico scalare

Poichè il rotore del gradiente di una funzione scalare  $\psi$  è identicamente nullo, condizione necessaria perchè un campo  $\vec{B}$  sia conservativo, cioè sia possibile scrivere  $\vec{B} = \nabla\psi$ , è che il suo rotore sia nullo; poichè il campo magnetostatico  $\vec{B}$  non gode di questa proprietà (essendo  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ ), non è in generale conservativo.

Tuttavia la densità di corrente  $\vec{J}$  è diversa da zero solo in porzioni limitate dello spazio (i conduttori, spesso fili metallici); vediamo se nello spazio restante, dove si ha  $\nabla \times \vec{B} = 0$ , il campo  $\vec{B}$  è conservativo, cioè se è possibile esprimerlo come gradiente di un potenziale scalare. In termini matematici ci chiediamo se la condizione

$$\nabla \times \vec{B} = 0 \tag{B.2}$$

è necessaria e sufficiente per l'esistenza di una funzione *monodroma*, cioè definita a meno di una costante  $c$  che abbia però lo stesso valore in ogni punto, di cui  $\vec{B}$  sia il gradiente<sup>1</sup>:

$$\vec{B} = -\nabla\psi$$

**Teorema B.1** *Condizione necessaria e sufficiente perchè un campo vettoriale definito su un aperto  $\Omega$  sia esprimibile come gradiente di un potenziale scalare monodromo è che il campo vettoriale sia irrotazionale e che  $\Omega$  sia semplicemente connesso.*

Allora entro un dominio semplicemente connesso in cui non siano presenti correnti il campo magnetostatico  $\vec{B}$  è conservativo, e quindi esprimibile come gradiente (cambiato di segno) di una funzione scalare  $\psi$ .

Vediamo come modificare le considerazioni svolte nel caso in cui il dominio di definizione del campo non sia semplicemente connesso. Dato un circuito percorso da una corrente stazionaria  $I$ , consideriamo tutto lo spazio  $D$  circondante il circuito (escluso quindi il volume occupato da esso): tale spazio  $D$  non è semplicemente connesso. In tutto  $D$  continua a valere la (B.2), ma la costante di integrazione  $c$  non è più univocamente determinata: stabilito il suo valore in un punto  $P_0$  del campo non è detto che essa abbia lo stesso valore in ogni punto  $P$  del campo stesso. Se infatti per andare da  $P_0$  a  $P$  seguiamo una linea  $l_1$  che non concatena il circuito, allora  $c$  ha lo stesso valore in  $P_0$  e in  $P_1$ ; ma se seguiamo una linea  $l_2$  che concatena  $n$  volte il circuito, allora tenendo conto del *teorema della circuitazione di Ampère*

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I^{(conc)}$$

una volta imposta la condizione  $\psi = 0$  in un certo punto, il nuovo potenziale scalare sarà:

$$\psi^* = \psi - n\mu_0 I \tag{B.3}$$

ove  $n$  rappresenta il numero di volte per cui la linea  $l_2$  concatena il circuito. La (B.3) si può anche interpretare dicendo che, se  $D$  non è semplicemente connesso, dobbiamo sottrarre a  $\psi$  la quantità  $\mu_0 I$  per ogni giro che concatena il circuito. Una espressione come la (B.3) è detta un *potenziale polidromo*; tuttavia il suo gradiente non dipende da  $n$ , per cui il campo  $\vec{B}$  è univocamente definito: cioè il potenziale magnetostatico polidromo ha differenziale monodromo. Fisicamente, ciò corrisponde al fatto che, dato un circuito percorso da una corrente elettrica  $I$ , il campo  $\vec{B}$  nello spazio circostante è univocamente definito, ma l'integrale di linea di  $\vec{B}$  fra due punti qualunque non è indipendente dalla traiettoria.

Infine, nella porzione di spazio occupata fisicamente dal circuito (o in generale, dovunque sia  $\vec{J} \neq 0$ ), non valendo la (B.2) non è definibile alcun potenziale scalare magnetostatico; si introduce allora un *potenziale vettore*.

### Potenziale magnetico di un conduttore rettilineo infinito

Per fornire un esempio di quanto esposto nel paragrafo precedente, consideriamo il campo magnetico di un conduttore rettilineo infinito perpendicolare al piano in cui si considera il campo, illustrato in figura B.1. Il gradiente del potenziale è nella direzione di  $\vec{B}$ , quindi le equipotenziali sono linee radiali e le linee di flusso sono circonferenze concentriche attorno

<sup>1</sup>Cambiamo segno per omogeneità con il potenziale elettrostatico.

al conduttore; in conseguenza di ciò, a causa della simmetria del campo, quando un punto si muove nel piano attorno al conduttore, il suo potenziale cambia proporzionalmente alla variazione della coordinata angolare  $\theta$  rispetto alla linea di corrente. La variazione di potenziale per una rivoluzione completa è  $-\mu_0 I$ , e la variazione di potenziale dovuta ad una variazione di un angolo  $\theta$  è  $-\theta\mu_0 I/2\pi$ . Dal momento che il potenziale varia con continuità durante la rotazione attorno al conduttore, se ne deduce che è una funzione polidroma. E'

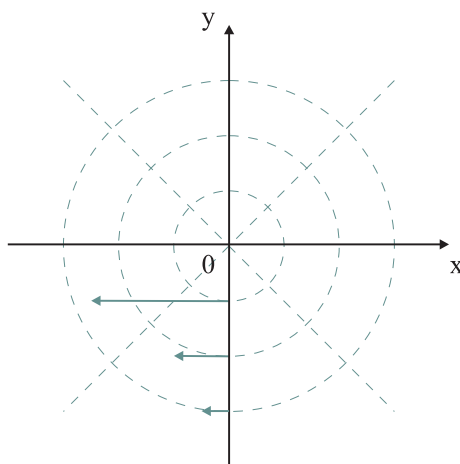


Figura B.1: equipotenziali e linee di flusso del campo  $\vec{B}$  di un conduttore rettilineo infinito

possibile comunque definire un potenziale monodromo per  $0 \leq \theta < 2\pi$ , ottenendo:

$$\psi = -\mu_0 I \frac{\theta}{2\pi}$$

Con queste restrizioni, il potenziale per il campo dovuto a più linee di corrente può essere calcolato per sovrapposizione degli effetti; va notato che la funzione potenziale per un conduttore rettilineo infinito, sebbene in qualche modo "artificiosa", soddisfa all'equazione di Laplace, ed è quindi possibile definire anche in questo caso un potenziale complesso monodromo  $w$ .

