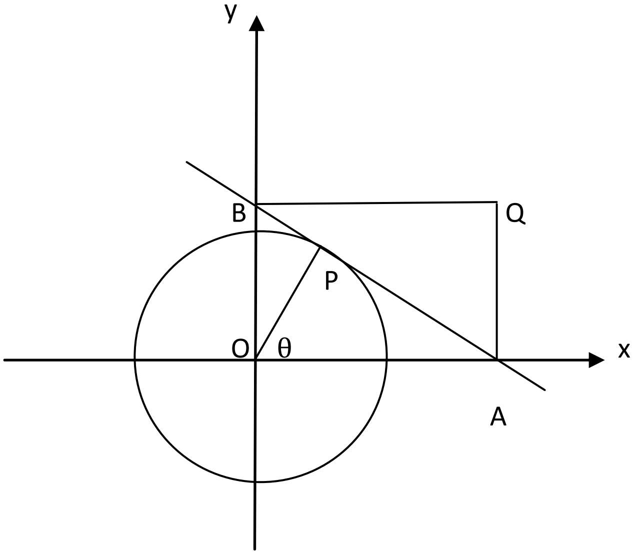
Nel piano, riferito ad un sistema d'assi cartesiani ortogonali, si consideri la circonferenza C di rag- gio unitario e con centro nell'origine O degli assi e sia P un suo punto; si tracci la tangente in P a C indicando con A e B i punti in cui tale tangente incontra rispettivamente l'asse x e l'asse y. Si consi-deri il rettangolo OAQB e si esprimano le coordinate del punto Q in funzione dell'angolo θ che la retta OP forma con il semiasse positivo delle x ; si trovi quindi l'equazione cartesiana del luogo de-scritto dal punto Q al variare del punto P sulla circonferenza C.



Per chi conosce la definizione della secante e della cosecante di un angolo, è facile riconoscere che le coordinate di A e di B sono rispettivamente (secθ ; 0) , (0; cosecθ) , da cui si ottiene:

$$Q = (sec\theta; cosec\theta) = \left(\frac{1}{cos\theta}; \frac{1}{sin\theta}\right).$$

Altrimenti si può giungere allo stesso risultato osservando che: le coordinate di P sono (cosθ ; sinθ), la retta OP ha coefficiente angolare tgθ , la retta AB, essendo perpendicolare in P ad OP per la tangenza, ha coefficiente angolare $-\frac{1}{tg\theta} = -cotg\theta$.

La retta AB ha quindi equazione y –sinθ = - cotgθ(x –cosθ); mettendo a sistema con y = 0 tale equazione si ottiene come ascissa di A

$$\frac{sin\theta}{cotg\theta} + cos\theta = \frac{sin^2\theta}{cos\theta} + cos\theta = \frac{sin^2\theta + cos^2\theta}{cos\theta} = \frac{1}{cos\theta}$$, quindi $A = (\frac{1}{cos\theta}; 0)$.

Analogamente, mettendo a sistema l'equazione della retta AB con x = 0, si ha $B = (0; \frac{1}{sin\theta})$.

Le coordinate di Q sono pertanto $(\frac{1}{cos\theta}; \frac{1}{sin\theta})$ e le equazioni parametriche del luogo descritto da Q al variare di P sulla circonferenza C sono:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{cos\theta} \\ y = \frac{1}{sin\theta} \end{cases}$$ con θ parametro reale.

Da tali equazioni si ricava: $cos\theta = \frac{1}{x}$, $sin\theta = \frac{1}{y}$, da cui, ricordando la relazione fondamentale della trigonometria, si ottiene

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$$, da cui anche $x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0$

Francesco Camia