Università degli Studi di Padova

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea

Studio di Alcuni Punti Notevoli del Trapezio

Relatore: Prof. Benedetto Scimemi

Laureanda: Anna Baccaglini-Frank

Anno Accademico 2004-2005

Alla Mia Famiglia

Indice

Introduzione

I *punti notevoli* del triangolo sono stati i protagonisti di una notevole quantità di articoli e libri , la cui produzione toccò il suo massimo a fine '800. Recentemente alcuni matematici come, per esempio, R.Kimberling [4] , hanno ritrovato interesse per i punti notevoli del triangolo.

Sorprendentemente, invece, non sono stati portati avanti analoghi studi sui punti notevoli del *quadrangolo* e del *quadrilatero*. Per il *quadrilatero completo* (quattro lati e sei vertici) si può fare riferimento ai contributi di G.Steiner [1]; mentre per quanto riguarda il *quadrangolo completo* (quattro vertici e sei lati) la bibliografia si riduce a qualche decina di articoli, tra loro disconnessi.

Uno studio sistematico di questo argomento è stato fatto da B.Scimemi, in [7], che si è avvalso anche della collaborazione di alcuni suoi studenti, [8]. Qui si trova la descrizione e lo studio delle proprietà di alcuni punti notevoli del quadrangolo completo. Riportiamo qui la definizione di *punto notevole o speciale*, adottata in [7].

"Assegnati i vertici $A_i (i = 1, ...n)$ di un n-gono $\mathbf{A}$, un punto N si dice *notevole* per $\mathbf{A}$ se è una funzione $N = N(\mathbf{A})$ simmetrica negli argomenti A_i e tale che per tutte le similitudini ϕ del piano risulti $\phi(N(..., A_i, ...)) = N(..., \phi(A_i))$. Chiameremo *covarianza* questa permutabilità tra le funzioni N e ϕ. Analogamente definiremo *notevoli* per $\mathbf{A}$ una retta, un cerchio, una conica, un m-gono ecc. insomma ogni altro ente geometrico che sia funzione *simmetrica* e *covariante* degli A_i nel senso spiegato."

Per costruire figure notevoli a partire da una figura $\mathbf{A}$ useremo *procedure*[1]. Ad esempio, sia data una funzione simmetrica M di n punti $A_1, ..., A_n$. Una procedura che useremo frequentemente consiste nel calcolare M sugli $n+1$ insiemi costutuiti da tutti i sottoinsiemi di n vertici di un $n+1$-agono, $\mathbf{A}$. Otteniamo cosí un nuovo $n+1$-agono, che chiameremo $m(\mathbf{A})$, il cui vertice i-esimo è $M(A_1, ...A_{i-1}, A_{i+1}, ..., A_n, A_{n+1})$.

La nozione di figura notevole ci permetterà di fare alcune osservazioni che risulteranno utili nel corso della trattazione:

- se $m : \mathbf{A} \mapsto m(\mathbf{A})$ è una similitudine del piano e $m(\mathbf{A})$ è notevole per $\mathbf{A}$, allora il suo centro U è un punto notevole di $\mathbf{A}$;

[1] La definizione di procedura è contenuta nel paragrafo 1 di [7].

- se $m(\mathbf{A})$ e $p(\mathbf{A})$ sono figure notevoli rispetto ad $\mathbf{A}$ e m, p sono similitudini del piano, allora il punto unito V di $p \circ m^{-1} : m(\mathbf{A}) \mapsto p(\mathbf{A})$ è notevole per $\mathbf{A}$;

- se N è un punto notevole di una figura notevole rispetto ad $\mathbf{A}$, N è un punto notevole di $\mathbf{A}$.

La maggior parte della trattazione in [7] si riferisce al caso in cui ogni coppia di lati opposti del quadrangolo s'incontra al finito[2]. Resta cosí escluso il caso del *trapezio*, che sarà invece l'oggetto della nostra trattazione. Per trapezio intendiamo un quadrangolo, i cui vertici A_1, A_2, A_3, A_4 siano distinti, non allineati e tali che due lati opposti A_1A_2 e A_3A_4 siano paralleli.

Il trapezio merita di essere studiato a parte, in quanto molte nozioni per questa classe di figure si semplificano notevolmente rispetto al caso generale. Vedremo, in particolare, che

- si può dare una caratterizzazione della classe dei trapezi mediante una semplice relazione geometrica tra tre particolari punti notevoli (OGH) del quadrangolo completo;

- lo studio dei punti notevoli del trapezio viene semplificato poichè molte figure *antisimili*[3] del quadrangolo diventano simili nel caso del trapezio;

- è possibile, a differenza che nel caso generale[4], ricostruire il trapezio con riga e compasso a partire da alcuni (quattro) suoi opportuni punti notevoli;

- la descrizione analitica dei punti notevoli usati per la ricostruzione aiuta a definire il luogo geometrico in cui deve trovarsi un punto notevole (M) una volta fissati gli altri tre (O, G, H) affinchè i vertici del trapezio abbiano coordinate reali.

---

[2] È il caso in cui nessuna coppia di lati opposti è formata da rette parallele.

[3] Si rimanda a [7] per la nozione di figure *antisimili*.

[4] Il problema algebrico per il quadrangolo generale comporta la soluzione di equazioni algebriche di grado tre e dunque non è risolubile mediante costruzioni con riga e compasso.

0.1 Notazione

Useremo la seguente notazione che già si trova in [7]:

A indica il trapezio di vertici A_1, A_2, A_3, A_4;

A_{ij} punto medio di A_iA_j;

$A_{ij,hk}$ indica il punto diagonale intersezione dei lati opposti A_iA_j, A_hA_k. Nel trapezio le intersezioni diagonali al finito sono due: $A_{13,24}$ e $A_{14,23}$;

$\mathbf{T}_i = A_jA_hA_k$, con i tre vertici distinti con $i, j, h, k \in \{1, 2, 3, 4\}$, indica il generico *triangolo complementare* di **A**;

$o(\mathbf{A})$ trapezio dei circocentri dei triangoli complementari di **A** (proposizione 1.2);

$n(\mathbf{A})$ trapezio dei *nove-centri*, o centri dei cerchi dei nove-punti dei $\mathbf{T}_i$ (proposizione 1.9);

$G(\mathbf{A})$ baricentro del trapezio (paragrafo 1.1);

$H(\mathbf{A})$ H-centro di **A**, centro delle similitudini tra i tre *trapezi pedali*(paragrafo 1.3);

$O(\mathbf{A})$ O-centro di **A**, centro della similitudine che manda **A** in $o(\mathbf{A})$(parafrago 1.2);

$N(\mathbf{A})$ centro della similitudine che manda **A** in $n(\mathbf{A})$ (paragrafo 1.4);

$J(\mathbf{A})$, H-centro del trapezio $o(\mathbf{A})$ (paragrafo 1.5);

(ZXY) cerchio per i punti X, Y, Z;

P^A simmetrico di P rispetto ad A, effetto del mezzo-giro di P intorno ad A;

P^{AB} immagine di P nella riflessione sulla retta AB;

P_{AB} proiezione ortogonale di P sulla retta AB;

$A_{i,j}$ proiezione ortogonale di A_i sulla retta A_hA_k, con $i, j, h, k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Inoltre quando ci riferiremo

- alla *mediana pricipale* del trapezio intenderemo la retta per i punti medi dei lati paralleli (a tale retta appartengono anche il baricentro e i punti diagonali al finito)[5];

[5] Alla mediana principale appartiene anche l'H-centro del trapezio. Questo fatto sarà dimostrato nella proposizione 2.3

- al *nove-cerchio* di un certo triangolo intenderemo il cerchio per i punti medi (e i piedi delle altezze) dei lati del triangolo (teorema di Poncelet).

Con riferimento a tre punti A, B, C, indicheremo con

- $[ABC]$ l'angolo orientato tra le rette AB e BC, valutato modulo π;
- $[[ABC]]$ l'angolo orientato tra le semirette uscenti da B, BA e BC, valutato modulo 2π.

Infine indicheremo rispettivamente positive e negative le similitudini che lasciano fissi e scambiano segno agli angoli orientati.

Nota: vogliamo qui riprecisare che non tratteremo i casi degeneri di trapezi aventi due vertici coincidenti o tre vertici allineati. Consideremo, invece, come casi particolari (ma li studieremo a parte), il trapezio isoscele e il parallelogramma. Le proposizioni del capitolo 1 e del capitolo 2 (tranne nei paragrafi 2.3 e 2.4) sono valide per i trapezi, intesi come quadrangoli *non ciclici* (cioè con i vertici appartenenti ad uno stesso cerchio) aventi i *quattro vertici distinti non a tre a tre allineati* e aventi *una coppia di lati opposti paralleli.* Il caso ciclico, che è poi quello del trapezio isoscele, sarà studiato a parte in modo sintetico al 2.3 e in modo analitico ai paragrafi 3.2.1 e 3.2.5. Infine al parallelogramma abbiamo dedicato i paragrafi 2.4 e 3.2.2.

Capitolo 1

Alcuni Punti Notevoli e Similitudini del Trapezio

In questo capitolo descriveremo alcuni punti notevoli del trapezio, deducendone proprietà dai corrispondenti punti notevoli del quadrangolo, studiati in [7]. Definiremo, però, in modo indipendente l'O-centro, l'H-centro e il punto J per il trapezio e dimostreremo alcune proprietà di questi punti a partire dalle nuove definizioni. Ovviamente le nostre dimostrazioni e le proprietà qui dimostrate non contraddicono la teoria generale del quadrangolo, ma nel trapezio i punti notevoli si arricchiscono di proprietà nuove, che spesso rendono la trattazione più semplice e quindi hanno suggerito una descrizione autonoma.

1.1 Baricentro

Per il trapezio, come per qualsiasi altro n-gono $\mathbf{A} = (A_1, ...A_n)$, un punto notevole importante è il **baricentro** G, definito dalla relazione vettoriale $\sum_{i=1}^{n} GA_i = 0$. Riportiamo la proposizione 2.1 di [7]:

Proposizione 1.1 *Il baricentro G di un quadrangolo $\mathbf{A} = A_1A_2A_3A_4$ è l'intersezione delle tre bimediane, ed è anche il loro punto medio $G = \frac{A_{ij}+A_{hk}}{2}$.*

Rimandiamo al paragrafo 2 di [7] per la trattazione di questo punto notevole, in quanto non presenta particolarità rispetto al caso del quadrangolo generale.

1.2 O-centro

La seguente definizione dell'O-centro di un trapezio risulta molto semplificata rispetto a quella generale del quadrangolo[1] per effetto della seguente

[1] Si veda il paragrafo 6 di [7].

Proposizione 1.2 *Per un trapezio* $\mathbf{A}$ *i circocentri* O_i *dei triangoli complementari sono i vertici di un trapezio simile ad* $\mathbf{A}$.

Innanzitutto dimostriamo che c'è una similitudine positiva che manda:

$$\begin{array}{rcl} A_1 & \mapsto & O_2 \\ A_2 & \mapsto & O_1 \\ A_3 & \mapsto & O_4 \\ A_4 & \mapsto & O_3 \end{array}$$

Per esempio, l'angolo

$$[O_3O_2O_1] = [O_3O_2, O_2O_1] = [A_1A_4, A_4A_3] = [A_1A_4A_3] = [A_4A_1A_2]$$

L'ultimo passaggio è conseguenza della condizione $A_1A_2 \parallel A_3A_4$.

Questo vale analogamente per tutti gli altri angoli. Allora sono simili tutte le coppie di triangoli

$$\begin{array}{rcl} A_1A_2A_3 & \leftrightarrow & O_2O_1O_4 \\ A_1A_2A_4 & \leftrightarrow & O_2O_1O_3 \\ A_1A_3A_4 & \leftrightarrow & O_2O_4O_3 \\ A_2A_3A_4 & \leftrightarrow & O_1O_4O_3 \end{array}$$

e considerandone i lati comuni, concludiamo che la similitudine è la stessa.

Definizione: l'O-centro di un trapezio $\mathbf{A}$ *è il centro della similitudine* $o(\mathbf{A})$ *che manda* $\mathbf{A}$ *nel suo trapezio dei circocentri* $o(\mathbf{A}) = O_2O_1O_4O_3$.

Proposizione 1.3 *L'O-centro è tale che* $[A_iOA_j] = [A_iA_hA_j] + [A_iA_kA_j]$.

Sia, infatti, B_{ij} l'intersezione dei cerchi (A_1OA_4) e (O_4OO_1) diverso da O e calcoliamo:

$$[A_1OA_4] = [O_4OO_1] = [O_4B_{14}O_1] = [B_{14}O_4O_1] + [O_4O_1B_{14}] =$$

$$= [A_1A_4A_{13}] + [A_{23}O_1A_4] = [A_1A_2A_3] + [A_1A_3A_2] + [A_2A_3A_4] + [A_3A_2A_4] =$$

$$= [A_1A_2A_4] + [A_1A_3A_4]$$

Tale proprietà, dimostrata in generale per l'O-centro di quadrangoli al 6.3 di [7], prova che la nostra definizione è compatibile con quella di [7].

1.3 H-centro

In un articolo di M. Happach, [2], compare la seguente costruzione[2] Si scelga in un quadrangolo qualunque $\mathbf{A} = A_1A_2A_3A_4$ una coppia di lati opposti , per esempio, A_1A_2 e A_3A_4. Allora il quadrangolo $\mathbf{A_{12,34}} = A_{1,2}, A_{2,1}, A_{3,4}, A_{4,3}$ è negativamente simile ad $\mathbf{A}$ secondo la mappa:

$$\begin{array}{rcl} A_1 & \mapsto & A_{1,2} \\ A_2 & \mapsto & A_{2,1} \\ A_3 & \mapsto & A_{3,4} \\ A_4 & \mapsto & A_{4,3} \end{array}$$

Scegliendo altre due coppie di lati opposti si ottengono altri due quadrangoli $\mathbf{A_{13,24}}$ e $\mathbf{A_{14,23}}$. Chiamiamo questi tre quadrangoli *quadrangoli pedali* di $\mathbf{A}$. Si prova in [2] che

Proposizione 1.4 *I tre quadrangoli pedali sono positivamente simili, con un comune centro di similitudine.*

Si vede facilmente che questo centro di similitudine è un punto notevole di ognuno dei tre quadrangoli pedali e anche del quadrangolo $\mathbf{A}$. Diamo la seguente

Definizione: il centro di similitudine dei tre quadrangoli pedali di $\mathbf{A}$ *è il punto notevole di* $\mathbf{A}$ *che chiameremo il suo* H*-centro.*

Ora cerchiamo altre proprietà dell'H-centro. Consideriamo i quattro *triangoli pedali*:

- $A_{1,2}A_{1,3}A_{1,4}$;
- $A_{2,1}A_{2,3}A_{2,4}$;
- $A_{3,1}A_{3,2}A_{3,4}$;
- $A_{4,1}A_{4,2}A_{4,3}$.

