Polinomi come numeri

Joseph TOSCANO - jtosk@libero.it, joseph.toscano@sbai.uniroma1.it

Salve colleghi, quando la didattica è impostata nel modo giusto può succedere che anche noi posiamo imparare dai ragazzi. Vi racconto in queste righe un episodio molto interessante.
Qualche anno fa in una classe prima ho fatto fare una divisione tra polinomi del tipo
$(3x^5 - 12x^4 + 31x^3 - 47x^2 + 38x - 12) : (3x^2 - 6x + 4)$
I ragazzi svolsero la divisione nel seguente modo :

$$
\begin{array}{cccccc|c}
3x^5 & -12x^4 & +31x^3 & -47x^2 & +38x & -12 & 3x^2 - 6x + 4 \\
\cline{7-7}
-3x^5 & +6x^4 & -4x^3 & & & & \\
\cline{1-3}
// & -6x^4 & +27x^3 & -47x^2 & & & x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \\
 & +6x^4 & -12x^3 & +8x^2 & & & \\
\cline{2-4}
 & // & 15x^3 & -39x^2 & +38x & & \\
 & & -15x^3 & +30x^2 & -20x & & \\
\cline{3-5}
 & & // & -9x^2 & +18x & -12 & \\
 & & & +9x^2 & -18x & 12 & \\
\cline{4-6}
 & & & // & // & // &
\end{array}
$$

Dopo qualche istante chiesi agli studenti di fare la verifica facendo la moltiplicazione tra i due polinomi (divisore e quoziente). Ovviamente io avrei fatto al solito modo e cioè
$(x^3 - 2x^2 + 5x - 3)(3x^2 - 6x + 4) = 3x^5 - 6x^4 + 4x^3 - 6x^4 + 12x^3 - 8x^2 + 15x^3 - 30x^2 + 20x - 9x^2 + 18x - 12 =$
$= 3x^5 - 12x^4 + 31x^3 - 47x^2 + 38x - 12.$
Invece, con mia grande sorpresa un ragazzo, ricordando forse che io avevo detto che la divisione tra polinomi è molto simile a quella tra numeri, la svolse nel seguente modo (adoperando lo stesso schema della moltiplicazione tra numeri)

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & x^3 & -2x^2 & +5x & -3 \\
 & & & 3x^2 & -6x & 4 \\
\hline
 & & 4x^3 & -8x^2 & 20x & -12 \\
 & -6x^4 & 12x^3 & -30x^2 & 18x & \\
3x^5 & -6x^4 & 15x^3 & -9x^2 & & \\
\hline
3x^5 & -12x^4 & 31x^3 & -47x^2 & 38x & -12
\end{array}
$$

Mi è sempre rimasto il dubbio se questo ragazzo se l'era inventato da solo oppure altri glielo avevano insegnato. Per caso avete già visto fare una cosa del genere?
Fatto sta che la cosa mi è sempre piaciuta e l'ho sempre tenuta presente nella mia mente.
Orbene, qualche tempo fa dovevo spiegare nella classe prima la scomposizione tra polinomi. Una cosa che mi è sempre riuscita difficile è far capire ai ragazzi che alla fine il polinomio iniziale è il prodotto di tutti i polinomi via via trovati.
Per esempio, dato il polinomio $x^3 - x^2 - 8x + 12$, lo si può dividere per $(x - 2)$ ottenendo $(x^2 + x - 6)$ che a sua volta può essere diviso ancora per $(x - 2)$ ottenendo $(x + 3)$. Ecco, non riesco mai a far capire ai ragazzi che $(x^3 - x^2 - 8x + 12)$ è pari a $(x - 2)(x - 2)(x + 3)$ ossia a $(x - 2)^2(x + 3)$.
Pensando e ripensando a come farlo capire, mi venne in mente proprio l'esempio della moltiplicazione tra polinomi, e mi son detto "perché non adoperare una notazione simile alla scomposizione tra numeri ?" Sappiamo tutti che per scomporre 12 si adotta la seguente notazione

$$
\begin{array}{r|l}
12 & 2 \\
6 & 2 \\
3 & 3 \\
1 &
\end{array}
$$

e per i ragazzi è un giochetto scrivere che $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$.
Così, nel caso dei polinomi in classe ho fatto adottare la seguente notazione (non riporto le divisioni)

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - x^2 - 8x + 12 & x - 2 \\
x^2 + x - 6 & x - 2 \\
x + 3 & x + 3 \\
1 &
\end{array}
$$

In tal modo abbiamo ottenuto $(x^3 - x^2 - 8x + 12) = (x - 2)(x - 2)(x + 3) = (x - 2)^2(x + 3)$.
Sembra che le cose siano andate abbastanza bene.
Tra l'altro anche per la somma di polinomi si potrebbe adottare la tecnica di incolonnamento.