Liceo Scientifico "Giovanni Marinelli", Udine

La sorprendente scoperta delle

# GEOMETRIE NON EUCLIDEE

Federico Munini
Classe 5H
A.S. 2008/2009

# Indice

**Introduzione** **2**

**1 Gli *Elementi* di Euclide e il V postulato** **3**
1.1 Euclide di Alessandria . . . . . 3
1.2 Il metodo assiomatico . . . . . 3
1.3 Gli *Elementi* . . . . . 5
1.4 Il problema del V postulato . . . . . 6
1.5 Il postulato dell'unicità della parallela . . . . . 7

**2 La nascita delle geometrie non euclidee** **8**
2.1 L'importanza dell'opera di Saccheri . . . . . 8
2.2 Gauss, Lobačevskij e Bólyai . . . . . 10

**3 La geometria iperbolica** **12**
3.1 Rette secanti, parallele, e iperparallele . . . . . 12
3.2 Triangoli iperbolici . . . . . 14
3.3 La coerenza della geometria iperbolica . . . . . 15
3.4 Il modello di Poincaré . . . . . 16

**4 La geometria sferica** **20**
4.1 L'assioma di Riemann . . . . . 20
4.2 La geometria intrinseca della sfera . . . . . 20
4.3 Rette e triangoli sferici . . . . . 21

**5 Arte e geometria iperbolica** **23**
5.1 Escher, l'artista ispirato dalla matematica . . . . . 23
5.2 H.S.M. Coxeter, il matematico che ispirava gli artisti . . . . . 25
5.3 La serie *Limite del cerchio* di Escher . . . . . 26

**6 Discussioni filosofiche** **28**
6.1 La nuova concezione di teoria assiomatica . . . . . 28
6.2 Geometria e spazio fisico . . . . . 29

**A Una dimostrazione** **31**
A.1 Considerazioni sulla dimostrazione . . . . . 33

**Conclusioni** **34**

**Bibliografia** **35**

# Introduzione

Nella prima metà dell'Ottocento un importante evento ha avuto un'enorme influenza sul pensiero matematico: la nascita delle geometrie non euclidee, cioè di quelle geometrie diverse da quella tradizionale che si studia nelle scuole. Tecnicamente l'argomento risulta essere abbastanza complesso, soprattutto perché richiede una notevole capacità di astrazione. Questa trattazione si propone di introdurre il tema delle geometrie non euclidee in maniera semplice, senza (o quasi) formule e dimostrazioni; non si presuppongono poi, da parte del lettore, particolari conoscenze matematiche oltre a quelle "di base". Oltre all'aspetto più strettamente scientifico si parlerà anche di quello storico. Obiettivo di questo lavoro è anche quello di mostrare come l'evento della nascita delle geometrie non euclidee abbia avuto implicazioni non solo nella matematica, ma anche nella filosofia (in particolare nella *metamatematica*), nella fisica e addirittura nell'arte.

Personalmente ho scoperto dell'esistenza di questa affascinante disciplina della matematica qualche anno fa, grazie al libro *Il linguaggio della matematica: rendere visibile l'invisibile* di Keith Devlin. L'argomento mi ha subito affascinato, e di recente l'ho riscoperto leggendo *Gödel, Escher e Bach: un'Eterna Ghirlanda Brillante* di Douglas Hofstadter. Ho così deciso, in occasione dell'esame di maturità, di approfondire l'argomento e presentare questo lavoro.

Per creare questo documento ho usato il programma di composizione tipografica LaTeX. Le figure geometriche sono state disegnate usando il pacchetto `pstricks`. Le immagini delle opere di Escher sono tratte dal sito internet `http://www.mcescher.com` o da `http://images.google.it`. Di tutte le altre immagini è specificato il sito internet da cui provengono.

# Capitolo 1

# Gli *Elementi* di Euclide e il V postulato

## 1.1 Euclide di Alessandria

La geometria euclidea deve il suo nome al grande matematico dell'antichità greca Euclide, autore di una delle più celebri opere di matematica della storia, gli *Elementi*. Conosciamo molto poco intorno alla vita del famoso matematico: per certo si sa che visse tra il IV e il III secolo a.C. Una delle poche testimonianze note su Euclide è quella del filosofo bizantino Proclo (412-485 d.C.), che nel *Commento al primo libro degli* Elementi *di Euclide* scrive:

> Visse al tempo del primo Tolomeo, perché Archimede, che visse subito dopo Tolomeo primo, cita Euclide [...] Euclide era dunque più giovane dei discepoli di Platone, ma più anziano di Eratostene e di Archimede [...]

Proclo pone quindi Euclide dopo Platone (che morì nel 347 a.C.) e prima di Archimede (che nacque nel 289 a.C.); ci dice inoltre che Euclide visse durante il regno di Tolomeo I. Quest'ultimo istituì, ad Alessandria, un'accademia nota come il Museo, nella quale chiamò ad insegnare, insieme ad altri eminenti studiosi, Euclide. Per questo l'autore degli *Elementi* è noto come Euclide di Alessandria, e non come Euclide di Megara con il quale spesso è stato confuso.

## 1.2 Il metodo assiomatico

Gli *Elementi* di Euclide sono il primo testo in cui viene fatto uso del metodo assiomatico: vediamo in breve di che cosa si tratta.

Una conoscenza matematica (o geometrica) si esprime attraverso una proposizione, come ad esempio la seguente: "In un triangolo non vi possono essere due angoli retti". Data una certa proposizione, il problema è quello di stabilire se essa sia vera o falsa. Non si può, in matematica, stabilire la verità di una certa proposizione in assoluto, ma sempre in relazione ad altre proposizioni. Per provare quindi che una certa proposizione è vera, bisogna dimostrare che essa segue logicamente da una serie di altre proposizioni. Ma queste ultime sono vere

Figura 1.1: Particolare della *Scuola di Atene* di Raffaello, in cui è rappresentato Euclide (da `http://it.wikipedia.org`).

o false? Per provarlo si dovrebbe fare riferimento ad altre proposizioni ancora. Questo porta però ad un regresso infinito: si finirebbe cioè per doversi riferire continuamente ad altre proposizioni. Proprio per evitare questo problema, i matematici hanno elaborato il metodo assiomatico. Esso si basa sull'assunzione iniziale di alcune proposizioni, dette *assiomi*: esse vengono accettate come vere senza bisogno di una dimostrazione. Secondo questo metodo, una data proposizione è vera se, e solo se:

- è un assioma; opppure
- è un teorema dimostrato correttamente a partire dagli assiomi o da proposizioni già dimostrate in precedenza.

La verifica della correttezza di una dimostrazione è oggetto di studio della disciplina chiamata *logica*.

In un assioma, o in una generica proposizione, vi possono essere dei termini che hanno bisogno di una definizione. Ad esempio la proposizione "Si dice isoscele un triangolo avente due lati uguali" è una definizione del termine "isoscele". Il termine che va definito (in questo caso la parola "isoscele") si chiama *definiendum*, mentre la proposizione che definisce, cioè la definizione in sè, è detta *definiens*. Nel definiens saranno presenti altri concetti che bisogna definire (nell'esempio, i termini "triangolo" e "lato"). Come nel caso della dimostrazione delle proposizioni, anche in questo caso si andrebbe incontro ad un regresso infinito. Per evitare questo, vengono perciò elencati, inizialmente, alcuni *concetti primitivi*, cioè termini che non vengono definiti. Risulta interessante notare che,

sebbene i concetti primitivi non vengano definiti esplicitamente, essi vengono definiti implicitamente dagli assiomi che ne fanno uso.

In una teoria assiomatica, quindi, si elencano innanzitutto una lista di concetti primitivi e una lista di assiomi. Tutti gli altri concetti saranno poi definiti a partire dai concetti primitivi, e tutte le altre proposizioni verranno dedotte, mediante dimostrazioni, a partire dagli assiomi.

## 1.3 Gli *Elementi*

Euclide raccolse negli *Elementi* gran parte delle conoscenze matematiche del tempo, e fu il primo ad organizzarle secondo il metodo assiomatico. L'opera è suddivisia in tredici libri, che trattano la geometria piana elementare, la teoria dei numeri, gli incommensurabili[1] e la geometria solida.

Il libro I inizia con un elenco di ventitrè definizioni, tra cui:

- Un punto è ciò che non ha parti
- Una linea è una lunghezza senza larghezza
- Una superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza

Si può obiettare dicendo che in realtà queste non sono vere definizioni: manca infatti, nell'opera di Euclide, l'elenco dei concetti primitivi. Nelle moderne assiomatizzazioni, proprio i concetti di punto, retta e piano sono assunti come primitivi.

Dopo le definizioni, Euclide elenca cinque postulati e cinque nozioni comuni (o assiomi). Nella matematica moderna non vi è una distinzione tra assiomi o postulati. Secondo la concezione classica di teoria assiomatica (che si può ricondurre ad Aristotele), invece, gli assiomi sono quegli enunciati convincenti di per sè, in quanto verità comuni a tutte le scienze, mentre i postulati sono proposizioni meno evidenti, che riguardano soltanto la disciplina in questione (la geometria nel nostro caso). Le nozioni comuni sono le seguenti:

1) cose uguali a una medesima cosa sono uguali anche tra loro;
2) se cose uguali vengono aggiunte a cose ugali, gli interi sono uguali;
3) se cose uguali vengono sottratte da cose ugali, i resti sono uguali;
4) cose che coincidono l'una con l'altra sono uguali l'una all'altra;
5) l'intero è maggiore della parte.

Questi assiomi enunciano proprietà molto generali della relazione d'identità o delle relazioni d'ordine. I postulati affermano che:

I) si possa tracciare una retta da un punto qualsiasi a un punto qualsiasi;
II) si possa prolungare indefinitamente una linea retta;
III) si possa descrivere un cerchio con un centro qualsiasi e un raggio qualsiasi;

[1] Per "incommensurabile" si intende un numero irrazionale, cioè non esprimibile come rapporto di due interi.