Il campo in figura B.1 è identico al campo elettrico dovuto a due semipiani equipotenziali, uno posto fra  $-\infty$  e 0 e l'altro fra 0 e  $+\infty$ , con una differenza di potenziale di  $\psi_1$  fra essi. In generale, con una differenza di potenziale di  $\psi_1$  fra le due metà (divise dall'origine) dell'asse reale, il campo nella parte superiore del piano complesso  $t$  è descritto in termini di potenziale complesso da:

$$w = \phi + j\psi = \frac{\psi_1}{\pi} \ln t \tag{B.4}$$

Questa equazione è usata spesso nell'analisi dei campi generati da un contorno composto di due distinte parti equipotenziali.

### Le funzioni $(.)^\bullet$ e $(.)^+$

Consideriamo un conduttore rettilineo infinito percorso da una corrente  $I$  ed il campo magnetico generato nel piano  $t$  ad esso perpendicolare; sia  $t_c = u_c + jv_c$  il punto dove il conduttore è posto e  $t = u + jv$  un punto generico del piano. Per una corrente di intensità  $I$  uscente dal

piano si ha:

$$B_u(t) = -\frac{\mu_0 I (v - v_c)}{2\pi |t - t_c|^2} \quad (\text{B.5})$$

$$B_v(t) = \frac{\mu_0 I (u - u_c)}{2\pi |t - t_c|^2}$$

mentre se  $I$  entra nel piano:

$$B_u(t) = \frac{\mu_0 I (v - v_c)}{2\pi |t - t_c|^2} \quad (\text{B.6})$$

$$B_v(t) = -\frac{\mu_0 I (u - u_c)}{2\pi |t - t_c|^2}$$

ed in entrambi i casi vale ovviamente  $\vec{B}(t) = B_u + jB_v$ . Definendo ora le due funzioni:

$$\begin{aligned} (t)^\bullet &= -Im(t) + jRe(t) \\ (t)^+ &= Im(t) - jRe(t) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

per cui vale:

$$(t)^+ = -(t)^\bullet \quad (\text{B.8})$$

l'induzione magnetica in un punto si scrive, tenendo conto delle (B.5) e (B.6):

$$\vec{B}(t) = \frac{\mu_0 I (t - t_c)^\bullet}{2\pi |t - t_c|^2} \quad (\text{B.9})$$

$$\vec{B}(t) = \frac{\mu_0 I (t - t_c)^+}{2\pi |t - t_c|^2}$$

nel caso di corrente uscente ed entrante nel piano rispettivamente. Queste scritte sono un modo sintetico e comodo, dal punto di vista della programmazione MATLAB, per esprimere in forma vettoriale l'induzione magnetica nel piano  $t$ ; se infine si assume che la corrente sia *positiva* quando *uscende* dal piano, tenendo conto della (B.8) è possibile esprimere il campo utilizzando solamente la prima delle (B.9): ciò corrisponde fisicamente al fatto che due correnti di uguale intensità ma di verso opposto generano in un punto due campi della stessa intensità e della stessa direzione, ma di verso opposto.

## Il metodo delle immagini

Il metodo delle immagini, quando applicabile, offre una soluzione veloce ai problemi di campo, eliminando la necessità di risolvere equazioni di Laplace o di Poisson. Il metodo consiste sostanzialmente nel sostituire gli effetti del contorno su un certo campo distribuendo in modo opportuno correnti o cariche (dette immagini) *al di là* del contorno; per ogni lato di questo è ovviamente necessario un opportuno insieme di immagini.

Consideriamo inizialmente un filo conduttore percorso da una corrente  $I$ , posto in un punto  $t_c$  in un mezzo di permittività  $\mu_1$ , ad una distanza  $d$  da un contorno piano ed infinito di permittività  $\mu_2$ ; si sostituisca ora, per il metodo delle immagini, il contorno con una



corrente di intensità  $(\mu_2 - \mu_1)/(\mu_2 + \mu_1)I$  ad una distanza  $d$  oltre il bordo, come in figura B.2: l'induzione magnetica in un punto  $t$  generico nel mezzo di permittività  $\mu_1$  si scrive:

$$\vec{B}(t) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \frac{(t - t_c)^\bullet}{|t - t_c|^2} + \frac{(\mu_2 - \mu_1)}{(\mu_2 + \mu_1)} \frac{(t - \bar{t}_c)^\bullet}{|t - \bar{t}_c|^2} \right]$$

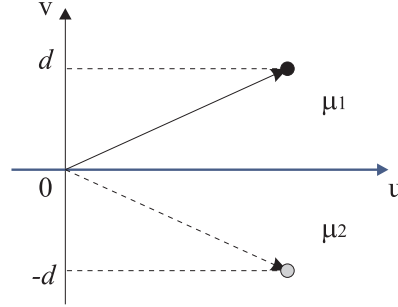


Figura B.2: il metodo delle immagini per una superficie piana

Per una struttura come quella rappresentata in figura B.3 sono necessarie infinite immagini, essendo due lati del contorno affacciati tra di loro. Supponendo che su questi due lati

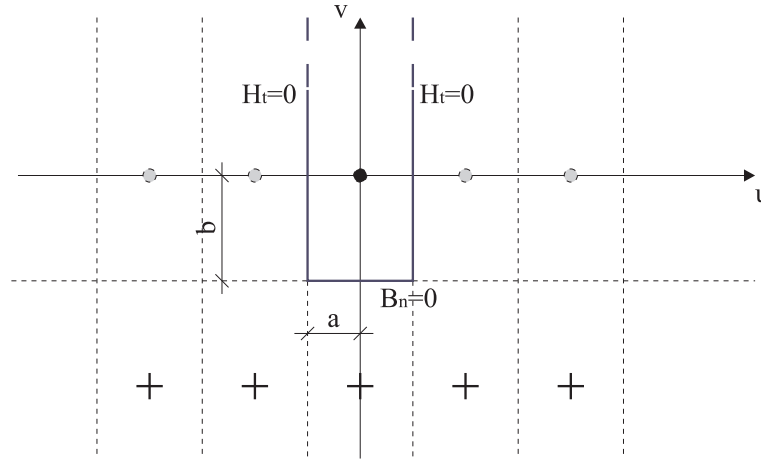


Figura B.3: il metodo delle immagini per una cava semiinfinita

valga la condizione  $H_t = 0$ , mentre per il lato in basso la  $B_n = 0$ , le correnti immagine hanno il verso e la disposizione indicati in figura, e l'induzione vale in ogni punto interno alla cava infinita:

