BOLLE DI SAPONE

Margherita Biffi
Classe 5^A
PACLE A. Manzoni
a.s. 2003/2004

INDICE

“Una bolla di sapone è la cosa più bella, e la più elegante, che ci sia in natura... Mi chiedo quanto ci vorrebbe per comprare una bolla di sapone se al mondo ne esistesse soltanto una"

- Mark Twain -

PREMESSA

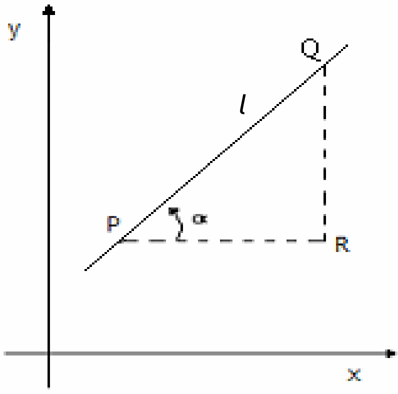
L’IDEA
Quando a ottobre presentai ai miei professori l’argomento della mia tesina rimasero attoniti, bisogna ammettere che non è un argomento abituale, di solito si cercano temi più “ordinari” per presentarsi al colloquio d’esame. Io non amo le cose “normali” per cui era necessario per me trovare un soggetto trattabile, ma allo stesso tempo un po’ stravagante; un argomento che potesse, insomma, rispecchiare il mio carattere e il mio modo di essere.
La traduzione da teorico a pratico della mia idea non è stata semplice, chi mi ha supportato (o sopportato?!) in questi mesi lo sa bene: oltre a trovare i “collegamenti interdisciplinari” era per me doveroso riuscire a creare qualcosa di semplice da seguire e che riuscisse a coinvolgere anche chi non ama la matematica e le materie scientifiche, perni di questa tesina.

L’ARGOMENTO
Le bolle di sapone sono uno degli argomenti più interessanti in molti settori della ricerca scientifica: dalla matematica alla chimica, dalla fisica alla biologia, ma non solo, anche nell’architettura e nell’arte, nel design e perfino nella pubblicità.
Un fisico britannico di fine ‘800, Charles Vernon Boys, in un suo affascinante libro sulle bolle di sapone scrisse: «ci sono più cose in una comune bolla di sapone di quante non ne sappia immaginare chi si limiti a vederla come un gioco».
Effettivamente per i matematici le bolle di sapone sono modelli di una geometria delle forme molto stabili, e per gli artisti sono il simbolo della vanità, della fragilità delle ambizioni umane, della vita stessa.
Le bolle, non solo di sapone, le troviamo ovunque: nell’industria alimentare, nella schiuma da barba, nei serbatoi delle navette spaziali, nelle plastiche, nel nostro corpo,…

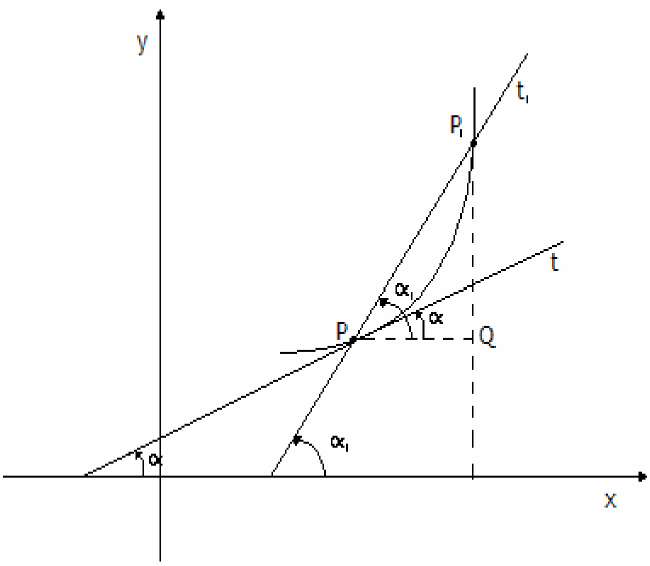
L’ESECUZIONE
Questa tesina è nata con la volontà di trattare come argomento principale un tema relativo alla matematica, materia spesso odiata dagli studenti forse perché, per così dire, è impantanata in un linguaggio di simboli estranei alla maggior parte di noi; almeno l’arte la si può vedere, anche la filosofia e la letteratura, per quanto a volte oscure, hanno se non altro il vantaggio di poter essere espresse in una lingua!
Nella stesura delle parti relative a materie come fisica, biologia, arte e architettura non ho approfondito troppo la questione, ho dato solo nozioni fondamentali, spesso usando anche termini impropri che però “rendevano meglio l’idea”, per poter almeno far intuire la complessità delle bolle (non solo di sapone) e dei principi su cui si basano, tralasciando tanti altri campi quali l’ottica, le superfici metalliche, la scienza dei materiali, la gastronomia (ebbene sì, tante prelibatezze e tante bevande hanno il loro aspetto caratteristico grazie alla schiuma!),…
La letteratura merita invece una spiegazione a sé, poiché nei miei propositi iniziali c’era l’idea di trovare autori che avessero utilizzato di frequente la metafora della bolla di sapone, poi, visto che veramente pochi scrittori hanno scelto come simbolo le bolle, mi sono chiesta quali immagini potessero suggerire le bolle di sapone, la risposta che mi sono data (con l’aiuto delle mie professoresse) è stata “leggerezza e precarietà”, per questo gli autori italiani e francesi scelti, sono autori che hanno dedicato parte delle loro opere ad una di queste due sensazioni. Per la letteratura inglese, invece, sono tornata a parlare della sfera in termini più matematici e, forse, più surreali e fantasiosi.

MINIMI & MASSIMI NELLO STUDIO DI FUNZIONE

Data una funzione è possibile calcolare le sue variazioni, questo tipo di calcolo è chiamato «differenziale» e nel suo sviluppo storico fu molto influenzato da problemi particolari di massimo e minimo.
Nel grafico di una funzione, un massimo corrisponde ad una sommità più alta di tutti gli altri punti vicini, mentre un minimo corrisponde al fondo di una valle, più basso di tutti i punti vicini.
Per definire i punti di massimo e di minimo è del tutto naturale usare la nozione di *tangente* ad una curva. Nei punti di massimo o di minimo la tangente al grafico $y = f(x)$ deve essere parallela all'asse x, poiché altrimenti la curva in questi punti salirebbe o scenderebbe.
Per caratterizzare la direzione di una retta nel piano x, y di solito si considera la sua «inclinazione» o il «coefficiente angolare».
Per calcolare tale inclinazione, si prende a piacere un punto P sulla retta l e ci si muove sulla parallela all'asse x passante per P, da sinistra verso destra, fino ad un punto qualsiasi R. Da R ci si muove poi parallelamente all'asse y, verso l'alto o verso il basso, fino a raggiungere in un certo punto Q la retta l. Bene, l'inclinazione è il rapporto $L = \dfrac{RQ}{PR}$, calcolato algebricamente esso dà l'incremento, positivo o negativo, dell'ordinata di un punto, per ogni unità di lunghezza dell'orizzontale, quando ci si muova sulla retta da sinistra verso destra.



Per «inclinazione» o «coefficiente angolare» di una *curva* in un punto P si intende l'inclinazione della tangente alla curva in P. Se si accetta la tangente ad una curva come un concetto matematico dato, rimane soltanto il problema di *trovare un procedimento per calcolare il coefficiente angolare*.
Non si può calcolare il coefficiente angolare di una curva $y = f(x)$ nel punto $P(x, y)$ considerando la curva nel solo punto P; si deve invece ricorrere ad un passaggio al limite.
Consideriamo sulla curva un altro punto P_1, prossimo a P, di coordinate x_1, y_1. Indichiamo con t_1 la retta che congiunge P a P_1; essa è una secante della curva, che si approssima alla tangente in P quando P_1 si avvicina a P. Diciamo α_1 l'angolo che va dall'asse x alla retta t_1. Se ora facciamo tendere x_1 a x, P_1 si muove lungo la curva verso P, e la posizione della secante t_1 si accosta, al limite, a quella tangente t alla curva in P. Se α indica l'angolo che va dall'asse x a t, allora per $x_1 \to x$



$$y_1 \to y, \quad P_1 \to P, \quad t_1 \to t \quad \text{e} \quad \alpha_1 \to \alpha$$

La tangente è il limite della secante, e il coefficiente angolare della tangente è il limite del coefficiente angolare della secante.

Il coefficiente angolare della secante t_1 è dato dalla formula

$$t_1 = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

ovvero, se si indica l'operazione di differenza con il simbolo Δ,

$$t_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Il coefficiente angolare della secante t_1 è un «rapporto incrementale»: la differenza Δy dei valori della funzione, divisa per la differenza Δx dei valori della variabile indipendente. Inoltre,

coefficiente angolare di *t* = limite del coefficiente angolare $t_1 = \lim \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$

dove i limiti sono calcolati per $x_1 \to x$, cioè per $x_1 - x = \Delta x \to 0$.

Il coefficiente angolare della tangente t alla curva è il limite del rapporto incrementale $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *per* Δx *tendente a zero.*

La funzione originaria $f(x)$ dava l'*altezza*, cioè l'ordinata della curva $y = f(x)$ per il valore *x*. Si può ora considerare il *coefficiente angolare* della curva, in un punto *P* di coordinate *x* e $y = f(x)$, come una nuova funzione di *x*, che indicheremo con $f'(x)$ e chiameremo *derivata* della funzione $f(x)$.

L'operazione di «derivazione» fa corrispondere ai valori di una data funzione $f(x)$ i valori di un'altra funzione $f'(x)$ secondo una legge ben determinata, esattamente come la funzione $f(x)$ è definita da una legge che associa ad ogni valore della variabile *x* il valore $f(x)$:

$f(x)$ = ordinata della curva $y = f(x)$ nel punto *x*

$f'(x)$ = coefficiente angolare della curva $y = f(x)$ nel punto *x*

Si ha perciò

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

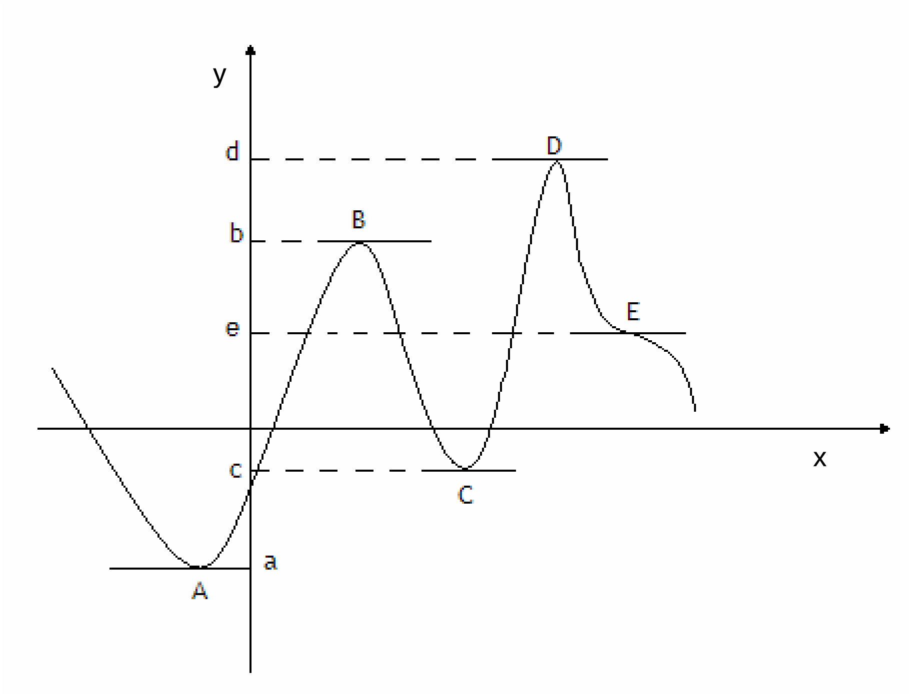
Immaginando la curva $y = f(x)$ percorsa nel verso corrispondente alle *x* crescenti, se in un punto la *derivata è positiva*, cioè se $f'(x) > 0$, la curva è *crescente*, se la *derivata è negativa*, cioè se $f'(x) < 0$, la curva è *decrescente*, mentre se $f'(x) = 0$, la curva ha in quel punto una tangente orizzontale. In un punto di massimo o di minimo il coefficiente angolare della curva deve essere 0.

Quindi, risolvendo l'equazione $f'(x) = 0$ rispetto a *x*, si possono trovare le ascisse e i punti di massimo e di minimo, come fu fatto per la prima volta da Fermat.

Per vedere cosa significhi l'annullarsi di $f'(x)$, esaminiamo una curva come quella proposta di seguito. Vi sono cinque punti, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, in cui la tangente a questa curva è orizzontale; indichiamo con *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, rispettivamente, i valori di $f(x)$ in questi punti. Il massimo di $f(x)$ nell'intervallo riprodotto è in *D*, il minimo in *A*.

Anche il punto *B* rappresenta un massimo, nel senso che per tutti gli altri punti *nelle immediate vicinanze* di *B*, $f(x)$ è minore di *b*, benché $f(x)$ sia maggiore di *b* per punti vicini a *D*. Per questo motivo *B* si dice *massimo relativo* di $f(x)$, mentre *D* è il *massimo assoluto*. Analogamente, *C* rappresenta un minimo relativo e *A* il minimo assoluto.

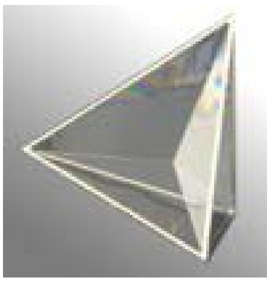
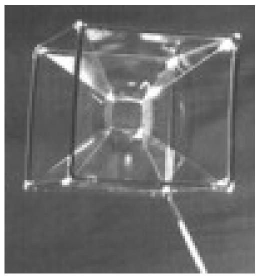
Infine, in E, $f(x)$ non ha né massimo né minimo, anche se $f^{'}(x)=0$. Da ciò segue che l'annullarsi di $f^{'}(x)$ è una condizione *necessaria* ma *non sufficiente* per la presenza di un massimo o un minimo.