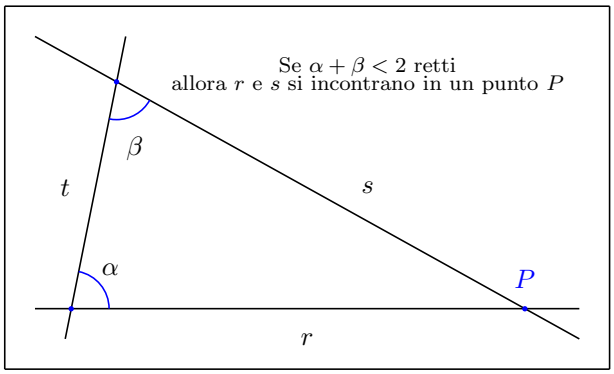



Figura 1.2: Il V postulato

IV) tutti gli angoli retti siano uguali;

V) se una retta che interseca due altre rette forma dalla stessa parte angoli interni inferiori a due angoli retti, le due rette, se estese indefinitivamente, si incontrano da quella parte dove gli angoli sono inferiori a due angoli retti.

In riferimento alla figura 1.2, il V postulato afferma che, se due rette $r$ e $s$ tagliate da una terza retta $t$ formano due angoli $\alpha$ e $\beta$ tali che $\alpha + \beta$ è minore di due angoli retti, allora $r$ ed $s$ si incontrano in un punto $P$ dalla parte di $t$ in cui vi sono $\alpha$ e $\beta$. Il V postulato, per ragioni che vedremo più avanti, è detto anche *postulato delle parallele*.

Anche a una prima lettura, si nota immediatamente quanto il V postulato sia più complesso e meno intuitivo degli altri. Proprio questo postulato ha un'importanza fondamentale nella nascita delle geometrie non euclidee, come vedremo nei prossimi capitoli.

## 1.4 Il problema del V postulato

Secondo la concezione classica di teoria assiomatica, gli assiomi (o postulati) devono essere proposizioni la cui verità risulti particolarmente "evidente". Fin dall'antichità i matematici hanno ritenuto che il V postulato non avesse il grado di evidenza proprio di un assioma, e probabilmente anche lo stesso Euclide. Infatti nelle 32 proposizioni che, negli *Elementi*, seguono agli assiomi e ai postulati, Euclide fa uso del V postulato solo dopo le prime 28 proposizioni. Questo fatto è un'anomalia, dal momento che Euclide, fin dalle prime proposizioni, sfrutta tutti gli altri quattro postulati. Questo avvalora la tesi che Euclide abbia esitato molto prima di includere tra gli assiomi il V postulato, tentandone probabilmente una dimostrazione a partire dai primi quattro postulati. Come si può risolvere allora il problema dell'evidenza del V postulato? Ci sono sostanzialmente tre vie.

Un primo modo è quello di cercare di dimostrarlo a partire dai primi quattro. La geometria che si basa sui primi quattro postulati di Euclide viene chiamata *geometria assoluta*. Quindi il problema si risolve se si riesce a dimostrare il

V postulato nella geometria assoluta. Per più di duemila anni innumerevoli matematici si sono cimentati in quest'impresa, fallendo.

Un secondo modo è quello di trovare una proposizione $P$ dalla quale sia deducibile il V postulato e includere $P$ tra gli assiomi. Naturalmente questa proposizione $P$ dovrà avere un grado di evidenza maggiore del V postulato. Neanche questa via ha condotto ad una soluzione.

La terza via, che si è poi rivelata quella corretta, è far vedere che il V postulato *non è dimostrabile nella geometria assoluta*. Prima di arrivare a questa importantissima conclusione si è dovuti passare attraverso moltissime "dimostrazioni" (tutte errate) del V postulato.

## 1.5 Il postulato dell'unicità della parallela

Durante la lunga storia dei tentativi di dimostrazione del V postulato sono state individuate molte proposizioni equivalenti[2] al V postulato. La più famosa è quella dell'unicità della parallela[3], la quale afferma che:

> Dati un punto e una retta non passante per quel punto, esiste al più una retta passante per il punto e parallela alla retta data.

Questa proposizione, essendo equivalente al V postulato, può essere sostituita ad esso, ed è proprio ciò che si fa nelle moderne assiomatizzazioni della geometria euclidea. Si noti che questo assioma afferma che esiste *al più* una parallela; il fatto che ne esista effettivamente una può essere dimostrato in geometria assoluta, e quindi non c'è bisogno di assumerlo come assioma.

[2] Due proposizioni $P$ e $Q$ si dicono equivalenti se vale

$$P \Leftrightarrow Q$$

Il simbolo $\Leftrightarrow$ sta per "se e solo se". Per dimostrare che $P$ e $Q$ sono equivalenti, quindi, non solo bisogna mostrare che se vale $P$ allora vale $Q$, ma anche che se vale $Q$ allora vale $P$.

[3] Secondo la definizione di Euclide, due rette che appartengono a uno stesso piano si dicono parallele se non hanno alcun punto in comune.

# Capitolo 2

# La nascita delle geometrie non euclidee

Come accennato in precedenza, il V postulato ha un'importanza fondamentale nello sviluppo delle geometrie non euclidee. Per secoli moltissimi matematici hanno prodotto delle dimostrazioni del V postulato, tutte sbagliate. L'errore stava, nella maggior parte dei casi, nell'assunzione, spesso inconsapevole e implicita, di un postulato equivalente a quello da dimostrare: si entra in un circolo vizioso, e ciò falsa la dimostrazione. Solo nell'Ottocento alcuni matematici hanno cominciato a convincersi che il V postulato fosse indimostrabile nella geometria assoluta, cioè nel sistema formato dai primi quattro postulati di Euclide. Si capì dunque che il V postulato poteva anche essere negato, senza giungere ad alcuna contraddizione. Se alla geometria assoluta viene aggiunta la negazione del V postulato come assioma, si ottiene una nuova geometria, detta *iperbolica*. Questa è chiamata geometria non euclidea proprio perché si differenzia da quella basata sui cinque postulati di Euclide, in particolare sul quinto. Come vedremo più avanti, esistono anche altre geometrie considerate non euclidee, come quella *sferica*. Per quest'ultima, però, è necessario operare delle modifiche anche agli altri assiomi della geometria assoluta.

## 2.1 L'importanza dell'opera di Saccheri

Tra i tentativi di dimostrazione del V postulato il più significativo è senza dubbio quello dell'italiano Girolamo Saccheri (1667-1733), un gesuita che insegnò in vari collegi del suo ordine in Italia. Saccheri era profondamente convinto che la geometria euclidea fosse l'unica valida, ed era quindi sicuro della dimostrabilità del V postulato. Nell'anno della sua morte, egli pubblicò l'opera *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclide liberato da ogni macchia), nella quale tentò proprio di dimostrare il V postulato. L'approcio di Saccheri fu però diverso da quello dei suoi predecessori, in quanto egli tentò la strada della *reductio ad absurdum* (dimostrazione per assurdo). Essa consiste nel negare la proposizione che si vuole dimostrare per poi giungere a una contraddizione.

Il lavoro di Saccheri si svolge interamente nella geometria assoluta. Egli partì dall'analisi di un quadrilatero birettangolo isoscele (figura 2.1), cioè un quadrila-

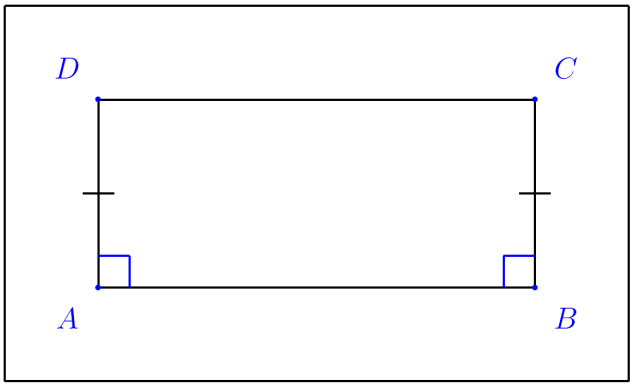



Figura 2.1: Il quadrilatero birettangolo isoscele.

tero con due lati opposti uguali ed entrambi perpendicolari alla base. Dopo aver dimostrato che gli angoli in $C$ e in $D$ dovevano essere uguali, avanzò tre ipotesi:

1. l'ipotesi dell'angolo acuto
2. l'ipotesi dell'angolo retto
3. l'ipotesi dell'angolo ottuso

a seconda che gli angoli in $C$ e in $D$ fossero minori, uguali o maggiori di un angolo retto. Dall'affermazione che i due angoli sono retti segue il V postulato: dimostrando cioè che l'ipotesi dell'angolo retto è l'unica corretta si dimostrerebbe il V postulato. Saccheri cercò quindi di mostrare, sempre nella geometria assoluta, che le ipotesi dell'angolo acuto e dell'angolo ottuso portavano a conclusioni assurde. Saccheri riuscì senza troppe difficoltà a confutare la terza ipotesi: assumendo cioè l'ipotesi dell'angolo ottuso pervenne ad una contraddizione. Partendo dall'ipotesi dell'angolo acuto, invece, egli dedusse numerosi teoremi, senza cadere in alcuna contraddizione. A un certo punto Saccheri dimostrò l'esistenza di rette dal comportamento asintotico, cioè che si avvicinano sempre di più a una retta (chiamata *asintoto*) senza mai incontrarla. Il gesuita, a questo punto, scrisse:

> L'ipotesi dell'angolo acuto è assolutamente falsa, perché ripugna alla natura della linea retta.

Questa affermazione non può costituire, dal punto di vista logico, una confutazione dell'ipotesi dell'angolo acuto. Il comportamento asintotico delle rette non costituisce infatti una contraddizione, ma è semplicemente qualcosa che va contro l'intuizione.

La dimostrazione di Saccheri è perciò sbagliata, ma in realtà, proprio grazie alla sua opera, il padre gesuita può essere considerato un precursore della geometria non euclidea. Infatti egli, nella sua dimostrazione, assunse l'ipotesi dell'angolo acuto, negando il V postulato, con l'obiettivo di giungere a una contraddizione. Facendo questo, aveva inconsapevolmente costruito una nuova geometria non euclidea, quella che poi sarebbe passata sotto il nome di geometria iperbolica.