$$B_u(t) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{-v}{[(2ma + u)^2 + v^2]} + \frac{2b + v}{[(2ma + u)^2 + (2b + v)^2]} \right]$$

$$B_v(t) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{2ma + u}{[(2ma + u)^2 + v^2]} + \frac{-(2ma + u)}{[(2ma + u)^2 + (2b + v)^2]} \right]$$

ovvero, sfruttando le funzioni (B.7) introdotte nel paragrafo precedente:

$$\vec{B}(t) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{(t - 2ma)^\bullet}{|t - 2ma|^2} + \frac{(t - (2ma - j2b))^+}{|t - (2ma - j2b)|^2} \right]$$

ove tutti i termini multipli di  $m$  tengono conto della "traslazione" delle immagini rispetto al punto origine degli assi dove è posta la corrente che genera il campo.

Un ulteriore caso da considerare, importante per lo sviluppo degli argomenti dell'ultimo capitolo, è quello di una cavità rettangolare con un contorno infinitamente permeabile alle linee di campo ( $\mu = \infty$ ), rappresentata in figura B.4. Posto:

$$p = 2ma + j2mb$$

l'induzione generata da una corrente  $I$ , situata nel punto  $t_c$ , in un qualunque punto  $t$  interno alla cavità risulta:

$$\vec{B}(t) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{(t - (t_c + p))^{\bullet}}{|t - (t_c + p)|^2} + \frac{(t - (-t_c + p))^{\bullet}}{|t - (-t_c + p)|^2} + \frac{(t - (\bar{t}_c + p))^{\bullet}}{|t - (\bar{t}_c + p)|^2} + \frac{(t - (-\bar{t}_c + p))^{\bullet}}{|t - (-\bar{t}_c + p)|^2} \right]$$

I segni algebrici dell'espressione non sono stati semplificati per renderne più agevole la comprensione: in sostanza è la somma (infinita) dei contributi della corrente nel punto  $t_c$  e delle sue immagini in  $-t_c$ ,  $\bar{t}_c$  e  $-\bar{t}_c$  (punti indicati in figura B.4 dai rispettivi vettori), traslate della quantità  $p$  al variare di  $m$ .

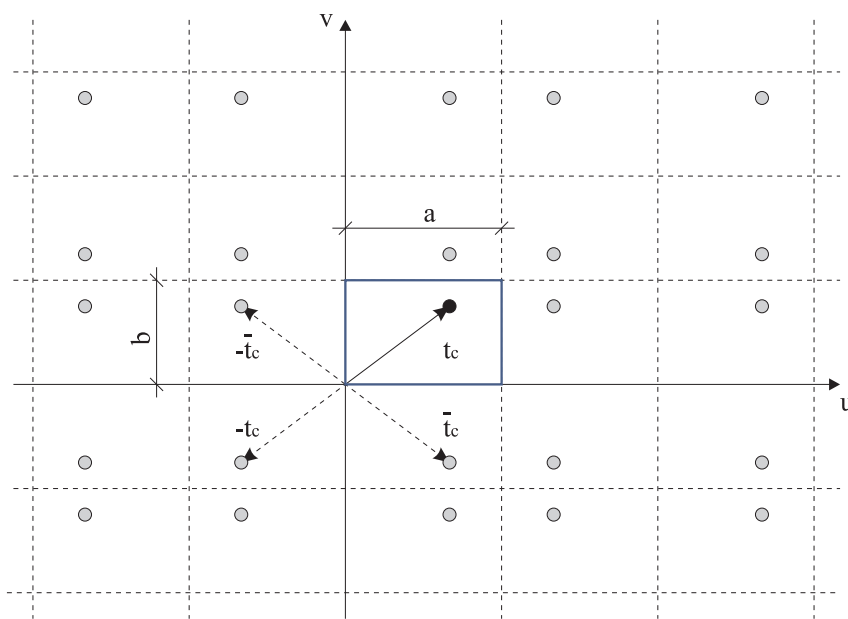


Figura B.4: il metodo delle immagini per una cavità rettangolare

# Appendice C

## Codici MATLAB

- Codici del Capitolo 3

file:	condens.m
descrizione:	ottimazione del campo $\vec{E}$ del condensatore
richiama:	funzerr.m, pltparam.m
è richiamato da:	-

```
%numero di punti per la valutazione del campo;
%parametri del sistema
%-----
global Nx;          Nx=40;
global Ny;          Ny=5;
options=foptions;
options(1)=1;
options(3)=1e-6;
options(14)=1000;
posiz_iniz=[.75,.75]
stepx=.05;
stepy=.05;
xfield=0:stepx:2; %punti in cui valutare il modulo di E
yfield=0:stepy:.25;
disp(' ');
disp(' ');
%allocazione delle variabili per il calcolo
%-----
global tpoint;      tpoint=zeros(Ny,Nx);
global zpoint;      zpoint=zeros(Ny,Nx);
global idpoint;     idpoint=zeros(Ny,Nx);
```

```

global materr;      materr=zeros(Ny,Nx);
global temp_real;  temp_real=zeros(Ny,Nx);
global temp_imag;  temp_imag=zeros(Ny,Nx);
global w;          w=zeros(1,9);
global beta;       beta=zeros(1,9);
global z;          z=zeros(1,9);
global err_iniz;
global err_flag;
global sum_id;
global flag;
%calcolo il reticolo ideale idpoint
%-----
[x_id,y_id]=meshgrid(linspace(0,2,Nx),linspace(.25,0,Ny));
idpoint=x_id+i*y_id;
%calcolo la somma dei quadrati delle coordinate x ed y
%dei punti ideali (denominatore della funzione d'errore 1)
%-----
sum_id=0;
for m=1:Ny
sum_id=sum_id+Nx*imag(idpoint(m,1))^2;
end;
for n=1:Nx
sum_id=sum_id+Ny*real(idpoint(1,n))^2;
end;
%visualizzazione del punto di partenza
%-----
[w,beta,z,c,qdat,px,py]=pltparam(posiz_iniz,xfield,yfield,stepx,stepy);
figure;
subplot(3,2,1);
stplot(w,beta,z,c), title('Configurazione di partenza');
hold on;
plot([0,2],[.25,.25],'r--');
plot([0,0],[0,.25],'r--');
plot([2,2],[0,.25],'r--');
subplot(3,2,2);
axis([0,2,0,.25,-.25,.15]);
hold on;
surfc(xfield,yfield,sqrt((px.^2)+(py.^2))-1);
colormap('cool'), brighten(.6), grid on;
%OTTIMIZZAZIONE e visualizzazione dei risultati
%-----
flag=1;
disp('* Ottimizzazione con funzione obiettivo 1 *');
disp('-----');
disp(' ');
err_flag=1;
tic;
posiz=fminu('funzerr',posiz_iniz,options)
toc