J. A. F. PLATEAU & LE SUPERFICI MINIME

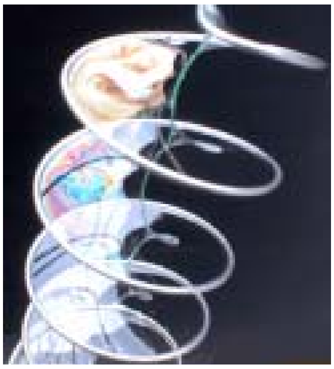
Se prendiamo una piccola bottiglia di plastica trasparente, la riempiamo a metà con acqua, aggiungiamo uno schizzo di sapone liquido e la agitiamo, otteniamo una massa di bolle, ognuna delle quali circondata da acqua insaponata.
Se si omette il sapone, quando si scuote la bottiglia le bolle si formano lo stesso, ma sono troppo instabili e si rompono nel momento in cui si smette di scuotere. Con il sapone liquido, lo "shakeraggio" produce una trasformazione radicale: il liquido si mescola sempre di più all'aria e forma un intruglio quasi immobile e…schiumoso, non c'è altra parola.
Le bolle che si formano sono impilate come arance dal fruttivendolo, ma senza il loro bell'ordine. Ognuna è una sfera circondata dal liquido che la isola dalle bolle vicine. Con il passare del tempo la situazione cambia: il liquido diminuisce, le bolle diventano più grandi e cambiano forma, al posto delle sfere, bolle adiacenti si distorcono in poliedri perfettamente incastrati tra loro.
A differenza della geometria ripetitiva dei cristalli di sale, però, la struttura schiumosa ha facce irregolari che possono avere dai tre ai nove vertici. Se ne hanno sei ricordano le celle esagonali di un'arnia, ma la perfetta simmetria di un favo è ben lontana dalla stupefacente complessità della schiuma!

IL PIÙ AUTOREVOLE DEI PRIMI SCHIUMOGENI
I tentativi iniziali per districare gli elementi di questa curiosa struttura furono compiuti nell'Ottocento dal fisico belga Joseph Antoine Ferdinand Plateau (1801-1883). Le sue leggi di geometria della schiuma sono tuttora valide.
Paradossalmente, Plateau rimase cieco per gran pare della propria vita perché durante certe ricerche di ottica aveva guardato direttamente il sole. Prima di perdere la vista, studiò la geometria di pellicole insaponate tese tra cornici di fil di ferro e continuò a farlo anche in seguito, con l'aiuto di amici e parenti.
Nel 1873 pubblica il risultato di quindici anni di ricerche: *"Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires"*. In quel libro si pongono molti problemi che riguardano le lamine e le bolle di sapone. Nasce la moderna teoria delle superfici minime, le superfici che hanno l'area più piccola tra tutte quelle di una famiglia definita in base a qualche proprietà. Una delle cose più stupefacenti che osserva Plateau è che se si soffia con una cannuccia in una soluzione di acqua saponata, comunque sia elevato il numero di lamine di sapone che vengono a contatto fra loro, non vi possono essere altro che due tipi di configurazioni. Precisamente le tre regole sperimentali che Plateau scopre a proposito delle lamine saponate sono che:
1. un sistema di bolle o un sistema di lamine attaccate a un supporto in fil di ferro è costituito da superfici piane o curve che si intersecano tra loro secondo linee con curvatura molto regolare;
2. le superfici possono incontrarsi solo in due modi: o tre superfici che si incontrano lungo una linea o sei superfici che danno luogo a quattro curve che si incontrano in un vertice;
3. gli angoli di intersezione delle superfici lungo una linea o delle curve di intersezione in un vertice sono sempre eguali, nel primo caso a 120°, nel secondo a 109° 28'.

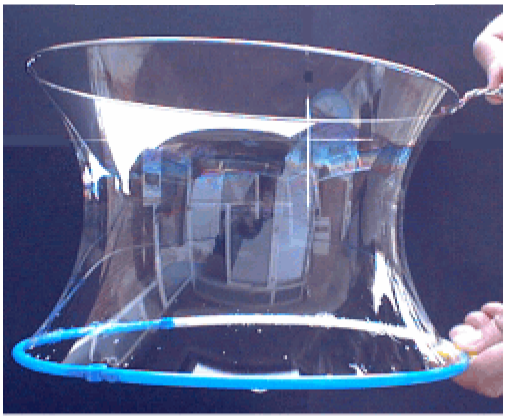



SUPERFICI MINIME: PIANO, ELICOIDE, CATENOIDE

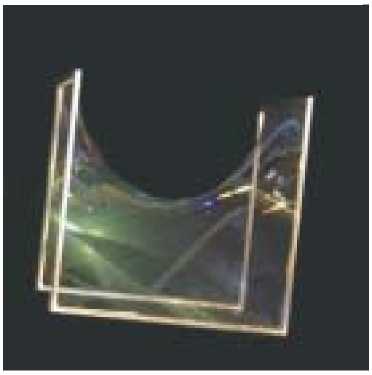
I problemi di massimo e minimo possono essere molto difficili e spesso le nostre conoscenze non sono sufficienti per risolverli mediante formule analitiche o costruzioni geometriche. Talvolta anche la dimostrazione di esistenza è particolarmente impegnativa: si ricorre allora a simulazioni effettuate al computer o tramite speciali dispositivi fisici. A volte la realizzazione di una certa situazione o di un qualche fenomeno può essere convincente quasi quanto una prova anche se non può mai sostituirla. Il motivo più profondo che spiega ciò è che gli oggetti dell'esperienza fisica sono soltanto delle raffigurazioni di corrispondenti concetti matematici.
Così le lamine saponose e i contorni metallici che le sostengono forniscono una rappresentazione suggestiva delle superfici, ma, per quanto sottili e levigate, non sono esattamente la stessa cosa. È quindi necessario tenere sempre separato il risultato di un esperimento dalla soluzione teorica del problema riprodotto.



Elicoide



Catenoide

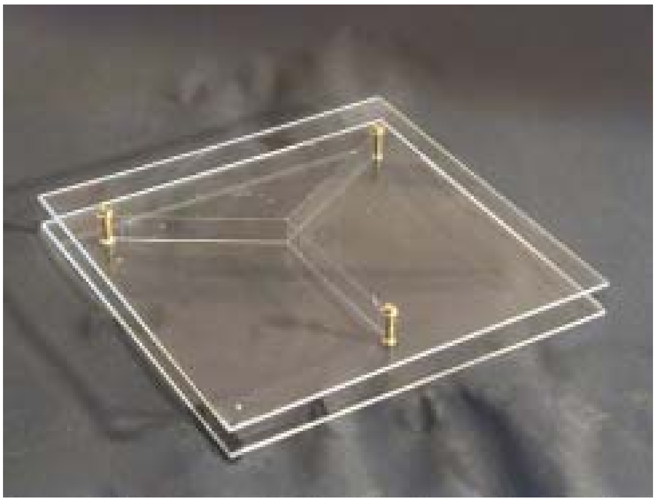


Sella di Shreck

RETI MINIME

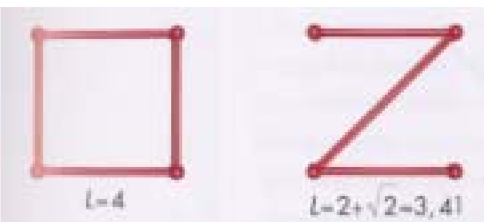
Quando trattiamo problemi di “ottimizzazione”, nella vita di tutti i giorni, incontriamo senza volerlo problemi di massimi e minimi.
Reti elettriche, telefoniche, stradali, ferroviarie, reti con cui veniamo a contatto praticamene ogni giorno, possono essere viste come un insieme di linee che si incrociano in vari modi, collegando fra loro diversi punti.

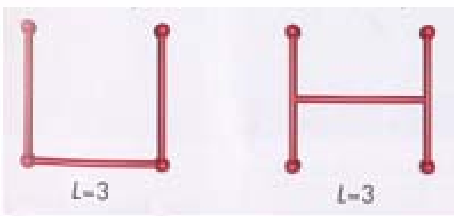
Qual è il tracciato più breve per collegare un certo numero di punti? La risposta è semplice se i punti fissati sono due: un segmento di linea retta risolve il problema, ma se i punti sono tre o quattro?
La risposta si può avere empiricamente usando una pellicola insaponata, essa indica automaticamente il percorso giusto, attaccandosi su un plastico a piccola scala che riproduce la distribuzione geografica dei vari punti.

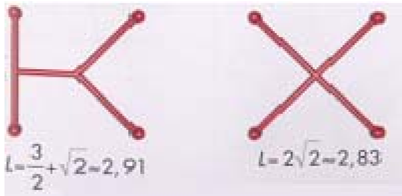


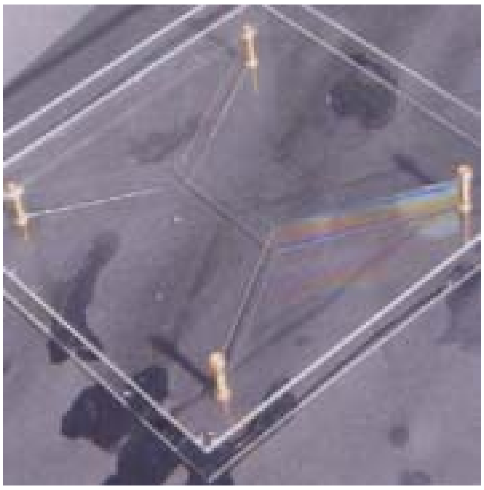
Le tre lamine si incontrano formando, a coppie, un angolo di 120° simile a una Y. Se modifichiamo la posizione dei pioli, la situazione è sempre caratterizzata da un incrocio interno con angoli di 120° a meno che un vertice del triangolo non abbia un angolo interno maggiore o uguale di 120°, allora la situazione è data dai due lati adiacenti a quest’angolo.

E nel caso di quattro punti? È sempre una soluzione in cui i segmenti partono dai vertici e si incontrano in un punto centrale (forma a X)? La risposta è no, tenendo presente la prima legge di Plateau che ci dice che le lamine si possono incontrare tre alla volta e formando angoli di 120°, possiamo accorgerci che se scegliessimo la forma a X gli angoli avrebbero una misura inferiore e quindi il percorso può essere migliorato. Se infatti cerchiamo configurazioni a forma di H storta o a doppia Y, ci accorgiamo che questa soluzione è più breve proprio perché ci sono due intersezioni, ciascuna formata da tre lamine piane, disposte ad angoli di 120°.

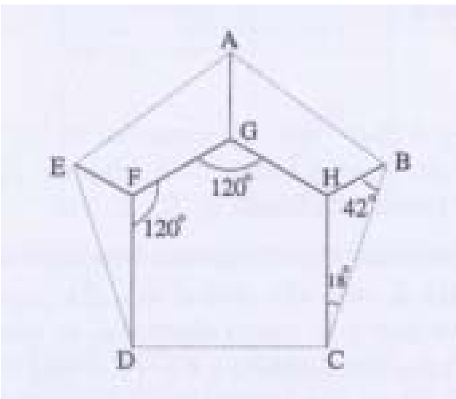




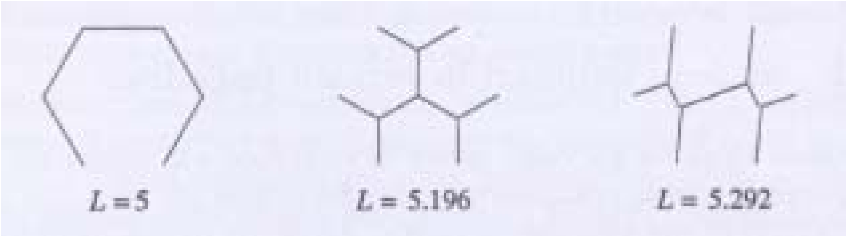




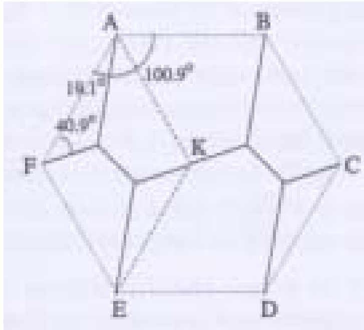
Consideriamo ora cinque punti disposti nei vertici di un pentagono regolare. La configurazione lamine ottenuta e rappresentata da tre intersezioni, ciascuna generata da tre segmenti che si incontrano, come sempre, a 120°.



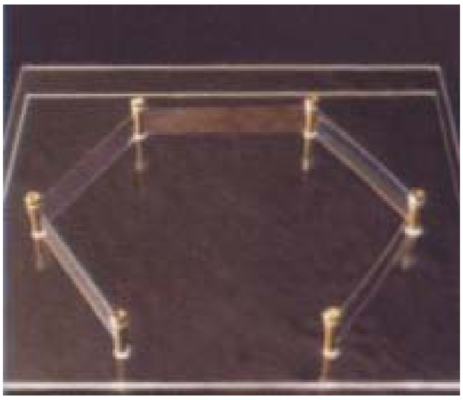
E se i pioli sono situati nei vertici di un esagono regolare? Ricordando le soluzioni ottenute nei casi precedenti (per il triangolo un incrocio, per il quadrato due incroci, per il pentagono tre incroci) sembrerebbe abbastanza naturale che la soluzione per l'esagono abbia quattro incroci. In questo caso però il percorso di lunghezza minima che collega i sei punti è dato da cinque dei sei lati dell'esagono. Gli incroci coincidono con i vertici dell'esagono in quanto gli angoli di quest'ultimo sono uguali a 120°.



L = 5
L = 5.196
L = 5.292



A
B
C
D
E
F
K
19.1°
100.9°
40.9°

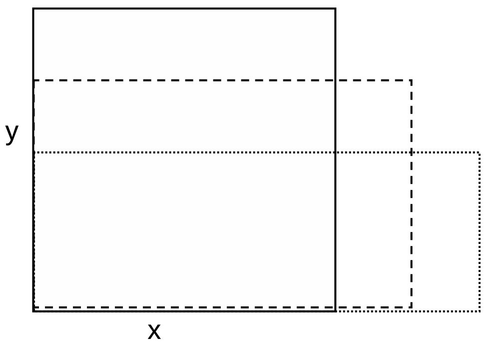


LA PROPRIETÀ ISOPERIMETRICA

Perché le bolle di sapone hanno una superficie sferica? Sicuramente non dipende dal contorno usato per crearle: soffiando su una lamina sostenuta da un filo metallico piegato a forma di triangolo o quadrato, otteniamo ugualmente una forma sferica, questo perché rispettano sempre un *principio di minimo*.
Le caratteristiche geometriche che si osservano nello studio delle bolle si possono interpretare attraverso soluzioni di *problemi di ottimizzazione*, nei quali è richiesto di rendere minima o massima una certa grandezza, rispettando determinate condizioni; all'interno di un vasto gruppo di problemi possiamo individuare i seguenti:

1. Fra tutte le figure del piano, con alcune caratteristiche in comune, quale ha la *massima* area?
2. Fra tutte le figure piane aventi certe proprietà quale ha il *minimo* perimetro?

