SSIS Veneto – Scuola di Formazione Interateneo per la formazione degli Insegnanti di Scuola Secondaria
VI° ciclo – Sede Padova.

INDIRIZZO FISICO MATEMATICO INFORMATICO

Un approccio al Problem Solving

Tesi di specializzazione di Matematica all'insegnamento secondario,
Classe: A047

Presentato dal: dott. Samuel Contarini

Relatore Chiar.mo: Prof. **Sergio Zoccante**

Anno Accademico 2005-2006

In tutti questi troppi impegni,
pieni di pretese da ogni persona che incontri,
pronta a chiederti di lavorare
perché i tempi son stretti
e i risultati devono essere conseguiti,
ora,
prima che sia così tardi… che poi c'è altro da fare!!!…
la nostra libertà più grande
è quella di poter scegliere,
di restare comunque sereni,
quella di poter scegliere la felicità,
in ogni caso!
La libertà di affrontare
tutto
con la mente rivolta al diletto di vivere
qualsiasi
condizione.

Ed è una libertà potente
che val la pena di far usare al pensiero!
Che val la pensa di usare,

comunque.

INDICE

Indice delle figure

PRESENTAZIONE

Questo lavoro si colloca alla conclusione dell'esperienza svolta in questi due anni di SSIS ed in particolare prende spunto dal lavoro di tirocinio svolto in due classi, una seconda ed una quinta del liceo paritario "Don Bosco" di Padova.

In queste pagine viene inizialmente proposta un'*introduzione* nella quale sono state fatte alcune riflessioni relative al problem solving e al processo di insegnamento-apprendimento della matematica.

Nel *primo capitolo* parlerò della parte svolta nel tirocinio che mi ha condotto a scegliere questa tesi di specializzazione, dei risultati che ne sono conseguiti e dell'analisi di questi in funzione della tesi stessa.

Nel *secondo capitolo* sono stati analizzati i risultati che l'organismo internazionale OCSE PISA ha rilevato nel 2003 in merito alle competenze da parte dei 15enni in matematica e per quel che riguarda il problem solving.

Partendo da queste basi si è approfondito nel *terzo capitolo* l'argomento del problem solving chiarendo che è indispensabile poterne parlare esplicitamente in classe.

Nel *quarto capitolo* infine si fa una proposta di un segmento didattico affrontato per problemi.

Nell'ultima parte della tesi sono riportate le *conclusioni* e le riflessioni sul progetto e sugli argomenti della tesi.

INTRODUZIONE

Da sempre uno dei principali canali attraverso il quale è passato l'uomo per la sua evoluzione (oltre all'arte) è stato il tentativo di risolvere grandi o piccoli problemi, e lo stimolo ad affrontare una difficoltà è stato il motore che ha portato alle più grandi invenzioni o innovazioni (quando le difficoltà sono state superate) o ad aumentare la consapevolezza dei propri personali limiti (quando la difficoltà era insormontabile per il tempo e le condizioni in cui essa si è presentata).

Questa considerazione iniziale porta direttamente al cuore della trattazione della presente tesi.

Il problem solving è tra le attività più importanti che vengono svolte quotidianamente per il semplice fatto che ogni giorno ci si trova ad affrontare situazioni complesse da dover risolvere. Si partirà dal presupposto che il problem solving non è una serie di tecniche da applicare per arrivare ad una soluzione, ma un atteggiamento mentale. Si capisce come, partendo con questa convinzione, nel momento in cui si tratteranno dei problemi in classe l'intenzione dell'insegnante non sarà solo quella di insegnare a risolvere *quel* problema, o *dei* problemi, ma di insegnare *come* ci si approccia ad un problema, come si affronta, come si risolve. In un ottica infatti nella quale si guarda alla scuola non solo come ad un servizio preposto alla trasmissione di sapere, ma come luogo destinato alla formazione del carattere dei ragazzi, ritengo che sia indispensabile insegnare l'attitudine al problem solving almeno per due ragioni:

la prima è legata alla società nella quale viviamo: se si osservano le inserzioni per ricerca di personale da parte delle aziende una delle caratteristiche che vengono richieste più frequentemente è l'attitudine al problem solving. Questo perché quella di oggi è una società ad elevato livello di complessità e molte delle competenze acquisite tramite la formazione matematica (la capacità di astrazione, di semplificazione, di problem solving) sono elementi costitutivi dell'individualità umana quasi imprescindibili, elementi in grado di rendere gli studenti futuri cittadini che possono esercitare un ruolo attivo e consapevole nella società,

la seconda è legata ad un aspetto più spirituale o di realizzazione personale: in una società frenetica in cui tutto sembra sempre troppo grande e troppo complicato da affrontare (soprattutto per i giovani) è molto utile insegnar loro il corretto modo di approcciarsi ai problemi, la serena pazienza a non volere tutto e subito, la capacità di non precipitarsi alla conclusione di ciò che si sta facendo in fretta, mantenendo sotto controllo l'ansia che vorrebbe che ci fosse già la soluzione pronta, gestendo le proprie emozioni, comprendendo come funziona in realtà i processo di risoluzione dei problemi (non è casuale la citazione iniziale di questa tesi). Questo obiettivo, certo, non è completamente raggiungibile in classe, ma credo sia doveroso da parte di un docente gettare un seme di questa consapevolezza negli alunni, che poi eventualmente germoglierà in modo autonomo in essi. Si deve tendere insomma anche a raggiungere questo obiettivo, tenendolo indubbiamente in considerazione.

Ci sono poi svariati altri atteggiamenti di grandissima valenza formativa insegnabili tramite il problem solving, come la capacita di non arrendersi di fronte alle sconfitte (non sempre un problema può *"venire"* immediatamente) e dunque di affrontare i fallimenti.

Si è in grado così di dare, a mio avviso, la giusta dimensione, il significato reale di quello che è il processo di sviluppo, o il progresso scientifico, fatto di tentativi ed errori prima di arrivare alla formula finale vincente. Si ha dunque la necessità e l'opportunità di trasmettere in questo modo un'idea corretta di matematica e dell'approccio scientifico. In caso contrario *"si corre il rischio che proprio il luogo destinato a far crescere i ragazzi, a stimolare la loro curiosità, la loro creatività, porti ad un appiattimento, nel quale questa disciplina trasforma gli allievi in individui passivi, solo esecutori di procedure e regole prestabilite, decise e dettate da altri e ripetute meccanicamente. Questo è un punto molto delicato. Non si deve perdere l'idea di scuola come luogo di sperimentazione nel quale i ragazzi si mettono in gioco e conquistano gli strumenti culturali necessari per la propria crescita"* [13].

Altre importanti caratteristiche sviluppabili attraverso l'atteggiamento propositivo verso il problem solving sono la capacità di prendere decisioni e come vedremo la creatività.

Tutto questo è in linea con le indicazioni date dall'Unione Matematica Italiana (UMI) che con il suo curriculum vuole rinnovare alcune pratiche o far riflettere su che cosa sia importante insegnare. Citando il documento dell'UMI si legge infatti:

"Molti… "oggetti" della matematica sono collegati sia con le componenti più dinamiche dell'economia, in quanto questa nuova presenza è strettamente connessa alle possibilità offerte dai computer, sia con molti altri aspetti dell'organizzazione nella società moderna. Quotidianamente noi usiamo molti oggetti il cui funzionamento è basato su risultati matematici e spesso su quelli più recenti. Nell'attuale società la matematica è sempre presente, ora più che mai, ma di questo non sempre siamo consapevoli, neppure noi matematici" [1].

"La frase lancia una sfida ai paesi maggiormente sviluppati e che mirano a un forte avanzamento tecnologico: è soprattutto la scuola che deve farsene concretamente carico. L'Italia non può non raccogliere questo invito pressante." [1]

Inoltre, in riferimento alle linee guida a cui è bene rifarsi nell'esercizio della propria professione, nella circolare ministeriale riguardante il Piano Nazionale per l'introduzione dell'informatica nelle scuole secondarie superiori si legge: *"La Matematica, parte rilevante del pensiero umano ed elemento motore dello stesso pensiero filosofico, ha in ogni tempo operato su due fronti: da una parte si è rivolta a risolvere problemi ed a rispondere ai grandi interrogativi che* *man mano l'uomo si poneva sul significato della realtà che lo circonda, dall'altra, sviluppandosi autonomamente, ha posto affascinanti interrogativi sulla portata, il significato e la consistenza delle sue stesse costruzioni culturali"*. [9]

Questa tesi parte dall'ipotesi, basata sui dati dei primi due capitoli, che l'insegnamento odierno sia sbilanciato e che non si dia assolutamente rilievo alla parte inerente la risoluzione dei problemi che è una delle attività principali in matematica.

Si metterà a tema della tesi la convinzione che per motivare gli studenti allo studio della disciplina sia indispensabile mettere in rilievo aspetti che nel curriculum attuale sono trascurati. In pratica è necessaria una reinterpretazione di alcuni argomenti in modo da far capire agli alunni che cos'è la matematica esplicitando che essa non è solamente una collezione di sterili formule da applicare, ma cercando di trovare il più possibile un legame con la realtà, o meglio con il loro essere uomini, sfruttando processi mentali che hanno a che fare con il loro agire quotidiano portandoli a sviluppare competenze ed atteggiamenti imprescindibili per i cittadini delle società di domani prima di dar loro delle tecniche di calcolo.

Si è riflettuto sul fatto che mettere in rilievo questo lato della disciplina non è una cosa che va fatta una volta, magari all'inizio dell'anno con una introduzione all'argomento (e nel *capitolo 3* è indicata una modalità con la quale questo può essere fatto), ma ogni volta che se ne ha l'occasione vanno trovati i legami concreti con l'attività di problem solving. In caso contrario questo collegamento iniziale rimarrà solo un introduzione poco fruttuosa. Per questo nel *capitolo 4* si propone un esempio di come si può trattare ed affrontare un argomento attraverso il problem solving.

Attualmente nella pratica della didattica matematica si hanno due generi di problemi: la scarsa motivazione a far matematica e la scarsa capacità di risolvere problemi; proponendo una matematica "per problemi" potremmo migliorare la competenza negli alunni inerente il problem solving e motivarli facendo loro vedere i processi che portano a *costruire* matematica

È certo che non si può neanche pensare ad una matematica fatta solo di problemi in quanto è imprescindibile che si debba fare anche un lavoro di sistematizzazione del sapere, attraverso strumenti e tecniche che si sono consolidate nel tempo, ma se il processo di motivazione allo studio della materia può aver luogo tramite l'approccio per problemi questo permetterà agli alunni di arricchirsi a livello cognitivo anche di tutte le altre attitudini precipue di questa disciplina (certamente non tutte sviluppabili tramite la risoluzione di problemi) quali: *"tutte le facoltà intuitive e logiche, l'educazione ai procedimenti euristici e ai processi di astrazione e di formalizzazione di concetti, la capacità di ragionare induttivamente e deduttivamente, le attitudini sia analitiche che* *sintetiche, il ragionamento e la riflessione, la capacità di sistemare logicamente e riesaminare criticamente le conoscenze via via acquisite,la facoltà di prendere decisioni…"* [13], contribuendo in modo attivo alla formazione del carattere nei nostri studenti.

