Scuola Interuniversitaria Lombarda di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario – Sezione di Milano

VII Ciclo – Indirizzo Fisico-Informatico-Matematico
Classe di abilitazione 47 – Matematica

Analisi probabilistica di giochi

Relatore-Tutor: Prof. Bruno BETRÒ
Supervisore: Prof.ssa Nadia MORETTI

Relazione Finale di Tirocinio di:
Domenico Roberto IANNIZZI
Matricola: Y03596

SOMMARIO

Introduzione

Il lavoro qui presentato è il frutto dell'attività di tirocinio da me svolta, nell'ambito della Scuola Interuniversitaria Lombarda per l'Insegnamento Secondario - Sezione di Milano (SILSIS-MI), presso il Liceo Scientifico Statale "Bertrand Russell" di Milano, classe V B (bilingue). Tale attività consiste in un'esperienza attiva di insegnamento riguardante l'introduzione al Calcolo delle Probabilità utilizzato per analizzare le situazioni di incertezza, in particolare i giochi cosiddetti d'azzardo.
L'idea di proporre tale argomento è scaturita, dopo un'attenta attività di osservazione della classe, dalla programmazione curriculare, dal contesto scolastico ed anche da un giusto confronto con l'insegnante accogliente grazie alla splendida esperienza di grande collaborazione dovuta alla sua disponibilità e in particolare al suo metodo di insegnamento: dialogico comunicativo attraverso il quale discutere e proporre problemi da risolvere come casi di studio, metodologia che ho adottato durante il mio intervento attivo.
L'argomento è stato poi realmente preso in considerazione insieme all'insegnante accogliente a seguito dell'indagine sulla tendenza rispetto alla scelta universitaria: Economia e Commercio, Scienze della Comunicazione, e in generale facoltà che prevedono un corso introduttivo al Calcolo delle Probabilità già al I anno, al fine di fornire un'adeguata panoramica dell'argomento che spesso, per mancanza di tempo, viene un po' trascurato nel programma curriculare, stimolando anche la curiosità degli allievi in proposito.
Lo sviluppo del progetto è stato articolato in 5 ore di incontri[1] durante i quali sono stati affrontati anche degli esempi proposti come esercizi/problemi da risolvere inerenti agli argomenti trattati durante la lezione. Al termine della prima lezione ho fornito agli studenti gli appunti della stessa con i relativi esercizi e l'analogo per la lezione successiva. Dalla seconda lezione in poi ho fornito alla fine di ogni intervento le dispense[2] relative alla successiva lezione. Abbiamo adottato questa strategia per verificare il livello di attenzione alla prima lezione e per fornire, a più volenterosi, la possibilità di effettuare una lettura individuale prima della spiegazione in modo che gli studenti potessero testare la propria capacità di comprensione di un testo scritto. Questa metodologia ha stimolato, in quasi tutti gli allievi, la curiosità di effettuare questa pre-lettura. Le lezioni sono, quindi, state sempre più partecipate e più scorrevoli.
Alla fine, per verificare l'apprendimento dei concetti fondamentali (calcolo combinatorio, probabilità condizionata ed indipendenza e legge dei grandi numeri), è stata somministrata una prova sotto forma di test a risposta multipla (tempo concesso un'ora di lezione).
La verifica ha dato risultati mediamente discreti.

[1] La durata di un'ora di lezione è di 55 minuti.
[2] Le dispense con gli appunti e gli esercizi si trovano in Appendice A, le soluzioni degli esercizi in Appendice B.

Presentazione del contesto e analisi dell’esperienza di tirocinio

La classe V B è composta da 15 studenti contro i 14 dell’anno precedente e le dinamiche relazionali/comportamentali sostanzialmente non si sono modificate. La classe si dimostra collaborativa, anche se i risultati in matematica sono solo mediamente sufficienti. Si evidenziano tre allievi con particolare attitudine per la materia. Ad alcuni gioverebbe un maggior impegno di studio domestico, come mi conferma la docente accogliente. Il livello di attenzione in classe è buono e la lezione è sempre partecipata soprattutto grazie alle capacità coinvolgenti della docente accogliente che crea sempre un clima sereno. Durante le mie lezioni ho riscontrato proprio questi aspetti, infatti gli alunni si sono dimostrati attenti, propositivi e interessati all’argomento da me presentato, in particolare alcuni hanno sopperito con l’intuizione alle carenze di base.
La presenza in aula, in qualità di tirocinante, è stata per me di grande importanza, poiché mi ha consentito di tradurre in pratica le competenze apprese in via teorica. Ho avuto modo così di constatare quanta ricaduta positiva sull’intero sistema scolastico abbiano avuto le riforme varate dagli anni Settanta in poi perché è reale e palpabile un grande rispetto per l’alunno, posto al centro del sistema scolastico e considerato soggetto attivo dell’apprendimento, e l’insegnante ha il compito di stimolare e mettere in condizioni di studiare serenamente.
La sede del Liceo Scientifico Statale “Bertrand Russell”, situato nella zona di Niguarda a nord di Milano, è una struttura moderna, funzionale, che consente un facile accesso anche ai disabili motori, in cui sono presenti i laboratori di: Fisica, Informatica, Lingue, Scienze e Chimica. Il corpo docente è stabile e la scuola è molto attenta alle problematiche degli studenti e al rapporto scuola-famiglia. L’identità culturale del Liceo si fonda su un curriculum di studi che valorizza il sapere umanistico e insieme quello scientifico, integrato dalle sperimentazioni dell’informatica, della doppia lingua straniera e della sperimentazione di scienze a indirizzo biomedico. La scuola sostiene il progetto “Scuola in Ospedale” presso l‘ospedale di Niguarda a sostegno dei giovani degenti in età scolare ricoverati nel reparto “Unità Spinale”.
Sono stato personalmente coinvolto in questo progetto e ho effettuato un intervento con un ragazzo ricoverato (15 incontri). Ho vissuto questa esperienza all’inizio con un po’ apprensione ma poi con un grande coinvolgimento anche emotivo e spero di portarla avanti in futuro.

Prerequisiti

L’insegnante accogliente mi ha chiesto preventivamente, all’inizio dell’a.s. 2006-2007, di esplicitare quali fossero i prerequisiti necessari alla comprensione dell’argomento trattato durante il mio intervento attivo, assumendosi il compito di trattare in classe gli argomenti propedeutici senza alterare il programma curriculare in modo tale da poter integrare il più possibile le mie lezioni agli argomenti precedentemente svolti.
Dopo la presentazione dei seguenti prerequisiti:

- insiemistica: operazioni sugli insiemi e relative proprietà;
- logica: connettivi e relative proprietà, tavole di verità;
- calcolo algebrico;
- sviluppo della potenza di un binomio: Triangolo di Tartaglia;
- limiti di successioni;
- limiti di funzioni;
- studio di funzioni a variabile reale;
- avere la buona abitudine di usare prima la testa (intuito e ragionamento);
- essere capaci di stupirsi e aver voglia di capire di fronte a risultati non sempre intuitivi;

l’insegnante accogliente mi ha rassicurato riguardo alla conoscenza da parte degli studenti dei primi quattro prerequisiti, affrontati e studiati nei precedenti anni. Per quanto riguarda i limiti e lo studio di funzioni, invece mi ha detto che sarebbero stati argomenti del primo quadrimestre della quinta. Infine per quanto riguarda l’attitudine al ragionamento, la capacità e la voglia di confrontarsi con problematicità non del tutto intuitive mi ha confortato perché la classe è partecipe alle iniziative e al confronto. Quindi, dopo un attento e cordiale confronto, si è deciso di proporre il mio intervento tra la fine di gennaio e l’inizio febbraio 2007 e così è stato.

Contenuti: presentazione delle lezioni

Impariamo a contare (Lezione del 20 /01/2007 - I ora)

Obiettivi della lezione

- Introduzione al concetto di: esperimento aleatorio, evento e probabilità.
- Individuare la natura di un evento.
- Valutare le probabilità di un evento in base alla teoria classica.
- Conoscere la legge empirica del caso e le implicazioni di carattere applicativo a essa connesse.
- Valutare le probabilità di un evento in base alla teoria frequentista.
- Conoscere il significato di probabilità soggettiva.
- Capire le esigenze che portano alla formalizzazione di una teoria assiomatica della probabilità.
- Saper calcolare la probabilità: dell'evento contrario, unione di eventi.
- Riconoscere la natura dei raggruppamenti che si possono fare con *n* oggetti.
- Determinare il numero di permutazioni,disposizioni, combinazioni semplici o con ripetizioni.

Probabilità di eventi

La lezione è iniziata con la presentazione delle lezioni e con un'introduzione anche storica del concetto di probabilità.

Introduzione. Cos'è la probabilità?