Nel R.A. Johnson, [3], teoremi 395, 396, 397, sono dimostrate le seguenti tre proposizioni, di cui riporteremo anche le semplici dimostrazioni.

Proposizione 1.5 *I triangoli pedali sono positivamente simili.*

[2]Ricordiamo qui che $A_{i,j}$ indica la proiezione ortogonale di A_i sulla retta A_hA_k.

La dimostrazione sfrutta l'equazione di Miquel[3] per un triangolo $A_1A_2A_3$ sui cui lati siano stati presi i punti P_1, P_2, P_3[4]:

$$[A_2PA_3] = [A_2A_1A_3] + [P_2P_1P_3]$$

Allora valgono:

$$[A_{1,2}A_{1,3}A_{1,4}] = [A_2A_1A_4] + [A_4A_3A_2]$$

$$[A_{3,4}A_{3,1}A_{3,2}] = [A_4A_3A_2] + [A_2A_1A_4]$$

Inoltre:

$$[A_2A_1A_4] + [A_4A_3A_2] = [A_1A_2A_3] + [A_3A_4A_1]$$

e dunque anche $[A_{2,1}A_{2,4}A_{2,3}]$ e $[A_{4,3}A_{4,2}A_{4,1}]$ sono uguali ai due precedenti.

Proposizione 1.6 *I quattro cerchi dei nove punti dei triangoli complementari, cioè $A_{ij}A_{jh}A_{hi}$, hanno in comune un punto P.*

Chiameremo i cerchi dei nove punti anche nove-cerchi nel corso della trattazione. Sia P l'intersezione dei nove-cerchi di $\mathbf{T_1}$ e $\mathbf{T_3}$ diversa da A_{24}. Consideriamo le seguenti equazioni sugli angoli orientati:

$$[A_1A_2A_4] = [A_{24}A_{14}A_{12}] = [A_{24}PA_{12}]$$

$$[A_4A_2A_3] = [A_{23}A_{34}A_{42}] = [A_{23}PA_{42}]$$

Sommando membro a membro otteniamo:

$$[A_{23}A_{13}A_{12}] = [A_1A_2A_3] = [A_1A_2A_4]+[A_4A_2A_3] = [A_{24}PA_{12}]+[A_{23}PA_{42}] = [A_{23}PA_{12}]$$

che dimostra che P appartiene anche al nove-cerchio di $\mathbf{T_4}$. Analogamente si prova che P appartiene anche al nove-cerchio di $\mathbf{T_2}$.

Proposizione 1.7 *I circocerchi dei triangoli pedali considerati sopra, sono concorrenti in P, che è dunque centro delle similitudini tra i triangoli pedali.*

Infatti, per esempio,

$$[A_{2,4}PA_{2,1}] = [A_{2,4}PA_{23}] + [A_{23}PA_{2,1}] = [A_{2,4}A_{13}A_{23}] + [A_{23}A_{34}A_{2,1}] =$$

$$= [A_1A_3, A_1A_2] + [A_2A_4, A_4A_3] = [A_4A_2A_1] + [A_1A_3A_4] =$$

$$[A_{2,4}A_{2,3}A_{2,1}]$$

Ora dimostriamo che il punto P coincide con l'H-centro del trapezio $\mathbf{A}$, definito come centro delle similitudini tra i trapezi delle proiezioni (proposizione 1.4).

[3] L'equazione è la 186 in [3].

[4] Allora esiste un punto P comune ai tre cerchi $(A_iP_jP_h)$

Proposizione 1.8 *P coincide con l'H-centro di* $\mathbf{A}$.

Dimostriamo che H vede i lati corrispondenti dei triangoli pedali sotto lo stesso angolo. Questo è sufficiente per affermare che H è anche il centro di similitudine dei triangoli pedali e dunque coincide con P.

Sappiamo che $[A_{2,4}HA_{2,1}] = [A_{3,4}HA_{3,1}]$, perchè angoli tra vertici corrispondenti secondo la similitudine positiva che manda $A_{1,2}, A_{2,1}, A_{3,4}, A_{4,3}$ in $A_{1,3}, A_{2,4}, A_{3,1}, A_{4,2}$ rispettivamente. Inoltre $[A_{3,4}HA_{3,1}] = [A_{4,3}HA_{4,2}]$, perchè differenze degli angoli rispettivamente eguali $[A_{3,4}HA_{4,3}] - [A_{3,1}HA_{4,3}]$ e $[A_{3,1}HA_{4,2}] - [A_{3,1}HA_{4,3}]$

Dunque H vede i lati corrispondenti $A_{2,4}A_{2,1}, A_{3,1}A_{3,4}, A_{4,2}A_{4,3}, A_{1,3}A_{1,2}$ sotto angoli eguali. In modo analogo si ottiene che H vede ogni quadrupla di lati corrispondenti dei triangoli pedali sotto angoli eguali. Allora H è il centro delle similitudini tra questi quattro triangoli, che avevamo chiamato P. Abbiamo dimostrato che H coincide con P.

Possiamo anche facilmente calcolare[5] $[A_{2,4}HA_{2,1}]$ in funzione degli angoli di $\mathbf{A}$:

$$-[A_{1,3}A_{2,4}A_3] = [A_{4,2}A_{2,4}A_{1,3}] = -[A_4A_2A_1]$$

$$[A_{2,4}HA_{2,1}] = [A_{2,4}A_{1,3}, A_3A_4] = [A_{1,3}A_{2,4}A_3] + [A_{2,4}A_3A_4] =$$
$$= [A_4A_2A_1] + [A_1A_3A_4]$$

Le proposizioni precedenti provano che la definizione di H-centro qui usata è coerente con quella di [7].

1.4 N-centro

Analogamente a quanto fatto per i circocentri dei triangoli complementari, ora consideriamo i centri N_i dei nove-cerchi dei triangoli complementari.

Proposizione 1.9 *I punti N_i sono i vertici di un trapezio negativamente simile ad* $\mathbf{A}$.

Consideriamo la mappa:

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \mapsto & N_2 \\ A_2 & \mapsto & N_1 \\ A_3 & \mapsto & N_4 \\ A_4 & \mapsto & N_3 \end{array}$$

Dimostriamo che tutti gli angoli corrispondenti sono congruenti. Calcoliamo, per esempio,

$$[N_2N_4N_1] = [A_{13}PA_{23}] = [A_{13}A_{12}A_{23}] = [A_1A_3A_2]$$

[5] Questo calcolo non è richiesto dalla dimostrazione.

dove abbiamo usato la proprietà dei fasci di circonferenze di avere l'asse radicale perpendicolare all'asse centrale. Analogamente

$$[N_3N_2N_4] = [A_4A_2A_3]$$

e dunque

$$[N_3N_2N_1] = [A_4A_1A_2]$$

Dunque vale

$$[N_3N_2N_1] = [A_4A_2A_3]$$

Questo vale allo stesso modo per tutti gli altri angoli.

Definizione: il centro N della similitudine che manda $\mathbf{A}$ in $n(\mathbf{A})$ si chiamerà l'N-centro di $\mathbf{A}$.

N è un punto notevole di $\mathbf{A}$. Anche l'O-centro di $n(\mathbf{A})$ è un punto notevole di $\mathbf{A}$, di cui ora studiamo alcune proprietà.

Proposizione 1.10 *H è l'O-centro del trapezio $n(\mathbf{A})$, cioè $H(\mathbf{A}) = O(n(\mathbf{A}))$.*

Tale proposizione è la 8.5 in [5], a cui rimandiamo per la dimostrazione.

Proposizione 1.11 *La normale dal baricentro G al lato A_iA_j dimezza il segmento N_hN_k.*

Tale proposizione è dimostrata in [5] al 3.3 e qui riportiamo la semplice dimostrazione.

Essendo $A_{12}A_{24}$ una corda del cerchio dei nove punti di $\mathbf{T_3}$, parallela a A_1A_4, allora $(N_3)_{12} = (\frac{A_{14}+A_{24}}{2})_{12}$. Analogamente $(N_4)_{12} = (\frac{A_{13}+A_{23}}{2})_{12}$. Ne segue

$$(\frac{N_3+N_4}{2})_{12} = (\frac{A_{13}+A_{23}}{2})_{12} + (\frac{A_{14}+A_{24}}{2})_{12} =$$

$$= (\frac{A_{13}+A_{24}}{2})_{12} + (\frac{A_{14}+A_{23}}{2})_{12} = (\frac{G_{12}+G_{12}}{2})_{12} = G_{12}$$

Proposizione 1.12 $G = H(n(\mathbf{A}))$

Basta mostrare, come al 4.1 di [5], che il cerchio dei nove punti di qualsiasi triangolo complementare di $n(\mathbf{A})$ passa per G.

Per esempio,

$$[N_{14}GN_{34}] = [A_3A_2, A_2A_1] =$$

$$= [A_3A_2A_1] = [N_3N_4N_1] = [N_{14}N_{13}N_{34}]$$

Proposizione 1.13 $G \in NO$

Anche questa proposizione vale per il quadrangolo in generale ed è contenuta in [5] al 11.1.

Nell'omotetia sono allineati il centro N e i punti corrispondenti $O(\mathbf{A})$ e $O(n(n(\mathbf{A})))$. Ricordiamo che $O(n(\mathbf{A})) = H$ per definizione e dunque $O(n(n(\mathbf{A}))) = H(n(\mathbf{A})) = G$, per la proposizione precedente.

1.4.1 Alcune Proprietà di H

Rielenchiamo brevemente le proprietà dell'H-centro fin'ora osservate.

1. H è il centro delle similitudini positive tra i tre trapezi pedali;
2. H è punto d'intersezione comune dei quattro cerchi dei nove punti dei triangoli complementari, cioè $A_{ij}A_{jh}A_{hi}$;
3. H è centro delle similitudini positive tra i quattro triangoli pedali;
4. H è l'O-centro del trapezio dei nove-centri, quindi $[N_iHN_j] = [N_iN_hN_j] + [N_iN_kN_j]$.

1.5 Punto J

Definiamo ora il punto notevole J per il trapezio come H-centro del trapezio $o(\mathbf{A})$ dei circocentri dei triangoli complementari.

Dimostreremo con la proposizione 2.1 che $\mathbf{A}$ viene mandato in $o(\mathbf{A})$ tramite un'omotetia e una rotazione intorno ad O di $\frac{\pi}{2}$ e il triangolo notevole OJH è rettangolo (proposizioni 2.4 e 2.5). Inoltre dimostreremo nella proposizione 2.6 che il triangolo OGH è isoscele sulla base OH. Allora abbiamo che $GH = GO$ è il raggio del circocerchio di OJH, allora $GH = GO = GJ$, e quindi $J = H^G$. Cioè si puó ottenere J da H e G riflettendo il primo punto sul secondo. Questo dimostra che la definizione di $J(\mathbf{A})$ qui data è compatibile con quella al paragrafo 3 di [7].

1.6 Quadrilateri Complementari e Punto di Miquel

A questo punto dobbiamo ricordare le nozioni di *quadrangolo* e di *quadrilatero completo*. In un quadrangolo vi sono sei lati, cioè rette che congiungono i quattro punti A_iA_j, con $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Un quadrilatero completo, invece, è un insieme $\mathbf{Q} = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ di quattro rette r_i, dette *lati* di $\mathbf{Q}$.

Se in un quadrangolo $\mathbf{A} = A_iA_jA_hA_k$ si ignora una coppia di lati *opposti* A_iA_j, A_hA_k, si ottiene un *quadrilatero* che chiameremo *complementare* di $\mathbf{A}$ e indicheremo con $\mathbf{Q}_{ij,hk}$. Cosí, per esempio, $\mathbf{Q}_{13,24}$ ha per lati le rette

$A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$. Gli altri due quadrilateri complementari di $\mathbf{A}$ sono $\mathbf{Q}_{12,34}$ e $\mathbf{Q}_{14,23}$.

Riassumiamo le nozioni sui quadrilateri $\mathbf{Q} = r_1r_2r_3r_4$ che qui ci interessano.

Il vertice R_{ij} è il punto di intersezione di r_i con r_j. Ignorando un lato r_i si ottiene un *trilatero complementare* $\mathbf{L}_i = \mathbf{Q}\{r_j, r_h, r_k\}$. Tra i sei vertici di $\mathbf{Q}$ s'individuano tre coppie R_{ij}, R_{hk} di vertici *opposti*. Le tre rette che uniscono le coppie di vertici opposti sono i lati del *trilatero diagonale*.

I risultati principali della geometria del quadrilatero completo compaiono nel lavoro di G. Steiner, [1]. Qui faremo uso dei seguenti:

1. I circocerchi dei quattro trilateri complementari hanno in comune un punto $M(\mathbf{Q})$, detto *punto di Miquel* del quadrilatero $\mathbf{Q}$.

2. I centri dei quattro cerchi precedenti appartengono ad uno stesso cerchio $\mathbf{M}(\mathbf{Q})$, cui appartiene anche $M(\mathbf{Q})$. Lo chiameremo il *cerchio di Miquel* del quadrilatero $\mathbf{Q}$.

Ovviamente sono notevoli per il quadrilatero $\mathbf{Q}$ il punto di Miquel $M(\mathbf{Q})$ e il cerchio di Miquel $\mathbf{M}(\mathbf{Q})$.

Enunciamo ora due teoremi che valgono in generale per ogni quadrangolo, e dunque anche per il trapezio. Non ne daremo le dimostrazioni, per le quali rimandiamo a [5].

Proposizione 1.14 *Nel quadrangolo* $\mathbf{A}$ *l'intersezione degli assi di due lati opposti* A_iA_j, A_hA_k*, appartiene al cerchio di Miquel del quadrilatero* $\mathbf{Q}_{ij,hk}$.

Proposizione 1.15 *I cerchi di Miquel dei tre quadrilateri complementari di un quadrangolo* $\mathbf{A}$ *hanno in comune un punto* M.

M è ovviamente un nuovo punto notevole per $\mathbf{A}$, che indicheremo con $M(\mathbf{A})$ e chiameremo il *punto di Miquel del quadrangolo* $\mathbf{A}$.

Interpreteremo i suddetti teoremi nel caso del trapezio nel prossimo capitolo.

Capitolo 2

Teoremi Specifici del Trapezio

In questo capitolo enunceremo e dimostreremo alcuni teoremi non deducibili dalle proprietà dei punti notevoli del quadrangolo generale, che abbiamo cioè sviluppato specificamente per il trapezio e non come casi particolari di risultati di [7]. Questi teoremi, insieme a quelli del primo capitolo, sono alla base della ricostruzione del trapezio, che riporteremo nel capitolo 4.