```

```

err=funzerr(posiz);
miglioramento=(err_iniz-err)/err
[w,beta,z,c,qdat,px,py]=pltparam(posiz,xfield,yfield,stepx,stepy);
subplot(3,2,3);
stplot(w,beta,z,c), title('Soluzione ottima con funzione obiettivo 1');
hold on;
plot([0,2],[.25,.25],'r--');
plot([0,0],[0,.25],'r--');
plot([2,2],[0,.25],'r--');
subplot(3,2,4);
axis([0,2,0,.25,-.25,.15]);
hold on;
surfc(xfield,yfield,sqrt((px.^2)+(py.^2))-1);
colormap('cool'), brighten(.6), grid on;
disp(' ');
disp(' ');
flag=2;
disp('* Ottimizzazione con funzione obiettivo 2 *');
disp('-----');
disp(' ');
err_flag=1;
tic;
posiz=fminu('funzerr',posiz_iniz,options)
toc
err=funzerr(posiz);
miglioramento=(err_iniz-err)/err
[w,beta,z,c,qdat,px,py]=pltparam(posiz,xfield,yfield,stepx,stepy);
subplot(3,2,5);
stplot(w,beta,z,c), title('Soluzione ottima con funzione obiettivo 2');
hold on;
plot([0,2],[.25,.25],'r--');
plot([0,0],[0,.25],'r--');
plot([2,2],[0,.25],'r--');
subplot(3,2,6);
axis([0,2,0,.25,-.25,.15]);
hold on;
surfc(xfield,yfield,sqrt((px.^2)+(py.^2))-1);
colormap('cool'), brighten(.6), grid on;

```

file:	funzerr.m
descrizione:	valutazione delle funzioni obiettivo
richiama:	-
è richiamato da:	condens.m

```

function err=funzerr(posiz);
global Ny;

```

```

global Nx;
global Npunti;
global tpoint;
global zpoint;
global idpoint;
global materr;
global temp_real;
global temp_imag;
global w;
global beta;
global z;
global err_iniz;
global err_flag;
global sum_id;
global flag;
%non scendo sotto 0.25; se l'ottimizzatore ci prova ritorno
%un valore grande per allontanarlo da questi valori
%-----
if (posiz(1)<.25) | (posiz(2)<.25)
err=100;
else
%imposto il dominio fisico
%-----
w(1)=2+posiz(2)*i;
w(2)=1+posiz(1)*i;
w(3)=.75i;
w(4)=inf;
w(5)=0;
w(6)=2;
w(7)=inf;
w(8)=w(3);
w(9)=w(2);
alfa1=atan(.75-posiz(1));
alfa2=atan(posiz(1)-posiz(2))-alfa1;
alfa1=alfa1/pi;
alfa2=alfa2/pi;
beta=[1;-alfa2;-alfa1;-1;0;0;-2;alfa1;alfa2];
%SC parameter problem
%-----
[z,c,qdat]=stparam(w,beta,[4,7]);
%calcolo del reticolo tpoint da trasformare
%-----
[x,y]=meshgrid(linspace(z(5),z(6),Nx),linspace(1/3,0,Ny));
tpoint=x+i*y;
%calcolo delle immagini nel piano z e costruzione del
%reticolo reale zpoint
%-----
for m=1:Ny
zpoint(m,:)=stmap(tpoint(m,:),w,beta,z,c,qdat);

```

```

end;
%calcolo dell'errore
%-----
if flag==1
err=0;
temp_real=real(idpoint-zpoint).^2;
temp_imag=imag(idpoint-zpoint).^2;
materr=temp_real+temp_imag;
for m=1:Ny
for n=1:Nx
err=err+materr(m,n);
end;
end;
err=sqrt(err/sum_id);
if err_flag==1
err_iniz=err;
err_flag=0;
end;
elseif flag==2
materr=abs(idpoint-zpoint);
err=max(max(materr));
if err_flag==1
err_iniz=err;
err_flag=0;
end;
end;
end;

```

file:	pltparam.m
descrizione:	valutazione dei parametri per la visualizzazione dei dati
richiama:	-
è richiamato da:	condens.m

```

function [w,beta,z,c,qdat,px,py]=pltparam(posiz,xfield,yfield,stepx,stepy)
global w;
global beta;
w(1)=2+posiz(2)*i;
w(2)=1+posiz(1)*i;
w(3)=.75i;
w(4)=inf;
w(5)=0;
w(6)=2;
w(7)=inf;
w(8)=w(3);
w(9)=w(2);
alfa1=atan(.75-posiz(1));

```

```

alfa2=atan(posiz(1)-posiz(2))-alfa1;
alfa1=alfa1/pi;
alfa2=alfa2/pi;
beta=[1;-alfa2;-alfa1;-1;0;0;-2;alfa1;alfa2];
%SC parameter problem
%-----
[z,c,qdat]=stparam(w,beta,[4,7]);
%reticolo nella regione controllata e sua controimmagine
%-----
[x,y]=meshgrid(xfield,yfield);
zpoint=x+i*y;
tpoint=zeros(size(zpoint));
for m=1:length(yfield)
tpoint(m,:)=stinvmap(zpoint(m,:),w,beta,z,c,qdat);
end;
%componenti del gradiente numerico, cioe' del campo E;
%non importa se i segni sono sbagliati, poi devo farne
%il modulo.
%-----
potenz=0.75*((imag(tpoint))'');
[px,py]=gradient(potenz,stepx,stepy);