- Eventi incerti → misura dell'incertezza.
- Calcolo delle Probabilità = teoria matematica dell'incertezza.
- Definizione di probabilità che ne rispecchi il significato intuitivo e allo stesso tempo sia "operativa" → dare regole di calcolo.

Cenni storici

- Calcolo delle probabilità sconosciuto al mondo antico per assenza metodo sperimentale.
- Rinascimento: Cardano (1526 ca) prima trattazione della probabilità: calcolo della probabilità della somma di tre dadi, problema ripreso poi da Galileo.
- Nascita del calcolo delle probabilità attribuita alla corrispondenza (1654) tra Pascal e Fermat.
- Interesse di Pascal attivato da un giocatore d'azzardo dell'epoca, de Mèrè, che lamentava discrepanza tra suoi calcoli e la frequenza dei risultati (a lui sfavorevole).
- Paternità di Pascal contestata, ma Pascal compie primi studi sistematici.
- Contrasto con impostazione di Cartesio, alla base del determinismo, ormai abbandonato dalla scienza moderna.
- Nato come teoria matematica dei giochi, il Calcolo delle probabilità crebbe progressivamente di importanza.
- Laplace (1812): "E' notevole il fatto che una scienza che è iniziata con l'analisi dei giochi d'azzardo dovesse essere elevata al rango dei più importanti oggetti della conoscenza umana."
- Grande sviluppo teorico nel XX secolo.
- Kolmogorov (1933): approccio assiomatico che ancora oggi ne costituisce il fondamento.

- Applicazioni del Calcolo delle probabilità oggi presenti in ogni ramo della scienza, nella tecnologia, nella finanza.
- Fine della visione newtoniana della fisica e avvento della fisica quantistica hanno dimostrato l'impossibilità di fare previsioni esatte in ogni circostanza: il principio di indeterminazione di Heisenberg (1927) afferma che non è possibile conoscere simultaneamente la posizione e la velocità di un dato oggetto con precisione arbitraria.
- Nel secolo XX grande sviluppo della Statistica, "braccio operativo", della probabilità: studia sostanzialmente come combinare le probabilità che misurano l'incertezza relativa ad un certo fenomeno con osservazioni sperimentali del fenomeno stesso.
- Modello probabilistico: modello matematico che descrive la realtà in modo approssimato (astrazione) e valido temporaneamente.

Eventi aleatori

Con esempi pratici ho introdotto i concetti di: *esperimento aleatorio*, *evento elementare* e *spazio campionario*, di cui, dopo, sono state date anche le definizioni[3].

Lanciando un dado non sappiamo a priori che numero uscirà, però sappiamo che i casi possibili sono 6 ("esce 1", "esce 2", ..) e in mancanza di altre informazioni, cioè supponendo che il dado non sia truccato, stimiamo che ognuno di questi casi abbia probabilità uguale a quella degli altri, perciò pari a 1/6.
Allo stesso modo se lanciamo una moneta i casi possibili sono due (testa, croce), ciascuno con probabilità 1/2.
Questi sono esempi di *esperimenti aleatori* (*casuali*), cioè esperimenti di cui non si conosce l'esito, che dipende dal "caso" ("aleatorio" significa "casuale" e deriva dal latino "alea" che significa "dado" ... ricordate Cesare quando diceva: "Alea iacta est"?).

Ho presentato ulteriori esempi di esperimenti aleatori, sottolineando che in tutti casi presentati non è noto l'esito, ma sappiamo quali sono i casi possibili e che impareremo a calcolare la probabilità di ciascuno di essi.

Mi è stata posta la seguente domanda: "Tra possibile e probabile c'è o non c'è differenza?" La domanda era plausibile perché ho usato entrambi i termini e di solito questi vengono adoperati nel linguaggio comune come sinonimi. Ho risposto che vi è differenza, infatti: "E' possibile che domani piova, ma non è probabile!"

Ho trattato solo il caso in cui lo spazio campionario è discreto, perché gli studenti non avevano ancora gli strumenti necessari per le difficoltà matematiche che presenta il caso continuo.

Ho evidenziato il fatto che i sottoinsiemi dello spazio campionario hanno un ruolo importante: certi sottoinsiemi hanno specifici significati dal punto di vista degli eventi (con la loro rappresentazione grafica attraverso i diagrammi di Eulero-Venn): *evento certo* , *evento impossibile* …

Prima di passare alla probabilità degli eventi è stato utile richiamare le proprietà delle operazioni unione, intersezione e complementare sugli insiemi.

---

[3] Definizioni, esempi, osservazioni, … di seguito citati sono stati richiamati in modo esplicito sia a lezione che nelle dispense, presenti in Appendice A e fornite agli studenti.

<u>Probabilità di eventi</u>

A questo punto ho cercato di portare la classe a pensare a una definizione intuitiva di probabilità.
La *probabilità* di un evento è un numero reale dell'intervallo [0,1], che esprime, misura, quanto riteniamo probabile il verificarsi di quell'evento. Ad esempio, se lanciamo una moneta, stimiamo che la probabilità che esca testa sia 0.5 = 1/2 (nel linguaggio comune si usa dirlo in percentuale: "la probabilità del 50%", cioè probabilità p = probabilità $100 \cdot p\%$).

Quindi ho detto che il *calcolo delle probabilità* è la branca della matematica che ci dice come si calcolano le probabilità di eventi "complessi", conoscendo già la probabilità di altri eventi "più semplici".

Prima di dare la definizione di probabilità, ho detto che bisogna rispondere ad alcune questioni:

1. come conoscere le probabilità degli eventi "più semplici"?
2. con quali regole si passa dalla probabilità di alcuni eventi a quella di altri? Che proprietà deve avere cioè la probabilità che assegno agli eventi?

Ho esposto alcune considerazioni tratte dal senso pratico, che, in linea di principio, molti di loro già conoscevano:

- la probabilità della totalità di tutti i casi possibili deve essere pari a 1: $P(\Omega) = 1$;
- la probabilità dell'insieme vuoto deve essere zero: $P(\varnothing) = 0$;
- se conosciamo la probabilità di A possiamo ricavare quella di A^c: $P(A^c) = 1 - P(A)$;
- se A e B sono disgiunti, $A \cap B = \varnothing$, conoscendo $P(A)$ e $P(B)$, ricaviamo $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
- e così possiamo andare avanti …

Ho dato la *definizione assiomatica di probabilità*, soffermandomi a chiarire che:

- *la probabilità è una funzione*.
- *gli eventi sono insiemi* e se ne può fare unione, intersezione, complementare, …
- *la probabilità di un evento è un numero reale* (fra 0 e 1), dunque le probabilità di eventi si possono sommare, sottrarre, …

Ho fatto osservare che se lo spazio è discreto, basta conoscere la probabilità degli eventi elementari per essere in grado di calcolare la probabilità di qualsiasi evento. Perciò <u>basta conoscere</u> $P(\{\omega_k\}) = p_k \quad k = 1, 2, \dots$, cioè le probabilità degli eventi elementari.

<u>Come assegnare le probabilità</u>

Dopo aver visto come si possono ricavare probabilità di eventi "più complicati" dalla conoscenza della probabilità di eventi "semplici", ho affrontato la questione del come vanno attribuite le probabilità degli eventi "semplici".
Ho ribadito che la scelta di queste probabilità deve soddisfare le proprietà matematiche viste, ma è un qualcosa che esula dalla matematica, coinvolgendo piuttosto le nostre valutazioni.
Ad esempio, se lancio un dado, siccome *noi riteniamo a priori* che ogni faccia abbia la stessa probabilità di uscire, *allora* attribuiamo probabilità pari a 1/6 all'uscita di un 6. Se però lanciassimo un dado 1000 volte e il 6 comparisse 250 volte, saremmo portati a pensare che il dado non è ben bilanciato e la probabilità che esca 6 è (vicina a) 1/4.
Ho affermato che queste due idee appena descritte (considerazioni di equiprobabilità oppure calcolo di una frequenza) sono alla base di due approcci: la *definizione classica* di probabilità e la *definizione frequentista*.

Ho dato le *definizioni classica* e *frequentista di probabilità*, facendo le seguenti importanti osservazioni:

- Sia Pascal che de Mèrè si aspettavano che, a lungo andare, la frequenza con cui un evento si verifica si stabilizzi sul valore della probabilità.
- Opinione comune, espressa nella cosiddetta legge empirica del caso "in una successione di prove fatte nelle stesse condizioni, la frequenza di un evento si avvicina alla probabilità dell'evento stesso e l'approssimazione tende a migliorare con l'aumento del numero delle prove ".
- Rovesciando l'impostazione classica, si arrivò alla definizione frequentista "la probabilità di un evento è il limite della frequenza (relativa) dei successi (cioè del verificarsi dell'evento), quando il numero delle prove tende all'infinito.
- Anche la definizione frequentista è "operativa", nel senso che fornisce una regola di calcolo (analoga a quella della definizione classica) delle probabilità in determinate circostanze.
- Nella definizione classica la scelta della probabilità degli eventi è fatta *a priori*, mentre nella definizione frequentista a *a posteriori*, dopo l'estrazione di un campione statistico.
- Il buon senso ci dice che *se il campione è abbastanza numeroso*, allora la frequenza relativa è abbastanza vicina alla probabilità "vera". Questo è un concetto che verrà precisato dalla *Legge dei grandi numeri*, su cui torneremo.