CAPITOLO 1

1. L'ESPERIENZA DI TIROCINIO

Questa sezione è dedicata ad analizzare l'esperienza di tirocinio fatta per quel che riguarda i moduli di matematica, considerando i risultati e i contributi che da essa provengono.

Nei moduli in questione sono stati trattati due tipologie di argomenti, essendo stati fatti in due classi diverse (ossia in una seconda di un liceo linguistico ed in una quinta di un liceo scientifico), ma per entrambi gli argomenti si è approfondito nello specifico la risoluzione di problemi con l'utilizzo degli strumenti matematici che si stavano studiando.

In particolare in seconda l'argomento che si è trattato è stato "equazioni di primo grado" ed in quinta "massimo e minimo assoluto delle funzioni".

Il modulo svolto in seconda è stato un modulo di valutazione, e dunque nelle riflessioni fatte nella tesi di tirocinio sono state messe in rilievo più che altro considerazioni in merito alla mia modalità di valutazione, confrontandola con quella della professoressa accogliente, per trovare i punti in comune o gli spunti di miglioramento per la competenza di valutazione. Qui invece si vogliono mettere in rilievo altri aspetti legati a quell'esperienza di tirocinio, rifacendosi in ogni caso ai compiti svolti dagli alunni a fine modulo di cui si è tenuto traccia a mezzo di fotocopie e con la tabella di valutazione dei compiti.

Il contenuto didattico del modulo svolto in seconda verteva sulle equazioni di primo grado, a partire dalla definizione per passare ai principi di equivalenza e alla risoluzione delle equazioni stesse.

Operativamente dopo la fase di osservazione in cui si è assistito all'introduzione delle equazioni e alla spiegazione dei principi di equivalenza ho pianificato e svolto in classe una serie di esercizi. Interessante è stato l'approccio con cui la docente accogliente ha affrontato l'argomento. La docente infatti si è rifatta alla definizione di enunciato aperto e di funzione proposizionale, legando in pratica lo studio e la risoluzione delle equazioni alla logica e ai fondamenti della matematica. Questo approccio è indubbiamente da apprezzare in quanto è un elemento che favorisce quel processo per il quale la matematica viene ricondotta in modo rigoroso e formale ai suoi fondamenti che sono stati delineati in modo chiaro nel periodo tra la seconda metà dell'800 e il secolo scorso. Ho dunque apprezzato questo collegamento che porta la logica a non essere più solamente un capitolo che si affronta ad inizio della prima e poi non trova più nessun tipo di utilizzo con il procedere del curricolo, ma che diventa la base per la trattazione degli argomenti successivi, o per lo meno di alcuni di essi.

La parte trattata direttamente da me nel tirocinio è stata quella di svolgere esercizi legati alla:

- risoluzione di equazioni,
- risoluzione di problemi attraverso equazioni.

Ho concentrato il mio intervento a dir la verità su questo secondo argomento, in quanto da me ritenuto di maggior interesse e di grande utilità formativa.

Si sono dunque proposti dei problemi da risolvere impostando un equazione, visitando insieme i primi esempi per dare delle indicazioni in merito a come è opportuno approcciarsi a questo tipo di compito.

In particolare si è spiegato quali siano i passaggi utili che ci consentono di analizzare nel modo migliore un problema. Per quel che riguarda questo argomento si rimanda alla sezione 3 in cui si vedranno nello specifico le varie fasi da considerare nell'approccio al problem solving. È da dire in ogni caso che non è stato ovviamente possibile trattare in maniera estesa tutto ciò che verrà considerato in questa tesi. Non si è parlato di metodi o tecniche di risoluzione di problemi, ma si sono fatti solo alcuni esempi, a causa dell'esiguità del tempo a disposizione, ma soprattutto perché non era quello il contenuto del modulo.

Sono stati fatti in classe diversi esercizi per verificare come potesse essere possibile risolvere problemi con l'utilizzo di equazioni di primo grado. Si è anzi partiti con la risoluzione di un problema per introdurre l'argomento. Durante lo studio del problema sono stati messi in rilievo i punti attraverso i quali è indispensabile passare per un efficace risoluzione del problema stesso (vedere il *capitolo 3*). Gli alunni hanno potuto rifarsi a tale esempio nel momento in cui ho introdotto gli elementi principali dello schema che si è proposto.

Qui si analizzeranno invece i risultati derivati dalla somministrazione, durante la prova di verifica, di problemi da risolvere con l'utilizzo di equazioni di primo grado.

Questo il testo del compito:

"Imposta l'equazione risolvente dei seguenti problemi e trova la loro soluzione:

1. *Un padre ha 40 anni ed il figlio 14. Tra quanti anni l'età del padre sarà tripla di quella del figlio?*

2. *Aldo dà 100 € a Bruno, i 2/3 della parte restante li dà a Carlo e la metà della parte rimasta a Dario. Se gli sono rimasti 150 € qual era la somma che possedeva prima della spartizione?*

3. *La differenza fra le quantità di vino contenute in due botti è di 80 l. Se la botte più grossa contiene 50 litri di vino in più della quarta parte del vino contenuta nell'altra, quanto vino contiene ciascuna botte?"*

Nel compito oltre a questi problemi sono stati proposte 5 equazioni numeriche intere, 5 domande aperte di teoria e 4 domande a risposta multipla, sempre di teoria.

Si sono analizzati per questa tesi i dati riferiti ad un campione significativo di compiti, valutando l'attribuzione di punteggi che è stata fatta per i diversi ambiti: teoria, test, equazioni, problemi.

Metà degli alunni non hanno nemmeno affrontato i problemi, il che significa che *solo il 50% ha **provato***, con risultati positivi o meno, a risolvere tali esercizi. Si consideri poi che la percentuale di coloro che hanno affrontato positivamente tale sezione scende al 25%. In pratica il 25% del campione è risultata positiva nella risoluzione dei problemi, mentre il **75%** non lo è stato.

Nel grafico di *figura 1* si vede come si distribuisce il voto che è stato attribuito ai compiti, che è lo specchio di quanto le varie tipologie di esercizi sono state affrontate.

Qui si vede come quasi il 70% del voto sia da attribuire alla teoria, mentre all'applicazione rimane un 30% di cui **meno del 10% si può ricondurre alla risoluzione dei problemi**. Questo è un indice di efficacia degli alunni nella risoluzione di problemi. Si faccia attenzione che questo dato non dipende dal fatto che ci fossero meno problemi che domande di teoria o equazioni, infatti ogni valore è stato prima normalizzato ad 1.

Se si guardano poi i compiti peggiori, più del 50% del voto proviene da risposte alla parte teorica mentre la risoluzione delle equazione contribuisce con un 10%, crollando allo 0% per quel che riguarda il contributo della risoluzione di problemi, che non sono neanche stati affrontati (come detto in precedenza).

Nel grafico di figura 2 sono invece messi in rilievo i voti medi che si possono attribuire ai vari tipi di esercizi nel caso in cui volessimo sezionare i vari contributi al voto delle varie tipologie di esercizi all'interno del compito.

Si nota come in media in quasi tutte le sezioni si abbia una media sufficiente, mentre la media ipotetica da attribuire ad un compito con soli problemi da risolvere sarebbe 3 ½. Questo è da attribuire alla scarsa propensione ed allenamento da parte degli alunni ad affrontare compiti in cui sia indispensabile risolvere problemi, ragionare, strutturare dati in modo da creare un modello che risolva un problema, interpretandone i risultati.

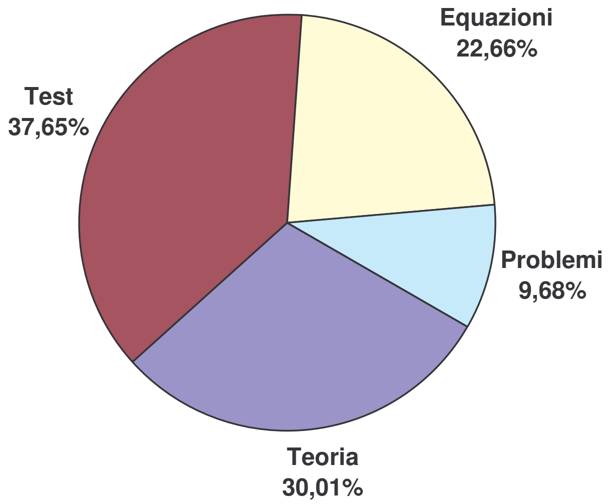


Figura 1: Distribuzione del voto nelle varie tipologie di esercizi

(* questi dati sono stati ottenuti facendo una media sui punteggi divisi per tipologia, teoria, test, ecc… divisi per il punteggio che ogni alunno aveva ottenuto, fornendo così la percentuale di quanta parte di quella tipologia di esercizio contribuisce al voto).

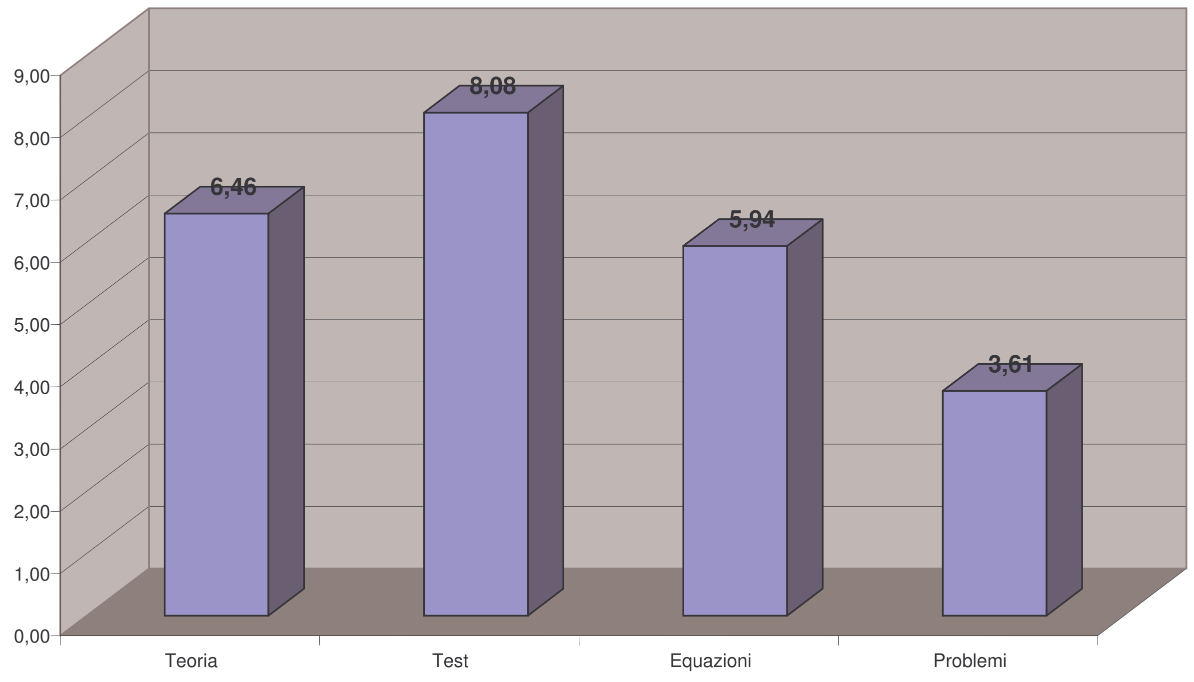


Figura 2: Voto distribuito per tipologia di esercizio

I dati visti nei grafici precedenti sono corroborati dal dato che si può ricavare dal modulo standard che è stato svolto in classe V, al liceo scientifico. I dati non possono essere indagati con la stessa puntualità di quanto fatto per i compiti della seconda, in quanto non si è proceduto ad una correzione e catalogazione per quel che riguarda l'attribuzione dei punteggi. In ogni caso si può rilevare che solo 5 alunni su 19 hanno affrontato i problemi, ossia hanno tentato di risolverli, con una percentuale del 26,3% molto simile a quella messa in evidenza nella statistica fatta sopra per la seconda linguistico. Non si hanno, come detto, a disposizione i dati inerenti i livelli di successo nell'affrontare e risolvere i problemi ma ci si aspetta che le percentuali non siano dissimili da quelle riportate nelle figure 1 e 2.