Se per esempio vogliamo trovare quale tra tutti i poligoni con *n* lati, aventi lo stesso perimetro, ha l'area massima, vogliamo risolvere un cosiddetto problema *isoperimetrico* (isoperimetrico significa "con lo stesso perimetro" e deriva dalle parole greche *isos* 'uguale', *peri* 'intorno', *metron* 'misura'). La soluzione è abbastanza semplice è il poligono regolare (con lati e angoli uguali).
Proviamo, utilizzando un po' di geometria analitica, con i rettangoli:



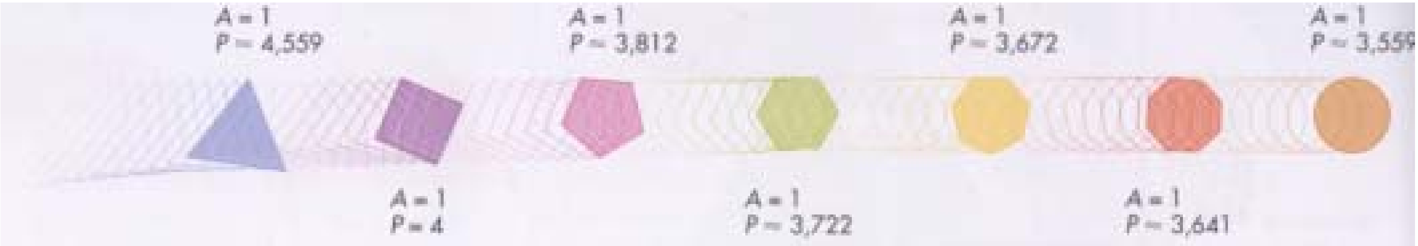
Area rettangolo
__________ 4·4=16
-------------- 3·5=15
·············· 2,1·5,9=12,39

Semiperimetro
4+4=3+5=2,1+5,9=8

Indichiamo con *x* e *y* la base e l'altezza di un rettangolo di perimetro fissato, ossia di semi perimetro $p = x + y$. Vogliamo vedere per quali valori dei lati è massima l'area $A = x \cdot y$.
Essendo $y = p - x$ possiamo scrivere l'area in funzione di x : $A(x) = x \cdot (p - x) = -x^2 + p \cdot x$; è l'equazione di una parabola con concavità verso il basso. $A(x)$ si annulla quando $x = 0$ e $x = p$ e assume valore massimo quando $x = \frac{p}{2}$ (ascissa del vertice della parabola); ma allora anche $y = \frac{p}{2}$ e quindi otteniamo un quadrato.

Questo risultato si può ottenere anche sostituendo ai rettangoli dei triangoli, dei pentagoni, degli esagoni; ma dopo esserci convinti che le figure con area maggiore sono quelle regolari resta un altro problema: qual è la figura geometrica del piano che, a parità di perimetro, ha area maggiore?
Con un po' di trigonometria (studio delle figure piane utilizzando la misura degli angoli formati dai loro lati) si trova la formula dell'area del poligono regolare P_n di *n* lati e semiperimetro *p* (con gli angoli misurati in radianti): $A(P_n) = \frac{p^2}{n \cdot tg\left(\frac{\pi}{n}\right)}$.

Si può notare che il denominatore decresce al crescere di *n* e se ne deduce che, dato un poligono regolare con *n* lati, il poligono regolare avente *n+1* lati e perimetro uguale al precedente ha area maggiore. Quindi continuando ad aumentare il numero dei lati, pur mantenendo lo stesso perimetro, otteniamo poligoni regolari di area sempre maggiori.
Questo procedimento porterà al seguente teorema: *fra tutte le figure piane di perimetro fissato, il cerchio ha l'area massima*. Questo teorema di facile intuizione si può verificare calcolando: $\lim_{n\to\infty} A(P_n) = \frac{p^2}{\pi}$, cioè esattamente l'area del cerchio di perimetro *2p*. Il teorema precedente enuncia quella che si è soliti chiamare *proprietà isoperimetrica del cerchio*.



Alla luce di quanto visto possiamo rispondere ad una questione analoga nello spazio: qual è il solido che a parità di volume ha una superficie di area minore? Anche in questo caso possiamo enunciare un teorema simile al precedente: *fra tutti i solidi dello spazio aventi un volume fissato, la sfera ha area superficiale minima*.

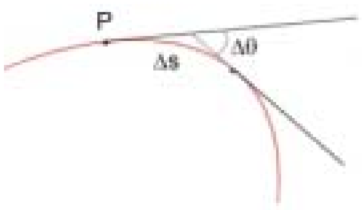
Quando si forma una bolla di sapone, per tornare al quesito iniziale, la lamina trasparente si chiude attorno all'aria soffiata e la confina in uno spazio delimitato dalla più piccola superficie possibile, rispettando la proprietà isoperimetrica della sfera e grazie alla tensione superficiale[1].

[1] Vedere "La tensione superficiale"

LA CURVATURA

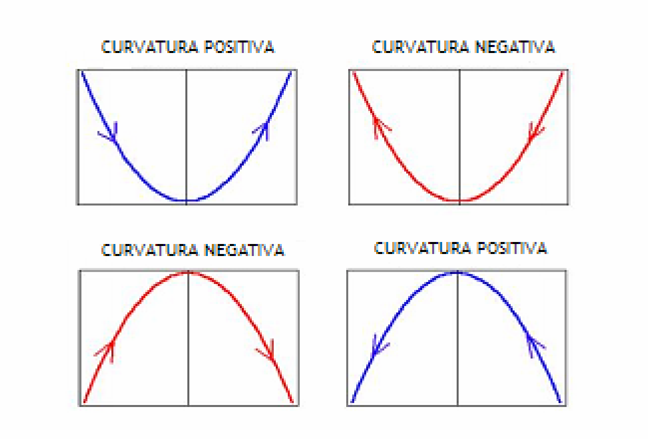
La curvatura è un concetto geometrico semplice e intuitivo. Cominciamo cercando di capire il significato di *curvatura* per curve piane.
Una linea retta non ha curvatura, possiamo anche dire che ha *curvatura zero*; una circonferenza è invece incurvata allo stesso modo in tutti i suoi punti: ha *curvatura costante* ed è naturale dire che quanto più grande è il suo raggio, tanto minore è la curvatura. Immaginiamo di essere alla guida di un'automobile: se la strada è rettilinea lo sterzo deve essere tenuto fermo, mentre all'imbocco di una rotatoria dobbiamo girare il volante – tanto più quando minore è il raggio dell'anello circolare che stiamo percorrendo – e mantenerlo fisso in quella posizione.
Inoltre questo concetto rappresenta una proprietà locale e non globale cioè, ha senso definire la curvatura in un punto, ma non significa nulla parlare di "curvatura di una linea".

La curvatura in un punto P si calcola come $K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s}$



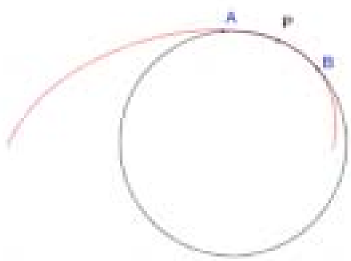
La retta, in base a questa definizione, ha curvatura nulla.
Consideriamo la linea curva più semplice: la circonferenza. La sua curvatura è costante e la si può considerare come l'inverso del raggio, ossia $K = \frac{1}{r}$: se r tende all'infinito, K decresce e tende a 0.

Si definisce quindi la curvatura, di una curva C qualsiasi, nel punto P come $K_p = \frac{1}{r}$ e si è soliti assegnare un segno, positivo o negativo, che tiene conto del verso di percorrenza della curva:



Per misurare la curvatura *K* si deve procedere con un passaggio al limite, che è un'operazione non sempre immediata da eseguire. Fortunatamente esiste una formula esplicita per determinare la curvatura; se consideriamo due punti A e B che individuano un tratto di linea di lunghezza Δs a cavallo di un punto P. Costruiamo la circonferenza che passa per questi tre punti, essa approssimerà sempre meglio la linea man mano che Δs tende a zero.
Dunque se conosciamo il raggio R di questa circonferenza, possiamo riutilizzare la formula $K = \frac{1}{r}$ che avevamo visto prima.

Questa circonferenza è detta *cerchio osculatore* (nome dovuto a Leibniz, lo definiva *circulum osculans,* vale a dire la circonferenza che "bacia" la linea in quel punto).



La formula per trovare il raggio del cerchio osculatore prevede il calcolo della derivata prima e seconda della funzione $f(x)$ nel punto considerato, ed è la seguente: $r = \frac{\sqrt{\left(1+f'(x)^2\right)^3}}{f''(x)}$ con la conseguente espressione della curvatura che è: $K = \frac{f''(x)}{\left[1+(f'(x))^2\right]^{\frac{3}{2}}}$

Il segno di r indica semplicemente il verso della concavità della curva rispetto al nostro sistema di assi cartesiani, il raggio infatti è una grandezza geometrica e dunque positiva.

LA CURVATURA DI UNA SUPERFICIE

Procediamo ora con lo studio della curvatura di una superficie regolare. La curvatura più utile in relatività è detta anche gaussiana, in onore del grande matematico Carl Friedrich Gauss, che ne diede la descrizione.

Consideriamo la campana schiacciata disegnata a fianco: per trovare la curvatura di questa superficie nel punto all'apice, dobbiamo individuare la retta 'normale' alla superficie in quel punto. Poi andiamo a considerare tutti i piani, chiamati 'sezioni normali', incernierati su tale retta: essi sezioneranno la superficie dando luogo a linee diverse, ciascuna caratterizzata da un cerchio osculatore in quel punto, e dunque da una curvatura. Ebbene, un teorema dovuto ad Eulero afferma che i piani che individuano la massima curvatura e quella minima (dette curvature principali) sono perpendicolari e Gauss definì la curvatura (gaussiana) della superficie come il prodotto delle curvature principali. In formula: $K = \frac{1}{r_{\min} \cdot r_{\max}}$.

La curvatura è quindi la media aritmetica delle curvature principali: $H = \frac{K_1 + K_2}{2}$.

Se consideriamo una sfera di raggio r, una qualunque sua sezione normale è una circonferenza dello stesso raggio (un cerchio massimo), la cui curvatura è $\frac{1}{r}$. Quindi in questo caso $K_1 = K_2 = \frac{1}{r}$ e $H = \frac{\frac{1}{r}+\frac{1}{r}}{2} = \frac{1}{r}$; come per la circonferenza, la curvatura media della sfera è costante in ogni punto ed è data dall'inverso del raggio.

LA CURVATURA E LE SUPERFICI MINIME

Le superfici di area minima[2] sono caratterizzate da una proprietà geometrica molto importante: esse devono avere *curvatura media zero* in ogni punto, cioè soddisfare l'equazione $H = 0$

La condizione di pendenza nulla nel grafico[3] corrisponde appunto ad avere curvatura media nulla in ogni punto.

---

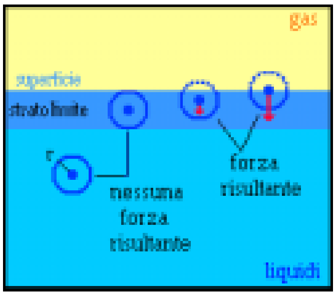
[2] Vedere "J.A.F. Plateau e le superfici minime – superfici minime: piano, elicoide, catenoide"

Dall'equazione $H = \frac{K_1 + K_2}{2}$ a quella H = 0 si può intuire che le due curvature principali di una superficie minima si "compensano": sono uguali e di segno opposto e geometricamente una piccola porzione di superficie minima (non piana) ha la forma di una sella.
Le lamine saponose, quindi, sono superfici minime per l'area e come tali hanno superficie media zero in ogni punto; le bolle di sapone, che risolvono un problema di area minima con un vincolo di volume (la quantità d'aria racchiusa), danno invece luogo a superfici di curvatura media costante come la sfera.

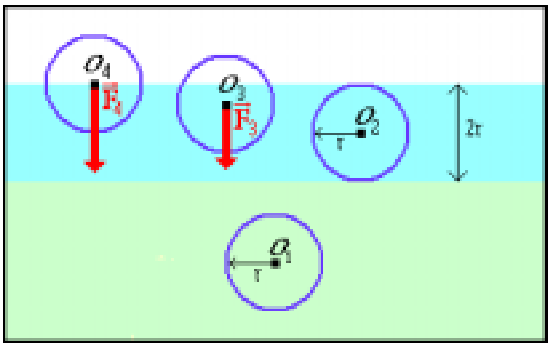
[3] Vedere "Minimi e massimi nello studio di funzione"

LA TENSIONE SUPERFICIALE

Tre le forze della natura che modellano la struttura geometrica di bolle e schiume c'è la tensione superficiale.
Per capire questa forza l'acqua è un buon punto di partenza. Rispetto agli altri liquidi che reggono le schiume (latte, albume) ha una struttura microscopica semplice.
Il ben noto simbolo della sua molecola H_2O rappresenta due atomi di idrogeno e uno di ossigeno legati da forze elettriche in una forma di boomerang in cui l'ossigeno sta al centro, con appeso ad ogni lato un atomo di idrogeno.
L'acqua è una raccolta di questi piccoli boomerang. Anche da ferma in un bicchiere i suoi miliardi di molecole sono in costante movimento, si attraggono reciprocamente, altrimenti da un contenitore aperto l'acqua fuoriuscirebbe come un gas, e ciò avviene grazie a una forza chiamata appunto *tensione superficiale*.
Nella materia allo stato liquido ogni molecola è circondata da altre molecole: le forze attrattive tra molecole, per il fatto che ognuna di esse è completamente circondata dalle altre, si bilanciano permettendo che ogni molecola si sposti liberamente (la risultante di queste forze è nulla).



