Trovare l'equazione cartesiana del luogo dei punti del piano cartesiano con equazioni

parametriche:
$$\begin{cases} x = 3\cos^2\frac{\theta}{2}\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right) \\ y = \sin\theta \end{cases} \quad \text{con } \theta \text{ parametro reale.}$$

Scrivendo $\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} = \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$ e moltiplicando il secondo membro della prima equazione, si ottiene

$$x = 3\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right), \text{ da cui, per le formule di duplicazione per il coseno, si ha } x = 3\cos\theta.$$

Risulta pertanto $\sin\theta = y$, $\cos\theta = \frac{x}{3}$, da cui, mediante la relazione fondamentale della trigonometria, si ottiene $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + y^2 = 1$, da cui $x^2 + 9y^2 - 9 = 0$. E' facile riconoscere che il luogo è la ellisse, riferita a centro e assi, con semiassi di misura 3 e 1.

Francesco Camia