Si può quindi concludere, rifacendosi all'esperienza di tirocinio, come non ci sia affatto l'abitudine da parte degli studenti ad affrontare situazioni che implichino la comprensione, l'interpretazione e la risoluzione di problemi e che gli studenti in genere fuggano dalle situazioni più difficili, preferendo compiti standard in cui essi possano applicare tecniche meccaniche.

Vedremo nel prossimo capitolo come è possibile confermare questa tendenza, che qui si è solo potuta intravedere, con i dati a più vasta scala rilevati dell'organismo internazionale OCSE PISA nel 2003.

CAPITOLO 2

2. DATI INTERNAZIONALI DERIVATI DAL RAPPORTO OCSE PISA

Si vuole qui vedere quanto le riflessioni fatte nel capitolo precedente trovano sostegno in analisi di più ampio spettro. In particolare ci si riferisce ai rilevamenti OCSE PISA nel 2003. PISA (ossia *Program for International Student Assessment*) è un organismo internazionale di valutazione delle competenze degli studenti il cui scopo è rilevare il livello di raggiungimento di determinate competenze da parte degli studenti nelle scuole di 41 paesi nel mondo. Questa misurazione è di fatto un indice dell'efficacia delle scuole di un determinato paese nei confronti del raggiungimento di quelle competenze che si è voluto mettere in evidenza.

Non entreremo qui nel merito delle caratteristiche, dei metodi, degli strumenti, delle fasi di lavoro o delle scale di competenza del PISA, rimandando a [4] per una trattazione più approfondita, qui si vedranno solo le caratteristiche principali, la specificità della rilevazione fatta nel 2003 e i risultati che si sono potuti estrapolare.

2.1 CARATTERISTICHE DEL PROGETTO PISA E SPECIFICITA' DI PISA 2003

Il progetto Pisa 2003 si prefigge lo scopo di valutare quattro ambiti di competenza:

- competenza matematica,
- competenza di lettura,
- competenza scientifica,
- abilità nel risolvere problemi.

Le rilevazioni PISA vengono svolte ogni 3 anni su ragazzi 15enni, ma ogni volta viene privilegiata un'area rispetto alle altre. Nel 2003 l'area privilegiata, ossia l'area a cui è stato dato più spazio è stata la competenza matematica. Proprio per questo è stato aggiunto un nuovo gruppo di domande specificatamente rivolto al Problem Solving, cosa che non è stata fatta per le edizioni passate del rilevamento PISA e che probabilmente non verrà riproposto in futuro.

Si riporta in questa sede che cosa intende PISA per competenza matematica e di problem solving dato che a queste definizioni sarà interessante riferirsi per definire alcune linee all'interno di questa tesi o più in generale per la concezione di un Curricolo Matematico rivolto ai cittadini che formiamo a scuola come docenti.

Competenza Matematica:

La competenza matematica è la capacità di un individuo di identificare e comprendere il ruolo che la matematica gioca nel mondo reale, di operare valutazioni fondate e di utilizzare la matematica e confrontarsi con essa in modi che rispandono alle esigenze della vita di quell'individuo in quanto cittadino che esercita un ruolo costruttivo, impegnato e basato sulla riflessione.

Abilità di Problem Solving:

La capacità di un individuo di mettere in atto processi cognitivi per affrontare e risolvere situazioni reali e interdisciplinari, per le quali il percorso di soluzione non è immediatamente evidente e nelle quali gli ambiti di competenza o le aree curriculari che si possono applicare non sono all'interno dei singoli ambiti della matematica, delle scienze o della letteratura.

Si ha la convinzione, e in questa tesi si assumerà tale assunto, che anche se le capacità elencate nel problem solving sono, come specificato, di tipo interdisciplinare esse possano essere favorevolmente sviluppate nell'ambito dell'insegnamento della matematica, e che anzi un curriculum di matematica non possa esimersi dallo sviluppare questa specifica competenza. L'approccio ai problemi e alle tecniche di soluzione di questi, soprattutto per problemi di tipo tecnologico o di natura scientifica, possono e debbono essere veicolate attraverso l'insegnamento della matematica, per questo all'interno di questa tesina si terranno in considerazione sia i risultati legati alle competenze matematiche e sia quelli legati alla capacità di problem solving.

Inoltre essendo una competenza interdisciplinare è indubbio che il docente di matematica non possa esimersi dal dare un contributo a tal riguardo.

Ancora, senza entrare troppo nello specifico si elencherà solamente che nei rilevamenti PISA le dimensioni nel campo della **matematica** che si sono volute indagare sono:

- Dimensione dei contenuti, divisa in:
    - Spazio e Forma
    - Cambiamento e relazioni
    - Quantità
    - Incertezza
- Dimensione dei processi, divisa in:
    - Processo di riproduzione, per problemi familiari o conosciuti

  - Processi di Connessione, in cui si devono collegare informazioni o passare da una rappresentazione ad un'altra per la risoluzione del problema
  - Processi di Riflessione, in cui in cui si deve meditare su qual è la strategia migliore per la risoluzione
- Dimensione del contesto o della situazione, divisa in:
  - Contesto personale, legati alla vita dello studente
  - Contesto educativo, legato all'ambiente scuola
  - Contesto di situazioni pubbliche, legato alla necessità di osservare l'ambiente che circonda lo studente

La scala di competenza che è stata predisposta prevede la classificazione in sei livelli delle competenze degli studenti, da un ***livello 6*** in cui i ragazzi sono in grado di concettualizzare, generalizzare, e modellizzare situazioni complesse ad un ***livello 1*** in cui i ragazzi sanno solo rispondere a domande che riguardano situazioni a loro familiari in cui dev'essere esplicitamente dichiarato quale sia lo scopo o ci siano azioni ovvie da compiere. Sono stati classificati anche gli studenti che non sono stati in grado di raggiungere il punteggio minimo per poter essere inseriti al livello 1.

Per quel che riguarda il **problem solving** invece sono state fatte rilevazioni inerenti 3 tipi di situazioni in cui si doveva:

- Prendere decisioni, in cui si richiedeva di comprendere situazioni o valutare alternative,
- Analizzare e progettare sistemi, in cui si richiedeva di comprendere i rapporti e la logica che stava alla base di una situazione per progettare un sistema in grado di raggiungere obiettivi,
- Localizzare disfunzioni, in cui lo studente doveva identificare il punto debole o non funzionalmente di un sistema.

Le capacità necessarie allo studente per affrontare questo tipo di prove sono del tipo: identificazione di problemi in ambito pluridisciplinare, identificazione di informazioni rilevanti o limitanti, individuazione di alternative possibili di soluzione e loro rappresentazione, selezione di strategie di soluzione, controllo delle soluzioni e riflessione su di esse, comunicazione dei risultati. Da rilevare che di tutte queste capacità si può discutere in ambito matematico.

L'importanza del problem solving si rispecchia nel fatto che esso può avere un ruolo fondamentale nella definizione di un sistema di istruzione orientato all'apprendimento, all'occupazione e alla cittadinanza attiva.

La scala di competenza predisposta prevede la suddivisione dei risultati su 3 livelli: un ***livello più alto*** per il quale gli studenti risultano “risolutori di problemi, riflessivi e comunicativi”, un ***livello intermedio*** in cui si collocano ragazzi “risolutori di problemi, ragionanti e in grado di prendere decisioni”, ed un ***livello più basso*** raggiunto da “risolutori di problemi semplici”. Anche qui si sono classificati anche coloro che non sono stati in grado di raggiungere il livello più basso: i “deboli risolutori di problemi”.

2.2 RISULTATI DELLA RILEVAZIONE PISA 2003

Matematica

Da un analisi dei risultati si ricava facilmente come ci sia una grande differenza tra la situazione rilevata per la media nazionale (Italiana) e la situazione rilevata nel nord Italia alla quale il Veneto si allinea perfettamente. Mentre la media mondiale per la competenza in matematica è di 500 punti la media Italiana è di 466 punti. La media dei quindicenni del Veneto è invece di 511 punti. Per dare un riferimento è da dire che la differenza di punteggio tra un livello e quello successivo è di 60 punti.

Questo dato, la disparità tra media Italiana, Veneta e internazionale, va indubbiamente dettagliato ma già da solo può avere un significato. Il punteggio ottenuto pone l’Italia al 32esimo posto nella classifica dei 41 paesi che hanno partecipato alla rilevazione OCSE PISA. Solo la Grecia, in Europa, ha ottenuto un risultato più basso. Se si guarda invece al risultato del Veneto ci rendiamo conto invece come questo si situi al livello della Francia, situata al 16 posto. È da dire che la posizione è puramente indicativa, e come tale va considerata, in quanto a causa degli intervalli di confidenza la “posizione” può servire solo a dare una indicazione di massima.

Dettagliando il dato che si è sommariamente riportato sopra possiamo vedere come al livello 6 della fascia di matematica si colloca il 3,1% degli studenti del Veneto, mentre la media Italiana è del 1,5% e quella OCSE del 4%. Un altro 9,3% si colloca al livello 5, con una media Italiana del 5,5% e una media OCSE del 10,6%.