Per completezza ho dato anche la *definizione soggettiva*, facendo anche le seguenti osservazioni:
- Già accennata in Pascal, si può fare risalire a Daniele Bernoulli, ripresa nel '900 da Bruno de Finetti e Jimmy Savage: Probabilità è il grado di fiducia che una persona ha nel verificarsi dell'evento.
- Non è una caratteristica "intrinseca" dell'evento[4].
- Definizione "operativa": "La probabilità $P(A)$ di un evento A è il prezzo che un individuo ritiene equo pagare per ricevere 1 se l'evento si verifica e 0 se l'evento non si verifica. Le probabilità degli eventi devono essere attribuite in modo che non sia possibile ottenere con un insieme di scommesse una vincita certa o una perdita certa (*principio di coerenza o equità*)".
- La coerenza implica le solite regole della probabilità.

Calcolo combinatorio

Ho quindi affermato che, dalla definizione classica di probabilità come rapporto fra il numero di casi "favorevoli" ed il numero di casi possibili, ne segue che è importante *saper contare* i casi in questione, quindi per alcune situazioni "tipiche", come fare questo conteggio ce lo dice il *calcolo combinatorio*. Inoltre le dimostrazioni delle formule presentate non state fatte in modo formale (rimandando al libro di testo), per concentrarsi solo sulla comprensione dei termini tramite definizioni ed esempi, però ho presentato un principio che serve per ricavare le formule, principio che è utile anche in generale *Principio del prodotto di possibilità*.

Ho quindi dato le definizioni di permutazioni, disposizioni e combinazioni sia semplici che con ripetizione, osservando che:
- Nei problemi di conteggio la difficoltà spesso sarà nel capire quale di questi modelli si applica meglio.
- Ancora più attenti bisogna essere quando si tratta di calcolare le probabilità come $\frac{\text{n° casi favorevoli}}{\text{n° casi possibili}}$, quali casi sono equiprobabili?!

Alla fine della lezione ho riassunto in uno schema quanto detto relativamente al conteggio. Infine ho consegnato le dispense relative a ciò che ho spiegato e che avrei spiegato nel successivo incontro, assegnando alcuni esercizi per casa.

[4] Ho evidenziato questo aspetto sottolineando il fatto che la probabilità del verificarsi di un evento non è propria dell'evento e neppure inerente alla sua natura ma appunto come da definizione "operativa" data di seguito.

Modelli probabilistici

Probabilità condizionata e indipendenza (27 /01/2007 - I ora durata)

<u>Obiettivi della lezione</u>

- Conoscere il fondamentale concetto di probabilità condizionata.
- Conoscere la legge delle probabilità totali.
- Conoscere la formula di Bayes.
- Conoscere il fondamentale concetto indipendenza.
- Saper calcolare la probabilità dell'evento intersezione di eventi.

<u>Probabilità condizionata</u>

Ho iniziato la lezione chiedendo se avevano dei dubbi e delle domande su ciò che avevamo visto nella lezione precedente e sugli esercizi dati per casa. Le risposta è stata nel complesso affermativa, cioè che avevano capito abbastanza, in particolare un paio di studenti mi hanno detto che grazie alle dispense e anche agli esempi/esercizi visti in classe e presenti su quest'ultima sono riusciti a capire bene e a svolgere alcuni degli esercizi proposti per casa. Ho consegnato loro le soluzioni ed ho corretto l'esercizio che sembravano più ostico, chiedendo a uno studente, che aveva svolto gli esercizi in questione, di uscire alla lavagna e provarlo a fare insieme.
Dopo la correzione dell'esercizio ho iniziato a spiegare, ribadendo che abbiamo visto, anche nell'esercizio corretto, che la scelta dei valori che assume la probabilità su certi eventi dipende dalla nostra valutazione, infatti la nostra valutazione può cambiare se si aggiungono nuove informazioni, introducendo, attraverso un esempio di vita quotidiana, il concetto di *probabilità condizionata* dandone poi la definizione, e successivamente i teoremi di: *Legge delle probabilità totali* e *Bayes*, osservando che:

- Calcolare la probabilità di un evento dato B è come cambiare spazio campionario, cioè da Ω ci si restringe a B. Fissato B, la funzione $P(\,.\, |B)$, cioè quella che all'evento A associa il numero $P(A|B)$ *è una probabilità su* Ω (purché $P(B)>0$, altrimenti non è definita).
- Alle volte è più facile calcolare le probabilità condizionate che non condizionate, ed è in questi casi che la legge delle probabilità totali risulta utile.
- La formula di Bayes serve per "rovesciare" le probabilità condizionate.

<u>Indipendenza</u>

A questo punto ho introdotto il concetto di indipendenza, dicendo che per rendere conto di quanto la conoscenza di nuove informazioni modifica le nostre valutazioni della probabilità abbiamo introdotto la probabilità condizionata: se voglio la probabilità di un evento A, ma *so che si è verificato* B allora anziché $P(A)$ considererò $P(A|B)$. Alle volte però può succedere che la nuova informazione non cambi la valutazione della probabilità, ad esempio sapere che oggi la massima temperatura non supererà i 28° non mi dovrebbe dire nulla sull'esito del lancio di un dado che volessimo lanciare!
Ho dato quindi la definizione di *eventi indipendenti*, facendo le seguenti osservazioni:

- La definizione va bene anche nel caso $P(A) = 0$ oppure $P(B) = 0$. *Se* però $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$ allora è equivalente a: $P(A|B)=P(A)$ e $P(B|A)=P(B)$, cioè la definizione è "giusta": A e B (che abbiano probabilità positiva) sono indipendenti se e solo se sapere che uno si è verificato non modifica la probabilità dell'altro.

- Se conosciamo $P(A), P(B)$ e $P(A \cap B)$ allora per decidere se A e B sono indipendenti bisogna verificare l'equazione della definizione.
- Altre volte invece si *ritiene a priori che due eventi sono indipendenti* e si usa l'equazione della definizione per calcolare la probabilità dell'intersezione.
- Non è sempre evidente se due eventi siano o non siano indipendenti.
- La definizione di indipendenza vista vale per *coppie di insiemi*, ma si può estendere a *famiglie di eventi* di cui ho dato definizione.

Quindi prima di introdurre un nuovo argomento, ho riassunto in uno schema quanto detto ed ho assegnato alcuni esercizi per casa, inoltre abbiamo dato loro una decina di minuti affinché potessero sia riposarsi/rilassarsi che chiarirsi le idee su quanto spiegato.

Variabili aleatorie discrete e loro distribuzioni (27/01/2007 - II ora)

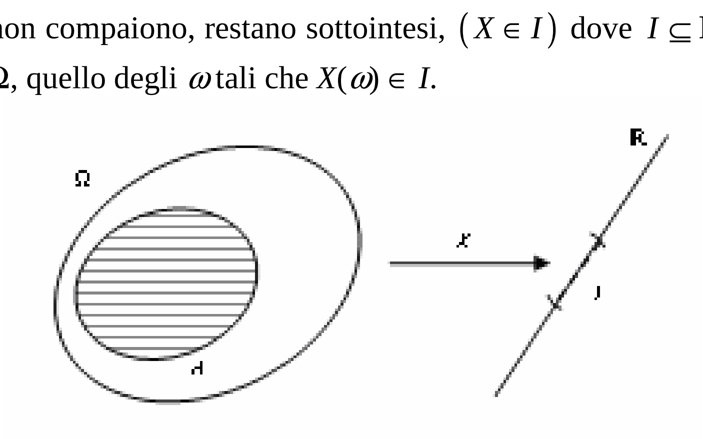
Obiettivi della lezione

- Conoscere il concetto di variabile aleatoria (discreta).
- Conoscere il concetto di legge o distribuzione di una variabile aleatoria.
- Conoscere il problema delle prove ripetute: processo di Bernoulli.
- Riconoscere e saper utilizzare le tipiche distribuzioni di probabilità: bernuolliana, binomiale, geometrica.