Figura 2.2: Carl Friedrich Gauss (da `http://it.wikipedia.org`).

## 2.2 Gauss, Lobačevskij e Bólyai

Più di una volta nella storia della matematica, e della scienza in generale, vi sono stati casi di scoperte simultanee. Uno di questi è proprio quello delle geometrie non euclidee. All'inizio dell'Ottocento, infatti, furono tre i matematici che per primi svilupparono delle geometrie diverse da quella euclidea.

Il primo fu il tedesco Carl Friedrich Gauss (1777-1855), uno dei matematici più importanti della storia moderna. Durante il secondo decennio del XIX secolo egli si era reso conto che tutti i tentativi di dimostrare il V postulato di Euclide erano stati vani, e che erano possibili geometrie diverse da quella euclidea. Nel 1824, in una lettera a un collega, scrisse di aver sviluppato "una curiosa geometria, piuttosto diversa dalla nostra, ma fortemente coerente". Gauss non pubblicò però mai i suoi risultati, né li comunicò ad altri matematici: egli aveva elaborato tale concetto solo "per se stesso". L'affermare che la geometria euclidea non è l'unica possibile avrebbe potuto arrecare danno alla sua notevole reputazione: egli stesso dichiarò di temere le "strilla dei Beoti".

A partire dal 1826 il matematico russo Nicolaj Ivanovič Lobačevskij (1793-1856), dopo aver osservato che nessuno era mai riuscito ad elaborare una dimostrazione corretta del V postulato, enunciò numerosi teoremi della nuova geometria oggi chiamata iperbolica. La pubblicazione del saggio *Sui principi della geometria* nel 1829 segna la nascita ufficiale della geometria non euclidea. Questa era basata sulla negazione del postulato delle parallele, cioè si fondava sull'ipotesi che per un punto $P$ esterno ad una retta $r$ si possa tracciare nello stesso piano più di una retta che non intersechi $r$. Da questo nuovo postulato, sostituito a quello dell'unicità della parallela, Lobačevskij dedusse una nuova geometria, che non presentava nessuna contraddizione logica. Appariva però allo stesso autore talmente controintuitiva che egli la chiamò "geometria immaginaria".

L'ungherese János Bólyai (1802-1860) giunse alle stesse conclusioni di Gauss e di Lobačevskij negli stessi anni, in maniera indipendente. Già il padre, Farkas Bólyai, aveva dedicato lungo tempo ai tentativi di dimostrare il postulato delle

parallele. Quando seppe che anche il figlio aveva cominciato a interessarsene, gli scrisse:

> Per amor del cielo, ti imploro di desistere dal tentativo. Il problema delle parallele è una cosa da temere ed evitare non meno delle passioni dei sensi, poichè anch'esso può rubarti tutto il tempo e privarti della salute, della serenità di spirito e della felicità.

János non si fece dissuadere dalle parole del padre, e nel 1829 elaborò quella che egli chiamò "scienza assoluta dello spazio", partendo dall'ipotesi che per un punto $P$ esterno a una retta $r$ si possano tracciare, nello stesso piano, infinite rette parallele a $r$.

Dopo due millenni si era finalmente giunti a una soluzione del problema del V postulato: si era capito che la geometria euclidea non è l'unica possibile. Era nata allora una nuova geometria, quella iperbolica. Questo eccezionale risultato non suscitò da subito grande interesse da parte della comunità scientifica. Molti matematici erano scettici, e ritenevano che prima o poi qualcuno sarebbe riuscito a dimostrare che la geometria iperbolica era *incoerente*, cioè che nascondeva al suo interno delle contraddizioni. Passarono parecchi anni prima che la geometria non euclidea fosse riconosciuta come valida, in particolare dopo la morte di Gauss, quando i matematici vennero a sapere che il grande studioso tedesco l'aveva ritenuta perfettamente legittima.

# Capitolo 3

# La geometria iperbolica

In questo capitolo enunceremo, senza dimostrazione, alcune proprietà inerenti alle rette e ai triangoli nella geometria iperbolica. Poi vedremo quali sono i modelli che permettono di dimostrare la coerenza della nuova geometria.

## 3.1 Rette secanti, parallele, e iperparallele

Come già detto in precedenza, la geometria iperbolica si ottiene negando il V postulato. Poichè questo è equivalente al postulato dell'unicità della parallela, nella geometria iperbolica viene negato anche quest'ultimo. Infatti l'"assioma di Lobačevskij", che viene sostituito al V postulato, afferma che:

> Dati in un piano una retta e un punto esterno, per il punto passano almeno due rette che non incontrano la retta data.

Se esistono almeno due rette parallele a una retta data passanti per uno stesso punto, vuol dire che ne esistono infinite, cioè almeno tutte quelle comprese tra le due. La definizione di rette parallele, in geometria iperbolica, è però diversa rispetto alla geometria euclidea. Si veda la figura 3.1. Le rette che intersecano $r$ (cioè che hanno un punto in comune con essa) sono dette secanti o incidenti, mentre quelle che non intersecano $r$ vengono chiamate non secanti. Queste

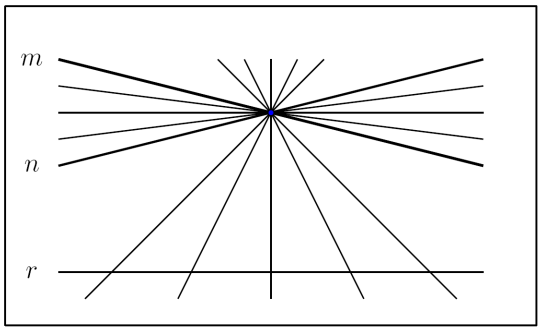



Figura 3.1: Le rette $m$ e $n$ sono parallele a $r$, tutte le rette comprese tra $m$ e $n$ sono iperparallele. Le altre, che intersecano $r$, sono dette secanti.

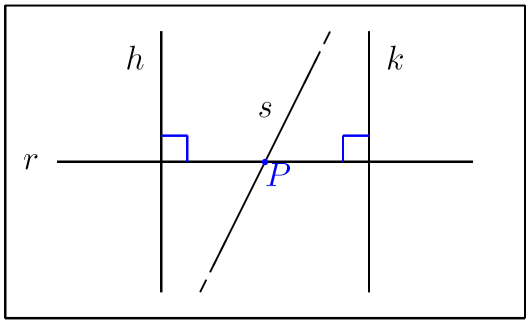



Figura 3.2: La retta $s$, incidente a $r$ nel punto $P$, è compresa tra le due rette $h$ e $k$, perpendicolari a $r$ e simmetriche rispetto a $P$.

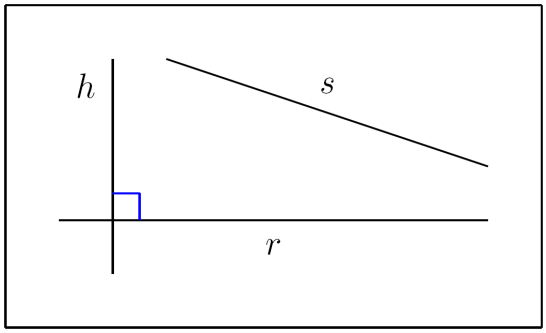



Figura 3.3: Nel verso del parallelismo, le rette $r$ e $s$ si avvicinano sempre di più, mentre nel verso oppposto si allontanano sempre di più. La retta $h$ è la prima perpendicolare a $r$ che non interseca $s$.

ultime si dividono in due gruppi. Le rette parallele sono rette non secanti e sono gli elementi di separazione tra le rette secanti e quelle non secanti. Con questa definizione, quindi, esistono esattamente due rette parallele (le rette $m$ e $n$ della figura 3.1). Le altre rette non secanti, cioè tutte quelle comprese tra $m$ e $n$, sono dette iperparallele. Vediamo ora alcune semplici proprietà che riguardano i tre tipi di rette.

**Rette secanti** Si può dimostrare che se $r$ e $s$ sono due rette secanti, allora la retta $s$ è compresa tra due rette $h$ e $k$ perpendicolari a $r$ e simmetriche rispetto a $P$ (si veda la figura 3.2).

**Rette parallele** Se prendiamo invece due rette parallele, si può dimostrare (come in realtà aveva già fatto Saccheri) che esse hanno un comportamento asintotico, cioè si avvicinano sempre di più senza mai incontrarsi. Esse non sono perciò equidistanti, come accade in geometria euclidea. Quando si prendono in considerazione due rette parallele è necessario specificare il *verso* del parallelismo, cioè bisogna specificare in che verso le rette si avvicinano sempre di più. Nel caso della figura 3.3 la retta $s$ è parallela a $r$ verso destra. Si può poi dimostrare che, nel verso opposto a quello del

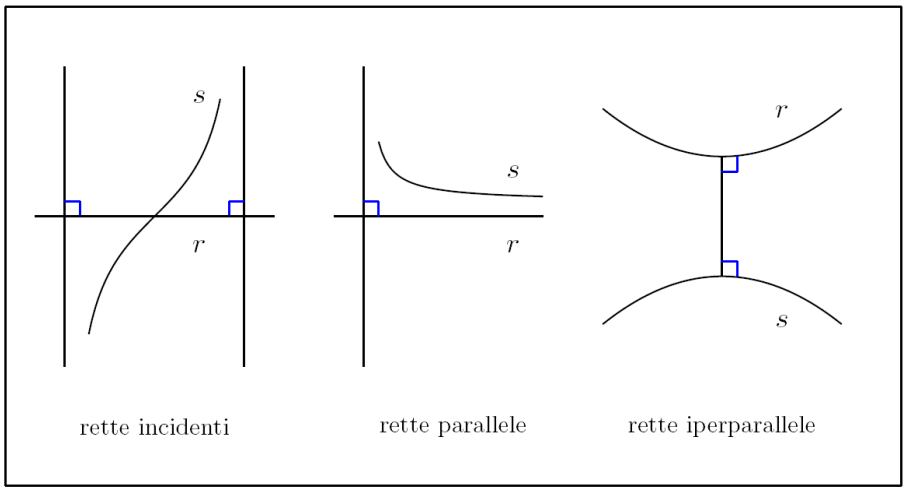



Figura 3.4

parallelismo, le due rette divergono indefinitamente. Non tutte le rette perpendicolari a $s$, inoltre, incontrano $r$: la retta $h$ in figura è la prima perpendicolare a $s$ a non intersecare $r$.