Proposizione 2.1 *La similitudine o che manda $\mathbf{A}$ in $o(\mathbf{A})$ è il prodotto di una rotazione di angolo $[[HOJ]]$*[1]*, e di un'omotetia di coefficiente*[2] $\frac{|OJ|}{|OH|}$.

Il valore assoluto del coefficiente dell'omotetia è chiaramente $\frac{|OJ|}{|OH|}$, perchè J è l'H-centro di $o(\mathbf{A})$, positivamente simile ad $\mathbf{A}$ per la proposizione 1.2.

Consideriamo l'immagine di $\mathbf{A}$ secondo l'omotetia di centro O e coefficiente positivo $\frac{|OH|}{|OJ|}$. L'H-centro viene mandato nel punto H' che appartiene alla semiretta OH; J viene trasformato in J' che appartiene alla semiretta OJ. Il trapezio $\mathbf{A}'$ è simile ad $\mathbf{A}$ e $o(\mathbf{A})$ è la sua immagine tramite la rotazione in cui abbiamo fattorizzato la similitudine positiva o. Tale rotazione ha angolo $[[HOJ]] = \frac{\pi}{2}$, perchè H' deve andare in J e dunque la semiretta OH dev'essere mandata nella semiretta OJ.

Proposizione 2.2 *La similitudine negativa n che manda $\mathbf{A}$ in $n(\mathbf{A})$ è il prodotto di un'omotetia di centro N e di coefficiente $\frac{|HN|}{|NO|} = \frac{|HO|}{|GH|}$ e di una riflessione sulla retta per N (punto unito) parallela alla bisettrice esterna dell'angolo $[[OHG]]$.*

[1] Ricordiamo che la doppia parentesi quadra indica che l'angolo considerato è quello (orientato) tra la semirette HO e OJ ed è valutato modulo 2π.

[2] Dati i segmenti orientati (vettori) paralleli AB e CD indicheremo con $\frac{AB}{CD}$ il rapporto con segno tra le loro lunghezze orientate. Se non sono paralleli indicheremo il rapporto (positivo) tra le lunghezze non orientate $|AB|$ e $|CD|$ con $\frac{|AB|}{|CD|}$.

Il valore assoluto del coefficiente è dato dal rapporto tra segmenti corrispondenti. Dunque, essendo N il centro della similitudine e H immagine di O (proposizione 1.10), tale rapporto è $\frac{|HN|}{|NO|}$. Ricordando la proposizione 1.12 ($G = H(n(\mathbf{A}))$) il valore assoluto del coefficiente si può esprimere anche $\frac{|GH|}{|HO|}$.

Dimostriamo che se scegliamo il coefficiente positivo, allora la riflessione presente nella similitudine negativa dev'essere sulla retta per N parallela alla bisettrice esterna dell'angolo $[[OHG]]$. Consideriamo l'immagine di $\mathbf{A}$ secondo l'omotetia di centro N e coefficiente positivo $\frac{|NH|}{|NG|} = \frac{|HO|}{|HG|}$. L'$H$-centro viene mandato in H' che appartiene alla semiretta NH e O viene mandato in O' che appartiene alla semiretta NO. Inoltre O' cade sulla bisettrice interna dell'angolo $[[OHG]]$ per il teorema delle bisettrici applicato al triangolo HGO . Infatti la bisettrice divide il lato opposto in segmenti proporzionali agli altri lati:

$$\left|\frac{O'O}{GO'}\right| = \frac{|HO|}{|HG|}$$

Poichè O' dev'essere trasformato in H dalla riflessione assiale in cui abbiamo fattorizzato la similitudine negativa, la retta su cui riflettiamo dev'essere la perpendicolare per N alla retta HO', cioè la retta per N parallela alla bisettrice esterna dell'angolo $[[OHG]]$. Questo è quanto volevamo.

2.1 Mediana Principale e Retta OH del Trapezio

Chiameremo *mediana principale* del trapezio, come annunciato nell'introduzione, la retta $A_{12}A_{34}$ per i punti medi dei lati paralleli A_1A_2 e A_3A_4, che passa anche per i punti diagonali al finito $A_{13,24}$ e $A_{14,23}$.

Dimostriamo che

Proposizione 2.3 *L'H-centro di un trapezio* $\mathbf{A}$ *appartiene alla mediana principale di* $\mathbf{A}$.

Infatti se consideriamo i nove-cerchi di $\mathbf{T_2}$ e $\mathbf{T_3}$, che s'intersecano in A_{14} e H, sviluppando la seguente somma di angoli otteniamo:

$$[A_{12}HA_{14}]+[A_{14}HA_{34}] = [A_{12}A_{24}A_{14}]+[A_{14}A_{13}A_{34}] = [A_4A_1A_2]+[A_3A_4A_1]$$

L'ultima somma è nulla perché $A_1A_2 \parallel A_3A_4$, dunque la condizione

$$[A_{12}HA_{14}] + [A_{14}HA_{34}] = 0$$

mostra proprio l'allineamento di A_{34}, H, A_{12}.

Dimostriamo ora che una condizione necessaria[3] affinchè un quadrangolo sia un trapezio è che OH sia perpendicolare ai lati paralleli, e dunque a OJ. Nel terzo capitolo, con la geometria analitica, mostreremo anche la sufficienza di questa condizione sui punti notevoli (proposizioni 3.7 e 3.12).

Proposizione 2.4 *In un trapezio la retta OH, che congiunge l'O-centro e l'H-centro, è perpendicolare alla direzione dei lati paralleli di* $\mathbf{A}$.

Consideriamo la similitudine n, introdotta in 1.4, che trasforma $\mathbf{A}$ in $n(\mathbf{A})$. In particolare manda la mediana principale di $\mathbf{A}$ nella retta per H perpendicolare a N_1N_2. Sia $\alpha = [HA_{34}O]$

Sappiamo dalle proposizioni 1.12 e 1.13 che $G = H(n(\mathbf{A}))$ (quindi $G \in N_{12}N_{34}$) e $G \in NO$. Inoltre $G \in A_{12}A_{34}$. Ma allora G è l'intersezione comune delle tre rette $A_{12}A_{34}, N_{12}N_{34}$ e NO.

Poichè per la proposizione 1.11 $N_{12}N_{34} \parallel OO_{A_1A_2}$, allora $[A_{12}GN_{34}] = \alpha$. Dimostriamo che

$$[A_{12}GN_{34}] = [A_{12}HO] \quad (= \alpha)$$

Ricordiamo che

$$\begin{array}{rccc} n: & H & \mapsto & G \\ & N & \mapsto & N \\ & O & \mapsto & H \end{array}$$

Allora i triangoli GNH e OHN, che hanno l'angolo $[HNG]$ in comune, sono negativamente simili. In particolare $[NHG] = [HON]$. Se H^r è il riflesso di H su r (la retta per N perpendicolare alla mediana principale), $[NHG] = [GH^rN]$. Allora, usando la proposizione 1.11,

$$[NHG] = [G^rH^rN] = [HH^rN] = [N_{34}GO] = [N_{12}GN]$$

Questo mostra il parallelismo tra $N_{12}N_{34}$ e OH, perchè $[HON] = [NHG] = [N_{12}GN]$. Abbiamo cosí

$$[A_{12}HO] = [A_{12}GN_{34}] = \alpha$$

Abbiamo cosí

Corollario 2.5 *La retta OJ è parallela ai lati paralleli del trapezio* $\mathbf{A}$.

[3]purchè non coincidano O e J (caso del trapezio isoscele trattato sinteticamente al paragrafo 2.3) o O e H (caso del parallelogramma trattato sinteticamente al paragrafo 2.4)

Proposizione 2.6 *Il triangolo HOG è isoscele rispetto alla base HO.*

Consideriamo

$$\frac{\pi}{2} - \alpha = [HGA_{13}] = [A_{12}GA_{24}] = \frac{\pi}{2} - [NH^rG]$$

e ricordando che $[NH^rG] = [GOH]$, abbiamo

$$[GOH] = \alpha = [OHG]$$

Osserviamo che poichè in un trapezio il triangolo OJH è rettangolo vale la seguente:

Osservazione 2.7 *Le direzioni delle bisettrici dell'angolo $[HJO]$ si ottengono con una rotazione di $\frac{\pi}{4}$ da quelle delle bisettrici dell'angolo $[OHJ]$*[4].

Sia I l'incentro del triangolo JOH.

$$[OHJ] + [HJO] = \frac{\pi}{2}$$

da cui

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}[OHJ] + \frac{1}{2}[HJO] = [IHJ] + [HJI] = [HIJ]$$

Con riferimento alle proprietà di H che abbiamo studiato nel capitolo 1, elenchiamo qui quelle che valgono per il trapezio, ma non per il quadrangolo generale.

1. H appartiene alla mediana principale del trapezio $\mathbf{A}$;
2. OH è perpendicolare alla direzione dei lati paralleli di $\mathbf{A}$;
3. $[GHO] = [HOG]$.

2.2 Alcune Proprietà del Punto di Miquel del Trapezio

Interpretiamo i teoremi del paragrafo 1.6 per i tre quadrilateri complementari del trapezio.

Consideriamo anzitutto i due quadrilateri complementari ($\mathbf{Q}_{13,24}$ e $\mathbf{Q}_{14,23}$), che includono quindi la coppia di lati paralleli di $\mathbf{A}$. Studiamo, per esempio, $\mathbf{Q}_{13,24}$. Si vede subito che:

[4] Questo dimostra che HI e la sua perpendicolare per l'origine H sono le bisettrici degli asintoti dell'iperbole che introdurremo nel capitolo 3.

1. i trilateri complementari non degeneri sono due e sono omotetici con centro dell'omotetia in $A_{13,24}$;

2. i loro circocerchi sono tangenti in $A_{13,24}$;

3. $M(\mathbf{Q}_{13,24})$ coincide con $A_{13,24}$;

4. il cerchio di Miquel $m_{13,24}$ è degenere ed è una retta , passante per $A_{13,24}$.

Analoghe proprietà valgono per il quadrilatero $\mathbf{Q}_{14,23}$: il punto di Miquel è $A_{14,23}$ e il cerchio di Miquel è una retta $m_{14,23}$, che passa per $A_{14,23}$.

Infine consideriamo $\mathbf{Q}(\mathbf{A}) = \mathbf{Q}_{12,34}$ il *quadrilatero complementare principale* del trapezio $\mathbf{A}$, ottenuto eliminando i lati paralleli del quadrangolo $\mathbf{A}$. Poiché uno dei vertici opposti è all'infinto, il trilatero diagonale è formato da tre rette di cui due sono parallele. Il cerchio di Miquel del quadrilatero complementare principale non è degenere. Quanto al punto di Miquel $M(\mathbf{Q}_{12,34})$, si tratta per definizione dell'intersezione dei cerchi $(A_1A_3A_{14,23}), (A_2A_4A_{14,23}), (A_2A_3A_{13,24}), (A_1A_4A_{13,24})$. Proveremo che si tratta dell'O-centro di $\mathbf{A}$ (proposizione 2.9).

Proposizione 2.8 *In un trapezio avente i lati A_1A_2 e A_3A_4 paralleli i punti $O, J, A_{13,24}, A_{24}, A_{13}, T_{13,24}$ e $O, J, A_{14,23}, A_{14}, A_{23}, T_{14,23}$ appartengono rispettivamente agli stessi cerchi.*

In [7] è dimostrato (proposizione 15.2) che J appartiene al generico cerchio (sono in tutto tre) per un punto diagonale $A_{ij,hk}$ e per i punti medi A_{ij}, A_{hk} dei lati ad esso afferenti. Nel trapezio questi cerchi sono due (uno per $A_{13,24}$ e uno per $A_{14,23}$), mentre il terzo è degenere perchè $A_{12,34}$ è all'infinito. Dimostriamo che O appartiene a questi due cerchi.

Lavoriamo, per esempio, sul cerchio $(A_{13,24}A_{13}A_{24})$, che ha come diametro $A_{13,24}T_{13,24}$. O appartiene a tale cerchio, perchè $[T_{13,24}OA_{13,24}] = \frac{\pi}{2}$. Infatti $T_{13,24}$ è immagine di $A_{13,24}$ attraverso la similitudine che manda $\mathbf{A}$ in $o(\mathbf{A})$, di centro O.

Proposizione 2.9 *L'O-centro del trapezio è anche il punto di Miquel del quadrilatero complementare principale $\mathbf{Q}_{12,34}$.*

Basta dimostrare che O appartiene al circocerchio di ogni trilatero complementare del quadrilatero complementare principale.

Cominciamo dimostrando che $O \in (A_1A_4A_{13,24})$. Useremo il parallelismo tra le rette $A_1A_2, A_3A_4, A_{13}A_{24}$ e la proposizione 1.3. Calcoliamo

$$[A_1OA_4] = [A_1A_2A_4] + [A_1A_3A_4] = [A_{13}A_{24}A_{13,24}] + [A_{13,24}A_{13}A_{24}] =$$

$$= [A_{13}A_{13,24}A_{24}] = [A_1A_{13,24}A_2] = [A_1A_{13,24}A_4]$$

Analogamente si dimostra che O appartiene ai cerchi $(A_{13,24}A_3A_2)$, $(A_{14,24}A_1A_3)$ e $(A_{14,23}A_2A_4)$. Dunque O coincide con il punto di Miquel del quadrilatero complementare principale.

Ricordando la seconda proprietà dei quadrilateri nel paragrafo 1.6, si ha il seguente

Corollario 2.10 *L'O-centro di un trapezio appartiene al cerchio di Miquel del quadrilatero complementare principale* $\mathbf{Q}_{12,34}$.

Proposizione 2.11 *I punti* $M, A_{14,23}, A_{13,24}, O$ *appartengono allo stesso cerchio di centro* F[5].

Consideriamo il cerchio $(O, A_{13,24}, A_{14,23})$. Esso viene mandato dalla similitudine o nel cerchio di Miquel del quadrilatero complementare principale, $(O, T_{13,24}, T_{14,23})$, che passa anche per M. Vogliamo dimostrare che $M \in (O, A_{13,24}, A_{14,23})$. A questo scopo calcoliamo:

$$[A_{14,23}MA_{13,24}] = [A_{14,23}M, MA_{13,24}] = [T_{14,23}M, MT_{13,24}] =$$

$$= [T_{14,23}MT_{13,24}] = [T_{14,23}OT_{13,24}] = [A_{14,23}OA_{13,24}]$$

che mostra quanto voluto.

Proposizione 2.12 *Il triangolo* FMO_M *è rettangolo e simile al triangolo* HOJ.