Appena sotto la superficie del liquido possiamo prendere in considerazione uno strato spesso quanto il diametro delle molecole costituenti il liquido: questo strato è detto *strato limite* ed è quello in cui avviene il passaggio da liquido a gas, a solido o ad altro liquido. Una molecola che si trovi in questa zona ha altre molecole dello stesso tipo sopra di essa. Se una molecola che si trova nello strato limite viene sollevata, i legami tra essa e le molecole adiacenti vengono tesi, generando una forza che tende a richiamare la molecola verso la superficie. Allo stesso modo, appoggiando un corpo minuscolo sulla superficie di un liquido, le molecole superficiali di quest'ultimo vengono spinte verso il basso generando una forza di richiamo diretta verso l'alto. La superficie di un liquido si comporta quindi come una membrana tesa.
La *tensione superficiale* di un liquido è il lavoro che deve essere fatto per portare un numero sufficiente di molecole dall'interno del liquido alla superficie per poter formare una nuova area unitaria di detta superficie.
Nella figura accanto, la molecola O_1, la cui sfera d'azione molecolare r è interna al liquido, attira ed è attirata simmetricamente da tutte le molecole che la circondano.
Molecole come O_3 ed O_4 che appartengono ad una lamina superficiale di liquido vengono attirate dalle molecole sottostanti (sopra di esse non ce ne sono): la risultante delle forze di coesione delle molecole è $\vec{F}$ ed è crescente man mano che la molecola si avvicina alla superficie del liquido.



La tensione superficiale è una forza onnipresente in natura: permette all'acqua di risalire dalle radici alla cima di una pianta, alle zanzare di camminare sulle pozzanghere come su un tappeto elastico ed è responsabile della formazione delle gocce e delle bolle di gas nell'acqua.
In particolare, la tensione superficiale fa in modo che la lamina saponosa cerchi di assumere la configurazione di minore area possibile: la sfera[4].

ENERGIA MINIMA E EQUILIBRIO STABILE
Anche l'energia ha un ruolo nelle bolle e nella schiuma e spiega infatti come mai le bolle sia perfettamente sferiche. Già dal 1850 era noto che un sistema fisico raggiunge stabilità massima quando la sua energia è minima e agisce per raggiungere questo stato di equilibrio. Questo principio in fisica è talmente diffuso e noto da non avere neanche un nome, Sidney Perkowitz ne "La teoria del cappuccino" lo chiama «principio di minimizzazione»: spiega perché una palla rotola giù da un pendio, oppure perché una molla torna al suo stato di riposo quando non è più tesa. In ogni caso l'azione avviene quando il sistema fisico torna da un livello di energia superiore a uno di energia inferiore ed è in base a questo principio che le gocce e le bolle assumono la propria forma.

Il problema è "come mai l'equilibrio stabile coincide con il minimo dell'energia potenziale?"
Proviamo a spiegarlo in modo intuitivo.
Partiamo da una forza F posizionale (ovvero che dipende dalla posizione del corpo) che ammette un Potenziale ovvero una "funzione" la cui derivata è la Forza stessa, per esempio forza elastica $F = -k \cdot x$, forza potenziale $U = -\frac{k}{2} \cdot x^2$.
In un punto di equilibrio il corpo deve stare fermo quindi non ci devono essere forze, questo coincide con l'annullare la derivata prima del potenziale (la derivata prima del potenziale è la forza) ovvero col determinare i punti di stazionarietà del potenziale stesso.
Un equilibrio però può essere fondamentalmente di due tipi: stabile e instabile. Un equilibrio è stabile se una volta che si sposta un corpo dalla posizione di equilibro subito dopo esso ci ritorna (ad esempio una pallina in fondo ad una ciotola: la si sposta e in un attimo torna in fondo alla ciotola), è instabile invece se accade l'opposto, ovvero se si muove un corpo e questo si allontana dalla posizione di equilibrio (ad esempio se ci si riuscisse a reggere sulla punta di un dito basterebbe una piccola spinta e si cadrebbe giù).
Come si può tradurre questo? Abbiamo detto stabile = torna al punto di equilibrio, in altre parole la forza vicino all'equilibrio è "fatta" in maniera tale da indirizzare di nuovo il corpo verso l'equilibrio. Questo si verifica quando il punto di equilibrio è un massimo del potenziale. In questo caso, infatti, se stiamo "a sinistra" del punto di equilibrio la derivata è positiva, la forza spinge quindi verso destra, verso il punto di equilibrio. Simmetricamente se siamo a destra del punto di equilibrio.
Se invece è un minimo, accade l'opposto: la forza spinge nella direzione contraria e quindi il corpo si allontana sempre di più dall'equilibrio.
L'Energia potenziale è definita come il Potenziale cambiato di segno, ecco spiegato perché il suo minimo coincide con l'equilibrio stabile.

Stando al principio di minimizzazione, la tensione superficiale tende sempre a minimizzare la superficie: la tensione superficiale produce l'involucro della bolla, ma occorre un cosiddetto *tensioattivo* per far si che la bolla sia robusta. Il tensioattivo più comune è il sapone che, con le sue molecole, permette di creare una pellicola che consente alla bolla di durare più a lungo e rende possibile utilizzare le pellicole insaponate per risolvere difficili questioni matematiche.
Il principio di minimizzazione rimane valido comunque con qualunque tensioattivo (molecole presenti nell'acqua di mare, nell'albume, nella panna,…).

[4] Vedere "La proprietà isoperimetrica"

CELLULE, VIRUS & BOLLE MEDICINALI

LA MATRICE CELLULARE DELLA VITA

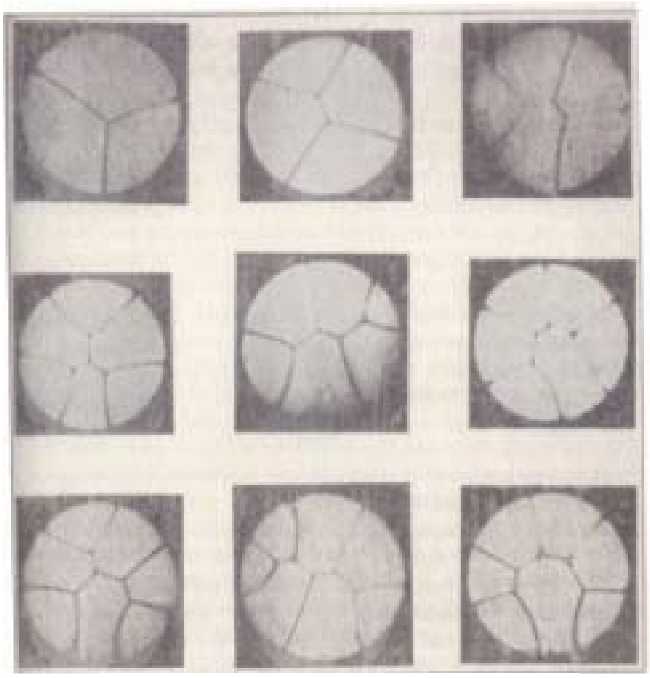
Una singola cellula condivide alcune caratteristiche di una bolla e i gruppi di cellule che formano tessuti e organi somigliano a grappoli di bolle.

Una cellula è simile a una bolla piena di fluido, il suo citoplasma è infatti racchiuso in una membrana simile a quella delle bolle di sapone e più cellule si dispongono, secondo le istruzioni dettate dal DNA, seguendo i processi fisici della scienza della schiuma.

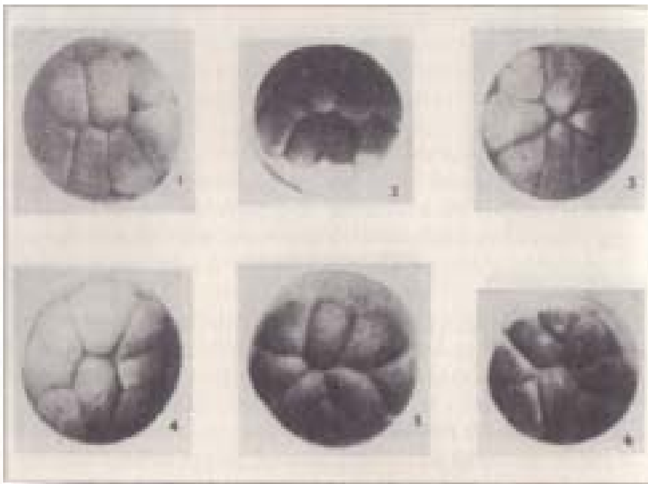
Come ogni singola bolla, la cellula è modellata dalla tensione superficiale e il principio di minimizzazione dell'energia esige che assuma la forma che ne minimizza l'energia[5]: per creature unicellulari questa forma è la sfera o comunque una forma simmetrica.

La tensione superficiale però varia e con essa varia la bolla di sapone, quest'ultima viene definita "in quiete" solo perché questi cambiamenti avvengono molto lentamente, ma la sua superficie si assottiglia, si ispessisce e cambia colore.

D'Arcy Wentworth Thompson, un innovativo biologo della seconda metà dell'Ottocento, sottolineò che anche i processi fisici che determinano i raggruppamenti delle cellule seguono i principi della scienza della schiuma; oggi possono colpirci le illustrazioni con le quali Thompson corredava le sue analisi.



Divisione cellulare di una bolla di sapone



Divisione cellulare di uova di rana

BOLLE TERAPEUTICHE

Bolle e schiume fanno parte dell'armamentario medico corrente. Con gli ultrasuoni si possono osservare per esempio il feto, lo stato del cuore, senza gli effetti dannosi dei raggi x. Il procedimento è analogo a quello dell'eco: gli ultrasuoni che viaggiano nel corpo vengono riflessi quando incontrano un cambiamento nella composizione dei tessuti, gli echi sono registrati, analizzati e poi trascritti in un'immagine.

Con gli ultrasuoni è possibile anche diagnosticare precocemente un tumore. Un tumore sviluppa sempre vasi sanguigni: se sono disposti ordinatamente il tumore è benigno, se crescono invece in maniera caotica si tratta di un tumore maligno. Nelle immagini la differenza risalta di più quando si utilizzano delle bolle per ottenere un miglior contrasto; le bolle vengono introdotte o iniettando anidride carbonica direttamente nell'arteria (che fa affluire il sangue nel tessuto

[5] Vedere "La tensione superficiale" e "La proprietà isoperimetrica"

sospetto, il quale viene attraversato da bollicine) o iniettando per endovena liquidi speciali che contengono bolle di gas (talmente piccole da non ostruire i vasi sanguigni).
Le bolle rendono più efficaci anche le terapie ad ultrasuoni; l'eliminazione dei calcoli renali per esempio è meno traumatica se fatta con una procedura, chiamata litotripsia, con cui l'azione vibrante delle bolle frammenta i calcoli e ne permette l'eliminazione con l'urina.

VUOTI DANNOSI

Purtroppo le bolle possono anche fare danni. Una grossa bolla nel sangue può provocare un embolo (nel caso ostruisca vene o arterie) o causare lesioni mortali (se lacera i tessuti).
Una delle malattie più note che implicano la presenza di bolle nel corpo è la sindrome da decompressione; essa colpisce i piloti che volano ad alta quota, i sommozzatori che passano troppo tempo nello scafandro, i sub che risalgono troppo velocemente alla superficie, gli operai che lavorano nei cassoni pneumatici usati per le costruzioni subacquee, perché tutti quanti subiscono bruschi cambiamenti di pressione. Alla pressione atmosferica normale i gas dell'aria contenuti nei tessuti dell'organismo sono sciolti in liquidi, alla pressione elevata delle profondità marine o alla pressione quasi nulla presente a 5-6 mila metri di quota, la quantità di gas assorbita nei tessuti varia.
Se non si lascia il tempo ai gas assorbiti dal nostro corpo di propagarsi dai tessuti al sangue (dal quale vengono poi espulsi tramite la respirazione), questi schiumeggiano (come nelle bibite frizzanti) e producono bolle prima di arrivare al sangue, provocando forti dolori, convulsioni, vertigini, paralisi e, se non viene curato immediatamente, morte.
Due malattie che rivelano la propria presenza attraverso una struttura a schiuma sono l'encefalopatia spongiforme contagiosa (una sua variante è il morbo della "mucca pazza", per trovare qualcosa di più vicino a noi…), in cui il cervello si riempie di cavità e perde metà del suo volume, e la lebbra (malattia purtroppo ancora mortale in Asia, Africa e Sud America), dove centinaia di batteri gonfiano i macrofagi, cellule che hanno il compito di inghiottire le cellule estranee all'organismo.

BOLLE NELLA LETTERATURA

Trovare autori che hanno dedicato intere poesie alle bolle di sapone è difficile, alcuni scrittori le hanno però usate come metafora o hanno dedicato loro diverse citazioni. Molto più spesso, invece, in tutte le letterature si affrontano i temi dell'effimero, della leggerezza, della vanità, della fragilità delle ambizioni umane, tutte questioni che, come vedremo anche nell'arte, ricordano le bolle di sapone.

ITALIA: LA LEGGEREZZA

A proposito della leggerezza è d'obbligo parlare di Aldo Palazzeschi che fonda proprio su questa qualità la sua poetica. Una leggerezza che a volte risulta enigmatica, non ben decodificabile, che si diverte a far affiorare le incertezze della realtà, senza tuttavia accanirsi su di esse.

Contestatore irriverente, Palazzeschi scardina i moduli canonici dell'arte, ma lo fa con estrema giocosità, senza la pretesa di distruggere o di far esplodere con violenza le contraddizioni. Il suo spirito ludico, la sua dichiarata ricerca del comico, il travestimento burlesco che tanto lo diverte, non gli fanno mai perdere il senso della misura. Il suo estremismo è pertanto libero ed estroso ma sempre privo di malignità, ed il suo sorriso non manca di provocare la riflessione, di costringere a ripensare al senso vero delle cose, per coglierne il lato comico e tragico insieme.

La leggerezza è il leit motiv de «Il Codice di Perelà», romanzo-fiaba fortemente allegorico, parodia dell'ordine costituito e dei suoi principi apparentemente solidi, in cui l'omino di fumo protagonista è il simbolo di una vita libera dal peso della materia.

Il valore rivoluzionarlo della "leggerezza" s'incontra con la dissoluzione del soggetto che oggettiva il proprio esaurimento storico con la riduzione biologica del fumo. Attraverso la figura dell'uomo nato dalla fiamma e senza genitori reali, l'omino di fumo avverte d'essere entrato nell'età del capitalismo moderno. Egli patisce la vanificazione della propria identità borghese.

