Discutere, al variare del parametro reale k, il seguente sistema misto:

$$\begin{cases} sin2x - 2k(sinx + cosx) + 2 = 0 \\ 0 < x < \pi/2 \end{cases}$$

L'equazione data può essere scritta nella forma $2sinxcosx - 2ksinx - 2kcosx + 2 = 0$ da cui si nota che essa è simmetrica in sinx e cosx ; poniamo, come spesso conviene in tal caso, (1) $x + \frac{\pi}{4} = z$ (che equivale a $x = z - \frac{\pi}{4}$) e l'equazione diventa

$$sin\left(2z - \frac{\pi}{2}\right) - 2k\left(\frac{\sqrt{2}}{2}sinz - \frac{\sqrt{2}}{2}cosz + \frac{\sqrt{2}}{2}cosz + \frac{\sqrt{2}}{2}sinz\right) + 2 = 0$$

da cui

$$-cos2z - 2k\sqrt{2}\,sinz + 2 = 0$$

Conviene ora trasformare questa in *sinz* mediante le formule di duplicazione ottenendo l'equazione

$$2sin^2z - 2k\sqrt{2}sinz + 1 = 0$$

La limitazione sull'incognita x assegnata dal testo diviene, in base alla (1),

$$\frac{\pi}{4} < z < \frac{3}{4}\pi$$

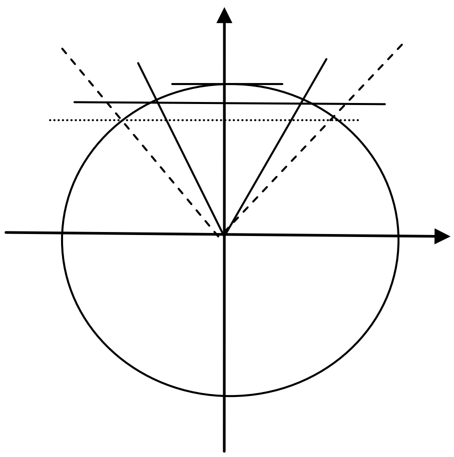
Siamo condotti a discutere il sistema misto goniometrico

$$(2) \qquad \begin{cases} 2sin^2z - 2k\sqrt{2}\,sinz + 1 = 0 \\ \frac{\pi}{4} < z < \frac{3}{4}\pi \end{cases}$$

Poniamo ora (3) sinz = t e siamo condotti a discutere il sistema misto (algebrico)

$$(4) \qquad \begin{cases} 2t^2 - 2k\sqrt{2}\,t + 1 = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} < t \le 1 \end{cases}$$

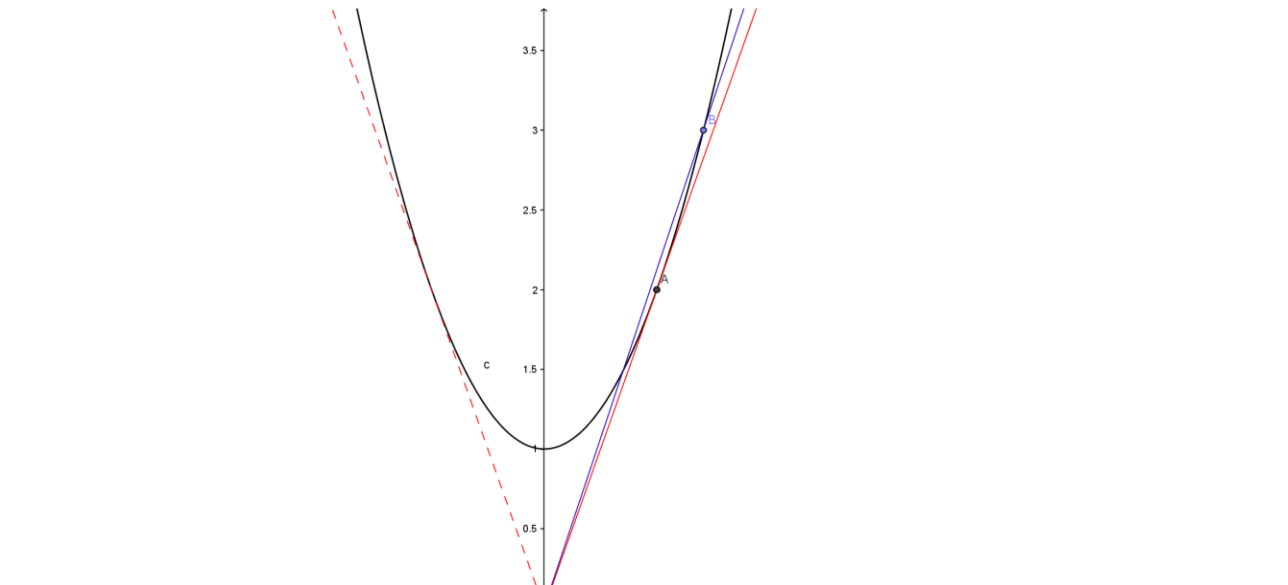
È importante notare, osservando le sostituzioni (1) e (3) utilizzate, le limitazioni dell'incognita z e la circonferenza goniometrica, che ad ogni soluzione del sistema (4) corrispondono due soluzioni (supplementari) del sistema (2), mentre ad ogni soluzione del sistema (2) ne corrisponde una del sistema dato all'inizio. Si potrebbe pensare di eliminare tale complicazione utilizzando, al posto della (1), la sostituzione $x - \frac{\pi}{4} = z$ che porta alla limitazione $-\frac{\pi}{4} < z < \frac{\pi}{4}$ dell'incognita z , ma con tale sostituzione conviene trasformare l'equazione del sistema misto in *cosz* ottenendo l'equazione $2cos^2z - 2k\sqrt{2}\,cosz + 1 = 0$ e ponendo quindi cosz = t ; osservando però la nuova limitazione di z ottenuta e la circonferenza goniometrica, si nota che ancora a un valore di t corrispondono due valori di z (stavolta opposti), ritrovando una situazione analo-ga a quella ottenuta con la sostituzione (1).