Sia $O_\#$ l'intersezione, diversa da H, della mediana principale di $\mathbf{A}$ con il cerchio (MHO) e sia O_M intersezione dell'asse di MO con il prolungamento di $O_\#M$.

Consideriamo il cerchio di centro O_M e passante per M, che dimostreremo essere il cerchio di Miquel del quadrilatero complementare principale. Dimostreremo, cioè, che $T_{13,24}$ appartiene a tale cerchio.

Per l'appartenenza di $O_\#$ a (HMO) abbiamo

$$[MO_\#H] = [MOH]$$

$$[O_\#HO] = [O_\#MO]$$

Allora $[O_MMO] = [JHO]$.

Se chiamiamo W il punto medio di OM abbiamo che i triangoli

- MWO_M;

[5] Questo teorema è corollario dell'enunciato 16.4 in [7], avendo dimostrato che $A_{14,23}, A_{13,24}, O$ sono i punti di Miquel dei quadrilateri complementari.

- HOJ;
- $A_{13,24}OT_{13,24}$

sono positivamente simili[6], perché rettangoli e aventi $[O_M MO] = [JHO] = [T_{13,24}A_{13,24}O]$. In particolare

$$[OT_{13,24}M] = [OT_{13,24}A_{13,24}] = [OJH] =$$

$$= [OO_M F] = \frac{1}{2}[[OO_M M]]$$

Questo dimostra che al cerchio con centro O_M passante per M appartiene il punto $T_{13,24}$ e dunque il cerchio in questione è proprio il cerchio di Miquel del quadrangolo complementare principale.

Inoltre ricordando la similitudine che manda $\mathbf{A}$ in $o(\mathbf{A})$ si nota che il cerchio $(OA_{13,24}A_{14,23})$, che ha centro F e passa per M (proposizione 2.11), viene mandato nel cerchio $(OT_{13,24}T_{14,23})$. Quest'ultimo è il cerchio di Miquel $\mathbf{M}(\mathbf{Q}_{12,34})$, per quanto dimostrato sopra. I due cerchi considerati sono ortogonali perché uno immagine dell'altro secondo la similitudine o. Dunque i raggi FM e $O_M M$ sono ortogonali e il triangolo $FO_M M$ è rettangolo. Inoltre $[MO_M F] = [HJO]$. Allora si ha quanto voluto.

2.3 Trapezio Isoscele (Ciclico)

Cominciamo con un riassunto sulla geometria elementare del trapezio isoscele.

- Il trapezio isoscele è inscrivibile in un cerchio, cioè è ciclico; e viceversa se un trapezio è inscrivibile in un cerchio allora è isoscele.
- Il trapezio isoscele ha un asse di simmetria e viceversa un trapezio con un'asse di simmetria è isoscele.
- Se un quadrangolo ciclico ha un asse di simmetria su cui non cada alcun vertice, il quadrangolo è un trapezio isoscele.

Le dimostrazioni di tali enunciati sono molto semplici. Riportiamo qui, come esempio, la dimostrazione del primo enunciato.

[6] La similitudine tra gli ultimi due triangoli è conseguenza della proposizione 2.8, in cui abbiamo dimostrato l'appartenenza dei punti $O, T_{13,24}, J, A_{13,24}$ allo stesso cerchio di diametro $A_{13,24}T_{13,24}$.

Prima Proprietà Ogni trapezio isoscele è ciclico.
Infatti se A_1A_2 e A_3A_4 sono i lati paralleli, tracciamo il circocerchio di $A_1A_2A_3$. Anche $A_4 \in (A_1A_2A_3)$ perchè

$$[A_1A_3A_2] = [A_1A_4A_2]$$

Abbiamo cosí dimostrato che il circocerchio di $\mathbf{A}$ è il circocerchio di qualsiasi dei triangoli complementari.

Per quanto riguarda lo studio dei punti notevoli del trapezio isoscele i teoremi che prendono in considerazione la retta OJ perdono di significato, perchè $O \equiv J$. Infatti il trapezio dei circocentri in questo caso si concentra in un solo punto, intersezione della mediana principale con gli assi dei due lati non paralleli. Dunque tutti i punti notevoli del trapezio dei circocentri, in particolare il punto notevole J, coincidono con il punto O.

Poichè il centro del circocerchio (proposizione 2.13) di $\mathbf{A}$ cade sull'asse di tutti i lati del trapezio, discende immediatamente che

Proposizione 2.13 *L'O-centro del trapezio è il centro del circocerchio del trapezio stesso.*

Abbiamo visto che la mediana principale è anche asse di simmetria per il trapezio e dunque ha direzione perpendicolare rispetto ai lati paralleli di $\mathbf{A}$. H, G, O, J sono tutti allineati su tale asse, inoltre $O \equiv J$, perchè il trapezio dei circocentri è diventato il punto O e coincidono con O tutti i suoi punti notevoli. Inoltre dimostriamo che

Proposizione 2.14 *M giace sulla mediana principale del trapezio isoscele.*

Infatti M è l'intersezione comune tra le due rette di Miquel (i cerchi degeneri) e il cerchio di Miquel del quadrilatero $\mathbf{Q}_{12,34}$. Le rette di Miquel coincidono tra loro e con la retta HO, la mediana principale, perché $T_{13,24} \equiv T_{14,23} \equiv O$ e i punti $A_{13,24}, A_{14,23}$ giacciono sulla mediana principale. Allora il (terzo) cerchio di Miquel, che sappiamo passare per O, ci dà il punto di Miquel M come ulteriore intersezione (diverso da O) con la mediana principale.

L'iperbole equilatera circoscritta al trapezio isoscele ha come centro H. I suoi assi di simmetria sono la mediana principale e la retta ad essa perpendicolare passante per H. Allora gli asintoti dell'iperbole sono la coppia di rette perpendicolari per H che formano angoli di $\frac{\pi}{4}$ con la mediana principale GH.

2.4 Parallelogramma

Nel caso in cui una seconda coppia di lati opposti sia parallela, il trapezio diventa un parallelogramma. Dimostriamo che

Proposizione 2.15 *Un trapezio è un parallelogramma se e solo se il baricentro G è intersezione di due lati opposti.*

Per il parallelogramma un solo punto diagonale è al finito. Inoltre è noto che una caratterizzazione del parallelogramma è di avere le diagonali che s'intersecano nei punti medi. Questi, dunque, coincidono tra loro e con il baricentro G.

Viceversa se in un trapezio una coppia di lati opposti s'intersecano in G, non è restrittivo supporre che siano i lati A_1A_3, A_2A_4, mentre come al solito supponiamo paralleli i lati A_1A_2, A_3A_4. I triangoli $A_1A_{12}G$ e $A_3A_{34}G$ risultano simmetrici rispetto ad O, cioè immagini l'uno dell'altro secondo un mezzo-giro intorno a G. Allora anche i triangoli A_1A_4G e A_3A_2G risultano simmetrici rispetto ad O. In particolare questo significa che anche $A_1A_4 \parallel A_2A_3$ e che dunque il trapezio è un parallelogramma.

Continuiamo la descrizione del parallelogramma.

L'H-centro Anche l'H-centro coincide con G, in quanto questo è punto medio di un lato di tutti i triangoli complementari.

La mediana principale Le mediane principali sono due, passano per H, e hanno le direzioni dei lati paralleli. Sono distinte in generale le rette perpendicolari alle coppie di lati paralleli.

Il parallelogramma $o(\mathbf{A})$ Il parallelogramma dei circocentri $o(\mathbf{A})$ ha i lati sugli assi di $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$, le cui direzioni sono anche le direzioni di parallelismo di $o(\mathbf{A})$. La trasformazione che manda $\mathbf{A}$ in $o(\mathbf{A})$ è, come nel caso generale del trapezio, una similitudine positiva di centro G. L'O-centro di un parallelogramma è, dunque, coincidente con G, H e l'intersezione delle diagonali al finito.

Il parallelogramma $n(\mathbf{A})$ Se $\mathbf{A}$ è un parallelogramma, il quadrangolo $n(\mathbf{A})$ è un parallelogramma simile ad $\mathbf{A}$. Il centro della similitudine, come nel caso generale è H.

Osserviamo infine che gli asintoti dell'iperbole equilatera circoscritta al parallelogramma sono le bisettrici dell'angolo $[A_{14}GA_{34}]$. Infatti gli assi di simmetria passano per G e hanno le direzioni delle bisettrici di $[GA_{34}O_1]$ (che sono anche quelle delle bisettrici di $[GA_{12}O_4]$).

Capitolo 3

Descrizione Analitica del Trapezio

3.1 Caso Generale (Quadrangolo non Ortogonale)

In questo capitolo introdurremo un sistema di assi ortogonali preferenziale per il quadrangolo completo, molto utile per lo studio del quadrangolo generale[1] e anche nel caso del trapezio. L'esistenza di una ed una sola *iperbole equilatera* per i vertici di un quadrangolo[2] è enunciato e dimostrato in [7]. Qui ci limiteremo a riassumere i risultati utili per la nostra descrizione e procederemo a caratterizzare *analiticamente* il trapezio.

In generale quando un quadrangolo presenta una coppia di lati opposti ortogonali, l'iperbole equilatera degenera in una coppia di rette perpendicolari. Chiameremo questa classe di quadrangoli classe del *quadrangolo ortogonale* e la studieremo al paragrafo 3.2.4.

Se l'iperbole non degenera in una coppia di rette, non è restrittivo supporre che la sua equazione sia xy=1. Consideriamo l'iperbole equilatera per i vertici di un generico trapezio **A** e poniamoci nel sistema di assi ortogonali in cui tale iperbole ha equazione $xy = 1$. Gli assi sono, dunque, gli asintoti dell'iperbole. Ci occuperemo ora, fino al paragrafo 3.2.4 del caso in cui l'iperbole equilatera sia non degenere.

Poichè i vertici del trapezio cadono sull'iperbole, possiamo indicare il vertice A_i con le coordinate[3]:

$$A_i = \left(x_i, \frac{1}{x_i} \right)$$

Faremo uso della seguente proposizione contenuta in [7].

---

[1] Rimandiamo al paragrafo 11 di [7].

[2] L'iperbole è unica purchè un vertice non sia l'ortocentro del triangolo formato dagli altri tre. In questo caso per i quattro vertici passano un fascio di iperboli equilatere.

[3] $x_i \neq 0$ perchè l'iperbole non degenera.

Proposizione 3.1 *Il centro dell'iperbole equilatera circoscritta a un quadrangolo* $\mathbf{A}$ *è l'*H*-centro; se il quadrangolo* $\mathbf{A}$ *non è ciclico*[4] *i suoi asintoti hanno le direzioni delle bisettrici dell'angolo* $[HJO]$.

Nel caso del trapezio inoltre vale l'osservazione 2.7 e dunque la seguente:

Proposizione 3.2 *Le bisettrici dell'angolo* $[JOH]$ *sono gli assi di simmetria dell'iperbole equilatera circoscritta al trapezio.*

Grazie all'osservazione 2.7 possiamo, cioè, descrivere gli assi coordinati a partire dalle bisettrici di $[JHO]$. Basterà ruotare tali bisettrici di $\frac{\pi}{4}$[5] per ottenere gli asintoti dell'iperbole, e dunque gli assi di riferimento.

Ora introduciamo le coordinate dei punti notevoli, nel caso di quadrangolo in generale, che ci serviranno nella caratterizzazione del trapezio (e successivamente nella sua ricostruzione). Notiamo subito che nel caso di quadrangolo non ortogonale risulta $\sigma_4 \neq 0$. Dimostriamo inoltre che

Proposizione 3.3 *In un trapezio non ortogonale* $\sigma_4 > 0$.

Imponiamo la condizione di parallelismo tra due lati opposti A_iA_j, A_hA_k. Questo calcolo porta a:

$$x_i x_j = x_h x_k$$

Allora $\sigma_4 = (x_i x_j)^2$ e dunque è sempre positivo.

Notiamo che affinchè σ_4 sia positivo ogni coppia delle quattro ascisse delle coordinate dei vertici del trapezio deve avere lo stesso segno. Dunque i vertici del trapezio cadono a due a due su rami diversi oppure tutti e quattro sullo stesso ramo dell'iperbole.

Si calcolano le seguenti coordinate[6]:

$$H = \left(0, 0\right)$$

$$G = \left(\frac{\sigma_1}{4}, \frac{\sigma_3}{4\sigma_4}\right)$$

$$J = \left(\frac{\sigma_1}{2}, \frac{\sigma_3}{2\sigma_4}\right)$$

---

[4] Rimandiamo lo studio del caso ciclico al paragrafo 3.2.1 e 3.2.5.

[5] Non importa in quale verso.

[6] Abbiamo trovato queste coordinate con l'aiuto del programma *Mathematica* nel quale abbiamo inserito le formule delle elementari costruzioni con riga e compasso. Esempi: retta per due punti, circocentro di un triangolo, riflesso di un punto rispetto ad una retta, ecc. Queste formule per G, J, O (non per M, N) si trovano per la prima volta in [8].

$$O = \left(\frac{\sigma_1}{1+\sigma_4}, \frac{\sigma_3}{1+\sigma_4} \right)$$

$$M = \left(\frac{(1+\sigma_4)(\sigma_3+\sigma_1\sigma_2\sigma_4-\sigma_3\sigma_4)}{\sigma_1^2\sigma_4^2+\sigma_3^2}, \frac{(1+\sigma_4)[\sigma_2\sigma_3-\sigma_1\sigma_4(1-\sigma_4)]}{\sigma_1^2\sigma_4^2+\sigma_3^2} \right)$$

$$N = \left(\frac{(1-3\sigma_4)\sigma_1}{\sigma_4^2-14\sigma_4+1}, \frac{(\sigma_4-3)\sigma_3}{\sigma_4^2-14\sigma_4+1} \right)$$

Notiamo che queste coordinate sono funzioni dei polinomi simmetrici elementari

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$$

$$\sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4$$

$$\sigma_4 = x_1x_2x_3x_4$$

che è in accordo con la definizione di punto notevole, invariante per permutazioni dei vertici dell'n-gono di cui è punto notevole.

Ci proponiamo ora di trovare una caratterizzazione del trapezio nella classe dei quadrangoli, a partire dai suoi punti notevoli. Abbiamo dimostrato nel primo capitolo (proposizione 2.4)[7] che una condizione necessaria affinchè un quadrangolo, non ciclico, abbia una coppia di lati paralleli è che $[HOJ] = \frac{\pi}{2}$.

Prima di studiare analiticamente tale condizione studiamo separatamente i casi di coincidenza tra i punti O e H e tra O e J.