All’estremo più basso della scala si colloca il 10,7% degli studenti Veneti mentre il 3,7% non raggiunge il livello 1. tali percentuali sono più contenute rispetto alla media Italiana per la quale il 18,7% si collocano al livello 1 ed il 13,2% sotto tale livello. Per quel che riguarda la media Internazionale i dati sono: 13,2% a livello 1 e 8,2% sotto tale livello. Per quel che riguarda questo parametro dunque la media del Veneto e migliore anche rispetto ai parametri internazionali.

Nel grafico di figura 3 è stato riportato il confronto tra le percentuali di ragazzi che hanno ottenuto i vari tipi di risultati appena descritti. Tale grafico dà un quadro immediato della situazione.

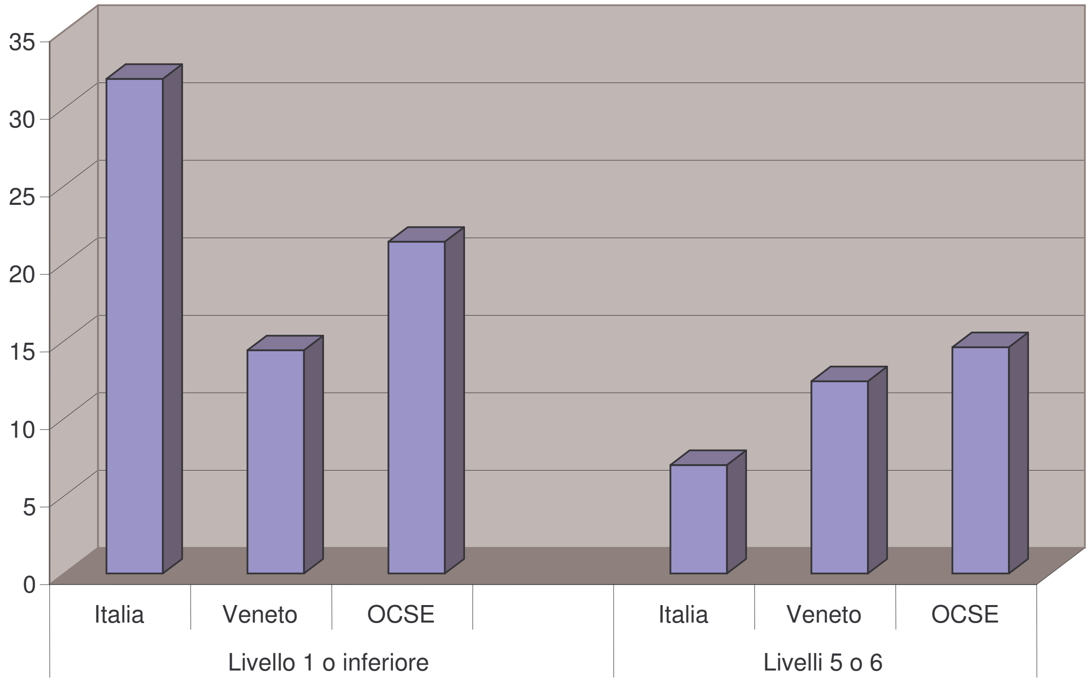


Figura 3: Distribuzione degli alunni nei livelli di competenza di Matematica a confronto

Da questa distribuzione si vede come nel Veneto la situazione sia addirittura migliore di quella internazionale per quel che riguarda il numero di studenti con profitto estremamente basso e si allinei alla situazione internazionale per quel che riguarda l'eccellenza. La media Italiana è invece palesemente al di sotto dello standard, presentando livelli preoccupanti di studenti (⅓ di essi) che si collocano ai livelli più bassi della scala.

Questo dato andrebbe certamente letto facendo delle considerazioni in merito alla provenienza scolastica (licei, istituti tecnici, professionali), al background familiare, al clima scolastico e a tutta una serie di altri parametri come: motivazione, atteggiamenti, strategie di apprendimento della matematica. Per un analisi dettagliata si veda [4] qui basterà rilevare solamente questo trend che è indubbiamente significativo.

Guardando infatti l'Italia come ad un paese con un sistema scolastico che dovrebbe fornire lo stesso tipo di servizio in tutti i suoi distretti si capisce come si debba ripensare e progettare il curriculum, sicuramente in riferimento all'indicazione per la quale è indispensabile costruire cittadini in grado di utilizzare anche gli strumenti mentali che la matematica è in grado di fornire.

Si dovranno quindi prendere in considerazione i nuclei fondanti della materia e stabilire che competenze si vogliono far sviluppare agli studenti, come pure che tipo di crescita e di formazione si vuol far loro sperimentare. Inoltre si può ipotizzare che il sistema scolastico del Nord e del Veneto possa, nei suoi metodi e strategie, essere preso a modello nazionale.

Problem Solving

Osservando i dati riferiti alla prestazione Italiana fatta per la rilevazione di competenze legate al problem solving vediamo come in questo ambito i dati siano molto simili a quelli riferiti alla competenza in matematica.

Con le stesse limitazioni di cui si è detto per la classifica in matematica, legate cioè all'intervallo di confidenza dei dati, l'Italia si pone ancora al 32esimo posto dei 41 stati partecipanti, mentre il Veneto, o il nord est si collocano alle spalle della Germania al 17esimo posto.

È certo che l'abilità di lettura e di tipo scientifico sono indispensabili per la risoluzione di dei quesiti proposti in quest'area, ma l'abilità principale necessaria è il ragionamento analitico e in particolare la capacità di affrontare il problema in modo sistematico, abilità sviluppabile in matematica.

Risulta interessante comparare i vari livelli della scala di problem solving considerando le percentuali presenti ad ogni livello. In figura 4 sono comparati i risultati Italiani a confronto con quelli della media internazionale e del Veneto.

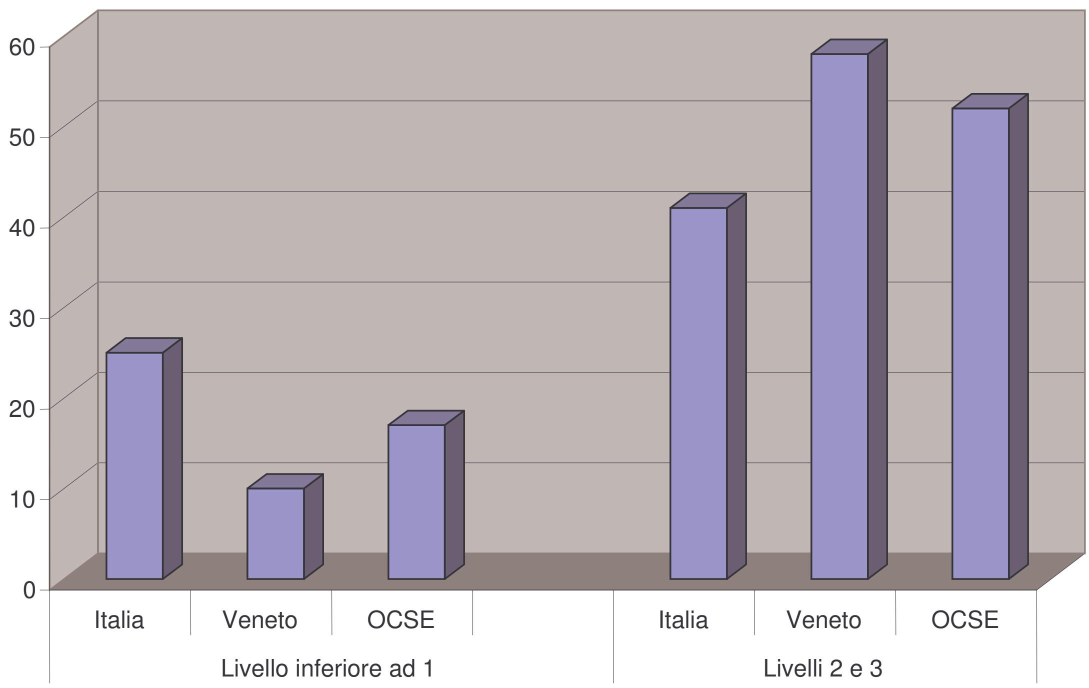


Figura 4: Distribuzione degli alunni nei livelli di competenza di Problem Solving a confronto

In Veneto una percentuale del 58% si colloca ai livelli più alti mentre solo il 10% risulta inferiore al livello 1. La media Italiana è ben al di sotto di questi valori con solamente il 40% nei livelli più alti, ed un preoccupante 25% sotto il livello 1. ciò significa che ¼ degli studenti italiani non riesce a risolvere neanche i quesiti di problem solving più semplici.

Anche qui è da dire che i risultati andrebbero letti tenendo in considerazione la scuola di provenienza e gli altri fattori di cui si è prima accennato. Si noterà solo il fatto che in Veneto lo svantaggio che si potrebbe ipotizzare da parte degli istituti tecnici nei confronti dei licei in realtà non si presenta in modo così marcato, con risultati pressoché comparabili tra i due tipi di scuole. Questa considerazione non può essere estesa alla realtà Italiana.

È certo che ogni professore dovrà poi fare i conti con la realtà nella quale lavora. Il dato del 10% nel Veneto di studenti che si collocano sotto il livello 1 non potrà essere preso in assoluto. Nel momento in cui, ad esempio, ci si troverà a lavorare in un istituto professionale è da tener conto che si potrà avere a che fare con il 26 % (¼ della classe, ma con un 70% nei due livelli critici più bassi) che non è in grado di risolvere problemi, percentuale che sale al 48% in Italia (con un 85% nei due livelli più bassi!), ossia con metà classe che va particolarmente seguita sotto questo profilo.

Si valuterà a questo punto quanto sia indispensabile lavorare nella direzione di un miglioramento delle competenze degli alunni legate al problem solving. Un lavoro di questo tipo, che dovrà prevedere una rivisitazione dei nuclei fondanti della matematica, potrà avvicinare allo studio della matematica, e dunque motivare, un maggior numero di studenti che potranno percepire l'importanza dell'acquisizione di certi strumenti per la loro vita.

Nei prossimi capitoli si proporrà un percorso attraverso il quale ci si può approcciare all'insegnamento della risoluzione di problemi all'interno della normale programmazione del curricolo di matematica.

CAPITOLO 3

3. UN APPROCCIO ALL'INSEGNAMENTO DELLA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI.

Tutto ciò che verrà scritto in questa sezione (o per lo meno dal paragrafo 3.4 in poi) va esplicitamente detto agli alunni per dar loro consapevolezza in merito a ciò che si sta facendo. L'esplicitazione di questi contenuti diventa parte integrante del percorso che si vuole in questa tesi proporre e dunque dell'insegnamento della matematica.