**Rette iperparallele** Si può dimostrare che due rette iperparallele hanno una, e una sola, perpendicolare in comune. Inoltre il segmento di minima distanza tra le due rette è quello che giace sulla perpendicolare comune e ha gli estremi sulle due rette.

Nella figura 3.4 sono sintetizzate le proprietà appena esposte. Sono stati usati degli espedienti grafici per dare una rappresentazione intuitiva della situazione.

## 3.2 Triangoli iperbolici

La principale differenza tra triangoli euclidei e triangoli iperbolici riguarda la somma degli angoli interni. Nella geometria euclidea la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre uguale a due angoli retti, qualunque sia il tipo di triangolo. Nella geometria iperbolica, invece, la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre minore di due angoli retti. Non ha poi un valore fisso, come nella geometria euclidea, ma può assumere tutti i valori strettamente compresi tra zero e due retti.

Indicando con $R$ l'ampiezza di un angolo retto e con $S$ la somma degli angoli interni di un triangolo, la quantità $d = 2R - S$ si chiama *difetto angolare* del triangolo. Si può dimostrare che l'area di un triangolo è direttamente proporzionale al suo difetto angolare: più cresce il difetto angolare, più aumenta l'area. Poichè nella geometria iperbolica $0 < d < 2R$, segue che l'area dei triangoli è superiormente limitata. Mentre nella geometria euclidea l'area di un triangolo può essere grande a piacere, nella geometria iperbolica non può essere più grande di un certo valore. Un triangolo assume area massima quando il suo

difetto angolare tende a $2R$, cioè quando la somma degli angoli interni tende a diventare uguale a 0.

Ci sono poi altre "strane" proprietà, come il fatto che due triangoli aventi i tre angoli uguali sono uguali tra loro. Nella geometria euclidea, invece, non vale questo criterio: se due triangoli hanno tutti gli angoli uguali allora essi sono simili, ma non è detto che siano uguali.

## 3.3 La coerenza della geometria iperbolica

Quando Saccheri lavorò nell'ipotesi dell'angolo acuto, cioè nella geometria iperbolica, cercò una contraddizione che portasse ad escludere l'ipotesi stessa. Ora possiamo dire che stesse cercando di dimostrare che la geometria iperbolica è incoerente, cioè contraddittoria: per fare questo è sufficiente trovare una singola contraddizione. Come si può, invece, dimostrare che la geometria iperbolica è coerente, cioè che non ha al suo interno alcuna contraddizione? Questo problema è indubbiamente più complesso, dal momento che non è possibile verificare che tutte le proposizioni della geometria iperbolica sono non contraddittorie: esse sono potenzialmente in numero infinito. Il problema può essere risolto attraverso il *metodo dei modelli*. Esso consiste nel prendere una teoria assiomatica, darne un'interpretazione dei concetti primitivi, e fare poi vedere che, in base a questa interpretazione, gli assiomi della teoria sono validi.

Nel caso della geometria iperbolica, si possono interpretare i suoi concetti primitivi nella geometria euclidea: per questo si parla di *modelli euclidei della geometria non euclidea*. Vi sono quindi due passaggi fondamentali:

1. i concetti primitivi della geometria iperbolica vengono interpretati come altrettanti concetti della geometria euclidea: gli assiomi della geometria iperbolica vengono così automaticamente "tradotti" in proposizioni della geometria euclidea;

2. si dimostra che le proposizioni della geometria euclidea che corrispondono agli assiomi della geometria iperbolica sono veri, cioè che sono teoremi della geometria euclidea.

Bisogna notare che, compiuti questi passi, si dimostra che la geometria iperbolica è coerente se lo è la geometria euclidea, il che però non è mai stato messo in dubbio. Una volta dimostrata la non contradditorietà della geometria iperbolica (rispetto a quella euclidea) si può logicamente concludere che il V postulato è indimostrabile nella geometria assoluta.

Il primo modello della geometria iperbolica, la *pseudosfera*, fu trovato nel 1868 dal geometra italiano Eugenio Beltrami (1835-1900). La pseudosfera, (figura 3.5) è una superficie che si ottiene facendo ruotare attorno a un asse una curva chiamata *trattrice*. Introduciamo ora il concetto di *geodetica*. In generale, se si prendono due punti su una superficie, tra tutte le linee tracciate sulla superficie che congiungono questi due punti, le geodetiche sono quelle di minima lunghezza. Ad esempio nel piano euclideo le geodetiche sono le linee rette: infatti il percorso minimo tra due punti $A$ e $B$ sul piano è il segmento $AB$, che giace sulla retta passante per i due punti. Ora, se interpretiamo il concetto di "retta" della geometria iperbolica come "geodetica" sulla pseudosfera, allora sulla superficie della pseudosfera valgono gli assiomi della geometria iperbolica. La pseudosfera è quindi un modello della geometria iperbolica, qualora si

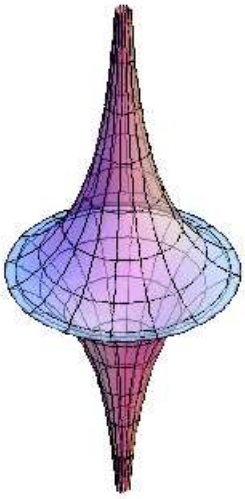


Figura 3.5: Una *pseudosfera* (da `http://www.wolframalpha.com`).

assumano le geodetiche come linee rette: si dice che la geometria iperbolica è la *geometria intrinseca* della pseudosfera. Questo modello non è però del tutto soddisfacente, dal momento che gli assiomi della geometria iperbolica valgono solo in zone limitate, e ciò è dovuto alla presenza dei punti cuspidali lungo la mediana della pseudosfera, che rendono la superficie irregolare. Quindi in realtà attraverso il modello della pseudosfera non è possibile dimostrare in modo completo la coerenza della geometria iperbolica. Esiste poi un teorema, il teorema di Hilbert, il quale afferma che "non esiste alcuna superficie regolare su cui valga nella sua completezza la geometria iperbolica". É quindi necessario trovare altri modelli della geometria iperbolica: successivamente a Beltrami, due importanti matematici, Felix Klein (1848-1925) e Henri Poincaré (1854-1912) proposero i loro modelli della geometria iperbolica. Analizzeremo in questa trattazione solamente il modello del secondo studioso.

## 3.4 Il modello di Poincaré

Introduciamo il concetto di *circonferenze ortogonali* (si veda la figura 3.6). Prendiamo due circonferenze secanti $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ e sia $P$ uno dei due punti di intersezione. Se le rette tangenti a $\Gamma_1$ e a $\Gamma_2$ passanti per il punto $P$ sono perpendicolari, allora le due circonferenze sono dette ortogonali.

Possiamo ora illustrare il modello di Poincaré. Sia $\Gamma$ una circonferenza (euclidea) di centro $O$: essa costituisce il piano iperbolico. Chiameremo I-punti i "punti iperbolici", I-rette le "rette iperboliche", e così via. Nel modello di Poin-

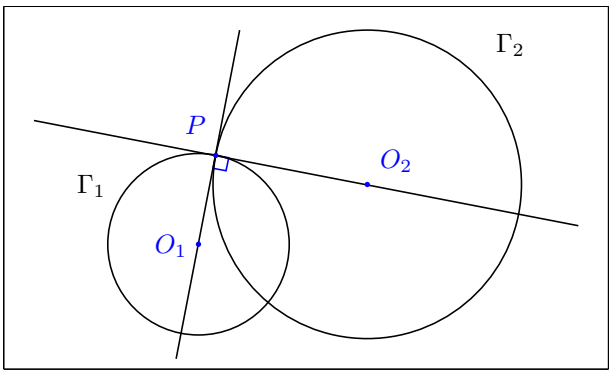



Figura 3.6: Le due circonferenza $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ sono *ortogonali*

caré un I-punto è un punto interno alla circonferenza $\Gamma$ (i punti appartenenti a $\Gamma$ non sono I-punti, cioè non appartengono al piano iperbolico). Una I-retta è invece un arco di circonferenza ortoganale a $\Gamma$ con gli estremi su $\Gamma$ e interno ad essa, oppure un diametro di $\Gamma$. Nella figura 3.7 si possono osservare alcune I-rette rappresentate sul piano di Poincaré. Le I-rette $m$ e $n$ sono le due parallele a $r$ passanti per l'I-punto $P$. Questo può sembrare strano, dal momento che, ad esempio, i due archi $r$ e $m$ si intersecano in un punto in corrispondenza di $\Gamma$. Come si è detto prima, però, i punti che appartengono alla circonferenza $\Gamma$ non sono I-punti, quindi effettivamente le due rette $r$ e $m$ si avvicinano sempre di più senza mai incontrarsi. Nella stessa figura si possono poi osservare alcune iperparallele a $r$ passanti per $P$: si noti che la I-retta $i_1$ è un diametro di $\Gamma$.

Come si misura l'ampiezza di un angolo nel modello di Poincaré? É molto semplice: date due I-rette che si intersecano in un punto $P$, basta tracciare le tangenti alle due I-rette in $P$ e misurare l'angolo (euclideo) tra queste due rette. Nella figura 3.8 è raffigurato un triangolo iperbolico in cui è evidenziato l'angolo in $A$.