Proposizione 3.4 *Sia* $\mathbf{A}$ *un quadrangolo non ortogonale. Se l'*O*-centro coincide con l'*H*-centro, allora* $\mathbf{A}$ *è un parallelogramma.*

Infatti $H \equiv O$ se e solo se $\sigma_1 = \sigma_3$. Risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \sigma_1 & = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \sigma_3 & = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 0 \end{cases}$$

otteniamo

$$\begin{cases} \sigma_1 = 0 \\ (x_2 + x_4)(x_2 + x_3)(x_3 + x_4) = 0 \end{cases}$$

e quindi vale una della tre seguenti condizioni:

[7] Ci poniamo nel caso di non-coincidenza tra O e J (quadrangolo ciclico) e tra O e H (parallelogramma).

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_4 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = -x_4 \end{cases}$$

Le condizioni simmetriche $x_i = -x_j$, $x_h = -x_k$ implicano il parallelismo dei lati $A_iA_j \parallel A_hA_k$ e $A_iA_h \parallel A_jA_k$, che sono coppie di lati opposti. Dunque ogni soluzione del sistema implica che siamo in presenza del parallelogramma.

Prima di considerare la coincidenza di O e J, dimostriamo che

Proposizione 3.5 *Nel trapezio non ortogonale il polinomio simmetrico elementare σ_1 si annulla se e solo se si annulla anche il polinomio σ_3.*

Se $\sigma_1 = 0$ e imponiamo il parallelismo di due lati opposti $A_iA_j \parallel A_hA_k$ otteniamo il seguente sistema

$$\begin{cases} \sigma_1 = 0 \\ (x_j + x_k)(x_j + x_h) = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni

$$\begin{cases} x_j = -x_k \\ x_i = -x_h \end{cases} \textit{oppure}$$

$$\begin{cases} x_j = -x_h \\ x_i = -x_k \end{cases}$$

Dunque $\sigma_3 = 0$ in entrambi i casi.

Viceversa se $\sigma_3 = 0$ allora il parallelismo di due lati opposti $A_iA_j \parallel A_hA_k$ porta al seguente sistema

$$\begin{cases} \sigma_3 = 0 \\ x_ix_j = x_hx_k \end{cases}$$

e sviluppando otteniamo

$$\begin{cases} \sigma_3 = 0 \\ x_ix_j(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0 \end{cases}$$

Possiamo concludere che allora $\sigma_1 = 0$, perchè il trapezio è ortogonale.

Ora supponiamo $\sigma_3 \neq 0$ e $\sigma_1 \neq 0$ e studiamo il caso di coincidenza tra O-centro e punto J di un quadrangolo generale.

Proposizione 3.6 *L'O-centro e il punto J di un quadrangolo coincidono tra loro, ma non con l'H-centro, se e solo se* $\sigma_4 = 1$

Infatti, poichè $\sigma_1 \neq 0 \neq \sigma_3$, risulta

$$\begin{cases} 1+\sigma_4 = 2 \\ 1+\sigma_4 = 2\sigma_4 \end{cases} \iff \sigma_4 = 1$$

Studieremo analiticamente il caso ciclico non ortogonale ($\sigma_4 = 1$) nel paragrafo 3.2.1. Ora supponiamo $O \neq H$ e $O \neq J$ ed esprimiamo la condizione $OJ \perp OH$, come annullamento del seguente prodotto scalare:

$$(O-H) \bullet (J-O) = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\sigma_1}{1+\sigma_4}\left(\frac{\sigma_1}{2} - \frac{\sigma_1}{1+\sigma_4}\right) + \frac{\sigma_3}{1+\sigma_4}\left(\frac{\sigma_3}{2\sigma_4} - \frac{\sigma_3}{1+\sigma_4}\right) = 0$$

$$\frac{\sigma_1^2\sigma_4(\sigma_4-1)}{(1+\sigma_4)2\sigma_4} + \frac{\sigma_3^2(1-\sigma_4)}{(1+\sigma_4)2\sigma_4} = 0$$

$$\frac{(\sigma_1^2\sigma_4 - \sigma_3^2)(\sigma_4-1)}{(1+\sigma_4)2\sigma_4} = 0$$

Come anticipato, studieremo nel 3.2.1 il caso di $\sigma_4 = 1$. Allora rimane in generale la condizione

$$(\sigma_1^2\sigma_4 - \sigma_3^2) = 0$$

e poichè supponiamo $\sigma_1 \neq 0$ (e quindi anche $\sigma_3 \neq 0$, per la proposizione 3.5) otteniamo, per il caso generale, che se un quadrangolo è un trapezio allora:

$$\sigma_4 = \frac{\sigma_3^2}{\sigma_1^2} \tag{3.2}$$

Come si è visto, esclusi i casi particolari sopra citati la 3.2 è l'equivalente analitico della condizione $[HOJ] = \frac{\pi}{2}$.

Dimostriamo che

Proposizione 3.7 *La condizione 3.2 è sufficiente perchè un quadrangolo non ortogonale*[8] *abbia una coppia di lati opposti paralleli.*

Sviluppiamo

$$\sigma_4\sigma_1^2 = \sigma_3^2$$

$$\sigma_4\sigma_1^2 = x_1^2x_2^2x_3^2 + x_1^2x_2^2x_4^2 + x_1^2x_3^2x_4^2 + x_2^2x_3^2x_4^2 + 2\sigma_4\sigma_2$$

Allora, poichè $\sigma_4 \neq 0$, il polinomio $x_1^2x_2^2x_3^2 + x_1^2x_2^2x_4^2 + x_1^2x_3^2x_4^2 + x_2^2x_3^2x_4^2$ dev'essere divisibile per σ_4. Questo implica

$$x_ix_j = x_hx_k$$

per una coppia di indici ij. L'equazione della retta per i punti A_i, A_j è

$$x + x_1x_2y - \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = 0$$

Allora la condizione $x_ix_j = x_hx_k$ implica che le rette rispettivamente per A_iA_j e A_hA_k sono parallele, che è quanto voluto.

In definitiva la condizione 3.1 è necessaria e sufficiente[9] per caratterizzare i trapezi nella classe dei quadrangoli.

Dunque nel caso di trapezi non ortogonali le coordinate dei punti notevoli sopra elencati diventano:

$$H = \Big(0, 0\Big)$$

$$G = \left(\frac{\sigma_1}{4}, \frac{\sigma_1^2}{4\sigma_3}\right) = \frac{\sigma_1}{4\sigma_3}\Big(\sigma_3, \sigma_1\Big)$$

$$J = \left(\frac{\sigma_1}{2}, \frac{\sigma_1^2}{2\sigma_3}\right) = \frac{\sigma_1}{2\sigma_3}\Big(\sigma_3, \sigma_1\Big)$$

$$O = \left(\frac{\sigma_1^3}{\sigma_1^2 + \sigma_3^2}, \frac{\sigma_1^2\sigma_3}{\sigma_1^2 + \sigma_3^2}\right) = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_3^2}\Big(\sigma_1, \sigma_3\Big)$$

[8] Dobbiamo supporre anche che il quadrangolo non sia ciclico e che $\sigma_1 \neq 0$. Studieremo la condizione sufficiente in presenza di iperbole equilatera degenere al paragrafo 3.2.4 e il caso ciclico ai paragrafi 3.2.1 e 3.2.5.

[9] Ricordiamo nuovamente che qui consideriamo trapezi con una sola coppia di lati paralleli (dunque $O \neq H$ per la proposizione 3.4) e non ciclici (dunque $O \neq J$ per la proposizione 3.6).

$$M = \left(\frac{\sigma_1^2+\sigma_1\sigma_2\sigma_3-\sigma_3^2}{\sigma_1^2\sigma_3}, \frac{\sigma_2\sigma_1^3-\sigma_1^2\sigma_3+\sigma_3^3}{\sigma_1^3\sigma_3}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_3}\left(\sigma_1^2+\sigma_1\sigma_2\sigma_3-\sigma_3^2, \frac{\sigma_2\sigma_1^3-\sigma_1^2\sigma_3+\sigma_3^3}{\sigma_1}\right)$$

$$N = \left(\frac{\sigma_1^3(\sigma_1^2-3\sigma_3^2)}{\sigma_3^4-14\sigma_1^2\sigma_3^2+\sigma_1^4}, \frac{\sigma_1^2\sigma_3(\sigma_3^2-3\sigma_1^2)}{\sigma_3^4-14\sigma_1^2\sigma_3^2+\sigma_1^4}\right) =$$
$$= \frac{\sigma_1^2}{\sigma_3^4-14\sigma_1^2\sigma_3^2+\sigma_1^4}\left(\sigma_1(\sigma_1^2-3\sigma_3^2), \sigma_3(\sigma_3^2-3\sigma_1^2)\right)$$

Elenchiamo infine alcuni valori di coefficienti angolari k per rette di equazione $y = kx + q$ che congiungono punti notevoli[10].

OJ $\quad -\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$

HJ $\quad \frac{\sigma_1}{\sigma_3}$

HO $\quad \frac{\sigma_3}{\sigma_1}$

HN $\quad \frac{\sigma_3(\sigma_3^2-3\sigma_1^2)}{\sigma_1(\sigma_1^2-3\sigma_3^2)}$

$tg([HJO]) = \frac{2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_3^2-\sigma_1^2}$

3.2 Casi Particolari

Analizzeremo ora alcuni casi in cui non sono applicabili tutte o alcune delle cosiderazioni precedenti sulle coordinate dei punti notevoli.

3.2.1 Trapezio Ciclico

Al paragrafo 2.3 abbiamo dimostrato che il trapezio isoscele è inscrivibile in un cerchio, per questo l'abbiamo chiamato ciclico. In questo paragrafo considereremo trapezi ciclici non ortogonali.

Per il trapezio ciclico gli asintoti dell'iperbole, come nel caso generale, sono le bisettrici di $[JHO]$ ruotate di $\frac{\pi}{4}$. In questo caso $[JHO]$ è nullo e dunque gli asintoti dell'iperbole sono le rette per H che formano angoli di $\frac{\pi}{4}$ con la retta HO, che è ora un'asse di simmetria dell'iperbole.

Abbiamo visto che la coincidenza di O e J, nel caso in cui non coincidano anche con H, implica $\sigma_4 = 1$ (proposizione 3.6).

Dunque le coordinate dei punti notevoli H, G, J, O, N di un quadrangolo ciclico, caratterizzato da $\sigma_4 = 1$ si scrivono:

[10] Le bisettrici dell'angolo $[HJO]$, considerato per ultimo, hanno direzioni 0 e ∞ rispettivamente.

$H = \Big(0, 0\Big)$

$G = \Big(\frac{\sigma_1}{4}, \frac{\sigma_3}{4}\Big) = \frac{1}{4}\Big(\sigma_1, \sigma_3\Big)$

$J = O = T_{13,24} = T_{14,23} = \Big(\frac{\sigma_1}{2}, \frac{\sigma_3}{2}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\sigma_1, \sigma_3\Big)$

$N = \Big(\frac{\sigma_1}{6}, \frac{\sigma_3}{6}\Big) = \frac{1}{6}\Big(\sigma_1, \sigma_3\Big)$

La caratterizzazione generale del trapezio è ancora valida e si scrive:

$$1 = \frac{\sigma_3^2}{\sigma_1^2}$$

Allora le coordinate dei punti notevoli nel caso del trapezio isoscele che non sia ortogonale e non sia un parallelogramma, si scrivono:

$H = \Big(0, 0\Big)$

$G = \Big(\frac{\sigma_1}{4}, \pm\frac{\sigma_1}{4}\Big) = \frac{\sigma_1}{4}\Big(1, \pm 1\Big)$

$J = O = \Big(\frac{\sigma_1}{2}, \pm\frac{\sigma_1}{2}\Big) = \frac{\sigma_1}{2}\Big(1, \pm 1\Big)$

$M = \Big(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \frac{\sigma_2}{\sigma_3}\Big) = \Big(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \pm\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\Big) = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\Big(1, \pm 1\Big)$

$N = \Big(\frac{\sigma_1}{6}, \pm\frac{\sigma_1}{6}\Big) = \frac{\sigma_1}{6}\Big(1, \pm 1\Big)$

Questo mostra che G, J, O, M, N appartengono ad uno ($y = \pm x$) degli assi di simmetria dell'iperbole equilatera, che coincide con la mediana principale del trapezio.

3.2.2 Parallelogramma

Se due coppie di lati opposti di un quadrangolo sono parallele, siamo in presenza del parallelogramma. Continuiamo a supporre che la terza coppia di lati opposti non sia ortogonale. Gli asintoti dell'iperbole sono le bisettrici dell'angolo $[A_{34}GA_{14}]$ (osservazione finale del paragrafo 2.4).

Per caratterizzare il parallelogramma mediante i polinomi simmetrici consideriamo le coordinate dei vertici:

$A_1 = (x_1, \frac{1}{x_1})$

$A_2 = (x_2, \frac{1}{x_2})$

$A_3 = (-x_1, -\frac{1}{x_1})$

$A_4 = (-x_2, -\frac{1}{x_2})$

Allora due polinomi simmetrici si annullano. Abbiamo:

$\sigma_1 = 0$

$\sigma_3 = 0$

e dunque $O \equiv G \equiv J \equiv H$, che dimostra l'inverso della proposizione 3.4. Dunque possiamo caratterizzare il parallelogramma rispetto al quadrangolo generale non ortogonale, mediante i polinomi simmetrici elementari. La caratterizzazione è

$$\sigma_1 = \sigma_3 = 0$$

3.2.3 Rettangolo

Poiché il rettangolo è un parallelogramma in cui le due coppie di lati paralleli sono tra loro perpendicolari, esso è inscrivibile nella circonferenza con centro nell'unica intersezione tra le diagonali al finito. Dunque il rettangolo è un sottocaso del caso ciclico e del parallelogramma. Le coordinate dei suoi vertici nel caso in cui non sia un rombo (o un quadrato), si scrivono:

$A_1 = (x_1, \frac{1}{x_1})$

$A_2 = (x_2, \frac{1}{x_2})$

$A_3 = (-x_1, -\frac{1}{x_1})$

$A_4 = (-x_2, -\frac{1}{x_2})$

Vediamo subito che

$$\sigma_1 = \sigma_3 = 0$$

e che la condizione $A_1A_2 \perp A_2A_3$ porta a $(x_1x_2)^2 = 1$ e dunque

$$\sigma_4 = 1$$

Queste due condizioni costituiscono una caratterizzazione analitica del rettangolo.

3.2.4 Trapezio Ortogonale

Studiamo qui una classe di trapezi per la quale il riferimento cartesiano usato finora dev'essere cambiato. Un trapezio, che ha come lati paralleli A_1A_2 e

A_3A_4, con una coppia di lati opposti perpendicolari[11] appartiene alla classe dei quadrangoli ortogonali.