La sua incantata "leggerezza", verticale ed antieroica, aveva indicato l'esistenza dell'essere senza alcuna preoccupazione terrena e senza alcuna conoscenza della vera realtà, lontano dai presupposti laico-borghesi della libertà e della necessità.

Quando l'uomo di fumo scende dalla cappa del camino, il nero utero di un eccezionale parto, sono trascorsi circa trent'anni durante i quali il fuoco germinativo lo ha originato e conservato indeciso e aereo. Al momento della nascita la sua coscienza è già formata, ha già acquisito il senso delle cose più elementari e più profonde, le realtà materiali e le immagini conformanti i luoghi ideali della ragione e degli affetti. Chi ha provveduto alla sua educazione sono state tre vecchie centenarie di nome Pena, Rete, Lama.

> Appresi così quello che gli altri uomini apprendono dai loro insegnanti. Pena, Rete, Lama non tralasciarono di prepararmi a nessuna utile cognizione.
> Io imparai di guerra, d'amore, di filosofia...
> — Anche di filosofia?
> Sì... una filosofia leggera... leggera ...

Nell'attraversare per tappe, per "stazioni", i luoghi simbolici della vita reale e delle nevrosi sociali, il protagonista non si oppone nemmeno una volta ai rovesci di fortuna e agli accidenti del destino.

Il mondo è estraneo a Perelà perché egli non è il prodotto di concretizzazioni mondane e di situazioni sociali storicamente determinate per cui l'essenza di Perelà presuppone l'abbandono dei pensieri sulle discordanze individuo-natura-società.

L'espediente fabulistico (è lo stesso Palazzeschi a definire *Il Codice di Perelà* «la [sua] favola aerea, il punto più alto della [sua] fantasia») permette alla leggerezza del protagonista di attraversare il mondo delle ideologie e dei saperi costituiti in virtù di uno stratagemma dettato più dall'inconscio che dall'autocoscienza. A sottolineare l'assoluta separazione di autocoscienza e leggerezza, identità e altro, soggetto e fumo.

La leggerezza di Perelà è un principio morale che ha eliminato dal romanzo il mondo psicologico e culturale del pensiero; in nessun passaggio l'eroe esprime una riflessione, una sentenza, un motto di spirito che controllino la dialettica di autocoscienza ed azione. Il persistente silenzio di

Perelà, la sua neutralità morale è il nucleo del romanzo. Né eroe della coscienza tragica, né eroe dell'epica borghese, l'uomo di fumo è il rovesciamento di ogni trasformazione individuale. Perché di fumo, Perelà resta la negazione di ogni "volontà di potenza" individualmente affermata.
La leggerezza di Perelà è la forza che si oppone ai vincoli del vivere e del mondo capitalistico. Con la consunta leggerezza Palazzeschi conduce il suo eroe inconsistente nel sistema sociale mettendolo di fronte al potere in tutte le sue forme, i luoghi più disparati, dal monastero al manicomio, dal carcere al camposanto, per iniziarlo alla vita terrena.
Il risultato sarà che l'uomo di fumo ne ricava alla fine un senso di peso, di soffocazione che esprime nella meditazione sulla collina, dove il registro comico-fabiesco lascia posto a un discorso malinconico:

> Era vero, non si era sentito mai leggero, mano mano che saliva elevandosi sulla città anche i suoi pensieri si elevavano, le preoccupazioni della reggia e di tutta quella gente laggiù si allontanavano, si attenuavano, si perdevano quasi ormai dinanzi al suo sguardo. La luce lo vinceva, il calore del sole, la leggerezza del suo corpo, il verde delle foglie, l'infantilità di quel filo d'acqua, il respiro puro, gli fecero sentire per la prima volta che tutto quello che si faceva laggiù in quell'enorme mucchio di case era qualche cosa di grave, di pesante, di sommamente pesante, in una maniera che ora gli cominciava a divenire insopportabile. Le torri, le larghe costruzioni di pietra, i tetti, enormi cappelli schiaccianti le case, e tutto si gravava sulla terra così spietatamente, i gentiluomini, i soldati rivestiti di ferro, le carrozze, tutto tutto era di una gravità insopportabile

Perelà è libero da indicazioni storiche precise e da ruoli sociali, per questo è scambiato indistintamente dai primi uomini che lo scorgono per uno «spagnolo», un «moschettiere», un «cavaliere scappato dalla rivoluzione». Tuttavia, la sua descrizione senza caratterizzazioni socio-culturali si fa espediente retorico del soggetto letterario che con *l'essenza* del fumo ha scelto, direbbe Sartre, una *maniera particolare d'essere presente*.

Secondo Italo Calvino la leggerezza è una virtù della letteratura che deve essere mantenuta nei secoli.
«Lezioni Americane. Sei proposte per il prossimo millennio» è un libro voluto da Esther Calvino, in cui sono raccolti gli appunti con cui Calvino avrebbe dovuto affrontare il pubblico americano ad Harvard in occasione delle Charles Eliot Norton Poetry Lectures, un ciclo di sei conferenze dove era necessario trovare un tema per affrontare ogni forma di comunicazione poetica. Le sei conferenze si sarebbero dovute tenere nell'anno accademico 1985-86, ma Calvino morì il 19 settembre 1985, e avrebbero dovuto avere come oggetto la rapidità, l'esattezza, la visibilità, la molteplicità, la consistenza (lezione mancante perché l'avrebbe scritta ad Harvard) e, naturalmente, la leggerezza.
La *Leggerezza*, che per Calvino pervade la letteratura fin dalle origini, è l'atteggiamento di opposizione alla *pesantezza,* all'*inerzia,* all'*opacità del mondo*, è *l'agile salto improvviso del poeta-filosofo*, così come Boccaccio descrive il poeta Guido Cavalcanti nel Decameron, *che si solleva sulla pesantezza del mondo, dimostrando che la sua gravità contiene il segreto della leggerezza*.
Italo Calvino si pone questo interrogativo: possono la scienza e la filosofia, espressioni della razionalità, perdere gravità e peso per non schiacciare l'individuo? La prima risposta positiva la trova nella letteratura classica: il poeta dell'atomismo Lucrezio e il pitagorico Ovidio hanno conquistato la leggerezza, non come fece Perseo con la Gorgone, sostenendosi sui venti e sulle nuvole, ma con i mezzi linguistici propri del poeta, indipendentemente dalla dottrina filosofica di cui è seguace.
Un mirabile confronto, poi, tra Cavalcanti e Dante: tanto il linguaggio del filosofo è un elemento senza peso che *aleggia sopra le cose come un campo di impulsi magnetici* per dare levità ad ogni immagine, quanto invece, quello di Dante Alighieri ha la concretezza dei corpi e delle sensazioni, per rendere la compattezza del cosmo. Le *due vocazioni opposte si contendono il campo della letteratura attraverso i secoli*.

Calvino ci invita a considerare come in «Romeo and Juliet» di Shakespeare si ritrovino temi presenti e vitali anche nel nuovo Millennio, resi universali dal gioco della lingua: le città turbate e contese, l'ottimismo della *filosofia naturale* che non si sa se porti vita o morte, la liberazione sessuale che non riesce a diventare modello d'amore. Si fondono, poi, la *melanconia*, non cupa e compatta ma *particelle minute di sensazioni*, e l'*humour*, non pesante come il comico ma coscienza critica dell'io e del mondo, e questi due umori, *mescolati e inseparabili* permettono di contemplare il dramma come dal di fuori, di *dissolverlo* e di creare quella *gravità senza peso* di cui si è già parlato a proposito di Cavalcanti.
Calvino prosegue il suo "viaggio" nella letteratura: ci comunica stupore, quando incontra l'amato Cyrano de Bergerac. Lo definisce precursore della fantascienza, per avere trasfigurato l'universo e la precarietà dei processi che hanno determinato tutte le cose: *quanto poco è mancato perché l'uomo non fosse uomo, e la vita la vita, e il mondo un mondo.*
Se per arte combinatoria un uomo è uomo e un cavolo è cavolo, la protesta del cavolo, quando l'uomo lo taglia, è legittima. Con questa sottile ironia, Cyrano arriva a proclamare, *prima dell'età dei Lumi, una sorta di fraternità universale e si sottrae, prima delle teorie di Newton, alla forza opprimente della gravità.* Per lo stesso fine Cyrano, come tanti poeti e scrittori che lo hanno preceduto, *tenta di raggiungere la luna con la fantasia*: il suo lancio in aria, ripetuto da una navicella, di una calamita, elemento naturale dotato di forza di attrazione che sarà ripreso da Jonathan Swift per sostenere in aria l'Isola di Laputa.
Ecco la luna: Calvino ci confessa che inizialmente aveva pensato di dedicare tutta la conferenza all'astro che incanta i sognatori e quindi i poeti; ma in un secondo tempo lo lascia a Giacomo Leopardi, *l'unico che è riuscito, sebbene appassionato di astronomia, a togliere ogni peso alla luna, dandole un'immagine di levità, di sospensione, di silenzioso incantesimo, e al linguaggio, fino a farlo assomigliare alla luce lunare*.
La conferenza si chiude con un racconto di Franz Kafka «Il cavaliere del secchio». Racconto misterioso, in cui la sofferenza della guerra (siamo nel rigido inverno del 1917), grazie alla magia di un secchio vuoto che una carbonaia egoista ha impedito al marito di riempire per uno scrittore infreddolito, si eleva sulle qualità e l'egoismo dell'uomo, *nel regno in cui ogni mancanza sarà magicamente risarcita*.

FRANCE: L'EPHEMERE

Un des chef d'œuvres de Alphonse Lamartine est 'Le lac' provenant du recueil «Méditations poétiques» et publié en 1820.
Ce poème est composé en mémoire de Julie, une amie de Lamartine qui mourra à la suite d'une maladie.
La grande qualité de ce poème réside dans ses caractéristiques romantiques, qui s'expriment par la libération du moi, la mélancolie et le sentiment de la nature. C'est le poème de l'inquiétude humaine devant le destin, un élan vers le bonheur, un amour éphémère qui aspire à l'éternité.
Le poète se souvient du temps passé en compagnie de son amie Julie sur le bord d'un lac. En s'adressant à la nature et à ses attributs, il lui raconte qu'il a nostalgie des moments passés avec la femme aimée. Il exprime le sentiment douloureux du temps qui passe. Il se plaint du temps qui passe trop rapidement. Il implore au temps d'arrêter son cours ou de faire marche arrière.
Cependant, le temps ne peut pas arrêter de couler et c'est là l'idée maîtresse du texte: il faut savourer le temps présent lorsqu'on est en présence de l'aimée.
Tout d'abord, ce poème est entièrement axé sur la libération des sentiments du personnage. Lamartine utilise le pronom personnel "je" (v.7, 25 et 27) pour exprimer ses émotions et ses sentiments. Le poète aime exposer ses états d'âme: "où l'amour à longs flots nous verse le bonheur" (v.34). L'auteur livre son désespoir face au "temps" (v.17, 26 et 31) qui coule trop rapidement tout au long du poème.
Dans les quatre premières strophes, la vie de l'être humain est présentée comme éphémère face à l'éternité du lac, et le bonheur apparaît réduit au souvenir.
La répétition d'«ainsi» (v.10 et 11) n'est pas une maladresse, c'est une insistance sur le fait que le paysage a un caractère immuable, ce qui fait d'autant plus souffrir le poète dont le paysage intérieur n'est plus le même: heureux devant ce même lac, il est aujourd'hui malheureux.

À la quatrième strophe commence le rappel d'un moment particulièrement heureux qu'ont vécu les deux amants auquel, par le «t'en souvient-il?» (v.13) est sollicitée la participation du lac; les deux amants firent une promenade en barque sur le lac, occasion peut-être de goûter une solitude propice à leur amour adultère. De cette strophe se dégagent des impressions d'intimité («soir» (v.13), «t'en souvient-il?» (v.13)) et de parfait accord des deux amants dans le bonheur; images qui retournent avec la «nuit» de la strophe huit, moment de bonheur pour ces amants qui ne peuvent se montrer en plein jour.
Le bonheur, enfin, est aussi un motif de jalousie pour le temps qui ne peut pas jouir et qui commet des injustices envers les humains.
Ensuite, le ton mélancolique de ce poème permet d'arriver à toute son ampleur avec l'épicurisme «Aimons donc, aimons donc ! de l'heure fugitive,/Hâtons-nous, jouissons!» (v.33 et 34) qui exprime le caractère pathétique de la condition humaine. L'«heure fugitive» impose des limites et souligne la fuite du temps, et «jouissons» met en évidence que, étant donné la brièveté des jours il faut jouir dans le présent, il ne faut pas attendre.
Les hommes sont à la merci de l'eau (v.3) et leur fragilité est confirmée parce que ils sont «poussés» (v.1), «emportés» (v.2), ils ne peuvent pas intervenir pour ce qui concerne l'écoulement du temps, les humains sont victimes du temps.
L'auteur est donc condamné à vivre dans un monde où "l'homme n'a point de port, le temps n'a point de rive" (v.31). Il ne peut "échappé[er]" (v.26) au temps qui s'"enfuit" (v.26). Ce pauvre homme seul aimerait reparcourir le temps pour pouvoir revivre les "plus beaux de nos [ses] jours" (v.20). Il désire revenir en arrière pour revivre les jours heureux avec son amie Julie, il implore le temps de "suspend[re] son vol" (v.17).
La solitude de l'auteur se fait ressentir par le champs lexical qu'il emploie: "seul" (v.7), "silence" (v.9), "malheureux" (v.21), "néants" (v.41). La douleur profonde liée au bonheur qui s'enfuit se fait ressentir tout au long du poème.
La nature est omniprésente et immortelle, elle est considérée comme une confidente sensible, une amie fidèle de l'être humain, elle témoigne le malheur du poète et elle est opposée à la fragilité de l'homme destiné à mourir.
Le pauvre solitaire fait refléter ses sentiments de tristesse par des éléments appartenant à la nature: "[...] nuit éternelle[...]" (v.2). Aussi, il implore "l'aurore" (v.27) de "dissiper la nuit" (v.28).
Mais le rapport avec la nature est tangible surtout dans les quatre dernières strophes, où le poète demande au lac et à la nature de participer activement pour rendre éternel son amour. C'est par eux que le souvenir de ce qui fut sera transmis aux générations à venir. Il ne s'agit plus simplement pour la nature de refléter les émotions du poète mais d'en devenir l'interprète et la gardienne. Il est caractéristique que le souvenir à perpétuer soit celui d'un amour bref et malheureux.
Dans la première strophe de cette dernière partie, il fait appel au lac directement, tout comme il l'avait fait à la deuxième strophe du poème. Mais, ici, le «Ô lac!» est suivi d'un appel aux «rochers», aux «grottes» et à la «forêt». Lamartine élargit le cadre du lac et y inclut les éléments qui l'entourent pour rendre son appel plus solennel.
Avant cette strophe, nous avons vu le poète se révolter contre l'image du temps qui dévore l'existence humaine. La nature, elle, n'est pas soumise à cette règle. Le temps ne la touche pas. En répétant sa prière au troisième vers, le poète demande à la nature d'être non seulement ce qu'elle a été, le cadre d'une nuit d'amour, mais aussi la gardienne bienveillante d'un souvenir que l'être humain, être éphémère, ne pourra conserver.
Le lac devient dans la deuxième strophe «Beau lac» (v.54), l'adjectif souligne que, pour le poète, c'est non seulement son immortalité mais aussi sa beauté qui lui a fait choisir le lac comme digne reposoir de son amour.
Alors que dans les deux strophes précédentes le poète a choisi de peindre le lac, dans la troisième strophe il nous fait sentir la douceur et la chaleur du «zéphyr» (v.57) (vent doux et agréable) en même temps qu'il nous fait entendre le bruit du vent et des eaux. Le «zéphyr» passager «frémit» (v.57) comme s'il était doué des sentiments humains.
En arrivant à la dernière strophe, le poète prie et commande à la fois, s'adressant au vent dont la voix se fait entendre tout d'abord seule puis unie au roseau, ce dernier choisi peut-être