La lunghezza è definita in maniera molto più complessa: dato un I-segmento $AB$ che giace su una I-retta i cui estremi su $\Gamma$ sono i punti $U$ e $V$ , la I-lunghezza di $AB$ è

$$\left|\ln\left(\frac{AU \cdot BV}{AV \cdot BU}\right)\right|$$

Intuitivamente si può dire che segmenti della stessa I-lunghezza risulteranno sempre più piccoli (nel senso di lunghezza euclidea) man mano che ci si allontana dal centro della circonferenza $\Gamma$. Se poi teniamo fisso un punto, diciamo $A$, e facciamo avvicinare sempre di più il punto $B$ al punto $U$ che si trova sulla circonferenza, la I-lunghezza di $AB$ tende all'infinito. Perciò, in ogni caso, i punti $A$ e $B$ sono infinitamente distanti dal "bordo" della circonferenza.

Il modello di Poincaré permette di "visualizzare" molte proprietà del piano iperbolico. Si può poi dimostrare rigorosamente che nel modello di Poincaré valgono tutti gli assiomi della geometria iperbolica. In particolare vale l'assioma di Lobačevskij, secondo il quale per un punto esterno a una retta passano almeno due rette parallele ad essa. Se a "retta" si sostituisce "I-retta" e a "punto" si sostituisce "I-punto", l'assioma di Lobačevskij diventa una proposizione della geometria euclidea, cioè:

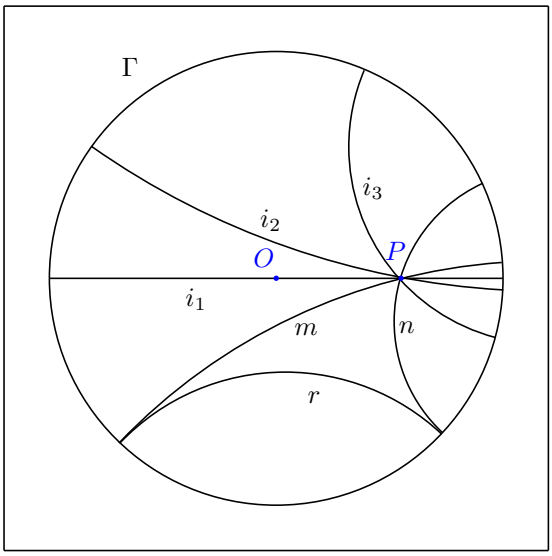



Figura 3.7: Il modello di Poincaré: le I-rette $m$ e $n$ sono le due I-rette parallele a $r$ passanti per $P$, mentre le rette $i_1$, $i_2$ e $i_3$ sono I-rette iperparallele a $r$.

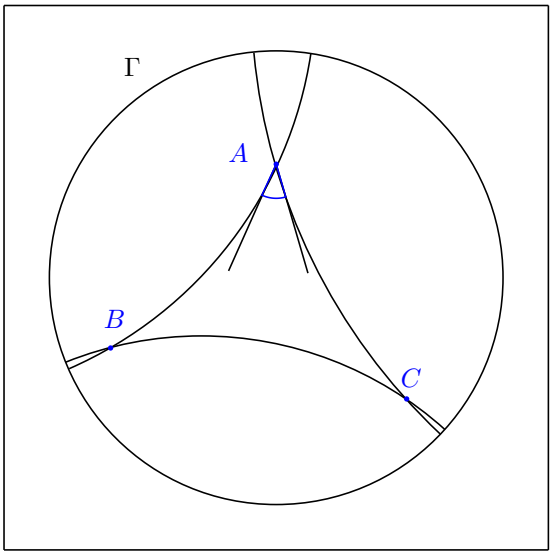



Figura 3.8: Triangolo iperbolico nel modello di Poincaré: è stato evidenziato l'angolo in $A$.

> Data nel piano euclideo una circonferenza $\Gamma$, presi un arco $r$ di circonferenza ortogonale ad essa (con gli estremi su $\Gamma$ e interno ad essa) e un punto $P$ interno a $\Gamma$, esistono infiniti altri archi di circonferenza ortogonali a $\Gamma$ e passanti per $P$ che non intersecano $r$.

Questa proposizione è dimostrabile nella geometria euclidea, così come gli altri assiomi, interpretati usando le definizioni date di I-retta, I-punto, eccetera.

Abbiamo quindi dato un'interpretazione dei concetti della geometria iperbolica nella geometria euclidea, e abbiamo visto che "traducendo" gli assiomi della prima in proposizioni della seconda, essi diventano teoremi della geometria euclidea. Da questo segue che, se la geometria iperbolica è coerente, cioè non contraddittoria, allora lo è anche la geometria iperbolica. Se infatti esistesse una proposizione contraddittoria nella geometria iperbolica, interpretando questa proposizione secondo il modello di Poincarè otterremmo una corrispondente contraddizione nella geometria euclidea. Dalla non contradditorietà della geometria iperbolica rispetto a quella euclidea segue anche un altro fatto molto importante, cioè l'indipendenza del V postulato. Se il V postulato fosse dimostrabile a partire dagli assiomi della geometria assoluta, non potrebbe infatti esistere un modello (come quello di Poincaré) in cui valgono gli assiomi della geometria assoluta ma non il V postulato.

# Capitolo 4

# La geometria sferica

Ci accosteremo in questo capitolo a una nuova geometria, diversa sia da quella euclidea che da quella iperbolica. L'approcio sarà diverso da quello del capitolo precedente, in quanto verrà proposto inizialmente il modello della geometria, e poi verrano esposte alcune proprietà (in particolare per quanto riguarda le rette e i triangoli, come fatto nel capitolo precedente).

## 4.1 L'assioma di Riemann

La geometria sferica si basa sull'assioma di Riemann:

> Due rette qualsiasi di un piano hanno sempre almeno un punto in comune.

Questo significa che, presa una retta $r$, per un punto $P$ esterno ad essa non passa alcuna retta parallela a $r$ (mentre nella geometria euclidea ne passa esattamente una, e in quella iperbolica infinite).

Se però sostituiamo questo assioma con il V postulato, otteniamo un sistema contraddittorio: infatti è possibile dimostrare l'*esistenza* della parallela nella geometria assoluta. Perchè possa valere l'assioma di Riemann, quindi, bisogna operare modifiche anche ad altri assiomi. Il sistema di assiomi della geometria sferica è in realtà abbastanza complesso, quindi non ce ne occuperemo in questa sede.

## 4.2 La geometria intrinseca della sfera

Nel capitolo precedente abbiamo visto che la geometria iperbolica è la geometria intrinseca della pseudosfera (anche se in zone limitate). Come si può intuire dal nome, la geometria sferica è la geometria intrinseca della sfera. Ricordiamo che per geometria intrinseca di una superficie si intende la geometria che risulta assumendo le geodetiche della superficie come linee rette. Ma quali sono le geodetiche della superficie sferica? In altre parole, qual'è il percorso più breve tra due punti su una sfera?

Supponiamo di voler viaggiare in aereo da Parigi a Los Angeles: la prima città si trova a una latitudine di circa 49° N, mentre la seconda a circa 34° N, quindi si trova più a sud rispetto alla prima. Preso un planisfero, si potrebbe

pensare che il percorso che sceglierà l'aereo sia quello rappresentato dal segmento di linea retta che collega le due città. Il percorso dell'aereo non sarà però questo: esso infatti si dirigerà inizialmente verso nord, e il suo tragitto andrà addirittura a toccare la Groenlandia (vedi figura 4.1). Questo perché la terra può essere approssimata a una sfera, e le geodetiche sulla superficie sferica sono le *circonferenze massime*, come ad esempio l'Equatore (mentre i meridiani sono *semicirconferenze massime*).

Figura 4.1: Da Parigi a Los Angeles (da `http://www.wolframalpha.com/`).

Quindi le rette della geometria sferica, cioè le S-rette, saranno le circonferenze massime della superficie sferica, mentre gli S-punti saranno semplicemente i punti sulla superficie sferica.

## 4.3 Rette e triangoli sferici

Nella geometria sferica ogni retta ha la stessa lunghezza, finita: questa è una differenza sostanziale sia rispetto alla geometria euclidea sia a quella iperbolica. Inoltre non esistono rette parallele sulla sfera, ma due S-rette qualunque si intersecano sempre in due punti diametralmente opposti (come in figura 4.2). Si noti poi come per due punti diametralmente opposti sulla superficie della sfera passino infinite rette.

Per quanto riguarda i triangoli sferici, la somma degli angoli interni è sempre maggiore di due angoli retti: si può ad esempio costruire un triangolo *trirettangolo* (figura 4.3). Se $S$ è la somma degli angoli interni di un rettangolo e $R$ è l'ampiezza di un angolo retto, allora la quantità $S - 2R$ è chiamata *eccesso angolare* del triangolo. Come nella geometria iperbolica l'area di un triangolo è direttamante proporzionale al suo difetto angolare, così nella geometria sferica l'area di un triangolo è direttamente proporzionale al suo eccesso angolare.

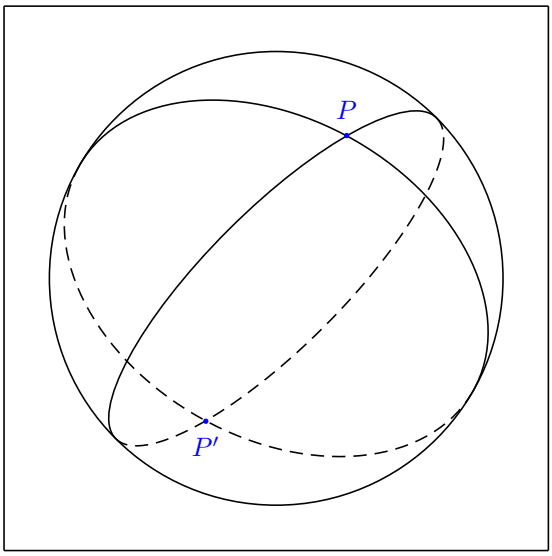



Figura 4.2: Le due S-rette si incontrano nei due punti diametralmente opposti $P$ e $P'$.