In un *trapezio ortogonale* l'angolo in $A_{13,24}$ oppure quello in $A_{14,23}$ è di $\frac{\pi}{2}$, e H coincide con quel punto diagonale. Allora le bisettrici di $[JHO]$, ruotate di $\frac{\pi}{4}$, cioè gli asintoti dell'iperbole equilatera circoscritta, contengono i vertici. L'iperbole è degenere[12]. Si ha dunque

$$A_1 = \Big(x_1, 0\Big)$$

$$A_2 = \Big(0, y_2\Big)$$

$$A_3 = \Big(x_3, 0\Big)$$

$$A_4 = \Big(0, y_4\Big)$$

con x_1, x_3, y_2, y_4 non nulli.

Ricalcoliamo le coordinate dei punti notevoli H, G, J, O per trovare la caratterizzazione dei trapezi ortogonali. Studieremo il caso $x_1 + x_3 = 0$ alla fine di questo paragrafo, nella proposizione 3.10 e nei paragrafi 3.2.6 e 3.2.7. Notiamo che non è restrittivo supporre $x_1x_3 \neq 0$ e $y_2y_4 \neq 0$ in quanto escludiamo la coincidenza di vertici con H. Dimostriamo la seguente

Proposizione 3.8 *Se $x_1x_3+y_2y_4 = 0$ il quadrangolo non ha nessuna coppia di lati paralleli.*

Infatti perchè il quadrangolo abbia una coppia di lati opposti paralleli dev'essere $y_2x_3 = y_4x_1$ oppure $y_2x_1 = y_4x_3$. In entrambi i casi la risoluzione del sistema con la condizione $x_1x_3 = -y_2y_4$ porta all'assurdo. Per esempio

$$\begin{cases} x_1x_3 = y_2y_4 \\ y_2x_3 = y_4x_1 \end{cases}$$

porta a

$$\begin{cases} x_1x_3 = y_2y_4 \\ y_2^2 = -x_1^2 \end{cases}$$

che è assurdo. Dunque nella nostra trattazione supporremo $x_1x_3+y_2y_4 \neq 0$.

[11]Un trapezio non potrà mai avere due coppie di lati opposti perpendicolari (a meno di coincidenze tra i vertici), perchè altrimenti non avrebbe più una coppia di lati opposti paralleli. Abbiamo escluso i casi di vertici coincidenti o allineati nell'introduzione.

[12]Distinguiamo due casi

- Se $H \equiv A_{14,23}$ abbiamo i vertici consecutivi A_1, A_4 su un asse e A_2, A_3 sull'altro.
- Se $H \equiv A_{13,24}$ abbiamo i vertici opposti A_1, A_3 su un asse e A_2, A_4 sull'altro.

Cambiando nomi ai vertici non è restrittivo ricondursi al secondo caso.

Riportiamo le coordinate calcolate per i punti H, G, J, O:

$$H = \Big(0, 0\Big)$$

$$G = \left(\frac{x_1+x_3}{4}, \frac{y_2+y_4}{4}\right)$$

$$J = \left(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_2+y_4}{2}\right)$$

$$O = \left(\frac{(x_1+x_3)y_2y_4}{x_1x_3+y_2y_4}, \frac{(y_2+y_4)x_1x_3}{x_1x_3+y_2y_4}\right)$$

Queste scritture suggeriscono una *base* di polinomi, che svolgono il ruolo dei polinomi σ_i, mediante la quale esprimere le coordinate dei punti notevoli.

$$\begin{array}{rcl} X_1 & = & x_1 + x_3 \\ X_2 & = & x_1x_3 \\ Y_1 & = & y_2 + y_4 \\ Y_2 & = & y_2y_4 \end{array}$$

Allora le coordinate si scrivono:

$$H = \Big(0, 0\Big)$$

$$G = \left(\frac{X_1}{4}, \frac{Y_1}{4}\right)$$

$$J = \left(\frac{X_1}{2}, \frac{Y_1}{2}\right)$$

$$O = \left(\frac{X_1Y_2}{X_2+Y_2}, \frac{Y_1X_2}{X_2+Y_2}\right)$$

Vogliamo trovare la condizione necessaria e sufficiente affinchè un quadrangolo ortogonale sia un trapezio ortogonale.

Studiamo, come nel caso generale, prima la coincidenza di O con J e poi quella di O con H, nel caso del quadrangolo ortogonale.

Proposizione 3.9 *L'O-centro di un quadrangolo ortogonale coincide con il punto J se e solo se $X_2 = Y_2 = 1$.*

Infatti le condizioni

$$\begin{cases} X_1 = X_1Y_2 \\ X_2 + Y_2 = 2 \end{cases} \iff X_2 = Y_2 = 1$$

Proposizione 3.10 *L'O-centro di un quadrangolo avente una coppia di lati opposti perpendicolari coincide con il suo H-centro se e solo se $X_1 = Y_1 = 0$.*

Infatti dev'essere

$$\begin{cases} X_1Y_2 = 0 \\ Y_1X_2 = 0 \end{cases}$$

Poichè abbiamo esclusi i casi $X_2 = 0$ e $Y_2 = 0$, il sistema ha come unica soluzione

$$\begin{cases} X_1 = 0 \\ Y_1 = 0 \end{cases}$$

Dimostriamo inoltre la seguente.

Proposizione 3.11 *Per un trapezio ortogonale $X_1 = 0$ se e solo se $Y_1 = 0$.*

Infatti se $X_1 = 0$ la condizione affinchè $A_1A_2 \parallel A_3A_4$, che è $y_2x_3 = y_4x_1$, diventa $y_2x_3 = -y_4x_3$. Cioè $y_2 = -y_4$, che è $Y_1 = 0$. Analogamente per avere $A_2A_3 \parallel A_1A_4$ la condizione $y_2x_1 = y_4x_3$ diventa $y_2 = -y_4$.

Viceversa se $Y_1 = 0$ il ragionamento è analogo.

Studiamo, ora, analiticamente l'ortogonalità di HO e OJ nel caso in cui $O \neq J$, $O \neq H$ e $X_1 \neq 0$ (dunque anche $Y_1 \neq 0$):

$$(O - H) \bullet (J - O) = 0 \tag{3.3}$$

$$\frac{X_1Y_2}{X_2 + Y_2}\left(\frac{X_1}{2} - \frac{X_1Y_2}{X_2 + Y_2}\right) + \frac{X_2Y_1}{X_2 + Y_2}\left(\frac{Y_1}{2} - \frac{X_2Y_1}{X_2 + Y_2}\right) = 0$$

$$\frac{(X_1^2Y_2 - X_2Y_1^2)(X_2 - Y_2)}{2(X_2 + Y_2)^2} = 0$$

Come vedremo in 3.2.5 il caso $X_2 - Y_2 = 0$ è quello del quadrangolo ciclico. Supponiamo dunque $X_2 \neq Y_2$. Una condizione necessaria affinchè un quadrangolo ortogonale non ciclico sia un trapezio è:

$$\frac{Y_2}{X_2} = \frac{Y_1^2}{X_1^2} \tag{3.4}$$

Dimostriamo che

Proposizione 3.12 *La condizione 3.4 è sufficiente perchè un quadrangolo ortogonale*[13] *abbia una coppia di lati opposti paralleli.*

Sviluppiamo 3.4

$$Y_2X_1^2 = X_2Y_1^2$$

$$x_1^2y_2y_4 + x_3^2y_2y_4 + 2x_1x_3y_2y_4 = x_1x_3y_2^2 + x_1x_3y_4^2 + 2x_1x_3y_2y_4$$

$$x_1y_2(x_1y_4 - x_3y_2) - x_3y_4(x_1y_4 - x_3y_2) = 0$$

[13] Dobbiamo supporre anche che il quadrangolo non sia ciclico e che $X_2 \neq 0 \neq X_1$. Studieremo il caso ciclico al paragrafo 3.2.5 e $X_1 = 0$ ai paragrafi 3.2.6 e 3.2.7.

$$(x_1y_2 - x_3y_4)(x_1y_4 - x_3y_2) = 0$$

L'equazione della retta per A_iA_j $(i \in \{1,3\} \quad j \in \{2,4\})$ è:

$$x_iy + y_jx - x_iy_j = 0$$

Le condizioni $(x_1y_4 - x_3y_2)$ e $(x_1y_2 - x_3y_4)$ implicano rispettivamente il parallelismo dei lati A_1A_3, A_2A_4 e A_1A_3, A_2A_4, che è quanto volevamo dimostrare.

In generale, le coordinate dei punti notevoli di un trapezio ortogonale si scrivono:

$H = \Big(0, 0\Big)$

$G = \Big(\frac{X_1}{4}, \frac{Y_1}{4}\Big)$

$J = \Big(\frac{X_1}{2}, \frac{Y_1}{2}\Big)$

$O = \Big(\frac{X_1Y_1^2}{X_1^2+Y_1^2}, \frac{X_1^2Y_1}{X_1^2+Y_1^2}\Big)$

$M = \Big(\frac{X_2}{X_1}, \frac{Y_2}{Y_1}\Big)$

3.2.5 Trapezio Ortogonale e Ciclico

Questa classe include tutti i trapezi isosceli con una coppia di lati opposti perpendicolari. Essendo ortogonali tali trapezi hanno i vertici sugli assi coordinati. L'iperbole equilatera è degenere e dunque adottiamo i polinomi introdotti nel paragrafo precedente. Questa famiglia è l'intersezione tra la famiglia dei trapezi ortogonali e quella dei quadrangoli ciclici. Dunque, per la proposizione 3.9, $X_2 = Y_2 = 1$ (che implica $X_2 - Y_2 = 0$). Le coordinate dei punti notevoli, si scrivono:

$H = \Big(0, 0\Big)$

$G = \Big(\frac{X_1}{4}, \frac{X_1}{4}\Big) = \frac{X_1}{4}\Big(1, 1\Big)$

$J = O = T_{13,24} = T_{14,23} = \Big(\frac{X_1}{2}, \frac{X_1}{2}\Big) = \frac{X_1}{2}\Big(1, 1\Big)$

$M = A_{14,23} = \Big(\frac{1}{X_1}, \frac{1}{X_1}\Big) = \frac{1}{X_1}\Big(1, 1\Big)$

3.2.6 Rombo

Il rombo è un caso particolare di parallelogramma che è anche un trapezio ortogonale. I punti G, O, J, H coincidono e dunque abbiamo le ulteriori condizioni $X_1 = Y_1 = 0$.

3.2.7 Quadrato

Il trapezio ciclico e ortogonale è chiaramente il caso in cui due coppie di lati opposti sono paralleli e la terza coppia perpendicolari. Se si verificano queste tre condizioni siamo in presenza del quadrato.

Abbiamo le seguenti relazioni tra i polinomi della base:

$$X_1 = Y_1 = 0$$

$$X_2 = Y_2$$

Capitolo 4

Ricostruzione del Trapezio

"Ricostruire" significa risalire (mediante costruzioni geometriche) ai vertici del trapezio partendo da un insieme opportuno di punti notevoli. In [7] la ricostruzione del quadrangolo generale è studiata a partire da una terna di punti notevoli del triangolo diagonale e dal baricentro G del quadrangolo. Questo è possibile perchè i punti diagonali, nel caso generale, sono al finito. Invece, in presenza del trapezio, a causa della coppia di lati paralleli, uno di questi punti (e precisamente l'intersezione delle rette parallele) è all'infinito. La ricostruzione cosí come è stata studiata in [7], dunque, non si può applicare al trapezio.

In questo capitolo proponiamo una ricostruzione differente, che parte da punti notevoli che rimangono al finito nel caso del trapezio. La nostra scelta cade sui punti G, H, O, M. I primi tre consentono, innanzitutto, di caratterizzare la classe dei trapezi rispetto al quadrangolo generale. Infatti abbiamo dimostrato i teoremi 2.2, 3.7 e 3.12, che caratterizzano il trapezio in modo unico attraverso la perpendicolarità tra OJ e OH. Abbiamo, poi, nei teoremi del paragrafo 2.1, studiato alcune proprietà del punto di Miquel M del trapezio, che sono sufficienti a giustificare i passi della ricostruzione che proponiamo. Notiamo che la scelta dei punti G, H, O determina cinque dei sette gradi di libertà del trapezio, perchè si è visto che per il trapezio O deve cadere sul cerchio di diametro HJ (proposizioni 2.2, 3.7 e 3.12). La scelta del punto M[1] vincola gli ultimi due gradi di libertà e dunque l'insieme dei quattro punti G, H, O, M determina in modo univoco un trapezio.

Nel descrivere la ricostruzione, vedremo, in particolare, che tutti i passi sono eseguibili con riga e compasso. Questo significa che il problema si è abbassato di grado, rispetto al caso generale che non può evitare equazioni di grado tre.

Successivamente studieremo il *luogo* di O in funzione di G, H e di M in funzione di G, H, O. Con *luogo* di un punto intendiamo la regione del piano

[1] Perché il trapezio abbia vertici reali è necessario che M sia scelto in una regione del piano che descriveremo in questo capitolo.

in cui è possibile scegliere il punto affinchè la ricostruzione del trapezio porti a quattro vertici reali.

4.1 Ricostruzione a partire da G, O, H, M

Ora riportiamo la ricostruzione che abbiamo messo a punto. Partiamo dai quattro punti notevoli G, O, H, M. Tenendo conto delle loro proprietà studiate in questo capitolo e nel primo, tutti i passi della seguente ricostruzione risultano giustificati. Considereremo, come al solito, paralleli la coppia di lati A_1A_2, A_3A_4; dunque i punti diagonali al finito sono $A_{13,24}, A_{14,23}$.

Ricordiamo che ci occuperemo di un trapezio che non sia un parallelogramma (quindi $G \neq H$, proposizione 2.15) e che non è ciclico (quindi $M \notin HG$).

Ricostruzione

1. Riflettiamo H su G e otteniamo J (parafrafo 1.5);
2. costruiamo la retta per G e H;
3. costruiamo il cerchio[2] (M, H, O), di centro C (proposizione 2.12);
4. troviamo $O_{\#}$, se $M \notin HO$, come ulteriore intersezione di [2] con [3], diversa da H (proposizione 2.12);
5. costruiamo la retta per [4] e M[3];
6. costruiamo l'asse del segmento OM;
7. costruiamo la retta perpendicolare a [5] per M (proposizione 2.12);
8. troviamo F come intersezione di [6] e [7] (proposizioni 2.11 e 2.12);
9. costruiamo il cerchio di centro F passante per M;
10. troviamo $A_{13,24}$ e $A_{14,23}$ come intersezioni[4] tra la retta [2] e il cerchio [9] (proposizione 2.11);
11. costruiamo la retta per G parallela ad OJ;
12. costruiamo la retta per G perpendicolare ad OJ (proposizione 2.8);

[2]se $M \in HO$ il cerchio è la retta HO e $O_{\#}$, di cui al passo 4, è all'infinito. O_M si trova come intersezione dell'asse di OM con la retta per M parallela a GH. Il trapezio avrà i lati paralleli passanti per O e per H rispettivamente.