```

file:	maperr.m
descrizione:	traccia le superfici d'errore delle funzioni obiettivo
richiama:	-
è richiamato da:	-

```

%numero di linee equipotenziali e di campo;
%parametri del sistema
%-----
Nx=40;
Ny=5;
minposiz1=.25;    %range di variazione delle ordinate
deltaposiz1=.1;  %passo di variazione
maxposiz1=2.25;
minposiz2=.25;
deltaposiz2=.1;
maxposiz2=2.25;
%allocazione delle variabili per il calcolo
%-----
tpoint=zeros(Ny,Nx);
zpoint=zeros(Ny,Nx);
materr=zeros(Ny,Nx);
temp_real=zeros(Ny,Nx);
temp_imag=zeros(Ny,Nx);
w=zeros(1,9);

```



```

beta=zeros(1,9);
z=zeros(1,9);
posiz1=minposiz1:deltaposiz1:maxposiz1;
posiz2=minposiz2:deltaposiz2:maxposiz2;
Niter1=length(posiz1);
Niter2=length(posiz2);
errore1=zeros(Niter1,Niter2);
errore2=zeros(Niter1,Niter2);
%calcolo il reticolo ideale idpoint
%-----
[x,y]=meshgrid(linspace(0,2,Nx),linspace(.25,0,Ny));
idpoint=x+i*y;
%calcolo la somma dei quadrati delle coordinate x ed y
%dei punti ideali (denominatore della funzione d'errore 1)
%-----
sum_id=0;
for m=1:Ny
sum_id=sum_id+Nx*imag(idpoint(m,1))^2;
end;
for n=1:Nx
sum_id=sum_id+Ny*real(idpoint(1,n))^2;
end;
%visualizzo il numero di casi da considerare
%-----
disp(num2str(Niter1*Niter2));
counter=1;
%cicli su posiz1, posiz2
%-----
for r=1:Niter1
for l=1:Niter2
disp(num2str(counter));
%imposto il dominio fisico
%-----
w(1)=2+posiz2(l)*i;
w(2)=1+posiz1(r)*i;
w(3)=.75i;
w(4)=inf;
w(5)=0;
w(6)=2;
w(7)=inf;
w(8)=w(3);
w(9)=w(2);
alfa1=atan(.75-posiz1(r));
alfa2=atan(posiz1(r)-posiz2(l))-alfa1;
alfa1=alfa1/pi;
alfa2=alfa2/pi;
beta=[1;-alfa2;-alfa1;-1;0;0;-2;alfa1;alfa2];
%SC parameter problem
%-----

```

```
[z,c,qdat]=stparam(w,beta,[4,7]);
%calcolo del reticolo tpoint da trasformare
%-----
[x,y]=meshgrid(linspace(z(5),z(6),Nx),linspace(1/3,0,Ny));
tpoint=x+i*y;
%calcolo delle immagini nel piano z e costruzione del
%reticolo reale zpoint
%-----
for m=1:Ny
zpoint(m,:)=stmap(tpoint(m,:),w,beta,z,c,qdat);
end;
%calcolo dell'errore 1
%-----
err=0;
temp_real=real(idpoint-zpoint).^2;
temp_imag=imag(idpoint-zpoint).^2;
materr=temp_real+temp_imag;
for m=1:Ny
for n=1:Nx
err=err+materr(m,n);
end;
end;
errore1(r,1)=sqrt(err/sum-id);
%calcolo dell'errore 2
%-----
materr=abs(idpoint-zpoint);
errore2(r,1)=max(max(materr));
counter=counter+1;
end;
end;
%visualizzo il risultato
%-----
figure;
subplot(1,2,1);
colormap('cool');
brighten(.6);
surf(posiz2,posiz1,errore1);
xlabel('posiz2');
ylabel('posiz1');
zlabel('funzione errore 1');
view(-37.5,10), grid;
subplot(1,2,2);
colormap('cool');
brighten(.6);
surf(posiz2,posiz1,errore1);
xlabel('posiz2');
ylabel('posiz1');
zlabel('funzione errore 1');
view(-37.5,70), grid;
```

```

figure;
colormap('cool');
contour(posiz2,posiz1,errore1,15);
grid;
xlabel('posiz2');
ylabel('posiz1');
figure;
subplot(1,2,1);
colormap('cool');
brighten(.6);
surf(posiz2,posiz1,errore2);
xlabel('posiz2');
ylabel('posiz1');
zlabel('funzione errore 2');
view(-37.5,10), grid;
subplot(1,2,2);
colormap('cool');
brighten(.6);
surf(posiz2,posiz1,errore2);
xlabel('posiz2');
ylabel('posiz1');
zlabel('funzione errore 2');
view(-37.5,70), grid;
figure;
colormap('cool');
contour(posiz2,posiz1,errore2,15);
grid;
xlabel('posiz2');
ylabel('posiz1');

```

file:	rogow.m
descrizione:	traccia il campo ed il potenziale complesso per l'elettrodo di Rogowski nei piani $t$ e $z$
richiama:	lnspace.m
è richiamato da:	-

```

%numero di linee equipotenziali e di campo;
%parametri del sistema
%-----
Ntheta=12; Nrho=10;
tpoint=zeros(Ntheta,Nrho);
deltaV=1;
%imposto il dominio fisico
%-----
w=[-1+i;i;Inf;0;Inf];
beta=[0;1;-1;0;-2];