Variabile aleatoria

Al rientro dalla breve pausa, ho introdotto il concetto di *variabile aleatoria* (*v.a.*), dicendo che una v.a. è quantità che può assumere diversi valori (cioè è variabile), in dipendenza dal caso (aleatoria), osservando che:

- dato $\omega \in \Omega$, $X(\omega)$ è univocamente determinato poiché X è una funzione.
- Nella roulette ogni $\omega \in \{0, 1, \ldots, 36\}$ ha probabilità 1/37 di uscire, ed è chiaro che ci interesserà qual è la probabilità di vincere qualcosa, cioè se X è la variabile "vincita", ci interessa la probabilità che "$X > 0$": $P\left(\omega \in \Omega : X(\omega) > 0\right)$, "*probabilità dell'insieme degli elementi di Ω tali che X di ω è maggiore di zero*".
- La probabilità è definita su Ω, ecco perché abbiamo dovuto scrivere così!
- In realtà nella pratica spesso "ci si dimentica" di Ω e si usa una notazione più succinta:
$$(X = a) = (\omega \in \Omega : X(\omega) = a), (X > b) = (\omega \in \Omega : X(\omega) > b), \left(X \in (a,b]\right) = \left(\omega \in \Omega : X(\omega) \in (a,b]\right), \ldots$$
dunque gli "ω" non compaiono, restano sottointesi, $(X \in I)$ dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un *evento*, cioè un sottoinsieme di Ω, quello degli ω tali che $X(\omega) \in I$.



Se tutti e soli gli elementi di A "vengono mandati in I" da X, allora A è l'evento ($X \in I$) = A.
- ($X \in I$) coincide con l'insieme $X^{-1}(I)$ delle *controimmagini di I tramite X*.

A questo punto abbiamo fatto tornare in gioco la probabilità, osservando quanto segue:

la legge di una v.a. è una probabilità $\tilde{P}(I) = P(X \in I)$.

A voler essere pignoli $\tilde{P}$ agisce sugli intervalli di $\mathbb{R}$ e noi abbiamo parlato solo di probabilità su spazi campionari discreti … in effetti la trattazione delle probabilità su $\mathbb{R}$ porta a delle complicazioni matematiche che esulano da questa breve trattazione (ecco perché abbiamo saltato i casi continui e le v.a. continue).

Ho, quindi, introdotto la *prova di Bernoulli*, e la v*.a. bernoulliana di parametro p*, facendo notare che non è necessario che i risultati dell'esperimento siano solo di due tipi, ma che per i nostri scopi o interessi possiamo identificare due insiemi di risultati, *A* e *B*, e chiamare i risultati in *A* "successo" e quelli in *B* (= A^c) "insuccesso".
Ho dato anche la definizione del *processo di Bernoulli*, nel caso in cui ripetiamo più volte un esperimento di Bernoulli, osservando che: legate a un processo di Bernoulli ci sono delle domande abbastanza naturali:

1. Quanti successi otteniamo in *n* prove? (Ad esempio, quante teste nel lancio di una moneta).
2. Quanto dobbiamo aspettare per vedere un successo? (Ad esempio, per vincere alla roulette).

La risposta in entrambi i casi è data da una v.a.
Ho definito, pertanto, le v.a. *binomiale* e *geometrica*, e le rispettive distribuzioni di probabilità, osservando che:

a. Se $n = 1$ riotteniamo una v.a. bernoulliana, cioè $X \sim B(1, p) = B(p)$.
b. Una *binomiale* può essere vista come la *somma di n v.a. bernoulliane indipendenti* e *di parametro p*.
c. L'ipotesi di *indipendenza* è fondamentale (cioè il fatto che l'esito di una prova non influenza le altre), perché, ad esempio, se scegliessimo $X_1 = X_2 = \ldots = X_n$ allora potremmo avere solo *n* oppure 0 successi.
d. Eventi rari possono accadere! Quando si verifica un evento raro, è però possibile che il nostro modello sia inadeguato (Paradosso della scimmia).

Infine ho assegnato alcuni esercizi per casa ed ho consegnato le dispense relative all'argomento della successiva lezione.

Valore atteso (29/01/2007 - I ora)

Obiettivi della lezione

- Definire e calcolare il valor atteso di una v.a. precisandone il significato.
- Conoscere e saper applicare le proprietà del valor atteso

Valore atteso

La lezione è iniziata con la alcuni chiarimenti relativi alle notazioni, a cui non erano abituati, infatti, in generale, è emerso che durante la spiegazione erano comprensibili ma poi, a casa, quando hanno riletto gli appunti e le dispense hanno avuto alcune difficoltà a ritrovarsi, per il resto, comunque, la maggior parte di loro ha confermato che avendo avuto la possibilità di fare una pre-lettura a casa degli argomenti dell'incontro precedente sono stati giovati nella comprensione dei concetti sia in classe che successivamente a casa, infatti erano desiderosi di iniziare la nuova lezione e questo è stato evidenziato dal fatto che avevano risolto quasi tutti gli esercizi proposti di cui ho consegnato le relative soluzioni ho corretto un esercizio di cui mi hanno chiesto spiegazione, riguardante il teorema di Bayes.
Quindi ho iniziato a spiegare, ribadendo che abbiamo visto che se diamo una macchina da scrivere ad una scimmia e la lasciamo fare questa prima o poi scriverà qualsiasi libro che scegliamo.

Naturalmente ci aspettiamo che per fare ciò ci metta abbastanza tempo: è naturale chiedersi "quanto tempo ci mette la scimmia prima di riuscire?" o meglio "quanti tentativi deve fare?" In questo modo ho introdotto il concetto di *valore atteso*, di cui poi ho dato la definizione facendo alcune considerazioni, in particolare relativa alla notazione:

- Gli x_k sono i valori che X può assumere, perciò se X assume un numero finito di valori, "$\sum_k$" è una somma finita;
- non confondiamo $\sum_k f_X(x_k)$ con la somma precedente, infatti $\sum_k f_X(x_k) = 1$ perché $P\left(X \in \{x_1, x_2, \ldots\}\right)$, mentre in $\sum_k x_k f_X(x_k)$ compaiono anche gli x_k.
- E(X) (se esiste) è un *numero reale* (non è una quantità aleatoria!)
- Se X assume solo un numero finito n di valori: $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ed ognuno con probabilità $\frac{1}{n}$, allora $\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ il valore atteso è *la media aritmetica dei valori assunti*. Questo è un caso particolare di E(X): $\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_X(x_k)$, dove x_k è il *valore assunto* e $f_X(x_k)$ è la *probabilità di assumerlo* ("peso" di x_k). Quindi E(X) può essere visto come *media pesata dei valori assunti* dove "pesano" di più i valori più probabili.
- E(X) può essere diverso da tutti gli x_k (ad esempio la media aritmetica di n numeri può essere diversa da ciascuno), quindi E(X) *non è* il valore più probabile di X semmai è il valore attorno a cui X è "centrata" (ricordando loro la media aritmetica vista in Fisica: "teoria degli errori" e "statistica descrittiva").

Infine ho assegnato alcuni esercizi per casa ed ho consegnato le dispense relative all'argomento della successiva lezione.

Probabilità e giochi (03/02//2007 - I ora)

<u>Obiettivi della lezione</u>

- Conoscere e saper calcolare le quote e i guadagni probabili dei giochi.
- Conoscere e saper determinare l'esito di un gioco equo/iniquo.
- Saper trasformare il gioco da equo a iniquo e viceversa.
- Conoscere il significato di La legge dei grandi numeri.

Calcolo di probabilità nei giochi: lotto, superenalotto, dadi, roulette

La lezione è iniziata con molto entusiasmo visto l'argomento, infatti è stata molto più scorrevole delle precedenti. Gli esercizi proposti, di cui ho consegnato loro le relative soluzioni, erano stati svolti completamente grazie anche alla docente accogliente che ha fatto una lezione di ripasso in cui ha chiarito alcuni dubbi svolgendo alcuni esercizi, rimasti in sospeso, insieme ai ragazzi.
Quindi abbiamo calcolato tutti insieme le probabilità dell'evento: "il giocatore vince al gioco del …": *lotto*, *superenalotto*, *dadi*, *roulette*, dopo una breve descrizione di ogni gioco, nel caso degli ultimi due ho fornito loro una paio di brochure (regole specifiche: "Roulette Americana", "Dadi", "Black Jack", …) che avevo preso al Casinò.