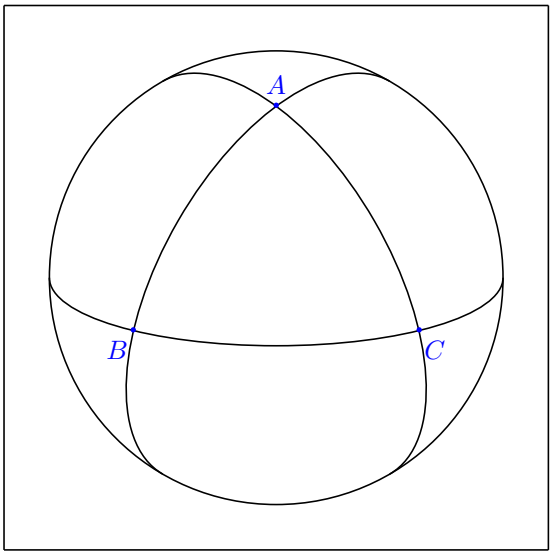



Figura 4.3: Il triangolo $ABC$ è un triangolo *trirettangolo* in quanto i tre angoli interni sono tutti retti.

# Capitolo 5

# Arte e geometria iperbolica

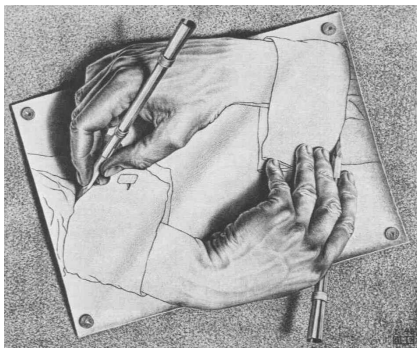
## 5.1 Escher, l'artista ispirato dalla matematica

> [...] mi sembra spesso di avere più cose in comune con i matematici che con i miei colleghi artisti.
>
> M.C. Escher

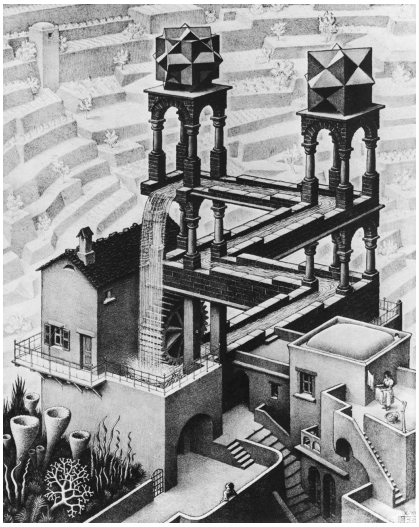
Maurits Cornelis Escher (1898-1972) fu un grafico olandese, particolarmente famoso per le sue litografie e incisioni su legno. La logica, la matematica e la geometria hanno senza dubbio avuto un ruolo importante nella produzione di Escher; il modo migliore per conoscere la particolarità di questo artista è farlo attraverso le sue opere (si veda la figura 5.1). Una delle mie preferite è *Mani che disegnano*, in cui è trattato il tema della *autoreferenzialità*: la mano destra sta disegnando una mano sinistra, che a sua volta sta finendo di disegnare la destra. Escher, poi, è famoso per le sue "figure impossibili": in *Cascata* l'artista, attraverso alcuni espedienti grafici, fa sembrare che l'acqua scenda indefinitamente. Escher diede anche delle bellissime rappresentazioni di oggetti matematici, come ad esempio il "nastro di Möbius" (vedi *Nastro di Möbius II*), una figura molto particolare che presenta una sola "faccia".

Ciò che ci interessa è il fascino che il concetto di infinito aveva su Escher: egli tentò di "avvicinarsi" ad esso in alcune delle sue opere. Uno dei tentativi in questo senso lo troviamo nell'opera *Sempre più piccolo* (figura 5.2). Più si avvicinano al centro, più i rettili si rimpiccioliscono: nel centro viene raggiunto, idealmente, l'infinitamente piccolo e l'infinitamente numeroso. Escher compì altri tentativi simili a questo, ma non ne fu mai pienamente soddisfatto; proprio riguardo all'opera *Sempre più piccolo* egli stesso scrisse:

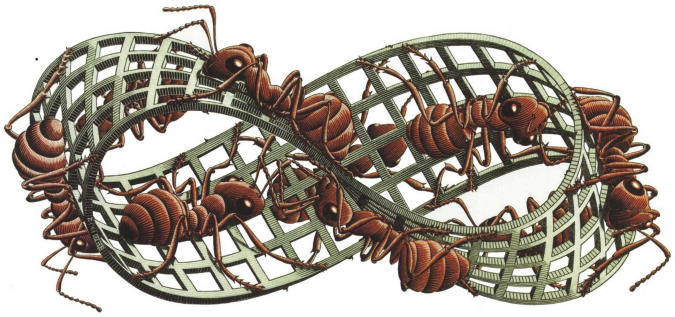
> Dal punto di vista della composizione questo lavoro è solamente in parte soddisfacente. Nonostante il limite centrale esso rimane un frammento, in quanto verso l'esterno il disegno è limitato arbitrariamente. Non è stata raggiunta, così, una composizione completa.



(a) *Mani che disegnano.*



(b) *Cascata.*



(c) *Nastro di Möbius II.*

Figura 5.1: Alcune opere di M.C. Escher

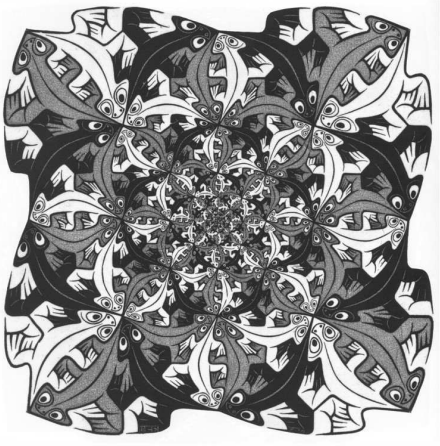


Figura 5.2: M.C. Escher, *Sempre più piccolo.*

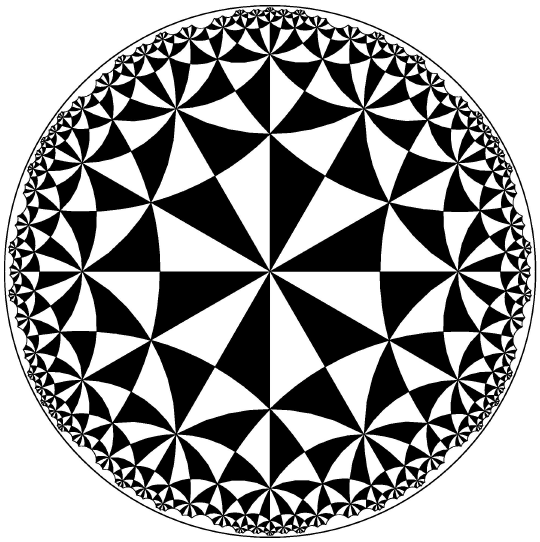


Figura 5.3: Tassellazione del piano iperbolico di Coxeter con triangoli 30°-45°-90° (da `http://www.mathaware.org/mam/03/essay1.html`).

## 5.2 H.S.M. Coxeter, il matematico che ispirava gli artisti

> Sono come qualunque altro artista, solo che ciò che riempie la mia mente sono le forme e i numeri.
>
> H.S.M. Coxeter

Harold Scott MacDonald Coxeter (1907-2003), spesso chiamato semplicemente Donald Coxeter, fu uno dei più grandi studiosi di geometria del ventesimo secolo. Nacque a Londra e studiò filosofia della matematica a Cambridge, mentre nel 1936 si trasferì all'università di Toronto, dove lavorò e compì i suoi studi per più di 60 anni. Uno dei suoi libri più famosi è *Introduction to geometry*, del 1961.

Escher e Coxeter si conobbero nel 1954 in occasione del Congresso internazionale dei matematici: diventarono grandi amici e instaurarono un rapporto di collaborazione reciproca, soprattutto per corrispondenza. Nell'articolo di Coxeter *Crystal symmetry and its generalization* Escher trovò un disegno che lo colpì molto (quello di figura 5.3): esso è una tassellazione del piano iperbolico, secondo il modello di Poincarè. In questa figura tutti i triangoli rappresentati sono congruenti e hanno gli angoli di 30°, 45° e 90°: si noti come rimpiccioliscano sempre di più man mano che si avvicinano alla circonferenza. A proposito di questa figura, Escher scrisse, in una lettera a Coxeter:

> Nonostante il testo del suo articolo *Crystal symmetry and its generalization* sia troppo indirizzato a persone più erudite di uno come me

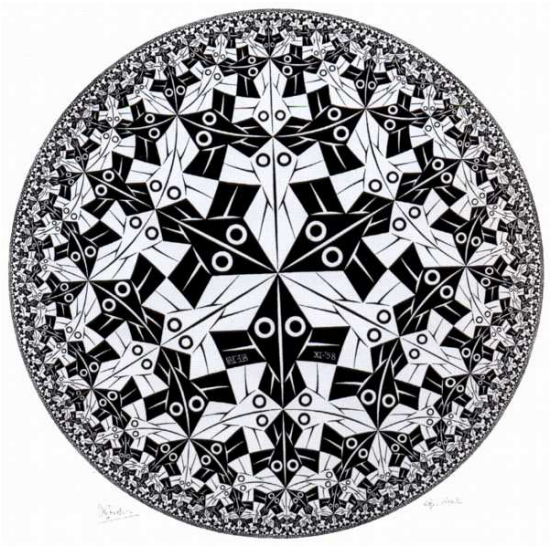


Figura 5.4: M.C. Escher, *Limite del cerchio I.*

> - un semplice uomo che da sè ha imparato a fare disegni piani - alcune delle illustrazioni e soprattutto la figura 7 a pagina 11 [cfr. figura 5.3] mi hanno provocato una forte emozione. Da tanto tempo nutro un certo interesse per disegni con dei motivi che diventino sempre più piccoli finchè raggiungono il limite dell'infinitamente piccolo. La questione è relativamente semplice se il limite è un punto al centro del disegno. Anche il limite assiale per me non è una novità, ma non sono mai stato capace di fare un disegno in cui ogni macchia diventa gradualmente più piccola partendo dal centro di un cerchio e andando verso il suo limite esterno.