```

```

%SC parameter problem
%-----
[z,c,qdat]=hpparam(w,beta);
hpdisp(w,beta,z,c);
theta=linspace(0,pi,Ntheta);
rho=linspace(-8,0,Nrho)*(z(3)-z(1));
% calcolo dei punti da mappare nel piano t
%-----
for m=1:Ntheta
for n=1:Nrho
tpoint(m,n)=rho(n)*(cos(theta(m))+i*sin(theta(m)));
end
end
%calcolo del potenziale complesso nei punti da mappare
%-----
wpoint=(deltaV/pi)*log(tpoint);
%calcolo delle immagini nel piano z
%-----
for m=1:Ntheta
zpoint(m,:)=hpmmap(tpoint(m,:)+z(3),w,beta,z,c,qdat);
end;
%visualizzo il risultato:  piano t
%-----
figure(1);
subplot(1,2,1), title('linee di flusso e di potenziale nel piano t');
axis([-2,2,-1,3]);
hold on;
axis('square');
plot(tpoint,'g-');
plot(conj(tpoint'),'g-');
plot([-2,2],[0,0],'b-'); grid;
%visualizzo il risultato:  piano z
%-----
subplot(1,2,2), title('linee di flusso e di potenziale nel piano z');
axis([-1.5,3.5,-.5,3.5]);
hold on;
axis('square');
plot(zpoint,'g-');
plot(conj(zpoint'),'g-');
plotpoly(w,beta), grid;
%visualizzo il risultato:  potenziale w nel piano t
%-----
figure(2);
subplot(2,2,1);figure(2);
colormap(cool);
surf(real(tpoint),imag(tpoint),real(wpoint));
brighten(.6);
title('flusso nel piano t');
axis('image');

```

```

axis('square');
subplot(2,2,2);
colormap(cool);
surf(real(tpoint),imag(tpoint),imag(wpoint));
brighten(.6);
title('potenziale nel piano t');
axis('image');
axis('square');
%visualizzo il risultato:  potenziale w nel piano z
%-----
subplot(2,2,3);
colormap(cool);
surf(real(zpoint),imag(zpoint),real(wpoint));
brighten(.6);
title('flusso nel piano z');
axis('image');
axis('square');
subplot(2,2,4);
colormap(cool);
surf(real(zpoint),imag(zpoint),imag(wpoint));
brighten(.6);
title('potenziale nel piano z');
axis('image');
axis('square');

```

file:	lnspace.m
descrizione:	vettore di numeri a distanza logaritmica
richiama:	-
è richiamato da:	rogow.m

```

function y = linspace(d1, d2, n)
if nargin == 2
n = 50;
end
if d2 == pi
d2 = log(pi);
end y = exp([d1+(0:n-2)*(d2-d1)/(n-1), d2]);

```

## • Codici del Capitolo 5

file:	rett.m
descrizione:	analisi della cava rettangolare
richiama:	campob.m
è richiamato da:	-

```

%carico i dati da QuickField
%-----
FID=fopen('qfb.dat','r');
B=fscanf(FID,'FID=fopen('qfw.dat','r');
W=fscanf(FID,'for m=1:50
for n=1:10
qfabsBt(n,m)=B(10*(m-1)+n);
qfE(n,m)=W(10*(m-1)+n);
end;
end;
qfEtot=.060612;
%geometria e dati del problema
%-----
mu0=4*pi*1e-7;
mu1=1;
mu2=10000;
h=.5*1e-3;
Hc=282000;
Br=.4;
mur=Br/(mu0*Hc);
NIeq=Hc*h;
a=5*1e-3;
b=1*1e-3;
S=(.1*1e-3)^2;
tc=[.5+.25*i,4.5+.25*i]*1e-3;
I=NIeq*[1,-1];
%costruzione del reticolo di punti nel piano z
%-----
unode=.05*1e-3:.1*1e-3:a-.05*1e-3;
vnode=.05*1e-3:.1*1e-3:b-.05*1e-3;
[u,v]=meshgrid(unode,vnode);
t=u+v*i;
Bt=zeros(size(t));
Br=zeros(size(t));
tic;
p=polygon([0,a,a+i*b,i*b]);
disp('HPMAP - calcolo la f...');
f=hplmap(p);
disp('HPMAP - calcolo le controimmagini dei punti per l''energia...');

```

```

r=evalinv(f,t);
disp('HPMAP - calcolo le controimmagini dei punti di corrente...');
rc=evalinv(f,tc);
disp('HPMAP - calcolo la derivata della f nei punti per l''energia...');
dr=evaldiff(f,r);
disp('HPMAP - calcolo il campo Br nei punti per l''energia...');
for n=1:length(tc)
Br=Br+(mu0*I(n))/(2*pi)*(pu(r-rc(n))./abs(r-rc(n)).^2
+(mu2-mu1)/(mu1+mu2)*pu(r-conj(rc(n)))./abs(r-conj(rc(n))).^2);
end;
absBt=abs(Br)./abs(dr);
E1=(absBt.^2)/(2*mu0);
E1tot=sum(sum(E1))*S;
t1=toc;
disp(strcat('HPMAP - energia totale: ',num2str(E1tot),' J/m'));
disp(strcat('HPMAP - errore: ',num2str((E1tot-qpEtot)/qpEtot),' %'));
disp(strcat('HPMAP - tempo impiegato: ',num2str(t1),' s'));
m=25;
tic;
disp('IMMAGINI - calcolo il campo Br nei punti per l''energia...');
for n=1:length(tc)
Bt=Bt+campob(tc(n),t,m,a,b,I(n));
end;
E2=(abs(Bt).^2)/(2*mu0);
E2tot=sum(sum(E2))*S;
t2=toc;
disp(strcat('IMMAGINI - energia totale: ',num2str(E2tot),' J/m'));
disp(strcat('IMMAGINI - errore: ',num2str((E2tot-qpEtot)/qpEtot),' %'));
disp(strcat('IMMAGINI - tempo impiegato: ',num2str(t2),' s'));
%visualizzo i risultati
%-----
figure;
subplot(2,2,1);
surf(u,v,qpE), title('QF - densita'' di energia magnetica');
shading('flat');
xlabel('u (m)'), ylabel('v (m)'), zlabel('e (J/(m3))');
subplot(2,2,2);
surf(u,v,E1), title('HPMAP - densita'' di energia magnetica');
shading('flat');
xlabel('u (m)'), ylabel('v (m)'), zlabel('e (J/(m3))');
subplot(2,2,3);
surf(u,v,E1-qpE), title('Differenza');
shading('flat');
xlabel('u (m)'), ylabel('v (m)'), zlabel('e (J/(m3))');
subplot(2,2,4);
surf(u,v,(E1-qpE)./qpE), title('Differenza percentuale');
shading('flat');
xlabel('u (m)'), ylabel('v (m)'), zlabel('
figure;