3.1 MOTIVAZIONI FONDAZIONALI

La convinzione che si è radicata in me, insegnando e traendo spunto dai corsi SSIS, articoli e libri di testo è il fatto che l'attività di risoluzione dei problemi vada esplicitamente insegnata. A mio avviso una parte del tempo che si passa in classe nelle ore di matematica va spesa per parlare esplicitamente di come si debbano affrontare i problemi, di quali tecniche esistano per la risoluzione di questi, quali schemi si possono utilizzare. Questi schemi saranno poi messi in luce ogni volta che si risolverà un determinato tipo di problema, facendo vedere non solo il procedimento che si segue, ma anche lo schema che si è usato per risolverlo. L'attività pratica, il mettere le mani in pasta è indispensabile perché *"risolvere problemi è un arte pratica, come il nuotare, o lo sciare, o il suonare il piano: si può imparare solo con l'imitazione e la pratica. Se desiderate imparare a nuotare dovete gettarvi in acqua, se desiderate diventare un risolutore di problemi, dovete risolvere problemi"* [5].

Il problem solving diventa quindi, nell'ottica qui proposta, un vero e proprio nucleo fondante della disciplina matematica.

3.2 POSIZIONE NEL CURRICULUM SCOLASTICO DI TALI CONTENUTI

Per quanto detto gli schemi ed i metodi di risoluzione dei problemi saranno ripresi ogniqualvolta si dovranno applicare, e ci saranno dunque argomenti che si presteranno in maniera maggiore o minore all'esplicitazione di tali tematiche. È vero però che risulta necessario a mio avviso riservare un *"unità didattica"* per gli argomenti proposti in questa sezione.

Quello che sono solito fare nella mia attività didattica è di spendere del tempo ad inizio anno per parlare dell'attività di risoluzione di problemi. Si possono collocare dunque tali contenuti in una classe prima ad inizio del primo quadrimestre, riprendendolo poi in seconda, sempre ad inizio anno.

3.3 OBIETTIVI

Gli obiettivi da perseguire attraverso un *unità* di questo tipo sono la possibilità di:

- interpretare il testo,
- utilizzare consapevolmente le proprie conoscenze,
- fare delle scelte (in riferimento a strategie),
- valutare criticamente i risultati,
- essere consapevoli delle proprie capacità,
- essere disponibili ad un confronto dinamico,
- sviluppare il pensiero logico,
- scoprire connessioni e saper fare collegamenti,
- usare il linguaggio matematico,
- tradurre il linguaggio parlato in linguaggio matematico.

Gli insegnanti dal canto loro con l'insegnamento di tali argomenti possono:

- individuare gli schemi mentali degli allievi,
- effettuare interventi mirati per un eventuale feed back o per un feed over,
- determinare i diversi livelli di astrazione raggiunto dagli alunni,
- utilizzare il problema come avvio alla costruzione di nuove conoscenze.

3.4 COME APPROCCIARSI ALL'ARGOMENTO DELLA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI

Spesso la matematica è percepita dagli studenti come una disciplina in cui tutto è preconfezionato, le cose si devono fare in una determinata maniera e solo in quella. Non c'è possibilità di utilizzare la fantasia e si devono seguire schemi fissi, e se si esce dal seminato certamente si sbaglierà.

Un altro problema, legato a quello appena enunciato, è che gli studenti a volte non capiscono da dove si parta e dove si voglia arrivare. Soprattutto in geometria, ma capita anche in altri campi della matematica, non si capisce perché le cose da cui si parte sono quelle e non si capisce che cosa si stia cercando. Questo, come si diceva, è legato al primo aspetto messo in luce in quanto dato che gli studenti non hanno partecipato al processo di costruzione, al percorso di scoperta che ha portato a quei risultati, non è chiaro perché si parta da quei presupposti per arrivare a quelle conclusioni, non è naturale, lo sarebbe solo se anche loro avessero provato a risolvere da soli, o meglio con l'aiuto del docente, i problemi che hanno portato a quei risultati.

Il fatto che "se si esce dal seminato certamente si sbaglierà" inoltre non deve essere vista come una limitazione ma come una risorsa. La storia del pensiero umano è fatta di tentativi ed errori e a questo si deve abituare il pensiero dei nostri studenti, o per lo meno si deve dar loro la possibilità di sperimentare tale modalità.

L'attività di problem solving diventa a questo punto di primo piano e vediamo subito perché.

Daremo per assioma il fatto che l'utilizzo e lo sviluppo della fantasia, della creatività sia un elemento stimolante e motivante per gli studenti. Un altro assunto che si farà è che gli studenti si fidino del docente e di ciò che esso propone. Questo non sempre accade, lo ammetto, ma questo aspetto dipende moltissimo dalla capacità del docente di guadagnarsi le fiducia degli alunni. Da questi due assiomi partiremo per sviluppare il percorso di questa tesi.

La possibilità di utilizzare la risorsa *creatività* va sfruttata, ma per vedere come questo può essere fatto dobbiamo analizzare prima cos'è un problema.

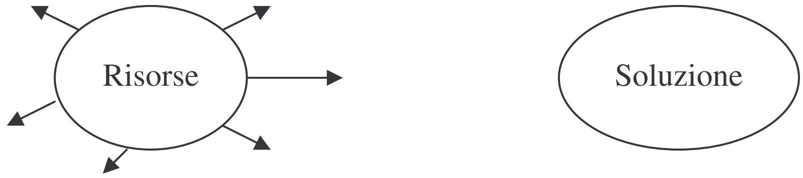
"Risolvere un problema significa trovare una strada per uscire da una difficoltà, una strada per aggirare o superare un ostacolo, per raggiungere uno scopo che non sia immediatamente raggiungibile. Risolvere un problema è un impresa specifica dell'intelligenza umana […]. In generale un desiderio può condurre ad un problema oppure no. Se un desiderio fa venire subito in mente, senza alcuna difficoltà, qualche azione ovvia che verosimilmente ci fa ottenere l'oggetto desiderato non c'è problema. Se invece non viene in mente nessuna di tali azioni, ecco il problema. Quindi avere un problema significa: cercare coscientemente un'azione appropriata per ottenere uno scopo chiaramente concepito ma non immediatamente ottenibile. Trovare tale azione (o tali azioni) *porta a risolvere il problema"* [5]

In classe porto sempre il paragone che risolvere un problema è come trovare le strada in un labirinto che va dall'ingresso all'uscita. La metafora del labirinto è per me particolarmente significativa: è una metafora che si rifà ad un gioco e dunque predispone gli allievi a tentare di arrivare alla fine, rende conto in maniera chiara che per arrivare alla soluzione è possibile prendere vicoli ciechi, che non portano dunque a risolvere il problema, ma che e indispensabile percorrere per trovare la strada giusta. Si dovrà allora tornare indietro, e provare un'altra strada. Come in un labirinto è possibile essere fortunati e trovare subito la strada giusta, ma si capisce che questa non è la regola bensì una possibilità all'inizio poco probabile.

Questo dà già un idea di quanto sia necessaria la fase creativa nella soluzione di problemi.

Un giorno in classe mi è stato fatto notare come non è vero che ci sia poi molta fantasia nell'applicare questo o quel metodo: "per risolvere una equazione il procedimento è quello!"

"Certo - ho osservato - ma per arrivare a quella equazione ho dovuto ingegnarmi e cercare una strada. Partendo dal punto di partenza posso seguire molte strade, posso provarne diverse, ma solo una porterà alla soluzione." Ho fatto poi alla lavagna tale schema:



chiarendo che in mezzo tra i due cerchi disegnati, e nel tracciare le varie strade che li possono collegare, sta la creatività. Questo semplice schema, disegnato di getto alla lavagna quel giorno, sarà l'oggetto di questa sezione. Esso verrà indagato ed ampliato per giungere a dei contenuti che possono essere proposti in classe in modo proficuo.

Per arrivare ad essere dei buoni risolutori di problemi ci sono alcuni accorgimenti da seguire e da esplicitare. Questi principi possono essere presi come attitudini mentali a cui far sempre riferimento, utilizzabili poi all'interno di qualsiasi tecnica che si seguirà per risolvere un problema:

1. Va tenuto innanzitutto in considerazione che l'attività di risolvere problemi aiuta a risolverne altri, bisogna far attenzione *"a quei lineamenti del problema in questione che possono diventare utili nel trattare problemi futuri"* [5], o come diceva Descartes: *"Ciascun problema che ho risolto è diventato una regola che ha servito poi per risolvere altri problemi"* [7].

2. Dunque: rifarsi a modalità ed esempi di come si risolvono o sono stati risolti alcuni problemi specifici sviluppa la capacità di problem solving, con l'idea di non presentare *"solo risoluzioni, ma episodi di risoluzione di problemi"*.

3. Considerare il problema come già risolto. Questo è un *"trucco"* che in certe occasioni è di fondamentale importanza. Spesso si utilizza senza rendersene conto, ma diventa indispensabile in alcuni momenti e saperlo usare in modo cosciente può essere un vantaggio. Citando ancora il Polya *"L'illusione è immaginare le belle cose che non si hanno. La gente dice che l'illusione è un male. Non credetelo, questo è uno di quegli errori generalmente accettati. L'illusione può essere un male, come è male troppo sale nella minestra e perfino un po' d'aglio è male nella torta di cioccolata. Voglio dire che l'illusione può essere un male se ce n'è troppa o al posto sbagliato, ma è un bene in sé e può essere di grande aiuto nella vita e nel risolvere i problemi"*

4. Dividere il problema in parti che sappiamo affrontare. Trovare insomma sottoproblemi.

5. Non aver paura di sbagliare, procedere con uno dei metodi più classici in matematica e nelle scienze: *per tentativi ed errori*, incoraggiando l'uso intelligente delle approssimazioni successive per la soluzione di problemi, tenendo in ogni caso sempre come punto di riferimento importante che

il calcolo algebrico e diretto, come pure la sistematizzazione dei saperi, è più efficiente delle successive approssimazioni.

Queste sono indicazioni di carattere generale, ma che devono essere esplicitate agli alunni e tenute a mente nella risoluzione di problemi, e affiancate alle tecniche di risoluzione che esistono.

3.5 TECNICHE DI RISOLUZIONE DI PROBLEMI

Descartes, tra tutti, progettò di presentare un metodo universale per la risoluzione di problemi costituito da questi tre passi: 1. ridurre ogni problema ad un problema matematico, 2. ridurre ogni problema matematico ad un problema algebrico, 3. ridurre ogni problema algebrico alla soluzione di una equazione.

Cartesio stesso, per primo, si rese conto come tale schema sia a volte inutilizzabile. È certo che fosse alquanto pretenzioso da parte di uno schema di questo tipo quello di voler essere universale, trattandosi di uno schema troppo spoglio e in grado di prendersi in carico un ristretto numero di tipologie di problemi, per lo meno se visto in un ottica di tipo formativo, ossia insegnare ai ragazzi a diventare buoni risolutori di problemi. Trovo anzi che il fatto di trovare uno scema generale vada contro il principio stesso di abilità nel risolvere problemi, che non può ridursi all'applicazione di un metodo quanto all'integrazione creativa di una serie di strumenti.

Innanzitutto va chiarito esplicitamente che in ogni problema che affrontiamo, di qualsiasi tipo esso sia, ci sono degli elementi chiave, che sono:

- Le risorse iniziali, i punti di partenza,
- L'obiettivo,
- Le strategie, le modalità, le relazioni che legano i primi ai secondi, la *condizione* o le condizioni da rispettare per arrivare dalle prime al secondo.

