Verificare che la funzione $y=\dfrac{x-3}{x^2-x}$ ha un asintoto verticale nel punto $x=0$.

Deve essere: $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-3}{x^2-x}=\infty$.

Si deve verificare che, scelto M>0, arbitrariamente grande, esiste un intorno di 0 per ogni x del quale, escluso 0, si ha:

$$\left|\frac{x-3}{x^2-x}\right|>M\ .$$

Risolvendo la disequazione:

$$\frac{x-3}{x^2-x}<-M\ \vee\ \frac{x-3}{x^2-x}>M\ .$$

Cioè $\dfrac{Mx^2+(1-M)x-3}{x^2-x}<0\ \vee\ \dfrac{Mx^2+(-1-M)x+3}{x^2-x}<0$

Per la prima:

N) $Mx^2+(1-M)x-3>0\ \to\ x<\dfrac{M-1-\sqrt{M^2+10M+1}}{2M}\ \vee\ x>\dfrac{M-1+\sqrt{M^2+10M+1}}{2M}$

D) $x^2-x>0\ \to\ x<0\ \vee\ x>1$

Per la seconda:

N) $Mx^2+(-1-M)x+3>0\ \to\ x<\dfrac{M+1-\sqrt{M^2-10M+1}}{2M}\ \vee\ x>\dfrac{M+1+\sqrt{M^2-10M+1}}{2M}$

D) $x^2-x>0\ \to\ x<0\ \vee\ x>1$

Per stimare le quantità dipendenti da M bisogna confrontarle con 0 ed 1, per poterle disporre correttamente nel grafico delle soluzioni. Certo non assegnando un valore arbitrario a M.
Ad esempio per la prima disequazione:

$$\frac{M-1-\sqrt{M^2+10M+1}}{2M}<0\ \ \to\ \ (M-1)^2<\sqrt{M^2+10M+1}\ \ \to\ \ M^2+1-2M<M^2+10M+1$$
vera

$$\frac{M-1+\sqrt{M^2+10M+1}}{2M}<0\ \to\ (M-1)^2<-\sqrt{M^2+10M+1}\ \text{ falsa}$$

$$\frac{M-1+\sqrt{M^2+10M+1}}{2M}<1\ \to\ M-1+\sqrt{M^2+10M+1}<2M\ \to\ (-M-1)^2<-\sqrt{M^2+10M+1}$$

falsa, e perciò $\frac{M-1+\sqrt{M^2+10M+1}}{2M}>1$.

Ponendo $\alpha=\frac{M-1-\sqrt{M^2+10M+1}}{2M}$ e $\beta=\frac{M-1+\sqrt{M^2+10M+1}}{2M}$, dall'analisi del grafico la prima disequazione determina un intorno sinistro di 0:

		α		0		1		β	
N	+		-		-		-		+
D	+		+		-		+		+
N/D	+		-		+		-		+

Ponendo $\gamma=\frac{M+1-\sqrt{M^2-10M+1}}{2M}$ e $\delta=\frac{M+1+\sqrt{M^2-10M+1}}{2M}$, in modo analogo si costruisce il grafico delle soluzioni per la seconda disequazione, che determina un intorno destro di 0:

		0		γ		δ		1	
N	+		+		-		+		+
D	+		-		-		-		+
N/D	+		-		+		-		+

Il limite è quindi verificato.

Edoardo Femia