Quote e guadagno probabile

A questo punto ho introdotto i concetti di: *quote* e *guadagno probabile*, perché il giocatore di solito non parla in termini probabilità, preferisce parlare di quote, cioè il rapporto tra i casi sfavorevoli e quelli favorevoli, calcolando questi casi e quindi le quote per il giocatore relativamente ai giochi sotto analisi: *lotto*, *superenalotto*, *dadi*, *roulette*; facendo osservare quanto segue:

- se le quote contro un evento sono *n* a 1, significa che se si vincesse la scommessa un *giusto payoff* (profitto = somma spettante al vincitore di una scommessa o gioco d' azzardo) dovrebbe essere *n* € per ogni 1 € scommesso;
- naturalmente i payoff nel casinò/lotto non sono in accordo con le giuste quote, infatti esse sono sempre minori:
  - *Dadi* il banco paga alla pari 1 a 1.
  - *Roulette* paga il singolo numero 35 contro 1 … .
  - *Lotto* per l'ambo paga 250 contro 1 … .
  - *Superenalotto* esistono le "quote"? → Non esistono delle vere "quote" fissate a priori …
- Nei giochi è molto importante il valore atteso di v.a.: speranza matematica → *guadagno probabile del giocatore*.
- Giuste quote dovrebbero dare il giusto payoff in un "gioco equo".
- Tutti i giochi del casinò e tutti i giochi/lotterie sono inerentemente iniqui e parziali nei confronti del giocatore.
- Questo dà al casinò e ai gestori dei giochi/lotterie il loro vantaggio, cioè il modo di fare soldi a lungo termine a causa della *legge dei grandi numeri*. Nella roulette il vantaggio è dato dai 2 settori verdi 0 e 00.
- Alcune volte i giocatori hanno cercato di eliminare il vantaggio del casinò cercando di ottenere informazioni addizionali sul gioco incrementando così la loro probabilità di vincere: *sistemi/strategie di gioco*.

Giochi equi e iniqui

A questo punto ho parlato del concetto di equità nei giochi, considerando la v.a. che rappresenta le vincite di un individuo in un gioco: X = “guadagno” del giocatore (positivo, negativo o nullo), cioè la somma di ogni vincita, perdita ed eventuali tasse/quote per giocare. Il linguaggio dei giocatori usato qui sembra frivolo, ma il modello descritto ha un ampia applicazione: → l’acquisto di un qualsiasi tipo di assicurazione è un “gioco” dove si “vince” quando noi (o gli eredi) riscuotiamo, e le “perdite” sono i premi pagati. Dopo aver dato la definizione di gioco equo, ed aver calcolato il guadagno probabile nei giochi sotto analisi, abbiamo fatto le seguenti considerazioni:

- Dal punto di vista della speranza (intesa come guadagno probabile) il gioco dei dadi è migliore del gioco della roulette.
- Ha senso giocare al lotto e superenalatto solo se si giocano piccole quantità di denaro, con la quasi certezza di perdere ma con la remota speranza di vincere grosse cifre.
  “L’emozione di un sogno milionario giustifica una piccola cifra giocata, e quasi certamente persa”
- *In termini di quote, un pagamento con le vere quote corrisponde a un gioco equo.*
- Il Casinò ha successo perché i giochi sono sempre sfavorevoli al giocatore, e ho dato loro la brochure del Casinò: “*Il gioco d’azzardo*”, in cui il Casinò avverte il cliente/giocatore che il gioco può diventare una dipendenza e quindi un problema, iniziando con queste parole “…*è un gioco come tutti gli altri*. E si gioca per vincere, o perché si ama il brivido della sfida. Poiché è un divertimento, ha il suo prezzo. E una volta si vince, un’altra si perde. È normale. Nel campo del gioco d’azzardo, poi, non esistono leggi che permettono di prevedere i risultato del gioco stesso”.

Sistemi/strategia di gioco

Ho, quindi, introdotto i sistemi/strategie di gioco. Ci siamo posti il seguente problema: esiste strategia di gioco che permette di trasformare gioco sfavorevole in uno favorevole? La possibile risposta, dopo la presentazione di un esempio pratico, è che occorre disporre di un capitale illimitato, cioè che siano permesse puntate illimitate, concludendo che: non è possibile trasformare un gioco sfavorevole in uno favorevole se non si dispone di un capitale illimitato (→ problema della *rovina del giocatore* con capitale limitato).

Legge dei grandi numeri e giochi

A questo punto ho introdotto La Legge dei grandi numeri:
essa afferma semplicemente che, tante più prove usiamo per calcolare la stima, tanto più questa sarà vicina, *probabilmente,* alla probabilità reale dell'evento A.
Abbiamo visto la *Legge dei grandi numeri* nel caso del *gioco dei dadi*:

- sia X = guadagno del giocatore ad ogni una giocata con posta di 1€;
- sappiamo che $\mathrm{E}(X) = -0.0142$;
- assumiamo che il giocatore continui a giocare → X_i guadagno al gioco i-esimo;
- ogni v.a. $X_i \sim X$ ed è ragionevole assumerle indipendenti;
- S_n = guadagno dopo n giocate → $\mathrm{E}(S_n) = (-0.0142)\, n$ € → perdita;
- all'aumentare del numero n delle giocate la perdita attesa cresce senza limite;
- usando la legge dei grandi numeri si può dire di più: “*La perdita media dopo molte giocate è circa di 1,5 centesimi, lo stesso che ci saremmo aspettati dopo una solo giocata*”, questa è

una notizia realmente molto deprimente per il giocatore, infatti per ogni numero negativo più grande di –0,0142 da esempio –0,13 si ha $\frac{S_n}{n} < -0{,}13 \quad \Rightarrow \quad S_n < (-0{,}13) \cdot n$ (*)

- se il giocatore gioca abbastanza a lungo il suo guadagno diventerà probabilmente sempre più negativo perchè *n* a destra di (*) diventerà sempre più grande → la sua perdita sarà sempre più grande senza limite → *n* cresce;
- →*una piccola perdita media si traduce in un enorme perdita quando il numero di giocate è grande, con probabilità molto vicina a 1, cioè certa*;

L'errore/fallacia del giocatore

E' importante non leggere nella Legge dei grandi numeri cose che essa non dice, infatti i giocatori spesso nel desiderio di vincere mal interpretano la Legge dei grandi numeri: dopo un periodo sfortunato, di tentativi in un gioco, si dice che il prossimo tentativo/giocata è più favorevole perché la "Leggi dei grandi numeri" garantisce eventualmente un cambio di fortuna. L'argomentazione è sbagliata poiché ad esempio ogni lancio dei dadi è *indipendente* dai precedenti lanci, infatti i dadi *non "ricordano"* che cosa è accaduto precedentemente e *non "cercano"* di *pareggiare* il punteggio. Qual è la base dell'errore/fallacia del giocatore? La Legge dei grandi numeri dice che, a lungo termine, la *media* in generale si avvicinano alla speranza matematica, cioè il valore atteso (*guadagno probabile del giocatore*). Quindi è vero che non si può perdere sempre, cioè prima o poi si vince, ma non si sa quando, certamente non si sa se la prossima (*indipendenza*), per cui si ha la certezza che la perdita aumenta (*rovina del giocatore*).

Assicurazioni e giochi

Ho fatto vedere come le assicurazioni calcolano il premio annuo di una assicurazione sulla vita, sottolineando come il risultato renda il "gioco" sfavorevole per il cliente.

Approfondimento

Infine ho fatto un breve approfondimento riguardante la Legge dei grandi numeri.

- La *Legge dei grandi numeri* detta pure *legge empirica del caso* ovvero *teorema di Bernoulli*
- Il problema è diventato storico ed è conosciuto come il *Paradosso di San Pietroburgo* poiché proprio in quella città venne formulato per la prima volta.
- Il primo *paradosso economico* risale al tempo di Pietro il Grande.

Verifica dell’apprendimento

La verifica dell’apprendimento è stata effettuata con la somministrazione di una prova costituita da 20 domande a risposta multipla (tre opzioni). Tempo concesso un’ora scolastica.
La prova è stata affrontata con serietà.
Gli studenti hanno incontrato le difficoltà maggiori nelle domande n° 10, 13, 15, 19, anche per gli aspetti formali di scritture per loro inusuali.
Il livello di sufficienza è stato concordato in dodici risposte esatte. I risultati espressi in percentuale sono stati:

- 20% sotto la sufficienza;
- 40% sufficienti;
- 25% discreti;
- 15% buoni.

Quindi la prova ha avuto un risultato mediamente discreto.
La docente accogliente ha tenuto conto della valutazione espressa come prova orale, di ciò gli studenti erano stati preavvertiti.

Conclusioni e analisi critica dell’esperienza

L’esperienza di questo tirocinio è stata, per me, molto positiva.
I ragazzi si sono dimostrati attenti e disponibili al confronto e il rapporto instaurato con gli studenti nelle varie classi è stato connotato da una estrema cordialità nel rispetto dei reciproci ruoli. Ciò grazia anche all’abitudine a questo tipo di rapporto con i loro docenti. Anche con questi ultimi la collaborazione è stato ottima facendomi sentire un loro collega a tutti gli effetti.