Si sono chiamati con questi termini i tre elementi chiave di un problema per dare l'accezione più generale possibile ad essi. Ma si chiarirà subito agli studenti che parlando di *risorse* si intendono i DATI e QUELLO CHE SAPPIAMO su di essi, ossia tutti i teoremi, le proprietà che gli enti che trattiamo posseggono e che si studiano. Le risorse sono dunque il nostro punto di partenza, la nostra conoscenza.

L'obiettivo sono le INCOGNITE, quello che dobbiamo trovare, il punto in cui dobbiamo arrivare, cercando di vedere con chiarezza, in ordine conveniente, tutte le relazioni che devono intercorrere fra le incognite ed i dati, in rapporto alla CONDIZIONE.

Fasi propedeutiche alla risoluzione di un problema, che risultano in ogni caso indispensabili e debbono essere discusse con gli studenti sono:

- riconoscere in una situazione reale il problema matematico,
- la stesura di un eventuale testo del problema o la scrittura di quali sono i punti di partenza.

Questi sono due passaggi che hanno più a che fare con problemi di vita quotidiana. Spesso il problema, soprattutto a scuola, viene proposto già con un testo esplicito. Ci sono dei passi fondamentali che possono aiutare nella risoluzione di un problema. Si riportano di seguito quelle che sono ritenuti i più significativi:

1. L'analisi dettagliata del testo e la comprensione di ogni sua parte.
2. L'identificazione della richiesta posta dal problema, (*obiettivo*).
3. L'identificazione chiara dei dati, (*parte delle risorse*).
4. La strutturazione dei dati, il fatto di ordinarli secondo una schema mentale, il più utile possibile per quel tipo di problema: costruzione di tabelle, grafici e disegni, scrittura di considerazioni, diagrammi o schemi… la schematizzazione o rappresentazione dei dati non è univoca per tutti i problemi, anche se ci possono essere tipologie di problemi che possono essere schematizzati in maniera simile e soprattutto tipologie di risolutori che prediligono determinati tipi di schematizzazione. Questo punto è molto importante e se fatto in maniera corretta può aiutare molto a trovare una soluzione. Gli strumenti (tabelle, rappresentazioni…) dovranno essere indagate nei problemi che via via si presenteranno.
5. La scelta dell'incognita o delle incognite per la scrittura dell'equazione o delle equazioni. In genere può essere conveniente prendere come incognita quello che chiede il problema.
6. L'analisi delle connessioni tra i dati (*condizione*) e la scrittura coerente a queste delle equazioni o delle formule risolutrici. Questa spesso è la fase più critica assieme alla rappresentazione e schematizzazione dei dati. Qui spesso interviene la tecnica di individuazione e scomposizione in sottoproblemi che si è in grado risolvere.
7. La risoluzione delle equazioni o dell'equazione del problema o del sottoproblema.
8. La valutazione della soluzione per la verifica dell'accettabilità, o interpretazione del significato di una certa soluzione.
9. L'organizzazione del lavoro fatto e l'argomentazione dei risultati e del processo di risoluzione.

Possono anche poi essere svolti processi di tipo metacognitivo quali la *valutazione della validità delle strategia utilizzata*, per poterla inserire all'interno delle nostre conoscenze o per completarle.

Tra le tecniche utilizzabili nel passo 6 ce ne sono due che meritano un a particolare nota: il metodo *Top-Down* e il metodo *Bottom-Up*. Esistono vari altri metodi, legati in particolare alle varie tipologie di problemi o ai metodi di rappresentazione dei dati, o determinati dalle modalità con le quali si vogliono comunicare i dati una volta ottenuti, o anche proprio a che cosa si vuole comunicare. È certo che i due metodi qui presentati sono di primaria importanza ed è bene parlare di questi agli alunni.

3.5.1 BOTTOM-UP

L'idea di base è semplicemente quella di partire dai dati che si hanno per arrivare alla soluzione. Organizzare i dati ricercando tra le *"cose che sappiamo"*, utilizzando le proprietà che conosciamo, cercando di risalire verso la soluzione: Partendo dai dati e dalle conoscenze che si hanno, cioè dallo studio della teoria che si è fatto, si devono mettere insieme i dati e, appunto, la teoria. Scrivere con i dati che si hanno tutte le formule che conosciamo, o meglio quelle che crediamo siano le più utili in quel tipo di problema. In ogni formula ci mancherà un dato o più. Se ce ne manca solo uno possiamo trovarlo (o con quella formula o con quella inversa), se ce ne mancano di più proviamo a vedere se ci sono altre formule che ce lo possono dare. Si dovrà dunque ***ragionare sulle formule*** che si possono usare a seconda dei dati che si hanno. Cercare di convergere verso la soluzione, ossia trovare alla fine una formula che dia quello che ci era stato richiesto e in cui conosco i valori di tutte le altre grandezze.

3.5.2 TOP-DOWN

L'idea è quella di partire da ciò che devo trovare dalla soluzione *(che non ho)* e cercare di scrivere equazioni che mi possono dare il risultato e mano a mano cercare le quantità che mi mancano all'indietro, cioè sfruttando le conoscenze che ho, trovando il modo per calcolare le quantità che mi mancano e che mi portano alla soluzione. Si deve avere sempre un occhio alla soluzione e uno ai dati per trovare la strada che conduce dall'una agli altri. Anche in questo caso la teoria ed il ragionamento sono essenziali al processo.

In genere questi metodi funzionano molto bene *anche* con problemi di fisica e vorrei qui riportare una possibile proposta di schema di risoluzione per un problema che si può fornire anche ai ragazzi. Soprattutto al liceo trovo formativo il fatto di riferirsi *anche* a problemi di fisica per sviluppare alcune tematiche.

1. Leggere ***bene il testo***, con l'obbligo di capire tutto quello che c'è scritto. Se non si capisce qualcosa non si deve andare avanti a leggere. In questa fase si possono ***scrivere i dati*** e la ***richiesta*** del problema. Se ci sono più richieste trovare un risultato alla volta, dividere il problema.
2. Se necessario fare uno schema del problema, disegnare quello che mi aiuta, disegnare quello che devo trovare.
3. Scrivere le formule che conosciamo e che ci danno il risultato. *Ragionare sulle formule* che si possono usare a seconda dei dati che abbiamo (per vedere quali usare).
4. Controllare se nella formula che si è scritta si hanno tutti i valori (se li dà il testo del problema) di tutte le altre grandezze della formula (oltre al risultato che si deve trovare e che ovviamente non abbiamo).
5. Per i valori che non si hanno cercare altre formule con cui si potrebbero trovare tali valori. Non si possono usare (rischio la circolare autoreferenzialità del metodo) le stesse formule che ho già usato.
6. Fare lo stesso ragionamento del punto 4: se si hanno a disposizione tutti i termini della formula allora la si userà, altrimenti si andrà avanti a cercare altre formule finché non si arriverà a dover utilizzare solo i dati che il problema mette a disposizione.
7. Quando si hanno formule in cui si possono usare i dati, si applicano e, tornando verso l'alto con le formule che si sono già scritte si risale verso il risultato.

Si vede come questo schema sia di tipo ricorsivo nei punti dal 4 al 6.

3.6 CONCLUSIONE DELLA SEZIONE

È certo in ogni caso che nonostante tutte le tecniche che si hanno a disposizione, e che si sono volute qui indicare, la risoluzione di problemi è, come detto dall'inizio, un attività che dovrà sempre poggiare e far riferimento anche all'intuizione, alla creatività, alla fantasia, intese sia come capacità di far collegamenti all'interno del nostro schema logico e interpretativo (collegamenti che avverranno all'interno del nostro cervello) e sia come capacità di concepire qualcosa di nuovo. Questa attività rende conto di una grandissima possibilità del potenziale umano, da valorizzare negli studenti, in un ottica di sviluppo e progresso umano verso i veri significati della vita, che tenga conto della collettività e del servizio ad essa.

Nella risoluzione dei problemi mentre si tiene un occhio aperto a tutte le possibilità l'altro ne valuta in modo approfondito una in particolare, utilizzando varie tecniche: considerando il problema come già risolto, costruendo schemi in cui incognite e dati siano riuniti in modo appropriato, cercando di rispettare ciò che è richiesto dalla condizione. Si deve cercare di trovare indizi famigliari nel problema, di riferirsi a qualche conoscenza pertinente: una breccia che porti alla soluzione. L'idea brillante viene da questo tipo di impostazione, valutando un po' "tutto insieme", considerando contemporaneamente sia nel suo complesso che nelle sue parti il problema, aspettando l'illuminazione.

Interessante poi è dare il senso agli alunni di come il processo di risoluzione di problemi non sia un processo lineare (esattamente come non lo è la stesura di questa tesi!!! Che sto affrontando come la modalità per la risoluzione del problema di superare l'esame di stato SSIS). Alla fine la soluzione sembrerà una sequenza ordinata di passi attraverso i quali si passa da dei dati alla soluzione, ma di fatto nel risolvere il problema la sequenza non è stata affatto così ordinata e sequenziale. Si salterà molto spesso da una parte all'altra, aggiustando qua o là un passaggio, un paragrafo, finché non si arriva alla forma finale. Questo è un altro processo tipico che avviene in tutti i processi creativi, a partire dalla musica fino ad arrivare alla scultura, alla pittura, alla scrittura, invadendo la risoluzione dei problemi e molte altre avventure del pensiero umano.

CAPITOLO 4

4. PROPOSTA DI UN PERCORSO DIDATTICO CON APPROCCIO AL PROBLEM SOLVING

In questa sezione verrà fatto un esempio concreto di come una tematica può essere affrontata attraverso il problem solving, proponendo un percorso che si sviluppa attraverso varie attività.

4.1 DESTINATARI DEL MODULO

Il modulo è stato pensato come indirizzato ad una classe seconda di un istituto tecnico industriale, nel secondo semestre. Lo stesso argomento svolto in questo modo può in ogni caso essere proposto anche ad un qualsiasi altro istituto tecnico o ad un liceo.

4.2 ABILITÀ INTERESSATE

Riconoscere situazioni problematiche affrontabili con metodi matematici analoghi: riconoscere fenomeni riconducibili ad uno stesso modello matematico ai fini di attività di interpretazione o di previsione. Porsi problemi aperti ed esplicitare le possibilità che esistano formalizzazioni matematiche diverse di uno stesso problema. Intuire modelli, trovare collegamenti, attivare ciò che già si conosce, applicare metodi e tecniche di calcolo.