[3]Nel caso in cui $M \in HG$ tale passo diventa: "costruiamo la retta per M parallela a GH".

[4]Queste intersezioni sono reali per un'opportuna scelta di M. Tali condizioni saranno studiate al 4.1.2.

13. costruiamo l'asse di $A_{13,24}J$;

14. troviamo l'intersezione della retta [12] con la retta [13], che è il centro del cerchio $(JA_{13}A_{24})$ (proposizione 2.8);

15. costruiamo il cerchio di centro [14] passante per J (proposizione 2.8);

16. troviamo le intersezioni[5] del cerchio [15] con la retta [11] che sono A_{13} e A_{24} (proposizione 2.8);

17. costruiamo le rette per $A_{13,24}$ e i punti [16], che sono i due lati opposti non paralleli A_1A_3, A_2A_4 del trapezio;

18. ripetiamo i passi 13-17 per $A_{14,23}$ e troviamo i lati A_1A_4, A_2A_3 del trapezio;

19. troviamo le intersezioni dei lati [17] e [18], che sono i quattro vertici del trapezio.

4.1.1 Luogo di O

Come abbiamo dimostrato nelle proposizioni 2.2, 3.7 e 3.12, possiamo arbitrariamente scegliere i punti H e G, ma fatto questo il punto O è vincolato a giacere sul cerchio di centro G e raggio GH. Sappiamo, infatti, che se vogliamo ricostruire il trapezio, il triangolo OGH dev'essere isoscele (proposizione 2.6), il che è equivalente al fatto che $[HOJ]$ debba essere retto (proposizione 2.4 e 2.5). Viceversa se $[HOJ]$ è retto ricostruiremo un quadrangolo con una coppia di lati opposti paralleli (proposizioni 3.7 e 3.12). Supporremo inoltre $O \neq H$ (caso del parallelogramma) e $O \neq J$ (caso del trapezio ciclico la cui ricostruzione è studiata al 4.2).

Il luogo di O, è dunque il cerchio di centro G passante per H, privato dei punti H e J.

4.1.2 Luogo di M

Per la descrizione del luogo del piano in cui scegliere il punto di Miquel M, affinchè il trapezio che vogliamo costruire abbia vertici reali ci serviremo della geometria analitica. Useremo le coordinate del caso generale[6], descritte al 3.1, in quanto il nostro scopo è quello di descrivere il luogo di M in modo da poter costruire geometricamente i vertici di $\mathbf{A}$, possibilmente con riga e compasso. Dunque lo strumento analitico ci fornisce soltanto un

[5]Tali intersezioni sono reali per un'opportuna scelta di M e dipendono dalla seconda condizione studiata nel 4.1.2.

[6]Supporremo sempre $\sigma_1 \neq 0$,$\sigma_3 \neq 0$ e $\sigma_4 \neq 1$, in quanto, come dimostrato nel capitolo 3, le prime due condizioni sono sempre verificate se il trapezio non degenera in un parallelogramma, mentre la ricostruzione del caso ciclico verrà studiato al 4.2.

suggerimento: il luogo di M risulterà indipendente da qualunque sistema di coordinate e sarà costruibile geometricamente a partire dai punti G, H, O.

Vedremo il luogo di M nascere in modo analitico come "intersezione" delle condizioni affinchè i discriminanti delle equazioni di secondo grado[7] siano positivi o nulli. Ma troveremo per ogni condizione l'interpretazione geometrica, individuando delle regioni del piano.

Infine daremo anche una dimostrazione sintetica della prima condizione cui deve soddisfare il luogo di M.

A questo punto lasciamo le coordinate di M indicate con $\Big(x_M, y_M\Big)$ e le consideriamo variabili. In questo modo le condizioni analitiche che descrivono il luogo risulteranno di facile interpretazione. Riassumiamo i passi analitici della ricostruzione calcolando, in funzione dei polinomi simmetrici elementari $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ e delle variabili x_M, y_M, le coordinate dei punti che compaiono nella successione di passi elencati in 4.1. Sottolineamo il fatto che non trattiamo ora il caso ciclico (dunque supporremo $\sigma_1^2 \neq \sigma_3^2$) e che nel caso in cui $M \in HO$, $O_\#$ va all'infinito. In tale caso vi è un ulteriore relazione[8] tra i polinomi simmetrici elementari ($\frac{\sigma_3^2}{\sigma_1^2} = \sigma_4 = \frac{\sigma_2^2}{4}$) che porta all'allineamento dei vertici A_1, A_2 con O e A_3A_4 con H rispettivamente. C è il circocentro di (HMO) e ha coordinate

$$C = \left(\frac{-\sigma_3 x_M^2 + \sigma_1^2 y_M - \sigma_3 y_M^2}{2(-\sigma_3 x_M + \sigma_1 y_M)}, \frac{-\sigma_1(\sigma_1 x_M - x_M^2 - y_M^2)}{2(-\sigma_3 x_M + \sigma_1 y_M)} \right)$$

Calcoliamo l'intersezione diversa da H tra (HMO) e HG (passo 4)

$$O_\# = \left(\frac{\sigma_3(x_M^2(\sigma_3^2 - \sigma_1^2) + y_M^2(\sigma_3^2 - \sigma_1^2) + x_M \sigma_1^3 - y_M \sigma_1^2 \sigma_3)}{(\sigma_1^2 + \sigma_3^2)(\sigma_3 x_M - \sigma_1 y_M)}, \right.$$

$$\left. \frac{\sigma_1(x_M^2(-\sigma_3^2 + \sigma_1^2) + y_M^2(-\sigma_3^2 + \sigma_1^2) - x_M \sigma_1^3 + y_M \sigma_1^2 \sigma_3)}{(\sigma_1^2 + \sigma_3^2)(-\sigma_3 x_M + \sigma_1 y_M)} \right)$$

Ora troviamo F come intersezione tra l'asse di OM e la retta per M perpendicolare a $MO_\#$ (passo 8):

$$F = \left(\frac{\sigma_1^3 + (\sigma_1^2 - \sigma_3^2)x_M - 2\sigma_1\sigma_3 y_M}{2\sigma_1^2 - 2\sigma_3^2}, \frac{\sigma_1^2\sigma_3 - 2\sigma_1\sigma_3 x_M + (\sigma_3^2 - \sigma_1^2)y_M}{-2\sigma_1^2 + 2\sigma_3^2} \right)$$

Le ascisse dei punti d'intersezione del cerchio di centro F e raggio FM con la mediana principale HG si ottengono da un'equazione il cui discrimi-

[7] Tali equazioni forniscono le coordinate dei punti d'intersezione tra rette e circonferenze.

[8] Abbiamo ottenuto la relazione sviluppando $x_M y_O = y_M x_O$.

nante è:

$$\frac{1}{4\sigma_3^2(\sigma_1^2-\sigma_3^2)^2}\Big[2x_M(-2\sigma_1^7+2\sigma_1^3\sigma_3^4)+x_M^2(\sigma_3^6-6\sigma_1^2\sigma_3^4+9\sigma_1^4\sigma_3^2)+$$
$$+2y_M(2\sigma_1^6\sigma_3-2\sigma_1^2\sigma_3^5)++2x_My_M(+3\sigma_1^5\sigma_3-10\sigma_1^3\sigma_3^3+3\sigma_1\sigma_3^5)+$$
$$+y_M^2(9\sigma_1^2\sigma_3^4-6\sigma_1^4\sigma_3^2+\sigma_1^6)\Big] \quad (4.1)$$

Studiamo il caso in cui 4.1 è nullo. In questo caso il trapezio ha un solo punto diagonale al finito, oppure i due punti diagonali coincidenti. Nel primo caso siamo in presenza del parallelogramma; nel secondo due vertici del trapezio coincidono, caso escluso nell'introduzione. È, dunque, un caso "limite" che ci servirà per ottenere la prima condizione del luogo di M. Imponendo l'annullamento del discriminante, otteniamo l'equazione di una conica di equazione

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0 \quad (4.2)$$

, dove

$A=9\sigma_1^4\sigma_3^2-6\sigma_1^2\sigma_3^4+\sigma_3^6=\sigma_3^2(3\sigma_1^2-\sigma_3^2)^2$

$B=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_3^2+9\sigma_1^2\sigma_3^4=\sigma_1^2(3\sigma_3^2-\sigma_1^2)^2$

$C=2\sigma_1\sigma_3(3\sigma_1^4-10\sigma_1^2\sigma_3^2+3\sigma_3^4)=2\sigma_1\sigma_3(3\sigma_1^2-\sigma_3^2)(\sigma_1^2-3\sigma_3^2)$

$D=4\sigma_1^3(\sigma_3^4-\sigma_1^4)$

$E=4\sigma_1^2\sigma_3(\sigma_1^4-\sigma_3^4)$

$F=0$

La conica 4.2 è una parabola, in quanto

$$Det\begin{pmatrix} A & \frac{C}{2} \\ \frac{C}{2} & B\end{pmatrix}=$$

$$=Det\begin{pmatrix} \sigma_3^2(3\sigma_1^2-\sigma_3^2)^2 & \sigma_1\sigma_3(3\sigma_1^2-\sigma_3^2)(\sigma_1^2-3\sigma_3^2) \\ \sigma_1\sigma_3(3\sigma_1^2-\sigma_3^2)(\sigma_1^2-3\sigma_3^2) & \sigma_1^2(3\sigma_3^2-\sigma_1^2)^2\end{pmatrix}=$$
$$\sigma_1^2\sigma_3^2[(3\sigma_1^4-10\sigma_1^2\sigma_3^2+3\sigma_3^4)^2-(3\sigma_1^4-10\sigma_1^2\sigma_3^2+3\sigma_3^4)^2]=0$$

Se calcoliamo fuoco P e direttrice d della parabola 4.2 otteniamo

$P=\left(\frac{\sigma_1^3}{\sigma_1^2+\sigma_3^2},\frac{\sigma_1^2\sigma_3}{\sigma_1^2+\sigma_3^2}\right)=O$, che nel caso generale ha coordinate $\left(\frac{\sigma_1}{1+\sigma_4},\frac{\sigma_3}{1+\sigma_4}\right)$

$d: \qquad \sigma_1(3\sigma_3^2-\sigma_1^2)x+\sigma_3(3\sigma_1^2-\sigma_3^2)y-\sigma_1^2(\sigma_1^2+\sigma_3^2)=0$

$d: \qquad y=-\frac{\sigma_1(3\sigma_3^2-\sigma_1^2)}{\sigma_3(3\sigma_1^2-\sigma_3^2)}x+\frac{\sigma_1^2(\sigma_1^2+\sigma_3^2)}{\sigma_3(3\sigma_1^2-\sigma_3^2)}$

Se sostituiamo le coordinate di J nell'equazione della direttrice, vediamo che è soddisfatta, dunque la retta passa per tale punto. Dimostriamo, inoltre, analiticamente, che d passa per O^{HG}, il punto ottenuto da O per riflessione sulla retta HG. Dovremo, quindi provare che la direttrice è la retta $O^{HG}J$. Infatti troviamo:

$$O^{HG} = \left(\tfrac{\sigma_1^3(3\sigma_3^2-\sigma_1^2)}{(\sigma_1^2+\sigma_3^2)^2}, \tfrac{\sigma_1^2\sigma_3(3\sigma_1^2-\sigma_3^2)}{(\sigma_1^2+\sigma_3^2)^2}\right) = \tfrac{\sigma_1^2}{(\sigma_1^2+\sigma_3^2)^2}\Big(\sigma_1(3\sigma_3^2-\sigma_1^2), \sigma_3(3\sigma_1^2-\sigma_3^2)\Big)$$

$$O^{HG}J: \qquad y = -\tfrac{\sigma_1(3\sigma_3^2-\sigma_1^2)}{\sigma_3(3\sigma_1^2-\sigma_3^2)}x + \tfrac{\sigma_1^2(\sigma_1^2+\sigma_3^2)}{\sigma_3(3\sigma_1^2-\sigma_3^2)}$$

che è quanto voluto.

La parabola 4.2, di fuoco O e direttrice $O^{HG}J$, divide il piano in due regioni, quella della convessità contenente $O^{HG}J$, e quella della concavità contenente O. Chiamiamo α la prima regione del piano e α' la seconda. La condizione del discriminante 4.1 maggiore o uguale a zero si può esprimere anche in modo seguente[9]:

$$|MO| - |Md| \geq 0$$

Allora è evidente che M deve appartenere ad α. Abbiamo in questo modo dimostrato che la condiziione necessaria e sufficiente affinchè i punti diagonali siano reali *è che M appartenga alla regione α.*

Procediamo con i passi della ricostruzione supponendo $M \in \alpha$ e dunque reali le intersezioni $A_{13,24}, A_{14,24}$ del cerchio di centro F e raggio FM con la mediana principale. Procedere con le coordinate in funzione di x_M, y_M implicherebbe la dipendenza di $A_{13,24}, A_{14,24}$ dalla radice quadrata del discriminante 4.1. Dunque chiamiamo x_D, y_D la generica intersezione $A_{1j,2h}, \quad j,h = \{3,4\}$ e troviamone il luogo. Useremo questo per risalire alla seconda condizione necessaria per M.

Affinchè il cerchio $(O, J, A_{1j,2h})$ abbia intersezioni reali con la retta per G parallela a OJ, il seguente determinante dev'essere positivo o nullo:

$$\frac{1}{16\sigma_1\sigma_3^4}\Big[\sigma_1^5 + \sigma_1^3\sigma_3^2 + 4x_D(\sigma_1^4 - \sigma_1^2\sigma_3^2) + 8x_D^2(\sigma_1\sigma_3^2 - \sigma_1^3) +$$

$$-8\sigma_1^3\sigma_3 - 8x_Dy_D(\sigma_1^2\sigma_3 + \sigma_3^3) + 16\sigma_1\sigma_3^2y_D^2\Big]$$

A questo punto esprimiamo y_D in funzione di x_D ($y_D = \frac{\sigma_1}{\sigma_3}x_D$) e troviamo il seguente luogo di x_D.

$$\frac{\sigma_1^5 + \sigma_1^3\sigma_3^2 - 4\sigma_1^2x_D(\sigma_1^2 + \sigma_3^2)}{\sigma_1} \geq 0$$

[9]Indicheremo con $|AB|$ la distanza tra i punti A e B e con $|Ad|$ la distanza tra il punto A e la retta d.