Ripensando al mio intervento attivo se dovessi ripetere questa esperienza in una mia futura classe dedicherei maggior tempo alle v.a. e alle loro distribuzioni, questo non vuol dire che il tempo dedicato all’intervento non è stato sufficiente, ma dedicherei più tempo ad alcuni concetti fondamentale del Calcolo delle Probabilità in prospettiva di una maggior comprensione degli argomenti successivi di Statistica.

Appendici

Appendice A – Dispense

Impariamo a contare

Probabilità di eventi

Se lanciamo un dado non sappiamo a priori che numero uscirà, però sappiamo che i casi possibili sono 6 (“esce 1”, “esce 2”, ..) e in mancanza di altre informazioni, cioè supponendo che il dado non sia truccato, stimiamo che ognuno di questi casi abbia probabilità uguale a quella degli altri, perciò pari a 1/6.
Allo stesso modo se lanciamo una moneta i casi possibili sono due (testa, croce), ciascuno con probabilità 1/2.
Questi sono esempi di **esperimenti casuali** o **aleatori**, cioè esperimenti di cui non si conosce l’esito, che dipende dal “caso” (“aleatorio” significa “casuale” e deriva dal latino “alea” che significa “dado” ... ricordate Cesare quando diceva: “Alea iacta est”?).

Vediamo altri esempi di esperimenti aleatori.

<u>*Esempi*</u>

1. Estrarre una pallina da un’urna che contiene 90 palline numerate da 1 a 90 (estrazione del lotto).
2. Nel gioco del poker, l’esperimento: “che carte ho in una mano dopo che il mazziere ha distribuito?”
3. Lanciare una moneta finché non esce testa e contare quanti lanci sono stati necessari (una se è uscita al primo, due se non è uscita al prima ma al secondo si, …)
4. accendere una lampadina e cronometrare il tempo necessario affinché si bruci.

In tutti questi casi non è noto l’esito, ma sappiamo quali sono i casi possibili (e impareremo a calcolare la probabilità di ciascuno di essi): in 1. ho 90 casi possibili; in 2. i casi possibili sono tutte le estrazioni di 5 carte da un mazzo da poker; in 3. i casi possibili sono tutti gli interi positivi (dunque un insieme numerabile); in 4. i casi possibili sono tutti i reali positivi.

Definizione
I *possibili eventi* di un esperimento aleatorio sono detti **eventi elementari** (ω). L’insieme di tutti gli eventi elementari è detto **spazio campionario** (**Ω**). Se lo spazio campionario è un insieme finito o numerabile, è detto <u>*discreto*</u>, se è più numeroso è detto <u>*continuo*</u> (ad esempio se contiene un intervallo della retta reale).

In realtà spesso si vuole calcolare la probabilità non solo dei singoli eventi elementari (che sono gli elementi ω dell’insieme Ω), ma anche sottoinsiemi di Ω ($A \subseteq \Omega$), che chiamiamo **eventi**.

<u>*Esempi*</u>

- Nell’esempio 2. l’evento “fra le cinque carte che ho in mano c’è l’asso di picche”, oppure “ho un poker servito”.
- Nell’esempio 3. l’evento “servono più di 5 lanci”.
- Nell’esempio 4. l’evento “la lampadina ha una durata fra le 1000 e le 2000 ore”.

Tratteremo solo il caso in cui lo spazio Ω è discreto, perché il caso continuo presenta difficoltà in cui non entreremo.

Definizione
Sia Ω uno spazio campionario discreto. Ogni suo sottoinsieme A è detto **evento**. Perciò tutti gli eventi possibili (attenzione! Elementari e non) sono elementi dell'insieme delle parti di Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$ (l'insieme che ha per elementi i sottoinsiemi di Ω).

Dunque un ruolo importante avranno i sottoinsiemi di Ω: vediamo come certi sottoinsiemi abbiano specifici significati dal punto di vista degli eventi (con la loro rappresentazione grafica attraverso i diagrammi di Eulero-Venn):

- Ω **evento certo** (sicuramente si verifica uno degli eventi $\omega \in \Omega$).
- $\emptyset$ (vuoto) **evento impossibile** (non si verifica nessun elemento di ϕ!).
- $A \subseteq \Omega$ *"si verifica A"* (cioè $\omega \in A$).
- A^c (complementare da A) "*non si verifica A*".
- $A \cap B$ "*si verifica A o B* (*o entrambi*)".
- $A \cup B$ "*si verificano A e B*" (*simultaneamente*).
- Se $A \cap B = \emptyset$ allora "*A e B sono incompatibili*" (non possono verificarsi contemporaneamente).
- Se $B \subseteq A$ allora "*B implica A*" (se si verifica B, si verifica anche A).

Prima di passare alla probabilità degli eventi è utile richiamare le proprietà delle operazioni ($\cap$,$\cup$, ^{c}) sugli insiemi.

Proposizione
Se A, B, C sono sottoinsiemi di Ω, allora:

- $A \cap \emptyset = \emptyset$ $\quad$ $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap \Omega = A$ $\quad$ $A \cup \Omega = \Omega$
- $A \cap A^c = \emptyset$ $\quad$ $A \cup A^c = \Omega$
- $(A^c)^c = A$
- $A \cap A = A$ $\quad$ $A \cup A = A$ $\quad$ prop. di idempotenza
- $A \cap B = B \cap A$ $\quad$ $A \cup B = B \cup A$ $\quad$ prop. commutativa
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $\quad$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $\quad$ prop. associativa
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $\quad$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\quad$ prop. distributiva
- $A \cap (A \cup B) = \mathrm{A}$ $\quad$ $A \cup (A \cap B) = \mathrm{A}$ $\quad$ prop. assorbimento
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ $\quad$ $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $\quad$ leggi di De Morgan

<u>Probabilità di eventi</u>

La **probabilità** di un evento è un numero reale dell'intervallo [0,1], che esprime, misura, quanto riteniamo probabile il verificarsi di quell'evento. Ad esempio, se lanciamo una moneta, stimiamo che la probabilità che esca testa sia 0.5 = 1/2 (nel linguaggio comune si usa dirlo in percentuale: "la probabilità del 50%", cioè probabilità p = probabilità $100 \cdot p$%).

Il **calcolo delle probabilità** è la branca della matematica che ci dice come si calcolano le probabilità di eventi "complessi" (nel caso discreto si tratta degli eventi in generale), conoscendo già la probabilità di altri eventi "più semplici" (nel caso, discreto, spesso gli eventi elementari).

Ci sono due questioni:

1. come conoscere le probabilità degli eventi "più semplici"?
2. con quali regole si passa dalla probabilità di alcuni eventi a quella di altri? Che proprietà deve avere cioè la probabilità che assegno agli eventi?

Vediamo prima di rispondere alla seconda domanda. Facciamo alcune considerazioni:

- la probabilità di Ω deve essere pari a 1, cioè $P(\Omega) = 1$;
- la probabilità dell'insieme vuoto, $\varnothing$, deve essere zero, cioè $P(\varnothing) = 0$;
- se conosciamo la probabilità di A, $P(A)$, possiamo ricavare quella di A^c: $P(A^c) = 1 - P(A)$;
- se A e B sono disgiunti, $A \cap B = \varnothing$, conoscendo $P(A)$ e $P(B)$, ricaviamo $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
- e così possiamo andare avanti …

Il matematico russo Kolmogorov studiò negli anni '30 le proprietà delle probabilità, scoprendo che da pochi *assiomi*[5] si potevano ricavare tutte le altre proprietà. Questi assiomi vennero scelti per definire le probabilità, nel senso che ogni funzione che abbia le proprietà enunciate dagli assiomi viene detta probabilità (che poi serve per misurare la probabilità di eventi in casi concreti, è un altro problema!)

Definizione (**assiomatica di probabilità**)
Sia Ω uno spazio campionario discreto. Si chiama **probabilità su Ω** una qualsiasi funzione P: $\mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$, con le seguenti proprietà:

(i) $P(\Omega) = 1$;

(ii) se $\{A_n\}_{n \in \aleph}$ è una successione di eventi a due a due disgiunti (cioè $A_i \cap A_j = \varnothing$ con $i \neq j$) allora

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \qquad \text{(addittività numerabile).}$$

La coppia (Ω, P) si chiama **spazio di probabilità** (**discreto**).

Attenzione!
- La probabilità è una **funzione**.
- Gli eventi sono **insiemi** e se ne può fare unione, intersezione, complementare, …
- La probabilità di un evento è un **numero reale** (fra 0 e 1), dunque le probabilità di eventi si possono sommare, sottrarre, …

Proposizione (**proprietà delle probabilità**)
Sia P una probabilità su Ω. Allora:

(i) $P(\varnothing)=0$;

(ii) $P(A^c) = 1 - P(A)$;

(iii) se $A_1, \dots, A_n$ sono eventi a due a due disgiunti (cioè $A_i \cap A_j = \varnothing$ con $i \neq j$), allora

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) \quad \text{(addittività finita);}$$

(iv) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ qualsiasi siano A e B.