comme symbole de la fragilité humaine. Les verbes employés ici, «gémit» (v.61) et «soupire» (v.61), soulignent le ton mélancolique de l'évocation d'un moment heureux qui n'est plus.
Le lac exprime le lieu d'un arrêt temporaire dans le cours du temps de la vie d'un individu, mais il constitue aussi le symbole du poème, état de réflexion et de réminiscence. L'auteur écrit: "[le temps] coule et nous passons!" (v.32) Ce n'est donc que par la permanence du poème, qui survivra même à l'auteur, que celui-ci pourra vraiment immortaliser les moments uniques qu'il a connus avec Julie Charles.

Un autre poème dédié à une femme aimée et à un amour passé est 'Le Pont Mirabeau' de Guillaume Apollinaire. Dans les années 1907 - 1912, il a une liaison avec Marie Laurencin. En 1912, date de rédaction du poème, la liaison est rompue. C'est vraisemblablement de celle-ci qu'il parle dans son poème. Le pont Mirabeau est un pont de Paris au niveau d'Auteuil, l'auteur y passait souvent. Apollinaire donne ce nom à son poème, le pont Mirabeau devient donc symbolique de sa rupture avec Marie Laurencin et de la brièveté des relations amoureuses.
Avant tout on doit remarquer que le poème n'a pas de ponctuation et cela lui confère un mouvement sans contrainte qui s'accorde parfaitement avec l'image centrale du poème, celle de l'eau qui coule, de sa fluidité, et avec un de ses thèmes principaux, la succession incessante des jours et des semaines; en plus cette suppression rend la compréhension ambiguë: les amours semblent couler autant que l'eau.
Il y a un regret élégiaque de l'amour qui s'enfuit, un rappel romantique d'une souffrance personnelle et, dans l'image de l'eau qui passe, le symbole d'un évanouissement nécessaire, Apollinaire réutilise la métaphore de l'eau qui coule pour représenter le temps qui s'écoule.
Il a mis en parallèle la Seine, l'eau qui coule avec le temps qui passe et a ainsi illustré son amour pour Marie Laurencin.
On remarque cette comparaison dès les deux premiers vers "Sous le pont Mirabeau coule la Seine et nos amours" ou encore "l'amour s'en va comme une eau courante" (v.13).
Contrairement à l'eau qui coule, le pont est immobile. On a ici une deuxième comparaison entre l'auteur et le pont qui symbolise sa rupture. Malgré son amour perdu, Apollinaire est toujours là et aime encore.
Les thèmes de la permanence et du passage sont développés pendant tout le poème; le poète le suggère, déjà à partir du premier vers, car, malgré la fuite de l'eau, la Seine reste toujours la Seine: le fleuve demeure. L'image du pont, opposée à celle de l'eau qui coule, souligne aussi l'antithèse entre la fuite, du temps et de l'amour, et la durée, du poète qui reste seul à désirer le souvenir et à vivre sa souffrance. Cette ambivalence on peut la voir aussi dans le refrain où «les jours s'en vont» et le poète «demeure».
Mais l'eau, le temps et l'amour sont mis aussi sur le même plan. Tous les trois passent inlassablement, indifférents aux sentiments de l'auteur et à la nature. L'eau et le temps dominent les sentiments et la situation de l'homme, ils sont des forces de la nature auxquelles l'homme ne peut se soumettre.
Le premier vers rend explicite l'équivalence eau-amour: la Seine, comme les amours, coule sous le pont; en autre la répétition de "L'amour s'en va" (v.13 et 14) intensifie la perception fugitive et négative de l'amour et le verbe est le même du refrain («Les jours s'en vont»). L'adjectif «courante» (v.13) aide à faire comprendre combien les amours sont rapides et crée un effet d'opposition de rythme avec «la vie [qui] est lente» (v.15) et dans ce vers est évidente la ressemblance entre la fuite des amours et celle de l'eau.
Le thème de l'eau est ici une métaphore qui évoque la fuite du temps mais aussi une seconde métaphore évoquant l'instabilité de l'amour et de la vie. Pour souligner le destin éphémère de l'amour Apollinaire met en relief le mot "Espérance" (v.16) qui suggère une force optimiste.
Le temps passe dans le rythme de l'eau qui coule et, comme elle, il ne revient pas ainsi que l'amour heureux.
Depuis le verbe «venait» (v.4), renforcé par l'adverbe «toujours» (v.4), il suggère un retour alterné entre la joie et la peine.
Si le vers semble à première vue exprimer une triste vérité, c'est-à-dire qu'il faut souffrir avant d'être heureux, il traduit en même temps un espoir: s'il y a alternance entre la joie et la peine, il est toujours possible que la peine soit suivie de la joie. Dans cette première strophe le poète

souligne donc le changement: la fuite de l'eau, la fuite des amours, mais aussi la fuite de la peine, de quelque chose de malheureux.
En tous cas, malgré la fuite du temps, malgré la fuite des amours, le poète demeure; il continue à vivre et pourra, peut-être, éprouver de nouvelles amours, profiter d'un renouveau effectué par le temps.
Ensuite dans la troisième strophe il y a le verbe «passer»: le «passent» (v.19) projette le poète vers les jours et les semaines futurs, l'adjectif «passé» (v.20 et 21) accentue la qualité irrévocable du temps qui ne s'arrête jamais.
Le passé ne reviendra pas, ainsi comme les amours, excepté sous la forme du souvenir.
On a aussi la répétition des vers «sous le pont Mirabeau coule la Seine» et «vienne la nuit sonne l'heure les jours s'en vont je demeure» au début et à la fin du poème, qui montre encore plus l'immobilité de l'auteur et la fluidité du temps. Le temps passe dans le rythme de l'eau qui coule et, comme elle, il ne revient pas ainsi que l'amour heureux. Ici le pont est le seul témoin de son amour passé. Le poète regrette le temps passé et le pont ici évoque des souvenirs. Cette répétition permet d'imaginer le retour au point de départ et elle donne l'idée d'un cycle: la Seine continuera à couler, les amours continueront à s'en aller, le poète continuera à tenter de se fixer dans le temps.
Enfin la répétition finale du refrain traduit la résignation douloureuse, la lassitude et aussi cette espèce de défi impatient du poète qui continuera à espérer grâce à sa méditation lyrique.

Publié en 1920 dans la *Nouvelle Revue française*, puis inséré dans le recueil «Charmes» (1922), le long poème 'Le Cimetière Marin', dont la composition, difficile, s'étala sur trois ans, est né de l'image intime de Sète, la ville de l'enfance et de la jeunesse de Valery, et du cimetière du mont Saint-Clair qui domine la Méditerranée et où sont enterrés ses parents.
Cette poésie rend tangible toutes les sensations liées à un paysage endormi sous un soleil baigné d'un ciel d'azur ardent, face au miroitement de la mer; «ce toit tranquille, où marchent des colombes», une surface offerte au silence intérieur, à une paix absolue qui permet de penser.
Le poème communique un sens d'ordre profond, vif et expressif et pas seulement un ordre logique.
'Le Cimetière Marin' peut être considérée comme le récit valéryen par excellence: en lui se fondent la forme mythique et l'expérience personnelle du poète méditerranéen, à qui l'univers lumineux de la terre provençale parle de la vie et de la mort, de la faiblesse et de la puissance de l'esprit humain. Il y a dans ce poème une descente aux enfers: celle qui tente d'expérimenter la mort, et qui la trouve, non pas dans un changement à venir allant vers la destruction de l'être, mais dans la souffrance d'une conscience malheureuse, affrontée au doute, aux métamorphoses du temps qui passe; mais le poème est aussi une remontée vers la vie; la descente aux profondeurs est comme quelque chose de magique qui permet de revivre.
La mort est dépassée dans un jaillissement de vie, dont la mer agitée est le signe visible. La mer ramène à la vie.
Le cimetière donc, emblème de la mort, est aussi comparé avec le calme de la mer. La mer est le «calme de dieux» (v.6), elle «toujours recommencée» (v.4), elle dont les vagues s'abolissent sur le rivage sans jamais y renoncer, donne l'idée de ce sens toujours visé et jamais atteint. Et cela est un spectacle de paix pour le poète, une récompense, c'est une image de l'éternité.
Le poète avoue dans un cri, «O mon silence!» (v.17) le voici s'élevant jusqu'au faîte de sa contemplation d'une heure immobile. «Midi» (v.75), qu'une seule aiguille peut marquer sur le cadran du temps et qui peut être son contraire, sans se modifier.

> Temple du Temps, qu'un seul soupir résume,
> À ce point pur je monte et m'accoutume,
> Tout entouré de mon regard marin ;
> Et comme aux dieux mon offrande suprême,
> La scintillation sereine sème
> Sur l'altitude un dédain souverain.

Strophe 4

Mais l'attitude du penseur est elle-même porteuse d'une adhésion à l'immobilité, que viennent combattre le jaillissement des réalités sensibles, le retour à la vie, perceptible dans le paysage comme dans l'âme du poète, qui retrouve la notion de sa vie individuelle, de l' «ère successive» (v.127), c'est-à-dire son inscription dans la finitude du temps. Les diverses croyances en l'immortalité étant perçues comme autant d'illusions, seule la mer, «puissance salée» (v.131), «douée de délires» (v.133), peut finalement aider le poète à opérer cette nouvelle naissance, qu'il appelle de ses vœux, et lui redonner la puissance de créer et d'agir qui viendra rompre la tentation du néant. Au terme de ce cheminement, «le vent se lève!...il faut tenter de vivre!» (v.139)

'Le Cimetière Marin' c'est une réflexion sur la condition mortelle de l'homme. Valéry décrit le rapport entre l'expérience humaine et la nature. Le narrateur semble être un personnage fictif qui néglige la mer d'un cimetière à côté d'une colline. L'homme dans le poème se promène entre les tombeaux et regarde la mer en même temps.

Le promeneur solitaire contemple dans le silence et le calme de midi le vaste miroir de l'eau étendu à ses pieds ne cherche pas à exprimer par de vaines paroles le sentiment extraordinaire de pureté et de paix qui le remplit. Il ne fait que se laisser imprégner par le spectacle sublime qui s'offre à ses yeux, par la présence, si proche de lui, de la mer inondée de soleil, du ciel brûlant de chaleur, jusqu'au moment où il se sent totalement confondu avec eux, et comme mêlé à leur substance plus intime.

Le temps, ici, n'est pas un mouvement qui nous mène d'un point à un autre, il n'a pas de sens. Il est arrêté, suspendu devant les regards de Valéry, comme une bonne étoile qui immobilise notre destin. Le poète déguste de l'être qu'il fut en faveur du non-être

Beau ciel, vrai ciel, regarde-moi qui change !
Après tant d'orgueil, après tant d'étrange
Oisiveté, mais pleine de pouvoir,
Je m'abandonne à ce brillant espace,
Sur les maisons des morts mon ombre passe
Qui m'apprivoise à son frêle mouvoir.

Strophe 6

Et c'est nouveau, l'engloutissement de l'esprit en lui-même, auprès d'un cœur, aux sources du poème. Alors les délices de la mort le reprennent. Les «anges curieux» (v.66), eux-mêmes, équivoques messagers d'un esprit qui cherche à comprendre, sont éloignés. Tout est permis à cette conscience diluée dans le néant. Les cadavres enviés ont ce privilège d'être devenues muets, d'avoir perdu leur être particulier, celui qui les distinguait, les faisait voir; comme le poète est vu par autrui:

Les morts cachés sont bien dans cette terre
Qui les réchauffe et sèche leur mystère.
Midi là-haut, Midi sans mouvement
En soi se pense et convient à soi-même ...
Tête complète et parfait diadème,
Je suis en toi le secret changement.

Strophe 13

Et cette âme, dans le poète, âme absurde, qui le tire vers la vie et les vivants, l'oblige au poème, est défiée:

Et vous, grande âme, espérez-vous un songe
Qui n'aura plus ces couleurs de mensonge
Qu'aux yeux de chair l'onde et l'or font ici ?
Chanterez-vous quand serez vaporeuse ?
Allez! Tout fuit! Ma présence est poreuse,
La sainte impatience meurt aussi !

Strophe 17

Mais la vie est là, irrécusable tentatrice. Et voici de nouveau la mer, comme néant. L'action, la poésie, les autres apparaissent au large comme un terre nouvelle. Le poète va se jeter dans cette mer à idoles, à délires, cette mer comme un sublime péché d'où est en train de naître une figure adorable et dégoûtante.

Non, non ! .... Debout ! Dans l'ère successive
Brisez, mon corps, cette forme pensive !
Buvez, mon sein, la naissance du vent !
Une fraîcheur, de la mer exhalée,
Me rend mon âme . . . O puissance salée !
Courons à l'onde en rejaillir vivant !