4.3 PREREQUISITI

I prerequisiti indispensabili per affrontare un tale tipo di percorso sono:

- Concetto di soluzione di una equazione,
- Concetto di radice di un polinomio,
- Principi di equivalenza delle equazioni,
- Sapere come si risolve un equazione di primo grado e saperne interpretare le soluzioni,
- Metodi e tecniche di risoluzione dei problemi, visti nel capitolo 3,
- Concetto di parametro,
- Utilizzo dei diagrammi a blocchi, e del linguaggio di programmazione di progetto,
- Pascal nelle sue istruzioni di base fino all'istruzione *if*.

4.4 OBIETTIVI

In questo modulo gli obiettivi didattici sono legati a tutti i concetti inerenti la risoluzione di equazioni di secondo grado, numeriche o parametriche, intere o frazionarie. Si vedranno i concetti di formula risolutrice di un equazione di secondo grado e alcuni collegamenti con argomenti già trattati come le radici di un polinomio e la scomposizione del polinomio stesso.

A livello formativo gli obiettivi sono quelli di sperimentare le tecniche di problem solving viste nel capitolo 3 ed un ampliamento delle capacità di problem solving.

4.5 PERCORSO DIDATTICO PROPOSTO: LE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Verranno qui dettagliate le varie lezioni che si possono proporre in classe per affrontare l'argomento scelto. Si vedrà come per alcuni aspetti il percorso appare non convenzionale, e si ritiene interessante una sua sperimentazione.

Lezione 1: Problemi da risolvere con un equazione di secondo grado – 1 ora

Nella prima lezione si proporrà agli studenti lo studio e la risoluzione di tale problema:

> *Da una striscia metallica di larghezza di 1 m si vuole ottenere, ripiegandone i bordi, una grondaia di sezione rettangolare di area 1200 cm^2. Calcolare la misura della larghezza dei bordi da ripiegare.*

Gli alunni dovranno essere divisi in gruppi di 4 persone e dovranno analizzare i dati e tradurli in forma matematica per trovare un "modello" che possa risolvere il problema.

Il problema iniziale ovviamente è molto semplice ma porta alla scrittura di una equazione di secondo grado per poter essere risolto.

Non sarà richiesto di risolvere l'equazione, dato che gli studenti non sanno risolvere un equazione di secondo grado.

In questo modo da un problema pratico si arriva a necessitare di uno strumento matematico: la risoluzione di equazioni di secondo grado, che si potrà così affrontare con occhi diversi da parte degli studenti.

Si prevede che gli studenti di un ipotetica classe abituata a questo tipo di attività in mezz'ora riesca a venire a capo del problema (considerando anche il tempo di organizzazione dei gruppi, per banchi vicini, di attribuzione dei compiti, ecc…).

Nella seconda parte di lezione si delineerà come tale equazione può essere risolta, completando il quadrato e trovando le soluzioni per quello specifico caso numerico.

Alla fine si faranno commentare i risultati agli alunni e insieme si trarranno delle conclusioni sul metodo e sui risultati.

Con il tempo rimanente a lezione o con la consegna di fare ***per casa*** gli esercizi si proporranno anche questi due problemi che si chiederà di risolvere numericamente con lo stesso metodo utilizzato in classe (completamento del quadrato):

- ✓ *Trovare l'età di una persona sapendo che fra due anni la sua età sarà uguale al quadrato della quarta parte dell'età che aveva tra anni fa.*

- ✓ *Utilizzando 240 m di filo spinato si vuole recintare un appezzamento di terreno, di forma rettangolare, della superficie di 3.200 m^2. Quali dimensioni dovrà avere tale appezzamento?*

Lezione 2: La risoluzione dell'equazione di secondo grado – 1ora

In questa lezione verrà trattato il caso generale di risoluzione di un equazione di secondo grado.

Si studierà l'equazione generale:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

e si faranno vedere tutti i passaggi formali che portano alla determinazione di $x_{1,2}$.

Si farà la discussione in merito al discriminante e all'esistenza o meno di radici reali.

Questo lavoro porta ad una sistematizzazione del lavoro fatto nella lezione precedente, trovando la regola generale.

Questa lezione sarà di tipo frontale in quanto si ritiene che in questa fase si debbano dare dei riferimenti chiari e precisi, che potrebbero essere fraintesi nel caso in cui la lezione fosse di tipo maieutico-partecipata [12]. Lo scopo di questa unità non è infatti quello di allenare gli alunni a cercare una regola generale (attività che sarà eventualmente oggetto di altre unità didattiche) ma punta sulla capacità di problem solving. La generalizzazione viene dunque fatta ad opera del docente.

Una lezione partecipata in questa fase potrebbe creare problemi, nella convinzione che nello stile di insegnamento a domanda-risposta "*i contributi degli alunni alle interazioni collettive sono marginali e inerenti i più piccoli pezzi della trattazione in riferimento a tutto l'insieme. Inoltre gli interventi sono svolti in genere da pochi individui, che non riescono a spiegare in maniera chiara ai compagni che cosa vogliono dire, inoltre i compagni più in difficoltà in genere non riescono a distinguere gli interventi corretti da quelli scorretti, gli interventi rilevanti da quelli inutili, creando in loro una percezione confusa dell'argomento*" [12].

Saranno svolti poi alcuni esercizi di risoluzione di equazioni di secondo grado, sempre da parte del professore.

Gli esercizi saranno i seguenti:

- ✓ $\sqrt{2}x^2 - \left(2\sqrt{2}+1\right)x + 1 = 0$
- ✓ $\left(x-\sqrt{2}\right)^2 + \sqrt{2}(2x+1) - x - 4 = 0$

Si parlerà a questo punto della possibilità di avere il coefficiente b nella forma 2β e si ricaverà la formula del $\Delta/4$ e delle soluzioni con l'applicazione di questo.

Si daranno ***per casa*** esercizi di risoluzione di equazioni di secondo grado con il Δ ed il $\Delta/4$.

Lezione 3: Un altro problema risolubile con le equazioni di secondo grado – 1 ora

In questa lezione si farà un lavoro di gruppo per la risoluzione del seguente problema:

> *Un capitale di 10.000 euro viene depositato in banca. Dopo un anno gli interessi maturati non vengono ritirati, ma lasciati sul conto corrente, ed il tasso di interesse viene aumentato di un punto percentuale. Allo scadere del secondo anno il capitale risulta di 11.772 euro. Determinare i tassi di interesse praticati.*

Il docente porterà a lezione un vocabolario, o il volume di un enciclopedia, di cui i ragazzi potranno disporre, che conterrà una definizione dettagliata di tasso di interesse, contenente eventualmente una formulazione matematica e delle spiegazioni in merito al tasso di interesse.

Si inviteranno gli studenti ad utilizzare delle tecniche che si sono viste per la risoluzione dei problemi, a trovare un modello che risolva il problema, ed eventualmente ad interpretare i risultati. Interessante sarà far notare agli alunni, nel girare tra i banchi da parte del professore, come si possa facilmente venire a capo della difficoltà di determinare quale sia l'interesse guadagnato *facendo finta di avere già la soluzione*: se ad esempio l'interesse fosse del 3% quanto sarebbe l'interesse dopo il primo anno? Come è stato calcolato?

La lezione si chiuderà vedendo assieme ad un esponente di uno dei gruppi che ha risolto l'esercizio come è stato risolto e commentando i risultati. Se nessun gruppo è arrivato alla fine l'esercizio verrà svolto dal docente alla lavagna.

Lezione 4: Laboratorio di matematica – 2 ore

In questa lezione si cercherà di scrivere un algoritmo per la soluzione di un equazione di secondo grado e di tradurla in un linguaggio di programmazione appropriato: ad esempio Pascal.

La prima fase della lezione di laboratorio sarà dedicata allo studio della possibile implementazione dell'algoritmo per la risoluzione dell'equazione di secondo grado, giungendo insieme allo schema riportato in figura 5

Nella seconda parte, in laboratorio ed ognuno con il proprio PC, ogni studente dovrà scrivere il codice per la risoluzione dell'algoritmo.

In alternativa al linguaggio Pascal si potrebbe pensare di svolgere una lezione di questo tipo: nella lezione precedente il professore avrà chiesto quanti degli alunni posseggono una calcolatrice programmabile e inviterà questi a portare il libretto d'istruzione della loro calcolatrice. Dopo aver insieme individuato il diagramma a blocchi di figura 5 si proporrà ai ragazzi il seguente problema:

> *Divisi per gruppi, e con una calcolatrice programmabile per gruppo, con l'ausilio del libretto delle istruzioni della calcolatrice scrivere, nella calcolatrice stessa, il programma che implementi (nel modo migliore possibile) l'algoritmo di figura 5.*

Da dire che per risolvere tale problema i ragazzi si troveranno ad utilizzare risorse (calcolatrice e suo libretto delle istruzioni, schema trovato per l'algoritmo risolutore, ecc) e dovranno fare delle scelte in merito a come implementare l'algoritmo. Molte calcolatrici (se non le più moderne) infatti non permettono di dare in output frasi come: *"non ci sono soluzioni"*, così dovranno decidere che output assegnare in quei casi.

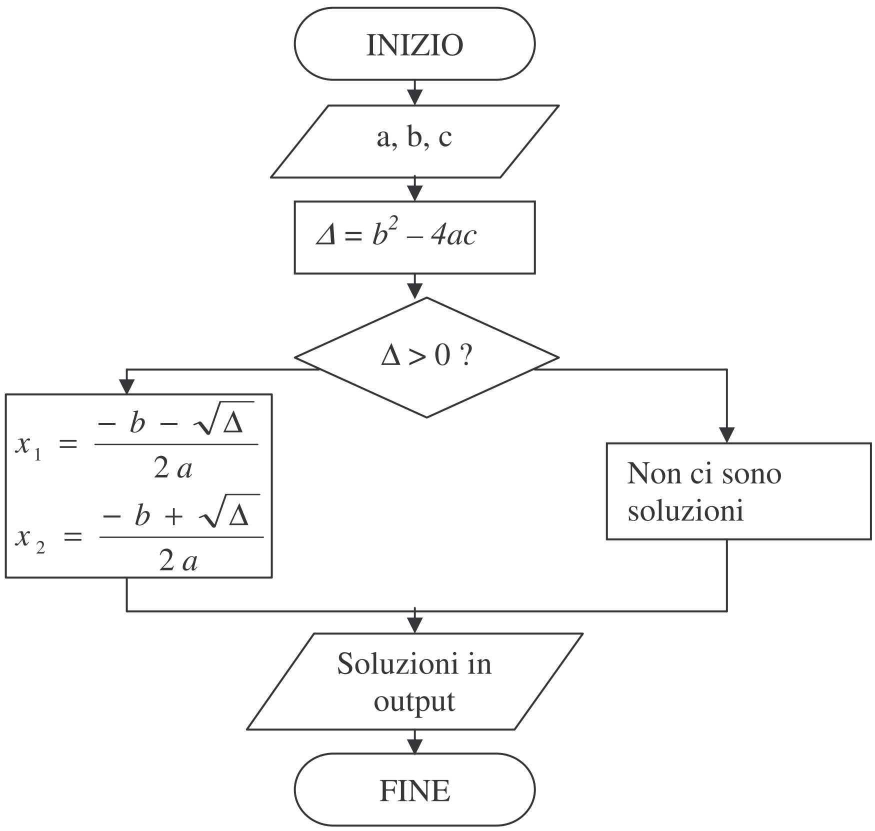


Figura 5: diagramma di flusso dell'algoritmo di soluzione di un equazione di secondo grado

Lezione 5: **Laboratorio di matematica – 1ora**

In questa lezione si prevede di concludere il lavoro della lezione precedente. Non si ritiene che in due ore gli alunni possano concludere il lavoro pianificato nella lezione 4.