Esercizio
Supponiamo che un consumatore, entrato in un supermercato, abbia:
- probabilità pari a 0.7 di acquistare il prodotto *a*;
- probabilità pari a 0.2 di non acquistare il prodotto *b*;
- probabilità pari a 0.1 di non acquistare né il prodotto *a* né il prodotto *b*.

Qual è la probabilità che acquisti sia *a* che *b*?

Risposta
Sia A l'evento {acquista *a*}, B l'evento {acquista *b*}.
Allora $P(A)=0.7$, $P(B^c)=0.2$, $P(A^c \cup B^c)=0.1$, e chiediamo $P(A \cup B)$=?

[5] Gli assiomi della matematica sono proprietà che non si dimostrano, ma si *assumono* vere, da essi si fanno discendere tutte le altre tramite dimostrazioni (esempio assiomi della geometria euclidea).

Poiché $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$ e $P(A^c \cap B^c) = P(A^c) + P(B^c) - P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A) + 0.2 - 0.1 = 0.3 + 0.1 = 0.4$
Allora $P(A \cup B) = 1 - P(A^c \cap B^c) = 0.6$.

Osservazione

Se Ω è discreto, basta conoscere la probabilità degli eventi elementari per essere in grado di calcolare la probabilità di qualsiasi evento.

Infatti, se Ω è discreto si può scrivere $\Omega = \{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ (nel caso finito $\Omega = \{\omega_k\}_{k=1}^{n}$) e se $A \subseteq \Omega$, allora

$$P(A) = P\left(\bigcup_{\omega_k \in A} \{\omega_k\} \right) = \sum_{\omega_k \in A} P(\{\omega_k\}).$$

Perciò basta conoscere $P(\{\omega_k\}) = p_k \quad k = 1, 2, \dots$, cioè le probabilità degli eventi elementari.

Come assegnare le probabilità

Abbiamo visto come si possono ricavare probabilità di eventi "più complicati" dalla conoscenza della probabilità di eventi "semplici".

Adesso torniamo alla questione del come vanno attribuite le probabilità degli eventi "semplici".

Ribadiamo che la scelta di queste probabilità dovrà soddisfare le proprietà matematiche che abbiamo visto, ma è un qualcosa che esula dalla matematica, coinvolgendo piuttosto le nostre valutazioni.

Ad esempio, se lancio un dado, siccome *noi riteniamo a priori* che ogni faccia abbia la stessa probabilità di uscire, *allora* attribuiamo probabilità pari a 1/6 all'uscita di un 6. Se però lanciassimo un dado 1000 volte e il 6 comparisse 250 volte, saremmo portati a pensare che il dado non è ben bilanciato e la probabilità che esca 6 è (vicina a) 1/4.

Queste due idee appena descritte (considerazioni di equiprobabilità oppure calcolo di una frequenza) sono alla base di due approcci: la *definizione classica* di probabilità e la *definizione frequentista*.

Definizione (**classica**)

Se si ha che:

(i) Ω finito: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$;

(ii) *valutiamo* che tutti gli eventi elementari $\{\omega_1\}, \dots, \{\omega_n\}$ hanno la stessa probabilità;

allora

- $P(\{\omega_i\}) = \dfrac{1}{n} \quad \forall i = 1, \dots, n$;
- $P(A) = \dfrac{1}{n} \cdot |A| = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$; [6]

dunque → $\text{probabilità} = \dfrac{\text{n° casi favorevoli}}{\text{n° casi possibili}}$.

Attenzione!

Bisogna stare molto attenti all'ipotesi di equiprobabilità, infatti non sempre è vero che tutti gli eventi elementari hanno la stessa probabilità.

Ad esempio, lanciando due dadi: qual è la probabilità che la somma dia 7?

La somma è un numero fra 2 e 12 (undici numeri in tutto), ma ad esempio 2 è meno probabile di 7, poiché 2 esce solo se entrambi i dadi danno 1, mentre 7 esce come 1+6, 2+5, 3+4, … . E' utile osservare che se scegliamo Ω = {coppie (i, j) con i e j interi fra 1 e 6} (ogni coppia rappresenta un lancio, ad esempio (2,3) significa che il primo dado ha dato 2 mentre il secondo ha dato 3), allora

[6] Dove $|A|$ è il numero degli elementi di A e $|\Omega|$ è il numero degli elementi di Ω.

gli eventi elementari sono equiprobabili. Quindi $|\Omega|$ = n° coppie = 6×6 = 36. I casi che danno somma 7 sono: (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1), in tutto 6 (e non 1/11 come ci si sarebbe aspettati dall'equiprobabilità).

Osservazioni

- Definizione a carattere tautologico! Limitata a numero finito di casi possibili, anche se estendibile con passaggi al limite.
- Regola utile per calcolare probabilità in certe situazioni in cui ci sia un numero finito di alternative, che possono essere considerate, ad es. per motivi di simmetria, ugualmente probabili.
- Definizione operativa che implica alcune regole per elaborazione matematica della probabilità.
- Tipico campo di applicazione della definizione classica: giochi di dadi, carte, ecc. (se si può assumere che non ci sia trucco!)

Esercizio

Calcolare la probabilità che la somma dei due dadi sia 2 oppure 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12.

Definizione (**frequentista**)

Dalla frequenza relativa di certi eventi si può dedurre la probabilità degli stessi.

Osservazioni

- Sia Pascal sia de Mèrè si aspettavano che, a lungo andare, la frequenza con cui un evento si verifica si stabilizzi sul valore della probabilità.
- Opinione comune, espressa nella cosiddetta legge empirica del caso "in una successione di prove fatte nelle stesse condizioni, la frequenza di un evento si avvicina alla probabilità dell'evento stesso e l'approssimazione tende a migliorare con l'aumento del numero delle prove ".
- Rovesciando l'impostazione classica, si arrivò alla definizione frequentista "la probabilità di un evento è il limite della frequenza (relativa) dei successi (cioè del verificarsi dell'evento), quando il numero delle prove tende all'infinito.
- Anche la definizione frequentista è "operativa", nel senso che fornisce una regola di calcolo (analoga a quella della definizione classica) delle probabilità in determinate circostanze.

Esempio

Abbiamo discusso del dado bilanciato, un altro esempio è dato dal lancio di una moneta: se su n lanci escono k teste si può definire P({"esce testa"}) = k/n (frequenza relativa del valore "testa").

Nota

In questo caso la scelta della probabilità degli eventi non è fatta *a priori*, ma *a posteriori*, dopo l'estrazione di un campione statistico.

Il buon senso ci dice che *se il campione è abbastanza numeroso*, allora la frequenza relativa è abbastanza vicina alla probabilità "vera".

Osservazione

Questo è un concetto che verrà precisato dalla *Legge dei grandi numeri*, su cui torneremo.

Esempio

Supponiamo che a Milano, nel 2001, il 25% dei bambini delle scuole materne abbia avuto l'influenza. È allora ragionevole pensare che nel 2002 ogni bambino avrà una probabilità del 25% (oppure 0.25) di ammalarsi. Dalla conoscenza del *passato* facciamo una *previsione sul futuro*.

Definizione (**soggettiva**)
È la probabilità assegnata ad un evento E in modo che la puntata in un gioco aleatorio che assegna al successo un guadagno s e all'evento contrario/complementare una perdita r renda il gioco "equo".

Osservazioni

- Già accennata in Pascal, si può fare risalire a Daniele Bernoulli, ripresa nel '900 da Bruno de Finetti e Jimmy Savage Probabilità è il grado di fiducia che una persona ha nel verificarsi dell'evento.
- Non è una caratteristica "intrinseca" dell'evento.
- Definizione "operativa": "La probabilità $P(A)$ di un evento A è il prezzo che un individuo ritiene equo pagare per ricevere 1 se l'evento si verifica e 0 se l'evento non si verifica. Le probabilità degli eventi devono essere attribuite in modo che non sia possibile ottenere con un insieme di scommesse una vincita certa o una perdita certa (*principio di coerenza o equità*)".
- La coerenza implica le solite regole della probabilità.