```

```

subplot(2,2,1);
surf(u,v,qfE), title('QF - densita'' di energia magnetica');
shading('flat');
xlabel('u (m)'), ylabel('v (m)'), zlabel('e (J/(m3))');
subplot(2,2,2);
surf(u,v,E2), title('IMMAGINI - densita'' di energia magnetica');
shading('flat');
xlabel('u (m)'), ylabel('v (m)'), zlabel('e (J/(m3))');
subplot(2,2,3);
surf(u,v,E2-qfE), title('Differenza');
shading('flat');
xlabel('u (m)'), ylabel('v (m)'), zlabel('e (J/(m3))');
subplot(2,2,4);
surf(u,v,(E2-qfE)./qfE), title('Differenza percentuale');
shading('flat');
xlabel('u (m)'), ylabel('v (m)'), zlabel('
figure;
subplot(2,1,1);
plot(vnode,qfabsBt(:,length(unode)/2),'ko-',vnode,absBt(:,length(unode)/2),
    'ro-',vnode,abs(Bt(:,length(unode)/2)),'bo-');
grid, title('Intensita'' dell''induzione al centro (m=25)');
legend('QF','HPMAP','Immagini');
xlabel('v (m)'), ylabel('|B| (T)');
subplot(2,1,2);
plot(vnode,qfE(:,length(unode)/2),'ko-',vnode,E1(:,length(unode)/2),'ro-',
    vnode,E2(:,length(unode)/2),'bo-');
grid, title('Densita'' di energia al centro');
legend('QF','HPMAP','Immagini');
xlabel('v (m)'), ylabel('e (J/(m3))');

```

file:	campob.m
descrizione:	calcolo dell'induzione con il metodo delle immagini
richiama:	pu.m
è richiamato da:	rett.m

```

function B=campob(tc,t,m,a,b,I)
mu0=4*pi*1e-7;
B=zeros(size(t));
for l=(-m+1):m
for k=(-m+1):m
p=2*k*a+2*l*b*i;
B1=pu(t-tc-p)./(abs(t-tc-p).^2);
B2=pu(t-conj(tc)-p)./(abs(t-conj(tc)-p).^2);
B3=pu(t+tc-p)./(abs(t+tc-p).^2);
B4=pu(t+conj(tc)-p)./(abs(t+conj(tc)-p).^2);
B=B+mu0*I/(2*pi)*(B1+B2+B3+B4);

```



```

end;
end;
l=-m;
for k=(-m+1):m
p=2*k*a+2*l*b*i;
B1=pu(t-tc-p)./(abs(t-tc-p).^2);
B2=pu(t+conj(tc)-p)./(abs(t+conj(tc)-p).^2);
B=B+mu0*I/(2*pi)*(B1+B2);
end;
k=-m;
for l=(-m+1):m
p=2*k*a+2*l*b*i;
B1=pu(t-tc-p)./(abs(t-tc-p).^2);
B2=pu(t-conj(tc)-p)./(abs(t-conj(tc)-p).^2);
B=B+mu0*I/(2*pi)*(B1+B2);
end;
p=2*(-m)*a+2*(-m)*b*i;
B=B+mu0*I/(2*pi)*pu(t-tc-p)./(abs(t-tc-p).^2);

```

file:	liscio.m
descrizione:	coppia d'impuntamento per il dente liscio
richiama:	geom.m, pu.m
è richiamato da:	-

```

%dati del problema
%-----
t=.6*1e-3; %traferro meccanico
global h; h=6*1e-3; %altezza del magnete
global L; L=21*1e-3; %lunghezza del motore
global T; T=t+h; %traferro magnetico
global ld; ld=2.2*1e-3; %lunghezza di una scanalatura (elemento base)
global H; H=6*1e-3; %altezza dell'espansione polare
Hc=282000; %campo coercitivo del magnete
Br=.4; %residuo
mu0=4*pi*1e-7;
NIeq=Hc*h;
N=16; %spire che modellizzano il magnete
Dtheta=(3.75/2)*pi/180; %passo angolare per la coppia di cogging
theta=0:Dtheta:(30*pi/180);
%calcolo e posizione le correnti che modellizzano il magnete
%-----
hc=linspace(h/(2*N),h-h/(2*N),N);
zc1=ld*ones(1,N)+hc*i;
zc2=(15*ld)*ones(1,N)+hc*i;
zc=cat(2,zc1,zc2);
I1=ones(1,N);

```

```

I2=-ones(1,N);
I=N*Ieq/N*cat(2,I1,I2);
%costruisco il reticolo zpoint ed i punti zB sulla linea
%mediana del traferro dove rilevo l'induzione (piano z)
%-----
xnode=ld/8:ld/4:(16*ld)-ld/8;
ynode=.05*T/2:.05*T:1.4*T-.05*T/2;
S=(ld/4)*(.05*T);
[x,y]=meshgrid(xnode,ynode);
zpoint=x+i*y;
zB=xnode+(h+t/2)*i;
for n=1:9
%prendo una geometria e vedo quali sono i punti che cadono in essa
%-----
wz=geom(n);
pz=polygon(wz);
mask=abs(isinpoly(zpoint,wz,1e-8));
z=zpoint.*mask+zpoint(10,10)*(~mask);
%mappa rettificata
%-----
fz=crrectmap(pz);
t=evalinv(fz,z);
tc=evalinv(fz,zc);
dt=evaldiff(fz,t);
if(n==1 | n==9)
tB=evalinv(fz,zB);
dtB=evaldiff(fz,tB);
end;
%costruisco il rettangolo nel piano t
%-----
vertexpt=prevertex(fz);
a=max(real(vertexpt));
b=max(imag(vertexpt));
rapp=a/b
wt=[a,a+i*b,i*b,0];
pt=polygon(wt);
%mappa dal semipiano
%-----
ft=hplmap(pt);
display(ft);
r=evalinv(ft,t);
rc=evalinv(ft,tc);
dr=evaldiff(ft,r);
if(n==1 | n==9)
rB=evalinv(ft,tB);
drB=evaldiff(ft,rB);
end;
%calcolo dell'induzione nel piano r
%-----