Strophe 22

Se taire n'est plus possible. Le poète quitte son mutisme abstrait, non sans nous dire qu'il rejoint un «tumulte au silence pareil» (v.138). Cette poésie symbolise une renaissance, un réveil.
L'indication du mouvement qui existe dans le poème révèle la continuation d'une forme de définition du "moi" en relation au changement graduel de la scène de la vie et la mort. Conscience et reflet du monde, «tu n'as que moi pour contenir tes craintes» (v.79), le poète en lui même ne trouve que le vide, «amère, sombre et sonore citerne» (v.47) et le «ver irréfutable» (v.112) de l'inquiétude métaphysique qui hante les vivants. L'acceptation du monde qui apporte ici le salut, d'où le mouvement magnifique de foi dans la vie qui soulève la fin du poème, «courons à l'onde en rejaillir vivant!» (v.132). C'est d'ailleurs uniquement dans cette relation avec l'Univers, réserve de formes, que le Moi trouve son existence, et l'esprit, la force de se construire lui-même en se donnant une forme.
Le Cimetière Marin est un de poème qui mieux représente la faiblesse de l'homme et la puissance de l'esprit: le paysage où les limites du cimetière trouvent leur contraste dans l'infini de l'espace marin et la pensée qui est dépassement de la vie et puis dépassement du désespoir.
La fin du poème est un cri de victoire, c'est le triomphe de l'être pensant sur le temps; ce un appel à accepter la vie, à renoncer a l'immortalité, à dépasser le temps dans l'action.

Les poèmes que j'ai analysés présentent des éléments communs comme l'eau et la nature, l'amour, la vie et le temps même s'ils sont traités de manière différente.
'Le Lac' et 'Le Pont Mirabeau' sont dédiés à une femme aimée et tous les deux évoquent la métaphore de l'eau et du temps qui coulent pour décrire l'amour qui s'enfuit et de la vie fragile et éphémère de l'être humain.
Par contre la différence la plus grande est l'idée de la joie face au temps: Lamartine veut reparcourir tous les moments heureux, Apollinaire croit au retour du bonheur, à un renouveau après les jours négatifs.
Dans ces deux poésies le temps l'emporte sur l'homme qui se résigne et qui en est victime,_mais le premier poète appartient à une période historique où il y a une certaine confiance dans l'individu et on croit dans sa capacité de changer et améliorer la société et l'existence de tous, en plus, la Nature, être immortel, rendra éternel le souvenir; tout autrement, le deuxième, ainsi que Valéry, vit dans un monde où tout semble perdre d'importance et dans lequel la guerre qui va arriver apporte une tension et une terreur qui s'épanchent sur l'homme.
Dans 'Le Cimetière Marin', au contraire, le poète comprend la nature du temps qui ne peut pas s'arrêter et accepte la vie en renonçant à l'immortalité. L'homme avait toujours cherché à cacher la négativité, la mort, en se réfugiant dans la certitude de l'immortalité, mais avec la vison de la mort (peut-être soulignée aussi par la première guerre mondiale) il voit s'écrouler ses points de référence, il ne voit plus son âme à côté de celles des grands héros: la vie est un cadeau fragile qui se éteint trop rapidement. A l'homme reste le «songe» avec lequel il peut construire de nouveaux mondes intérieurs et il peut revivre. Vie et mort donc, dans cette poésie, même si elles ne sont pas conciliées, elles sont reliées vers un image de réalité.

GREAT BRITAIN: THE SPHERE, PERSPECTIVE AND MULTIDIMENSIONAL WORLDS

In literature across the Channel we tend to speak about ideas in a more mathematical rather than literary way. When describing spheres, for example, reference is mad not to isoperimetric principle or the same old superficial tension, but rather to the idea of perspective and a multidimensional world.

The meeting between A. Square and the Sphere, for the visualization of four-dimensional space, is the theme of a very famous book, particularly in the Anglo-Saxon world: *Flatland: a romance of many dimensions*, by Edwin Abbot (1838 – 1926).

The author was an English theologian, an expert on Shakespeare and a maths teacher. The first edition was published anonymously in 1884 because, probably, the idea of a learned man of the Bible who wrote a similar book, would have been considered unbecoming.

The novel speaks about an imaginary bi-dimensional world called Flatland, a world inhabited by creatures who glide, like coins on a table or, to remain in theme, coloured zones on a soap bubble.

This story outlines Square's adventures and his attempt understand the third dimension. If we think of Square's difficulty in understanding the third dimension we can imagine, and understand too, our difficulty in dealing with the fourth dimension.

At the beginning of the story Square and his wife live in the comfortable peace of their house, when suddenly an unknown voice speaks to them; later on in their hermetically sealed house, a circumference appears.

A sphere materializes because it wants teach Square how to tackle the third dimension: «*I am not a plane Figure, but a Solid. You call me a Circle; but in reality I am not a Circle, but an infinite number of Circles, of size varying from a Point to a Circle of thirteen inches in diameter, one placed on the top of the other. When I cut through your plane as I am now doing, I make in your plane a section which you, very rightly, call a Circle. For even a Sphere – which is my proper name in my own country – if he manifests himself at all to an inhabitant of Flatland – must needs manifest himself as a Circle*.» Flatland isn't necessarily a flat place.

Flatland's inhabitants live in a bi-dimensional space that, in three dimensions appears curved. They aren't able to perceive the curvature in the space where they live because all things (and so also their bodies) are curved as the bi-dimensional surface that hosts them.

«I (A. Square) – What therefore more easy than now to take his servant on a second journey into the blessed region of the Fourth Dimension, where I shall look down with him once more upon this land of Three Dimensions, and see the inside of every three-dimensioned house, the secret of the solid earth, the treasures of the mines in Spaceland, and the intestines of every solid living creature, even of the noble and adorable Spheres.

Sphere – But where is this land of Four Dimensions?

I – I know not: but doubtless my Teacher knows

Sphere – Not I. There is no such land. The very idea of it is utterly inconceivable.

I – Not inconceivable, My Lord, to me, and therefore still less inconceivable to my Master. Nay, I despair not that, even here, in this region of Three Dimensions, your Lordship's art may make the Fourth Dimension visible to me; just as in the Land of Two Dimensions my Teacher's skill would fain have opened the eyes of his blind servant to the invisible presence of a Third Dimension, though I saw not.»

The Square, animated by a real geometrical spirit, draws inspiration from the discovery of the third dimension and tries to go beyond it *«In Three Dimensions, did not a moving Square produce - did not this eye of mine behold it – that blessed Being, a Cube, with eight terminal points? And in Four Dimensions shall not a moving cube – alas, for Analogy, and alas for the Progress of truth, if be not so – shall not, I say, the motion of a divine Cube result in a still more divine Organization with sixteen points? And consequently does it not necessary follow that the more divine offspring of the divine Cube in the Land of Four Dimensions, must have 8 bounding Cubes: and is not this also, as my Lord has taught me to believe, "strictly according to Analogy"?»*

«If I am wrong, I yield – says the Square still addressing the Sphere - *and will no longer demand a fourth Dimension; but, if I am right, my Lord will listen to reason. And once there, shall we stay upward course? In that blessed region of Four Dimensions, shall we linger on the threshold*

of the Fifth, and not enter therein? Ah, no! Let us rather resolve that our ambition shall soar with our corporal ascent. Then, yielding to our intellectual onset, the gates of the Sixth Dimension shall fly open; after that a Seventh, and then an Eighth…».

The Sphere doesn't agree; she had explained with analogy the passing from the Second to the Third Dimension, but she doesn't want to accept that the same reasoning may be applied to imagine higher dimensions. The Sphere eventually deny her own thinking: «*Analogy! Nonsense: what analogy? Whence this ill-timed impertinent request? And what mean you by saying that I am no longer the Perfection of all Beauty?*» and she ends, in a definitive way: «*And in any case, however great may be the number of different explanations, no one has adopted or suggested the theory of a Fourth Dimension. Therefore, pray have done with this trifling, and let us return to business.*».

Square doesn't give up: «*In vain did the Sphere, in his voice of thunder, reiterate his command of silence, and threaten me with the direst penalties if I persisted. Nothing could stem the flood of my ecstatic aspirations.*».

The Square mathematician is a rebel; he wants to have the opportunity to use the tools and means that he has at his disposal. The Sphere is only familiar with the Third Dimension and doesn't accept that her beauty is called in question by somebody on Earth.

Abbott was fascinated by new ideas about geometry, by innovations and by new ideas about the world (this is the era of Darwin's Theory of evolution, which is often celebrated in Abbott's book).

In the second half of the XIX century, geometry had deeply changed; the first examples of non-Euclidean geometry began to appear (Lobacevskij e Bolyai) but it remained for some more years a marginal aspect of this science, like a curiosity, until it was incorporated as an his integral part in mathematics thanks to G.F.B. Rienmann general ideas.

Abbott's thesis in this book is that Flatland has two dimensions because their inhabitants perceive two dimensions. Or, in other words, that spatial dimensions are as many as its inhabitants perceive. Square realizes that by being brave you can get a glimpse of other dimensions.

This doesn't mean that dimensions have only a spatial meaning, but rather they are simply an effective way to describe reality with its ever-increasing number of aspects, one independent from the other.

For most of us, or perhaps all of us, it's impossible to imagine a world consisting of more than three spatial dimensions. But couldn't a similar world exist? Or is it that our brains are incapable of imagining additional dimensions, dimensions that may turn out to be as real as other things we can't detect?

An early attempt to explain the concept of extra dimensions came with this novel where time and space are superposed; Abbott wrote Flatland before the unified picture of space and time emerged in the early 20th century mathematics and physics. Nowadays we would say that the Flatlanders live in 2+1 dimensional spacetime - two space dimensions and one time - and we live in 3+1 dimensional spacetime – three space dimensions and one time.

LE BOLLE NELL'ARTE

Mentre per i matematici sono modelli di una geometria delle forme molto stabili, per gli artisti le bolle di sapone sono state oggetto d'interesse non tanto per il loro aspetto ludico quanto come simbolo, come allegoria della fragilità delle cose umane, della vita stessa. Simbolo aereo e leggerissimo, sempre affascinante per l'infinita varietà di colori e di forme.

IL PIÙ FAMOSO

Così come la spiegazione sistematica delle bolle ha inizio solo nella seconda metà del XVII secolo, anche per gli artisti è questo il periodo in cui si manifesta il maggiore interesse per le bolle di sapone. La bolla diviene una costante all'interno del più vasto tema della caducità umana.
Una delle opere più famose è stata realizzata nella prima parte del Settecento da Jean Baptiste Siméon Chardin (1699-1779), in diverse versioni, dal titolo *Les bulles de Savon*.

Les bulles de Savon (Museum of Art - Los Angeles)

In questo quadro un ragazzo affacciato alla finestra sta soffiando una bolla di sapone. Sia lui sia il bambino vicino a lui sono pienamente immersi nella divertente attività; in ogni modo, per il XVIII secolo le bolle non erano solo una forma di intrattenimento, ma anche il simbolo della temporaneità della vita e della sua caducità. Il significato di questa immagine dà una svolta al tema della *vanitas*: la suggestione è che questo ragazzo sia superficiale e perda il suo tempo con le bolle di sapone.
La luce, che da sinistra investe la figura del giovane protagonista, permette allo spettatore di concentrare la propria attenzione sull'azione che egli sta compiendo.
Chardin ha catturato due giovani in un momento inatteso, inaspettato; egli ha rigorosamente costruito la sua opera ponendo al centro dell'attenzione la tralucente bolla in contrasto con i toni marroni del resto della composizione.

L'INCISIONE

Altra opera coeva a questa è *La Souffleuse de Savon* di Boucher, che cito non tanto per il disegno in sé, quanto per la poesia anonima con cui è accompagnata in un'incisione di Daullé e che rispecchia l'idea di vanità:

Amusons-nous sur la terre et sur l'onde
Malheureux, qui se fait un nom !
Richesse, honneur, faux éclat de ce monde,
Tout n'est que boules de savon

Abbi divertimento sulla terra e sul mare
Infelice è il diventare famoso!
Ricchezze, onori, false illusioni di questo mondo,
Tutto non è che bolle di sapone

EDOUARD MANET

Gamin faisant bulles de savon - 1867 (Museo Fondacion Gulbelkian - Lisbona)

Nel corso della sua attività, Manet ha sempre guardato al lavoro di altri grandi artisti del passato: Velasquez, Goya, Courbet. In particolare, fino al 1870 circa. Soprattutto, trae spunto anche dal lavoro di giovani artisti che apprezzava. Ad esempio, gli impressionisti, che influenzano la trasformazione nella sua pittura in atto proprio a partire dai primi anni '70. Questo rifarsi al lavoro di altri artisti non rappresenta un indice di debolezza. Proprio il contrario. Manet non ha timore di confrontarsi con il lavoro di coloro che per lui rappresentano punti di riferimento e punti di partenza per:

- la propria evoluzione stilistica
- la rivisitazione personale di soggetti e temi già conosciuti

La tela presa in questione si riferisce a un periodo in cui Manet guarda a molti modelli, che ha modo di studiare nelle sale del Louvre.
I contemporanei riconobbero in questo dipinto riferimenti artistico-storici a Frans Hals, a Murillo e Jean Baptiste Siméon Chardin.
Il soggetto richiama alla mente soprattutto Chardin, che, come abbiamo già detto, lo rielaborò svariate volte. La scioltezza della pittura ricorda di più Frans Hals, grande pittore olandese del '600, celebre per i suoi ritratti a mezzo busto e i ritratti di gruppo.
Il personaggio qui ritratto è Leon Leenhoff, che posò ripetutamente per Manet. La posa appare abbastanza tradizionale, così come è tradizionale per l'epoca il tema delle bolle di sapone, che anche in questo caso rappresentano un richiamo alla vanitas: simboleggiano, cioè, la precarietà della vita. La presenza stessa di un adolescente suggerisce questo tipo di richiamo.
D'altra parte, in Manet le implicazioni simboliche giocano un ruolo molto marginale. Infatti, l'interesse dell'artista quasi sempre non si rivolge tanto ai valori contenutistici dell'opera (il messaggio, i simboli, le allusioni, ecc.), quanto piuttosto ai valori formali (composizione, qualità del disegno, freschezza della pittura, ecc.).
Anche in questo caso Manet rivisita il soggetto in maniera personale.
L'opera non si propone di insegnare o dimostrare alcunché. E' priva di ogni traccia di sentimentalismo.
E' tutta centrata sulla figura del ragazzo e sulla corrispondenza tra zone in luce e zone in ombra. La pennellata è sciolta e rapida. La freschezza della pittura è tale da conferire al soggetto grande realismo e immediatezza.
Negli stessi anni Manet dipinge altri quadri che si rifanno a soggetti già conosciuti ("Cristo deriso", "Colazione nell'atelier", "Torero morto"). In tutti, come anche nel "Ragazzo che soffia

bolle di sapone", il soggetto non rappresenta il fine del quadro, ma il pretesto per sperimentare un tipo di pittura basata sull'immediatezza e sulla semplicità.