Dopo aver visto il disegno di Coxeter, quindi, Escher trovò finalmente la strada che lo avrebbe portato all'infinitamente piccolo.

## 5.3 La serie *Limite del cerchio* di Escher

Nel 1958 Escher diede una sua personale interpretazione del disegno di Coxeter: il risultato fu *Limite del cerchio I* (figura 5.4). Escher stesso dichiarò che questo primo tentativo non fu del tutto soddisfacente. L'artista, infatti, scrisse:

> Tutte le file, sottolineate dagli assi dei corpi, sono costituite da due pesci bianchi i quali volgono le teste gli uni agli altri, e due neri, le cui code si toccano. In ogni fila non c'è così nessuna continuità né di movimento né di colore unitario.

Escher realizzo successivamente *Limite del cerchio II*, una variazione del primo, con delle croci al posto dei pesci. In *Limite del cerchio IV*, invece, sono presenti angeli e demoni. Il migliore è però *Limite del cerchio III* (figura 5.5), in cui Escher elimina tutti i "difetti" individuati in *Limite del cerchio I*. Qui infatti

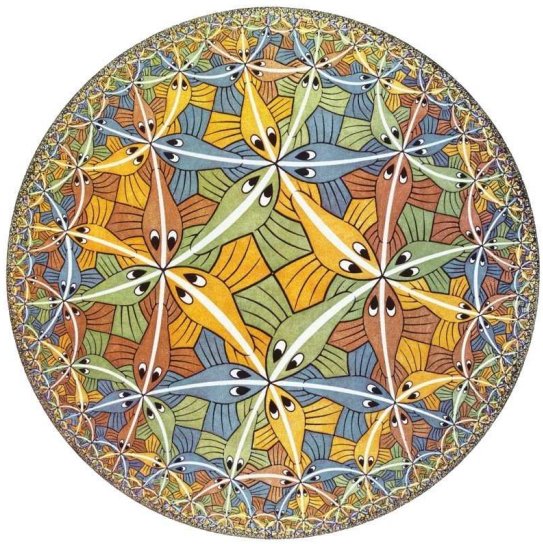


Figura 5.5: M.C. Escher, *Limite del cerchio III.*

vi è una continuità sia di movimento che di colore: le linee bianche delimitano le corsie su cui si muovono i pesci, e in ogni corsia si trovano pesci dello stesso colore che procedono nella stessa direzione.

Chiudiamo con una curiosità. Dopo la serie *Limite del cerchio*, Escher realizzò anche la serie *Limite del quadrato*. Coxeter commentò quest'opera nella maniera seguente:

> Molto bello, ma piuttosto ordinario ed euclideo, quindi non particolarmente interessante. I limiti del cerchio sono molto più interessanti, essendo non euclidei.

# Capitolo 6

# Discussioni filosofiche

## 6.1 La nuova concezione di teoria assiomatica

Nel corso dell'Ottocento vi furono numerosi progressi nell'ambito della matematica, tra i quali va annoverata la scoperta delle nuove geometrie non euclidee. Sul finire del XIX secolo si avviò, di conseguenza, una discussione sui fondamenti della matematica, al fine di dare maggiore rigore alle teorie di questa disciplina. Nel modello classico l'intuizione giocava ancora un ruolo fondamentale: nel caso della geometria, quella euclidea era "evidentemente" l'unica esatta e possibile. Come invece la nascita delle geometrie non euclidee ha confermato, l'evidenza e l'intuizione non bastano a rendere una teoria matematica valida: la geometria iperbolica, anche se controintuitiva, è coerente e quindi perfettamente legittima al pari di quella euclidea.

La concezione classica dell'assiomatica prevedeva che gli assiomi dovessero avere un certo grado di evidenza e che i concetti primitivi dovessero avere un legame con enti esterni. A partire dalla seconda metà dell'Ottocento si è invece affermata una nuova conceziona di assiomatica, che si può sintetizzare efficacemente citando un aforisma del filosofo Bertrand Russell (1872-1970):

> La matematica è quella scienza in cui non si sa di cosa si sta parlando,
> né se ciò che si sta dicendo è vero.

Secondo la concezione moderna di assiomatica, infatti, i concetti primitivi non devono necessariamente avere un collegamento con enti esterni. Essi non vengono definiti (come invece aveva tentato di fare Euclide) e il fatto di sapere o meno cosa siano non gioca alcun ruolo nelle dimostrazioni. Per quanto riguarda la *verità* degli assiomi, effettivamente non c'è alcun bisogno di sapere che un certo assioma è *vero*, ma è sufficiente sapere che quel dato assioma può essere usato nel corso di una dimostrazione.

David Hilbert (1862-1943) ebbe un ruolo importante nello sviluppo e nell'evoluzione di questa nuova concezione. Egli fu il fondatore di una nuova scuola, il *formalismo*. Un sistema di assiomi deve soddisfare, secondo Hilbert, queste tre proprietà:

- la *non contradditorietà* o *coerenza*: non deve cioè essere possibile dimostrare un certo teorema e anche la sua negazione;

- la *completezza*: ogni proposizione (che possa essere espressa nei termini dei concetti primitivi) o la sua negazione può essere dimostrata a partire dagli assiomi;

- l'*indipendenza*: nessun assioma può essere dimostrato a partire dagli altri.

Nel 1931 Kurt Gödel (1906-1978) dimostrò due famosi teoremi, i cosiddetti "teoremi di incompletezza di Gödel". Il primo afferma che ogni sistema di assiomi *sufficientemente potente* da contenere l'aritmetica è incompleto; esiste cioè una certa proposizione $G$ che non è né dimostrabile né refutabile. Il secondo teorema afferma invece che se un sistema di assiomi è coerente, allora non è possibile dimostrare, all'interno del sistema, la sua stessa coerenza. Una comprensione profonda di questi teoremi non è per nulla immediata, e anzi essi danno spesso luogo a fraintendimenti. Ai fini di questa trattazione basti dunque sapere che essi misero in crisi il programma di Hilbert.

Nel caso delle geometrie non euclidee, abbiamo già visto che la loro coerenza è stata dimostrata *relativamente* a quella euclidea. Come dimostrare quindi la coerenza di quest'ultima? Come per le geometrie non euclidee è possibile costruire un modello all'interno della geometria euclidea, così per la geometria euclidea è possibile costruire un modello all'interno dell'aritmetica, interpretando il concetto di "punto" come "coppia di numeri reali", "retta" come "equazione del tipo $ax + by + c = 0$", eccetera. In questo modo il problema della coerenza della geometria viene ricondotto a quello della coerenza dell'aritmetica, che però, come ha dimostrato Gödel, non può essere dimostrata al suo interno.

## 6.2 Geometria e spazio fisico

Le geometrie non euclidee potrebbero apparire fine a sè stesse, cioè senza alcuna applicazione al di fuori dell'ambito strettamente matematico. In realtà nei primi anni del Novecento Albert Einstein, nella sua teoria della relatività generale, impiegò le geometrie non euclidee nella descrizione del mondo fisico. Questo ci rimanda a una questione di grande interesse: qual'è il rapporto tra la geometria e la realtà che ci circonda? Qual'è la geometria dello spazio fisico? Dal momento che sono possibili più geometrie, qual'è quella "vera"?

A questo quesito diede una risposta Jules-Henri Poincaré (1854-1913), assumendo una posizione che passò poi sotto il nome di *convenzionalismo*. La tesi di Poincaré si oppone a due visioni: quella kantiana e quella empirista. Secondo quanto Immanuel Kant sosteneva, gli assiomi della geometria euclidea sono *giudizi sintetici a priori*. Questa posizione è stata smentita proprio dalla nascita delle geometrie non euclidee, nelle quali il V postulato viene negato: esso non può quindi essere un giudizio sintetico a priori. Secondo la posizione empirista, invece, gli assiomi della geometria sono basati sull'esperienza, e le proposizioni geometriche sono suscettibili di verifica empirica. Secondo Poincaré, invece, gli assiomi della geometria sono creazioni dell'uomo, e nessuna esperienza potrà mai verificare o falsificare un teorema geometrico. Diverse sono le argomentazioni che Poincaré utilizza per confutare la tesi empirista. Egli osserva innanzitutto che la geometria si basa su enti *ideali*, diversi dagli oggetti della realtà. Constata poi che la geometria ha un carattere atemporale, e non è soggetta a continue revisioni, come accade invece per le teorie basate sull'esperienza. Poincaré sostiene infine (e questa è forse l'argomentazione più importante) che prima di

sperimentare un sistema geometrico è necessario fare delle ipotesi sulla natura degli oggetti reali impiegati: per esempio supporre che i "metri" (intesi come strumenti di misura) siano rettilinei e invariabili. Con le opportune ipotesi, quindi, sarà sempre possibile sostenere una certa geometria a scapito di un'altra. Queste sono quindi le conclusioni di Poincaré nell'opera *La scienza e l'ipotesi*:

> Gli assiomi della geometria non sono dunque né dei giudizi sintetici a priori né dei fatti sperimentali. Sono delle convenzioni; [...] Allora cosa dobbiamo pensare di questa domanda: la geometria euclidea è vera? Essa non ha alcun senso. [...] Una geometria non può essere più vera di un'altra, può soltanto essere più comoda. Ora, la geometria euclidea è e resterà la più comoda:
>
> 1. Perchè è la più semplice; [...]
> 2. Perchè essa si accorda molto bene con le proprietà dei solidi naturali, quei corpi cui si avvicinano le nostre membra e il nostro occhio e con i quali noi facciamo i nostri strumenti di misura.

# Appendice A

# Una dimostrazione

Dimostreremo in questa appendice che il V postulato di Euclide e il postulato dell'unicità della parallela (che d'ora in poi chiameremo UP per brevità) si equivalgono. La dimostrazione sarà divisa in due parti, in quanto bisognerà dimostrare sia che se vale UP allora vale il V postulato sia il viceversa.