Il segno cambia per

$$x_D = \frac{\sigma_1^3(\sigma_1^2 + \sigma_3^2)}{4\sigma_1^2(\sigma_1^2 + \sigma_3^2)} = \frac{\sigma_1}{4} = x_G$$

Studiando anche il segno di σ_1 otteniamo:

- $\sigma_1 < 0 \Rightarrow x_D > x_G$
- $\sigma_1 > 0 \Rightarrow x_D < x_G$

.

Abbiamo dimostrato che per avere intersezioni reali, il generico punto diagonale $A_{1j,2h}$ deve giacere sulla semiretta GH. Non è restrittivo, a questo punto, considerare il caso "limite" in cui i due punti diagonali coincidano. In quasto caso il cerchio di centro F passante per M è tangente ad HG nel punto doppio $A_{13,24} \equiv A_{14,23}$, che chiameremo D.

D giace sulla semiretta GH se e solo se la distanza FO è minore o uguale alla distanza FG e il punto F_{HG}, proiezione di F su cade sulla semiretta GH, di origine G(si veda la dimostrazione sintetica alla fine del paragrafo).

Imponendo la condizione $|FO| \leq |FG|$, poichè F è funzione di x_M, y_M, otteniamo la seconda condizione che definisce il luogo di M. Troviamo:

$$\frac{\sigma_1(\sigma_1^2 + \sigma_3^2)(\sigma_1^3 - \sigma_1\sigma_3^2 + 4\sigma_3^2 x_M - 4\sigma_1\sigma_3 y_M)}{16\sigma_3^2(\sigma_1^2 - \sigma_3^2)} \geq 0$$

che diventa:

$$\frac{\sigma_1(\sigma_1^3 - \sigma_1\sigma_3^2 + 4\sigma_3^2 x_M - 4\sigma_1\sigma_3 y_M)}{\sigma_1^2 - \sigma_3^2} \geq 0$$

Osserviamo che

$$\sigma_1^3 - \sigma_1\sigma_3^2 + 4\sigma_3^2 x - 4\sigma_1\sigma_3 y = 0 \tag{4.3}$$

è l'equazione della retta per G perpendicolare a OJ. Sia β la regione del piano in cui la retta 4.3 divide il piano, contenente O. Lo studio del segno, come nel caso precedente, porta a:

- $\sigma_1^2 > \sigma_3^2 \Rightarrow y \leq \frac{\sigma_3}{\sigma_1}x + \frac{\sigma_1^2 - \sigma_3^2}{4\sigma_3}$
- $\sigma_1^2 < \sigma_3^2 \Rightarrow y \geq \frac{\sigma_3}{\sigma_1}x + \frac{\sigma_1^2 - \sigma_3^2}{4\sigma_3}$

Dunque la soluzione è sempre la regione β, contenente O. Dunque una condizione necessaria affinchè esistano reali i punti medi dei lati non paralleli *M deve giacere nella regione β.*

Infine, per ritrovare l'ultima condizione, dimostriamo che la retta 4.3 è tangente alla parabola 4.2 di fuoco O e direttrice JO^{HG} nel punto T di coordinate:

$$T = \left(\frac{\sigma_1(\sigma_1^2 + 5\sigma_3^2)}{16\sigma_3^2}, \frac{5\sigma_1^2 + \sigma_3^2}{16\sigma_3} \right)$$

Infatti la risoluzione del sistema tra parabola retta 4.3 e la parabola 4.2 porta alla seguente equazione di secondo grado:

$$16\sigma_3^2 x^2 - 2\sigma_1(\sigma_1^2 + 5\sigma_3^2)x + \frac{\sigma_1^2(\sigma_1^2 + 5\sigma_3^2)}{16\sigma_3^2} = 0$$

che è

$$(4\sigma_3 x - \frac{\sigma_1(\sigma_1^2 + 5\sigma_3^2)}{4\sigma_3})^2 = 0$$

Troviamo l'equazione della retta TJ:

$$y = \frac{\sigma_3(3\sigma_1^2 - \sigma_3^2)}{\sigma_1(3\sigma_3^2 - \sigma_1^2)} + \frac{\sigma_3^4 - \sigma_1^4}{2\sigma_3(3\sigma_3^2 - \sigma_1^2)} \tag{4.4}$$

Osserviamo che il coefficiente angolare è proprio opposto e inverso rispetto al coefficiente angolare della retta JO^{HG}.

Ora imponiamo la condizione[10]

- $\sigma_1 < 0 \Rightarrow x_{F_{HG}} > x_G$
- $\sigma_1 > 0 \Rightarrow x_{F_{HG}} < x_G$

e otteniamo:

- $\sigma_1 < 0 \Rightarrow y < \frac{\sigma_3(3\sigma_1^2 - \sigma_3^2)}{\sigma_1(3\sigma_3^2 - \sigma_1^2)} + \frac{\sigma_3^4 - \sigma_1^4}{2\sigma_3(3\sigma_3^2 - \sigma_1^2)}$
- $\sigma_1 > 0 \Rightarrow y < \frac{\sigma_3(3\sigma_1^2 - \sigma_3^2)}{\sigma_1(3\sigma_3^2 - \sigma_1^2)} + \frac{\sigma_3^4 - \sigma_1^4}{2\sigma_3(3\sigma_3^2 - \sigma_1^2)}$

Siano γ e γ' i semipiani rispettivamente contenente H e non contenente H, in cui la retta 4.4 divide il piano. Quanto studiato dimostra che la seconda condizione necessaria affinchè i punti medi dei lati non paralleli siano reali che M *deve giacere nel semipiano* γ.

Ora abbiamo trovato le due condizioni necessarie affinchè anche i punti medi dei lati del trapezio siano reali. Se uno dei punti diagonali coincide con G, l'altro dev'essere all'infinito e siamo in presenza del parallelogramma[11]. In generale, allora, i punti diagonali si trovano sulla semiretta GH e non saranno coincidenti con G. La determinazione dei quattro vertici reali del trapezio è ora possibile.

[10] Lasceremo le coordinate di F in funzione di x_M e y_M, in modo che la condizione risulti espressa in funzione di queste variabili.

[11] La ricostruzione del parallelogramma non è unica a partire dai punti O, G, H, M, ma definita a meno di omotetie, dunque non la tratteremo in questo lavoro.

Dunque se consideriamo l'intersezione delle condizioni necessarie affinchè i punti diagonali e i punti medi dei lati non paralleli siano reali, la condizione che otteniamo è anche sufficiente per ritrovare quattro vertici reali di un trapezio.

Concludiamo riassumendo le condizioni che devono essere *contemporaneamente* soddisfatte da M affinchè il trapezio abbia quattro vertici reali.

- M deve giacere nella regione α, la parte della convessità della parabola 4.2;
- M deve giacere anche nella regione β, il semipiano contenente O, dato da 4.3, la retta per G perpendicolare a OJ;
- M deve giacere nella regione γ, il semipiano contenente H, dato dalla retta TJ (4.4).

Dimostrazione sintetica della prima condizione per il luogo di M

Proponiamo ora una dimostrazione sintetica del fatto che M debba giacere nella regione α, affinché esistano i punti diagonali al finito. L'esistenza di due intersezioni reali[12] tra il cerchio $C_{F,FM}$ e la retta HG si può esprimere mediante la condizione:

$$|FO| = |FM| > |F, HG|$$

Studiamo la condizione $|FM| = |F, HG|$, cioè il caso in cui F appartiene alla parabola di fuoco O e direttrice GH. Cerchiamo il luogo di M in funzione di questa condizione. Innanzitutto cerchiamo una relazione geometrica tra F ed M.

Il problema è di ricostruire M da F, O, G, H, dunque ricordiamo che il triangolo FOM è isoscele con l'angolo alla base $[[FOM]] = [[OJH]]$. Bisogna tracciare la retta FO e riportare l'angolo $[[OJH]]$ in modo che un lato dell'angolo coincida con FO e l'orientamento sia conservato.

Consideriamo i triangoli isosceli simili FOF_{HG} e MOM^*, dove F_{HG} è il piede della perpendicolare di F sulla direttrice GH e M^* è tale che $MO = MM^*$ e $\frac{|FO|}{|OF_{HG}|} = \frac{|MO|}{|OM^*|}$. Vogliamo dimostrare che il luogo di M^* è una retta se F giace sulla parabola, cioè che l'angolo $[OJM^*]$ è costante e vale $[OJM^*] = 2[OJH]$. Sappiamo che per ogni F scelto sulla parabola, l'angolo $[OJF_{HG}]$ rimane costante. Inoltre

$$\frac{\pi}{2} - [OM^*J] = [MM^*O] = [FF_{HG}O] = \frac{\pi}{2} - [OF_{HG}J]$$

Quindi $[OM^*J] = [OF_{HG}J]$. Inoltre, poiché $[F_{HG}OM^*] = [OJH]$,

$$[JOF_{HG}] = [JF_{HG}O] + [OJF_{HG}] = [JF_{HG}O] + [OJH]$$

[12] e distinte per quanto visto al paragrafo precedente

$$[JOM^*] = [JM^*O] + [OJM^*] = [JOF_{HG}] - [M^*OF_{HG}]$$

Dall'uguaglianza degli ultimi due membri abbiamo

$$[OJM^*] = [JOF_{HG}] + [F_{HG}OM^*] - [JM^*O]$$

$$[OJM^*] = [JOF_{HG}] + [OJH] - [JF_{HG}O]$$

$$[OJM^*] = [JF_{HG}O] + [OJH] + [OJH] - [JF_{HG}O]$$

$$[OJM^*] = 2[OJH]$$

Ora sappiamo che il luogo di M^* è una retta d e precisamente la retta ottenuta riflettendo OJ su HG. Allora possiamo concludere che il luogo di M, nel caso "limite" in cui F appartenga alla parabola di fuoco O e direttrice HG, è anch'esso una parabola, di fuoco O e direttrice d.

Dunque poichè la ricostruzione dei punti diagonali è possibile per F nella regione contenente O, in cui la parabola di fuoco O e direttrice HG divide il piano, allora dobbiamo cercare l'anaolgo di tale condizione per M. Sia α la regione in cui il piano è diviso dalla parabola di fuoco O e direttrice d, che contiene la direttrice d. È immediato vedere che F appartiene alla regione voluta se e soltanto se M giace in α.

4.2 Ricostruzione del trapezio isoscele

Se il trapezio è isoscele, i punti H, G, O, M non sono sufficienti per la ricostruzione, in quanto definiscono soltanto cinque dei sei gradi di libertà del trapezio isoscele. Usiamo un altro punto notevole che non abbiamo studiato precedentemente, l'*incentro* I del triangolo diagonale. Abbiamo osservato che il triangolo diagonale è degenere nel caso del trapezio, in quanto ha un vertice ($A_{12,34}$) all'infinito, che dà la direzione dei lati paralleli. Non ha dunque senso distinguere tra bisettrici interne ed esterne dei due angoli al finito $[A_{12,34}A_{13,24}A_{14,23}]$ e $[A_{13,24}A_{14,23}A_{12,34}]$, e quindi tra incentro ed excentro. Per questo considereremo la coppia notevole $I, I^{'}$, che rimane al finito: giace sull'asse del segmento $A_{13,24}A_{14,23}$ ed è simmetrica rispetto alla mediana principale.

Poichè consideriamo il trapezio isoscele $[A_{14,23}IA_{13,24}] = [A_{13,24}I^{'}A_{14,23}] = \frac{\pi}{2}$ e $|IA_{14,23}| = |IA_{13,24}|$, perché il triangolo diagonale $A_{13,24}A_{12,34}A_{14,23}$ è degenere e rettangolo.

Siamo ora a conoscenza di elementi sufficienti per ricostruire il trapezio isoscele a partire dai punti notevoli O, H e la coppia notevole $I, I^{'}$, che supponiamo non allineati[13].

1. Costruiamo la retta per HO (mediana principale del trapezio);

[13] Nella ricostruzione ci riferiremo a I per indicare uno dei due punti della coppia notevole $I, I^{'}$. È indifferente quale si scelga.

2. costruiamo la retta per I perpendicolare a [1];
3. costruiamo la retta per I parallela a [1];
4. bisettrici di [2],[3];
5. troviamo le intersezioni di [4] con [1] sono i punti $A_{13,24}$ e $A_{14,23}$;
6. determiniamo il baricentro G come punto medio di HO;
7. costruiamo il cerchio di diametro $A_{1h,2k}O$;
8. costruiamo la retta per [6] perpendicolare a [1];
9. troviamo le intersezioni tra [7] e [8], che sono i punti medi di una coppia di lati opposti non paralleli del trapezio;
10. troviamo le rette per [6] e [9], che sono i lati opposti di cui in [9];
11. troviamo le intersezioni delle due coppie di lati opposti non paralleli di cui in [10], che sono i vertici del trapezio isoscele.

Luogo di I Scelti H e O arbitrariamente, perché la ricostruzione porti a vertici reali, è necessario scegliere I in una specifica regione del piano. Consideriamo le due semirette r_1, r_2 con un estremo in G tali che $[[r_1, GH]] = [[HG, r_2]] = \frac{\pi}{4}$. Sia α_O la parte di piano in cui tali semirette dividono il piano, che contiene O; e sia α_H la parte di piano rimanente. Se I si trovasse in α_H, i punti diagonali $A_{13,24}$ e $A_{14,23}$ si troverebbero (uno di essi oppure entrambi) su HO, dalla stessa parte di O rispetto a G. In questo modo non esisterebbero reali i punti medi di due o quattro lati del trapezio, in quanto il cerchio con diametro $A_{1h,2,k}O$ non intersecherebbe la retta per G con direzione dei lati paralleli. Dunque I deve trovarsi in α_H.

Bibliografia

[1] JP. Ehrmann, *Steiner's Theorems on the Complete Quadrilateral*, Forum Geometricorum, Volume 4 (2004) 35-52;

[2] M. Happach, *Zeitschrift für Math. und Nat. Unterricht*, 43, p.175, 1912;

[3] R.A. Johnson, *Modern Geometry, An Elementry Treatise on the Geometry of the Triangle and of the Circle*;

[4] C. Kimberling, *Triangle Centers and Central Triangles*, Congressus Numerantium, Vol. 129;

[5] B. Scimemi, *Gruppi di trasformazioni geometriche, Isometrie e similitudini nel piano euclideo*;

[6] B. Scimemi, *Paper-folding and Euler's Theorem Revisited*, Forum Geometricorum, Volume 2 (2002) 93-104;

[7] B. Scimemi, *Punti Notevoli del Quadrangolo Completo*, inedito;

[8] M. Zausa, *Punti, Rette e Coniche Notevoli del Quadrangolo Piano Completo*, 1999