LE PRIME PUBBLICITÀ

Nel tardo XIX secolo le bolle di sapone divennero più popolari grazie a un poster pubblicitario della A. & F. Pears soap company.

Andrew Pears sviluppò un processo di fabbricazione che permise di rimuovere le impurità dalla base del sapone prima di aggiungere i profumi. Il sapone raffinato in questo modo era trasparente e creava bolle durature.

Nel 1886, la Pears Soap comprò "Bubbles", un'opera di John Everett Millais e chiese il permesso di inserire la scritta Pears Soap, conferendo ad essa lo statuto di immagine. L'artista acconsentì. Prima di diventare simbolo della Pears Soap, Millais intitolò l'immagine "A Child's World". Essa mostra William James, nipote del pittore, mentre sta giocando con le bolle di sapone.

Bubbles (National Museum of American History - Varsavia)

Dopo un lungo periodo di collaborazione, la Pears Soap smise di utilizzare l'immagine di Millais, ma essa venne riprodotta su piatti, scatole di caramelle, e divenne sempre più uno strumento commerciale in America e in Europa. Poche immagini nella storia dell'arte sono state così tanto diffuse prima del novecento.

Millais oggi non è un pittore molto conosciuto a chi non ha studiato arte, ciò nonostante una delle sue opere è una delle immagini più conosciute dal pubblico e questo lo si deve proprio alla collaborazione tra l'artista e la Pears Soap.

ARCHITETTURA

L'ESEMPIO ANTICO

La proprietà isoperimetrica era già nota, almeno empiricamente, nell'antichità.
Un esempio può essere la fondazione di Cartagine da parte della regina Didone, raccontata da Virgilio nell'Eneide, vediamone insieme l'estratto:

Giunsero in questi luoghi, ov'or vedrai
Sorgere la gran cittade e l'alta rocca
De la nuova Cartago, che dal fatto
Brisa nomossi, per l'astuta merce
Che, per fondarla, fèr di tanto sito
Quanto cerchiar di bue potesse un tergo.

Il nome dato a Cartagine è Byrsa che in greco significa pelle di bue e la leggenda a cui allude Virgilio è quella secondo cui Didone, arrivata in Africa, chiese al potente Iarba, re dei Getuli, un tratto di terra per potervi costruire una città. Il re, non volendo concedergliela, le assegnò in segno di scherno tanta terra quanta ne potesse circondare con la pelle di un bue. L'astuta Didone tagliò la pelle in striscioline sottilissime e si vide assegnata tutta la terra, affacciata sul mare, che poté circondare con le striscioline attaccate una all'altra.

LA NOSTRA CITTÀ

Si possono anche prendere ad esempio le cinta murarie di antiche città di pianura (Milano ne è un modello perfetto) che hanno una forma approssimativamente circolare, in modo da racchiudere il massimo spazio per lo sviluppo urbano nel modo meglio difendibile, rendendo quindi minima la parte esposta alle possibili invasioni esterne. Nel caso le città sorgessero vicino a un fiume, sulla riva del mare o comunque con un lato difeso naturalmente, allora le cinta murarie dovrebbero somigliare a una curva che, se riflessa in uno specchio immaginario, crei una circonferenza: questa curva è di conseguenza una semicirconferenza.

AL POLO

Come abbiamo già visto, così come la circonferenza è sul piano la figura che racchiude la massima superficie con il minimo perimetro, la sfera lo è nello spazio; anche la sfera dunque è spesso utilizzata in architettura. Basti pensare agli igloo semisferici degli Eschimesi: rappresentano perfettamente la soluzione di una struttura appoggiata su di un piano contenente il massimo volume d'aria a parità di superficie esterna.

Effettivamente se si soffiasse una bolla di sapone su una superficie piana, essa prenderebbe subito la forma di una semisfera.

FREI OTTO & LE TENSILE STRUCTURES

Ma arriviamo a qualcosa di più vicino alla nostra cultura…mai visto una partita di calcio allo stadio Olimpico di Monaco di Baviera (famoso, ahimè, per quanto accadde durante le Olimpiadi del 1972)?
Bene, quelle tende sospese, chiamate tecnicamente *tensile structures*, sono state realizzate utilizzando modelli di lamine saponate.
Questo stadio fu progettato e costruito dall'Istituto per le Strutture Portanti Leggere dell'Università di Stoccarda, sotto la direzione dell'architetto Frei Otto.
Costruiti con dei dispositivi di fili conficcati in basi di plexiglas, i modelli venivano immersi in acqua saponata e la pellicola che si formava era una superficie minima avente la forma di una tenda.

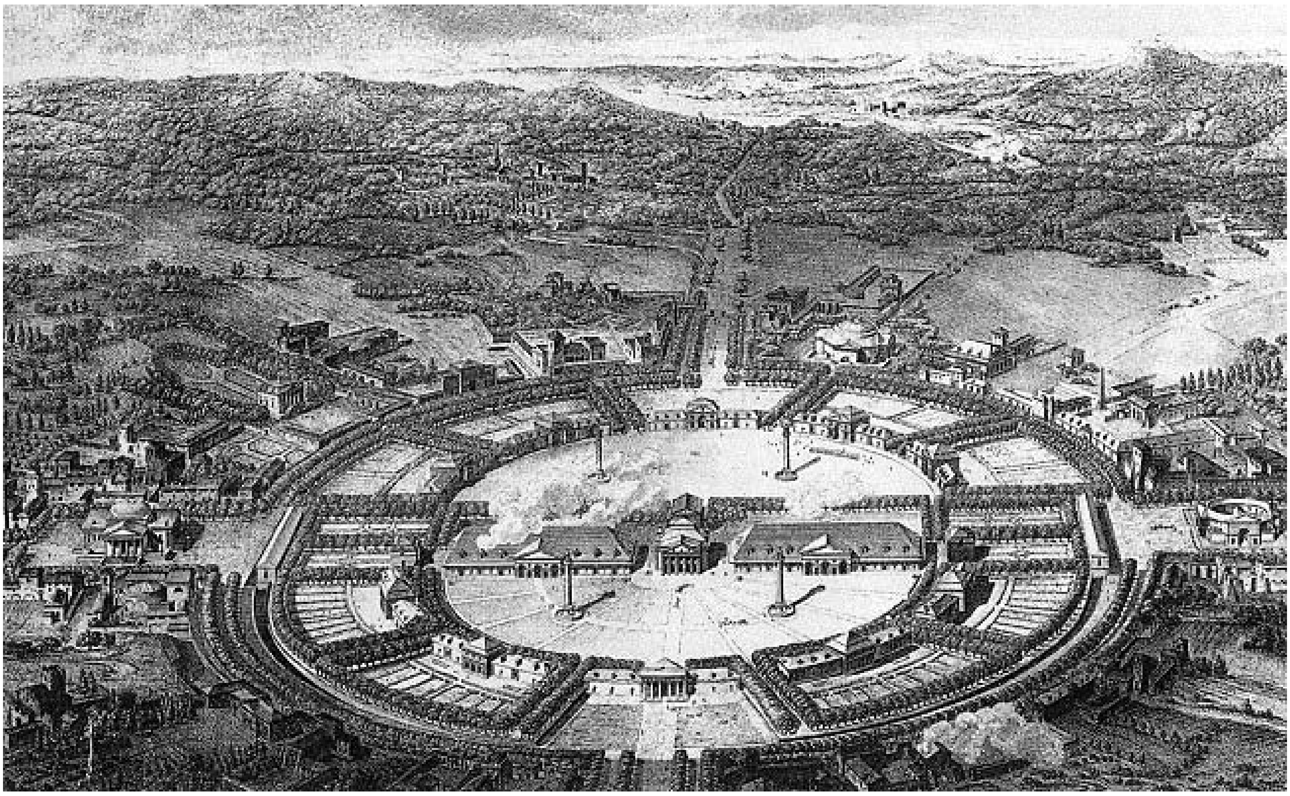
Nelle costruzioni reali i fili dell'esperimento vennero sostituiti da cavi d'acciaio, mentre tende di materiale sintetico, subentrarono alle lamine saponate. L'armatura metallica, reggente le tende, era costituita da cavi presollecitati disposti secondo le due principali direzioni di curvatura in modo da garantire l'uniforme ripartizione del carico superficiale e quindi la condizione di stabilità.

ARCHITETTURA: LA VISONE UTOPICA

Nell'orizzonte culturale tardosettecentesco e ottocentesco si sviluppano esperienze architettoniche quali il Neoclassicismo. Tutta l'arte neoclassica è rigorosamente progettata e si serve di tutti i mezzi che la tecnica mette a disposizione, rivalutando i nuovi materiali e la ricerca tecnico-scientifica degli ingegneri. Il linguaggio neoclassico si diffonde inizialmente in Francia, dove le personalità di maggior rilievo sono Etienne-Louis Boullée e Claude-Nicolas Ledoux.
Entrambi fanno parte di quella corrente detta della "visione utopica", con il progetto di realizzare costruzioni a pantheon o a sfera, così come città del sole o della luce.

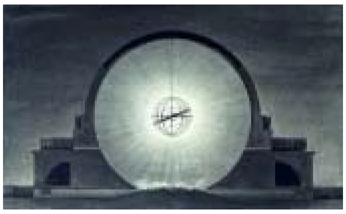
Ledoux propone una città a forma ellittica, la città di Chaux, una città perfetta sia per la sua estetica sia per la sua funzionalità, che vede al centro la casa del direttore e le fabbriche e sulla circonferenza gli alloggi per gli operai, intorno erano previsti frutteti e orti.

Ledoux definisce disastroso l'urbanismo del suo tempo che aggredisce la natura circostante e snatura l'uomo, la sua idea è quella di proporre soluzioni alternative alle cattive condizioni in cui erano le affollate realtà cittadine.
Egli applica a Chaux criteri di *ouverture*, con ugual distribuzione di aria di luce e di verde, criteri di *découpage*, separando luoghi di lavoro, di abitazione e di divertimento, e il tutto è regolato dalle leggi della geometria. Quest'idea di città effimera ed ideale rivela quindi un'idea di cuneo insinuato tra la praticità, il funzionale e l'esistente.
L'"utopia" in questa architettura sta nel fondere la modernità con un pensiero capace di interpretare il progresso. La città circolare è una variante strutturale di formule costanti nella storia dell'architettura urbana, è l'affermazione di un principio paradossale di un urbanismo esploso nell'immagine radiocentrica di Chaux, quello che segnala l'utopia è la funzione centrale assegnata al centro e che descrive l'insieme di un territorio segnalato come il perimetro di una nuova "urbe".



Claude-Nicolas Ledoux, progetti per la città di Chaux (1804)

Boullée si propone invece di costruire un sistema di principi architettonici basati su una visione artistica, i suoi progetti sono impostati su un'architettura visionaria per approdare a un razionalismo estremo, che escluda la casualità espressiva a favore di un controllo tecnico distributivo delle forme visuali e volumetriche pure, come il cubo e la sfera. La sua città ideale individua complementarietà tra metaforico ed emozionale, tra razionale e passionale, una nuova visione dell'architettura e delle città.



Etienne-Louis Boullée, *Progetto per il Cenotafio di Newton*, disegno (1784)

BIBLIOGRAFIA

GENERICO

S. Perkowitz, *La teoria del cappuccino*, traduzione di S. Coyaud dall'originale *Universal Foam,* Garzanti, 2001

A. Beutelspacher, *Matematica da tasca*, traduzione di A. Peroni dall'originale *Mathematik für die Westentesche*, Ponte alle Grazie, 2003

ARTE & ARCHITETTURA

C. Bassi, www.artdreamguide.com

FISICA

M. Ageno, *Elementi di fisica*, Boringhieri, 1972

FRANCESE

K.A. Blüher, *Oeuvres & Critiques, Paul Valéry Perspectives de la réception*, Ed. Jean-Michel Place, 1984

J. Robinson, *L'analyse de l'esprit dans les cahiers de Valéry*, Librairie José Corti, 1963

J. Charpier, *Essai sur Paul Valéry*, Ed. Pierre Seghers, 1958

AA. VV., *Centenaire de Paul Valéry*, Europe – revue littéraire mensuelle, juillet 1971

M. Parent e J. Levaillant, *Paul Valéry contemporain*, Ed. klincksieck, 1974

INGLESE

E. Abbott, *Flatlandia - Racconto fantastico a più dimensioni*, traduzione di M. d'Amico dall'originale *Flatland - A romance of many dimensions*, Adelphi, 2002

ITALIANO

I. Calvino, *Lezioni americane - Sei proposte per il prossimo millennio*, Mondatori, 2002

A. Palazzeschi, *Il Codice di Perelà*, SE, 1991

Piero Pieri, *Il Codice di Perelà di Palazzeschi. L'altro del fumo, l'oltre dell'uomo*, Fascicolo edito dalla casa editrice Gedit e frutto di una collaborazione con il Dipartimento di Italianistica dell'Università di Bologna, 2003

MATEMATICA

M. Cazzanelli, K. Soraruf, I. Tamanini, *Matematica e bolle di sapone, un viaggio alla scoperta di strutture geometriche e principi variazionali*, Fascicolo del Laboratorio di Ricerca sui Materiali e i Metodi per la Didattica e la Divulgazione della Matematica del Dipartimento di Matematica dell'Università degli studi di Trento, 2001

R. Courant e H. Robbins, Che cos'è la matematica?, traduzione di L. Ragusa Gilli dall'originale *What is mathematics? An elementary approach to ideas and methods*, Universale Bollati Boringhieri, 2002

M. Emmer, *Matematica e cultura 2002*, Springer, 2003

AA. VV., *Matemilano - percorsi matematici in città*, Springer, 2003

I. Petersen, *Il turista matematico*, Biblioteca Scientifica Sansoni, 2003