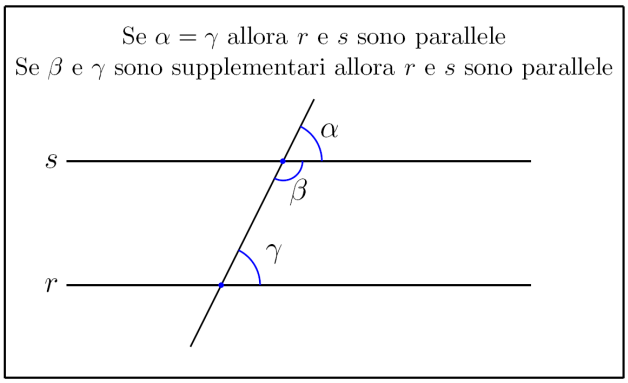



Figura A.1: La proposizione 28 degli *Elementi* di Euclide

Enunciamo innanzitutto la proposizione 28 degli *Elementi* (vedi figura A.1):

> Se due rette qualsiasi tagliate da una trasversale formano con quest'ultima angoli corrispondenti uguali o angoli coniugati interni supplementari[1], allora le due rette sono parallele.

Per le definizioni di angoli corrispondenti e coniugati interni si faccia riferimento alla figura A.2. La proposizione 28 è un teorema della geometria assoluta, cioè si dimostra senza fare uso del V postulato, ed è quello che assicura l'esistenza della parallela ad una retta per un punto esterno ad essa. Passiamo ora alla dimostrazione vera e propria.

[1] Due angoli si dicono supplementari se la somma delle loro ampiezze equivale a quella di due angoli retti.

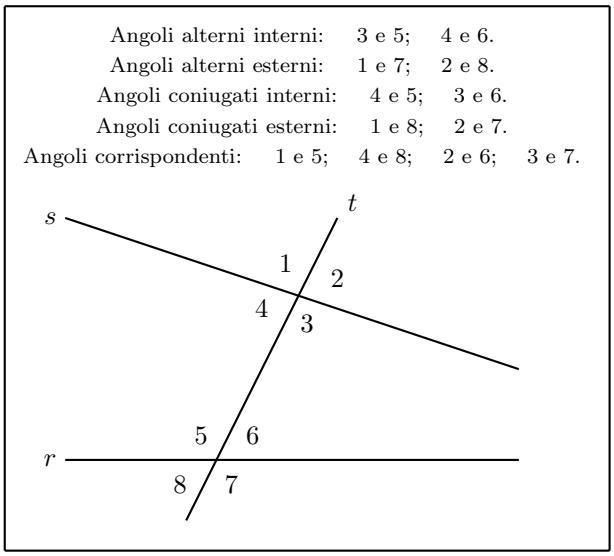



Figura A.2: Definizione dei nomi degli angoli formati da due rette $r$ e $s$ tagliate da una trasversale $t$

**Se UP allora V postulato**

*Dimostrazione.* Assumiamo come vero il postulato dell'unicità della parallela; dobbiamo ora dimostrare che due rette $r$ e $s$ che formano con la trasversale $t$ gli angoli $\alpha$ e $\beta$ tali che $\alpha+\beta$ è minore di due angoli retti si incontrano in un punto (si veda la figura A.3a). Consideriamo la retta $u$ passante per $P$ tale che $\alpha$ e $\gamma$ siano supplementari. Per la proposizione 28, essendo $\alpha$ e $\gamma$ angoli coniugati interni, le rette $r$ e $u$ sono parallele. Per il postulato dell'unicità della parallela, $u$ è l'unica parallela a $r$ passante per $P$. Perciò $s$ non può essere parallela a $r$, quindi intersecherà $r$ in un punto. □

**Se V postulato allora UP**

*Dimostrazione.* Assumiamo, questa volta, il V postulato come vero; bisogna dimostrare che per un punto $P$ esterno a una retta $r$ passa al più una retta parallela. Consideriamo la retta $u$ passante per $P$ tale che gli angoli $\alpha$ e $\gamma$ siano supplementari (si veda la figura A.3). Per la proposizione 28 di Euclide la retta $u$ è parallela a $r$. Sia ora $s$ una retta qualsiasi passante per $P$ e distinta da $u$, che forma con $t$ un angolo $\beta$. Dimostriamo che $r$ e $s$ si incontrano. Abbiamo due casi.

- Se $\alpha+\beta$ è minore di due angoli retti si ha la situazione della figura A.3a . Per il V postulato $r$ e $s$ si incontrano (a destra di $t$).
- Se $\alpha+\beta$ è maggiore di 2 angoli retti si ha la situazione della figura A.3b . La proposizione 13 di Euclide afferma che due angoli adiacenti[2] sono supplementari. In questo caso $\alpha+\varepsilon=2$ retti, ma anche $\beta+\delta=2$ retti, da

[2]Due angoli sono adiacenti se hanno un lato in comune e gli altri due sono opposti e giacciono sulla stessa retta.

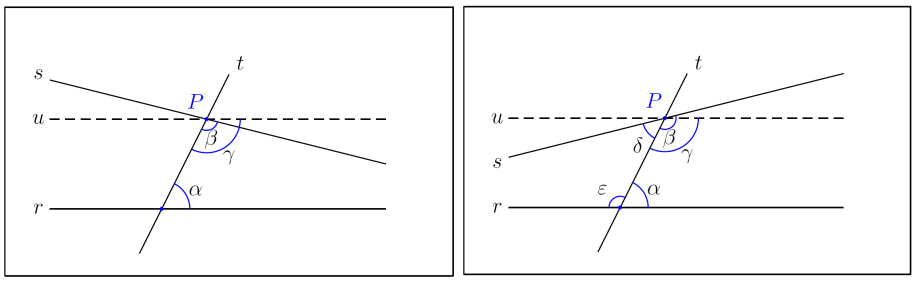



Figura A.3

cui $\alpha+\beta+\varepsilon+\delta = 4$ retti. Poichè $\alpha+\beta > 2$ retti, segue che $\delta+\varepsilon < 2$ retti. Ma $\delta$ e $\varepsilon$ sono angoli alterni interni formati dalle rette $r$ e $s$ tagliate da $t$, e siccome abbiamo dimostrato che la loro somma è minore di 2 angoli retti, per il V postulato $r$ e $s$ si incontrano (a sinistra di $t$).

In ognuno dei due casi, quindi, $r$ e $s$ si incontrano in un punto, quindi $u$ è l'unica parallela a $r$ passante per P. □

## A.1 Considerazioni sulla dimostrazione

Bisogna notare che la dimostrazione, così come è stata proposta, è, in un certo senso, incompleta. Sono stati infatti enunciati due teoremi (le proposizioni 13 e 28) che non sono stati dimostrati. Ovviamente si sarebbero potute dimostrare le due proposizioni in questione, ma sarebbero stati necessari altri teoremi a cui riferirsi, che a loro volta avrebbero necessitato di una dimostrazione, e così via fino a ricondursi agli assiomi. Ovviamente sarebbe assurdo pensare che in ogni dimostrazione di un teorema ci si debba sempre ricondurre agli assiomi: a un certo punto ci si ritroverebbe a dover scrivere dimostrazioni lunghe centinaia di pagine. Per questo è lecito riferirsi ad altri teoremi, sempre che siano già stati dimostrati in precedenza.

In una teoria assiomatica, quindi, prima si enunciano gli assiomi, poi tutte le altre proposizioni vanno dimostrate a partire dagli assiomi o da proposizioni dimostrate in precedenza. Nessuna proposizione, oltre agli assiomi, si può considerare "scontata": anche la più evidente deve essere dimostrata.

# Conclusioni

Non tutti (o, per meglio dire, pochi) trovano la matematica una materia affascinante: di questo ne sono perfettamente consapevole. Spesso si pensa alla matematica come una disciplina in cui si tratta solo di numeri e difficili teoremi, perlopiù "inutili". Così non è, e credo che i temi trattati in questo lavoro lo confermino. Innanzitutto si è visto come una teoria matematica apparentemente priva di ogni utilità abbia portato alla realizzazioni di bellissimi lavori artistici, oltre ad avere avuto applicazioni nella fisica e ad aver generato numerose discussioni dal punto di vista filosofico. Credo poi che non sia di minore importanza l'aspetto storico. Infatti di per sè la scoperta della geometria iperbolica potrebbe risultare di scarso interesse. Ma il fatto che questo risultato sia stato raggiunto solo dopo più di due millenni di riflessioni intorno al problema rende questo avvenimento molto più affascinante. La storia della matematica è un argomento che non viene quasi mai affrontato a scuola, e questo è, a mio parere, molto negativo. Spesso conoscere la storia di una teoria matematica, i motivi per cui è nata e si è sviluppata, e i rapporti con altri campi del sapere può rendere lo studio della teoria stessa assai più interessante. Questo è quello che ho cercato di comunicare attraverso questo lavoro, e spero di aver raggiunto il mio obiettivo.

# Bibliografia


[1] Evandro Agazzi & Dario Palladino, *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria*, Milano, Arnoldo Mondadori Editore, 1978

[2] Dario Palladino & Claudia Palladino, *Le geoemetrie non euclidee*, Roma, Carocci Editore, 2008

[3] Carl Benjamin Boyer, *Storia della matematica*, Milano, Arnoldo Mondadori Editore, 1980

[4] Maurits Cornelis Escher, *Grafica e disegni*, Roma, Gruppo Editoriale l'Espresso, 2003

[5] Bruno Ernst, *The magic mirror of M.C. Escher*, Köln, TASCHEN, 2007

[6] Siobhan Roberts & Asia Ivić Weiss, "Donald nel paese delle meraviglie: le varie sfaccettature di H.S.M. Coxeter", da *Matematica e cultura 2005*, Springer, pp. 13-28

[7] Siobhan Roberts, "Il re dello spazio infinito", da *Matematica e cultura 2008*, Springer, pp. 61-79

[8] AA. VV., *Il testo filosofico*, Milano, Edizioni Bruno Mondadori, 1998