```

```

Br=zeros(size(r));
BrB=zeros(size(rB));
for m=1:length(rc)
Br=Br+(mu0*I(m))/(2*pi)*(pu(r-rc(m))./abs(r-rc(m)).^2
    +pu(r-conj(rc(m)))./abs(r-conj(rc(m))).^2);
if(n==1 | n==9)
BrB=BrB+(mu0*I(m))/(2*pi)*(pu(rB-rc(m))./abs(rB-rc(m)).^2
    +pu(rB-conj(rc(m)))./abs(rB-conj(rc(m))).^2);
end;
end;
Br=Br.*mask;
%calcolo l'energia Etot nel piano z
%-----
absBz=abs(Br)./(abs(dr).*abs(dt));
E=(absBz.^2)/(2*mu0);
Etot(n)=sum(sum(E))*S;
if(n==1 | n==9)
absBzB=abs(BrB)./(abs(drB).*abs(dtB));
figure(1);
subplot(2,1,mod(n,7));
plot(xnode,absBzB,'b-'), grid;
xlabel('m'), ylabel('T');
figure(2);
subplot(2,1,mod(n,7));
surf(x,y,E-1e4*( mask)); view(0,90), shading('flat');
axis('equal'), xlabel('m'), ylabel('m');
end;
end;
%calcolo della coppia di cogging
%-----
for n=1:8
Etot(9+n)=Etot(9-n);
end;
for n=1:(length(Etot)-1)
C(n)=(Etot(n+1)-Etot(n))/Dtheta;
end;
C(n+1)=(Etot(2)-Etot(1))/Dtheta;
%visualizzo i risultati
%-----
figure;
subplot(2,1,1);
plot(theta,6*L*Etot,'bo-'), xlabel('theta (rad)'),
    ylabel('Energia totale (J)'), grid;
subplot(2,1,2); plot(theta+Dtheta/2,6*L*C,'bo-'), xlabel('theta (rad)'),
    ylabel('Coppia (Nm)'), grid;

```

file:	<code>denti.m</code>
descrizione:	coppia d'impuntamento per il dente scanalato
richiama:	<code>geom.m</code> , <code>pu.m</code>
è richiamato da:	-

Il codice è esattamente lo stesso contenuto in `liscio.m`, con l'aggiunta della seguente linea nella dichiarazione dei dati del problema:

```
global s;    s=.7*1e-3;        %altezza di una scanalatura
```

file:	<code>geom.m</code>
descrizione:	geometrie per dente liscio o scanalato
richiama:	-
è richiamato da:	<code>liscio.m</code> o <code>denti.m</code>

Esistono due versioni per `geom.m`, una per il dente liscio ed una per il dente scanalato. Essendo però due files che contengono solamente i vettori di punti che definiscono le geometrie, sono di scarso interesse e non vengono qui riportati.

file:	<code>pu.m</code>
descrizione:	calcolo della funzione $(.)^\bullet$ descritta in Appendice B
richiama:	-
è richiamato da:	<code>liscio.m</code> , <code>denti.m</code>

```
function T = pu(t)
T=-imag(t)+i*real(t);
```

# Bibliografia

- [1] P. DI BARBA, K. PAWLUK, M. RUDNICKI, A. SAVINI. Optimal Shape Synthesis of Electric Devices using the Boundary Element Method. *Computational Modelling of Free and Moving Boundary Problems*, 2 Heat Transfer:270–279, 1991.
- [2] K. J. BINNS, P. J. LAWRENSEN. *Electric and Magnetic Field Problems*. Pergamon Press, Oxford, 1973.
- [3] L. BONOMETTI. Interno del Motore Brushless. *Elettificazione 10-97*, pages 93–103, 1997.
- [4] A. BRIAN, M. BREINER. *MATLAB for Engineers*. Addison-Wesley, 1996.
- [5] C. CITRINI. *Analisi Matematica 2*. Bollati Boringhieri, Torino, 1992.
- [6] T. A. DRISCOLL. Schwarz-Christoffel Toolbox User's Guide.
- [7] T. A. DRISCOLL. A MATLAB Toolbox for Schwarz-Christoffel Mapping. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 22:168–186, 1996.
- [8] T. A. DRISCOLL, S. A. VAVASIS. Numerical Conformal Mapping using Cross-Ratios and Delaunay Triangulation. *SIAM J. Sci. Comput.*, 19:1783–1803, 1998.
- [9] G. GILARDI. *Analisi II*. McGraw-Hill, Milano, 1992.
- [10] G. GILARDI. *Analisi III*. McGraw-Hill, Milano, 1994.
- [11] K. J. HAN, H. S. CHO, D. H. CHO, H. K. JUNG. Optimal Core Shape Design for Cogging Torque Reduction of BLDC Motor Using Genetic Algorithm. *COMPUMAG*, 1999.
- [12] K. HAZUMI, H. YOKOYAMA, Y. SHINODA, S. SAKABO. Effect of groove of teeth on cogging torque of three-phase permanent magnet motor. *Proceedings of 1990 International Power Electronic Conference*, pages 927–932, 1990.
- [13] The MathWorks. *MATLAB Compiler User's Guide*. The MathWorks, Inc., 1998.
- [14] C. MENCUCCINI, V. SILVESTRINI. *Fisica II*. Liguori Editore, Napoli, 1995.
- [15] P. NAVARRA, P. DI BARBA, A. SAVINI, M. RIZZO. Procedimento numerico per il calcolo della coppia di riluttanza in una macchina in corrente continua. *Atti VII Riunione Annuale dei Ricercatori del Gruppo di Coordinamento di Elettrotecnica*, 1991.
- [16] L. N. TREFETHEN, T. A. DRISCOLL. Schwarz-Christoffel Mapping in the Computer Era. *DOCUMENTA MATHEMATICA*, Extra Volume ICM 1998 - III:533–542, 1998.

# Risorse Web

Presso i seguenti indirizzi Internet è possibile trovare, al momento in cui scriviamo, documenti e materiale citati ed utilizzati nei vari capitoli.

La pagina del PhD Tobin A. Driscoll:

<http://amath-www.colorado.edu/appm/faculty/tad>

L'SC-Toolbox nelle sue varie versioni:

<http://amath-www.colorado.edu/appm/faculty/tad/SC-toolbox>

Articoli e recensioni:

<http://amath-www.colorado.edu/appm/faculty/tad/research>

oppure presso il sito dei DOCUMENTA MATHEMATICA:

<http://www.mathematic.uni-bielefeld.de/documenta/xvol-icm/15/Trefethen.MAN.html>