Il sistema (4) può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} 2t^2 + 1 = 2k\sqrt{2}\,t \\ \frac{\sqrt{2}}{2} < t \leq 1 \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad (5)\ \begin{cases} y = 2t^2 + 1 \\ y = 2k\sqrt{2}\,t \\ \frac{\sqrt{2}}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

Discutiamo il sistema (5) per via grafica interpretandone le equazioni in un sistema di assi cartesiani ortogonali Oty . La prima è l'equazione di una parabola con l'asse coincidente con l'asse y, il vertice di coordinate (0;1) e la concavità verso l'alto; la limitazione dell'incognita t impone di con-siderare di tale parabola solo l'arco con estremi i punti A=($\sqrt{2}$/2; 2) e B=(1; 3), con A escluso e B compreso. La seconda è l'equazione di un fascio proprio di rette con centro nell'origine degli assi; da notare che il coefficiente angolare delle rette del fascio è positivo (negativo, nullo) se e solo se k è positivo (negativo, nullo), che tale coefficiente angolare cresce (decresce) al crescere (decrescere) di k e che la retta del fascio che non si ottiene per alcun valore reale di k è l'asse y.



La retta del fascio passa per il punto A se k=1 e per il punto B se k=3$\sqrt{2}$ /4 ; le equazioni delle rette del fascio tangenti alla parabola si ottengono uguagliando a 0 il discriminante dell'equazione risolvente del sistema (5), ovvero dell'equazione presente in (4). Tali tangenti si ottengono per k=$\pm$1 , ma osservando l'arco di parabola che interessa la questione si capisce che solo il valore $k=1$ è da considerare. Inoltre, risolvendo l'equazione in t di (4) ottenuta per $k=1$, si ottengono due radici coincidenti entrambe uguali a $\sqrt{2}/2$, quindi il punto in cui la tangente considerata tocca la parabola è proprio il punto A.

Il sistema (5), e quindi il sistema (4), hanno una soluzione per $1 < k \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Pertanto il sistema (2) nell'incognita z ha :

- due soluzioni distinte (e supplementari) se $1 < k < \frac{3\sqrt{2}}{4}$
- due soluzioni coincidenti uguali a $\pi/2$ se $k = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

e si può quindi **concludere** che il sistema iniziale, nell'incognita x, ha:

- due soluzioni distinte (e complementari) se $1 < k < \frac{3\sqrt{2}}{4}$

  Dalla (1) segue infatti che a due valori z_1 e z_2 supplementari corrispondono rispettivamente i valori x_1 e x_2 complementari
- due soluzioni coincidenti uguali a $\pi/4$ se $k = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Francesco Camia