Lezione 6: **Equazioni di secondo grado fratte - Esercizi – 1 ora**

In questa lezione saranno trattate le equazioni di secondo grado fratte, si farà un introduzione rapida di tipo teorico ma poi si passerà alla risoluzione di equazioni tratte dal libro di testo. Lo scopo principale, oltre che discutere il campo di esistenza per le equazioni fratte, cosa con la quale peraltro gli studenti hanno già famigliarità, sarà fissare le idee in riferimento alle formule risolutive per le equazioni di secondo grado fin qui trovate. Di tale lezione non servono ulteriori dettagli dato che sarà una lezione frontale standard con risoluzione di equazioni. Si potrà per la seconda parte della lezione chiamare qualcuno alla lavagna a svolgere alcuni esercizi.

Lezione 7: **Le equazioni parametriche di secondo grado – 2 ore**

In questa lezione si affronteranno le equazioni parametriche di secondo grado. La lezione però partirà dall'analisi del lavoro fatto in laboratorio.

Analizzando l'algoritmo di risoluzione dell'equazione di secondo grado ci si rende conto di come è stato necessario prendere in considerazione tutti i possibili casi per *a, b* e *c,* ed in particolare dei valori risultanti del Δ.

Lo studio delle equazioni parametriche ha infatti, a mio avviso, l'applicazione più naturale, per gli studenti con cui ci si trova oggi a lavorare, nell'applicazione degli algoritmi in informatica. Gli algoritmi infatti hanno la prerogativa di dover prendere in considerazione tutti i casi possibili per i parametri per dare risposte diverse.

Il concetto della risoluzione di equazioni parametriche è esattamente lo stesso. Si tratta qui dunque di reinterpretare un argomento in chiave moderna, ed esempio di filtro didattico.

Con tale argomentazione si inizierà la lezione, facendo apprezzare esplicitamente agli alunni il legame tra programmazione ed equazioni parametriche, proseguendo poi con lo studio delle parametriche. Si faranno gli esercizi alla lavagna seguenti:

- ✓ $x^2 - 3a\sqrt{a}x + 2a^3 = 0$
- ✓ $\frac{k+1}{k}x^2 - 2x = \frac{25+15k}{k}$
- ✓ $\frac{x-b}{x+a} - \frac{x-a}{x+b} = \frac{a-b}{2a}$

Con l'ultima equazione si vedrà in particolare il caso di equazione con più di un parametro.

Lezione 8: Legame tra soluzioni di equazioni e scomposizione di un polinomio – 1 ora + 1 ora

Il legame tra le radici di un polinomio, la sua conseguente scomposizione e le soluzioni dell'equazione associata dovrebbe essere già patrimonio degli studenti, ma non sempre arrivati a questo punto del curricolo il legame appare loro così automatico. Far indagare loro il legame esistente è indubbiamente formativo.

Si inizierà la lezione invitando i ragazzi a scomporre il trinomio particolare:

$x^2 - 3x + 2$

ossia cercando due numeri che diano come somma 3 e prodotto 2.

Si risolverà poi l'equazione associata.

Prima parte:

Si consegnerà una scheda agli studenti da completare che chiederà di rispondere ad alcune domande:

- ✓ Che legame c'è tra la fattorizzazione di un polinomio le soluzioni di un equazione di secondo grado in cui $a = 1$?
- ✓ Che legame c'è tra le soluzioni di un equazione di secondo grado del tipo $x^2 +bx + c = 0$ e i coefficienti b e c? Per rispondere aiutati con l'esempio numerico visto.
- ✓ Considerando l'equazione completa $ax^2 +bx + c = 0$ come potresti fare in modo di ricondurti al caso precedente?
- ✓ Come puoi fattorizzare il polinomio $ax^2 +bx + c$? Cosa succede se raccogli il termine a?
- ✓ Ti aspettavi un legame di questo tipo?

Seconda parte:

Svolgi i calcoli della seguente scrittura e risolvi poi con la formula risolutiva (con il Δ) l'equazione di secondo grado corrispondente:

$a(x - f)(x - g) = 0$

- ✓ Quali sono le soluzioni della equazione?
- ✓ Cosa puoi dire dei coefficienti b e c dell'equazione che ne risulta?
- ✓ Ti aspettavi questo risultato? Perché?

Vedere il legame che si sta trattando sia con il processo diretto *(prima parte)* che quello in quello inverso *(seconda parte)* è indubbiamente formativo e rende molto chiaro a mio avviso agli alunni che cosa si vuole ottenere con tale lavoro.

La lezione continuerà vedendo insieme i risultati ottenuti e sistematizzandoli, passando a parlare dell'equazione scritta nella forma:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0, \qquad \text{ossia} \qquad x^2 - sx + p = 0$$

e facendo alcuni esercizi in merito.
Scomporre il seguente trinomio in fattori di primo grado:

- ✓ $m^2x^2 + (1-\sqrt{3})mnx - \sqrt{3}n^2$

Semplificare la seguente scrittura, valutando tutte le conseguenze:

- ✓ $\dfrac{x^2 - ax(\sqrt{3}-\sqrt{2}) - a^2\sqrt{6}}{x^2 - 2a}$

CONCLUSIONI

Risolvere problemi è un attività che obbliga a mettersi in gioco, obbliga chi si accinge a risolvere il problema a mettersi in una disposizione mentale per la quale accetta in partenza la possibilità di sbagliare. L'insegnante deve essere il primo ad accettare questa possibilità e deve trasmettere questa convinzione anche agli alunni. Solo per questo l'attività di problem solving è un attività formativa, ma legato a questo va indubbiamente associata la competenza di problem solving oggi molto richiesta sia a livello sociale che lavorativo.

È da dire che nella mia esperienza personale di insegnamento l'approccio per problemi agli argomenti, che abbiano anche un attinenza con realtà pratiche, è sempre risultata di gran lunga più motivante rispetto ad un approccio per i quale non si danno riferimenti ai ragazzi se non di carattere teorico, ossia per il quale gli argomenti vengono presentati come fini a se stessi, quasi a nascere e morire solo come tecniche di calcolo, tecniche per ricavare questo o quel risultato partendo da una situazione iniziale quasi fittizia, artificiale, costituita ad esempio da un sistema o da un equazione di cui non si conosce la provenienza quasi fosse nata solo dal libro di testo e per questo costruita ad hoc. Questo peraltro era uno degli assiomi che si erano presi all'inizio della tesina, ossia che la motivazione fosse proporzionale alla possibilità di trovare riscontri anche pratici da parte degli argomenti trattati.

Un attività di questo tipo sarà in grado di formare non solo competenze di tipo applicativo o tecnico negli alunni, ma sarà in grado di dar loro una consapevolezza maggiore. Servirà a formare un aspetto importante della loro persona, contribuirà alla formazione del loro carattere, scopo principale da perseguire nella scuola. I principi visti nella stesura di questa tesi possono essere ampliati ed applicati nella vita di tutti i giorni non solo in campo matematico, e qui sta la potenzialità di tali insegnamenti di cui si deve, a mio avviso, essere coscienti. Ad esempio l'attitudine mentale di considerare il problema come già risolto può essere un punto di partenza per arrivare a considerare principi quali l'immaginare un impresa come già realizzata, immaginarsi il punto d'arrivo, immaginare la persona che saremo nel momento in cui raggiungeremo la meta. Questa è una tecnica utilizzata da tutti i grandi uomini nel momento in cui si sono posti obiettivi e, anche se esula dall'insegnamento classico della matematica a mio avviso non si deve aver paura di parlare anche di questioni simili nella prospettiva che la scuola debba formare uomini.

Ci sono anche molte altre attitudini e virtù che possono essere indagate e allenate attraverso il problem solving, come ad esempio il fatto di non arrendersi, affrontando i fallimenti, o la pazienza ossia la capacità di non precipitarsi subito a voler la soluzione, mantenendo sotto controllo l'ansia che vorrebbe che ci fosse già la soluzione pronta, senza dimenticare quello che già è stato scritto in merito allo sviluppo della creatività.

Altri elementi come ad esempio l'organizzazione delle risorse per ottenere risultati o l'atteggiamento propositivo nei confronti delle sfide o delle situazioni di crisi sono qualità di leadership molto utili a livello personale e sempre più richieste dalla nostra società.

È certo che questi atteggiamenti non potranno essere messi in rilievo in maniera esplicita, ma rimarranno in ogni caso come dei semi piantati nelle menti degli alunni, argomenti sui quali essi potranno riflettere arrivando ad essere persone in grado di svilupparsi e crescere nel modo più competo possibile.

BIBLIOGRAFIA

1. MATEMATICA 2003: *Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica* – UMI 2003
2. C. Melis, L. Nuvoli, G. Orrù E. Uselli: *la valutazione di un problema di ottimizzazione* – L'educazione Matematica
3. S. Contarini: *Relazione di Tirocinio del secondo anno* – VI Ciclo SSIS.
4. Rapporto regionale OCSE PISA 2003: *Gli studenti quindicenni nel Veneto: quali competenze?* – Ufficio regionale scolastico per il Veneto, Direzione Centrale.
5. G. Polya: *La scoperta matematica* – Fuori Edizione
6. Mahavakya On: *Leadership, libro per giovani, genitori, insegnanti* – Milesi Edizioni
7. Descartes: *Euvres* – Discours de la Méthode
8. N. Dodero, P. Barboncini, R. Manfredi: *Lineamenti di Matematica per il biennio delle scuole superiori* - Ghisetti e Corvi Editore
9. Circolare Ministeriale 6 febbraio 1991 n.24 Oggetto Piano nazionale per l'introduzione dell'informatica nella scuola secondaria superiore. Innovazione dei programmi di Matematica e Fisica nei bienni e nei trienni Anno scolastico 1991-92
10. B. D'Amore: *Elementi di Didattica della Matematica* - Pitagora Editrice
11. P. Poli, R. Zan: *Il ruolo delle convinzioni nella risoluzione di problemi* - La Matematica e la sua Didattica n.4 1996
12. H. Maier: *Apprendimento della matematica. Difficoltà e modalità per superarle.*
13. Elisa Gabrielli: *un esperimento di insegnamento della matematica in una seconda classe di liceo scientifico: grandezze e loro misura, proporzioni ed applicazioni, figure simili e proprietà* – Tesi di abilitazione all'insegnamento secondario – 2003