Calcolo combinatorio

Dalla definizione classica di probabilità come rapporto fra il numero di casi "favorevoli" ed il numero di casi possibili, ne segue che è importante *saper contare* i casi in questione.
Per alcune situazioni "tipiche", come fare questo conteggio ce lo dice il *calcolo combinatorio*.
Le dimostrazioni delle formule che vedremo tra poco non verranno fatte in modo formale (rimandando al libro di testo), per concentrarsi solo sulla comprensione dei termini tramite definizioni ed esempi.
Sottolineiamo però un principio che serve per ricavare le formule, principio che è utile anche in generale:

Principio del prodotto di possibilità
Supponiamo che ogni elemento di un insieme A sia determinato da k scelte successive, in modo che ci siano r_1 possibilità per la prima scelta, r_2 per la seconda scelta, …, r_k per la k-esima scelta. Allora A ha $r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_k$ elementi.

Esercizio
La catena di SUBWAY di fast-food di Vienna prepara panini a scelta in questo modo: ci sono tre tipi di pane (bianco, integrale e di segale), quattro farciture (pollo, prosciutto, tonno o formaggio), tre verdure e cinque salse. Il cliente può scegliere un pane, una farcitura, una verdura e una salsa. Quanti panini si possono fare?
Risposta.
Per il principio appena enunciato, i tipi di panini sono $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 180$.

Definizione (**permutazione semplice**)
Una *permutazione* (*semplice*) *di n oggetti* è ogni allineamento di n oggetti distinti in n caselle,[7] cioè ciascuno dei possibili raggruppamenti di n elementi che differiscono solo per l'ordine in cui ogni elemento compare.

Proposizione.
Il numero totale delle permutazioni (semplici) di n oggetti è $P_n = n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1$. [8]

[7] Idea-guida. Permutazioni: modi in cui è possibile scambiare l'ordine di n oggetti.

Quindi dati n oggetti essi si possono “mettere in fila (o coda o colonna)” in $n!$ modi diversi. Infatti:

- per la scelta del primo oggetto della fila abbiamo n possibilità;
- a ciascuno di queste n possibilità di scelta sono abbinate $(n–1)$ possibilità di scelta per il secondo oggetto della fila;
- a ciascuno di queste $n\cdot(n–1)$ possibilità di scelta sono abbinate $(n–2)$ possibilità di scelta per il terzo oggetto della fila;
- … ;
- per la scelta del terzultimo oggetto della fila le possibilità di scelta sono 3;
- per la scelta del penultimo oggetto della fila le possibilità di scelta sono 2;
- infine rimarrà un solo oggetto alla fine della fila.

Osservazioni

- Un solo oggetto si può mettere in fila in un solo modo, quindi $1!=1$.
- Se non ci sono oggetti l’unica fila possibile è quella vuota. Quindi $0! = 1$.

Esercizi

1. I 20 bambini di una classe elementare vengono fatti mettere in fila indiana. In quanti modi diversi possono disporsi?
   Risposta. $P_{20} = 20!$.
2. In un’urna ci sono n palline numerate da 1 a n. Le peschiamo una alla volta senza rimettere le pescate nell’urna, finché l’urna è vuota. In quante sequenze diverse possono comparire le palline? E se $n = 5$?
   Risposta. $P_n = n!$, se $n = 5$ abbiamo $5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ modi diversi.

Definizione (**permutazione con ripetizione**)
Una *permutazione con ripetizione di n oggetti* di cui k_1 *uguali fra loro*, k_2 *uguali fra loro* e distinti dai precedenti, …, k_n *uguali fra loro* e distinti dai precedenti (e dunque $k_1+…+k_t = n$), è ogni allineamento di n oggetti distinti in n caselle.

Esempio
Dati i numeri {1, 1, 1, 5, 5, 6}, una loro permutazione è (1, 5, 5, 1, 1, 6).

Proposizione.
Il numero totale delle permutazioni con ripetizione di n oggetti di cui k_1 *uguali fra loro*, k_2 *uguali fra loro* e distinti dai precedenti, …, k_n *uguali fra loro* e distinti dai precedenti (e dunque $k_1+…+k_n =$ n), è $P^*_{k_1,\dots,k_n} = \dfrac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}$.[9]

Infatti, avremo sempre le permutazioni di n oggetti, ma ci saranno tante sequenze uguali e indistinguibili dovuta agli elementi uguali fra loro:

- i k_1 oggetti uguali fra loro possono permutare in posto in $k_1!$ modi diversi, senza differenziare la sequenza degli n oggetti per l’ordine, e quindi per evitare di contare la stessa sequenza bisogna dividere le possibili sequenze per $k_1!$;
- …;

[8] In matematica, se n è un intero positivo, si definisce ***n** fattoriale* e si indica con $n!$ il prodotto dei primi n numeri interi positivi. In formule, $n! = n\cdot(n–1)\cdot(n–2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1$, Per *definizione* si chiede poi che $0! = 1$. Questa richiesta si accorda con la richiesta che il prodotto di zero fattori, il cosiddetto *prodotto vuoto*, come la potenza nulla di un intero positivo, sia uguale ad 1. Questa scelta si rivela molto utile, in quanto consente di considerare valide varie formule anche quando alcuni loro fattori hanno la forma $0!$.

[9] $P^*_{k_1,\dots,k_n}$ è detto *coefficiente polinomiale* o *multinomiale*.

- i k_n oggetti uguali fra loro possono permutare posto in $k_n!$ modi diversi, senza differenziare la sequenza degli n oggetti per l'ordine, e quindi per evitare di ricontare la stessa sequenza bisogna dividere le possibili sequenze per $k_n!$.

<u>*Esercizi*</u>

- Quanti sono gli anagrammi della parola PROBABILITA?
  Risposta. Bisogna contare le permutazioni di 11 lettere far cui 1 "P", 1 "R", 1 "O", 2 "B", 2 "A", 2 "I", 1 "L", 1 "T": $\dfrac{11!}{1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!}=\dfrac{11!}{8}=4\cdot 919\cdot 600$.
- In un'urna ci sono 8 palline: tre rosse, quattro blu e una nera. Pescandole tutte una alla volta senza reimmissione, quante sequenze di colori possono comparire?
  Risposta. $\dfrac{8!}{3!\cdot 4!\cdot 1}=\dfrac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2}=280$.

Definizione (**disposizione semplice**)
Una *disposizione* (*semplice*) *di n oggetti in k posti* (dunque $1\le k\le n$) è ogni allineamento di k oggetti scelti fra gli n oggetti dati, cioè ciascuno dei raggruppamenti ordinati di k elementi che si possono formare con gli n elementi di un insieme.

Proposizione
Il numero totale di disposizioni (semplici) di n oggetti in k posti è: $D_{n,k}=n(n-1)\ldots(n-k+1)$.

Infatti:

- per la scelta del primo oggetto della fila abbiamo n possibilità;
- a ciascuno di queste n possibilità di scelta sono abbinate (n–1) possibilità di scelta per il secondo oggetto della fila;
- … ;
- per la scelta del k-esimo oggetto della fila le possibilità di scelta sono $[n-(k+1)]$.

<u>*Esercizi*</u>

1. In una gara con 40 concorrenti, quante sono le classifiche dei primi 5?
   Risposta. $D_{40,5}=40\cdot 39\cdot 38\cdot 37\cdot 36$.
2. In un'urna ci sono n palline numerate da 1 a n. Le peschiamo senza reimmissione, fermandoci dopo averne estratte k. Quante sono le sequenze possibili? Se n =10 e k = 4?
   Risposta. $D_{10,4}=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7$ ($D_{n,k}$ nel caso generale).

Definizione (**disposizione con ripetizione**)
Una *disposizione con ripetizione di n oggetti in k posti* (qui basta che $k\ge 1$) è ogni allineamento di k oggetti scelti fra gli n, ma senza l'obbligo di usare un oggetto al massimo una volta.

<u>*Esercizio*</u>
Quante diverse colonne si possono giocare al totocalcio?
Risposta. Siccome le caselle sono 13 e gli oggetti da mettere in ciascuna casella sono di tre tipi (1, X, 2) che si possono ripetere, le colonne saranno tante quante le disposizioni con ripetizione di 3 oggetti in 13 posti.

Proposizione. Il numero totale di disposizioni con ripetizione di n oggetti in k posti è: $D^*_{n,k}=n^k$.

Infatti per la scelta dei *k* oggetti si ha sempre *n* possibilità.

Esercizi

1. *Problema dei compleanni*. Qual è la probabilità che fra *n* persone due (almeno) compiano gli anni lo stesso giorno? [10]
   Risposta. Consideriamo l'evento: "nessuno compie gli anni lo stesso giorno dell'altro". I casi possibili sono le disposizioni con ripetizioni di 365 "oggetti" (i giorni dell'anno) in *n* "posti" (le persone), cioè un numero di 365^n scelte. I casi favorevoli sono le disposizioni *senza ripetizione*, cioè $D_{363,n} = 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)$.
   Dunque la probabilità è $p = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$, ad es. per n=30 si ottiene p = 0.706.

Negli esempi precedenti l'*ordine* con cui effettuare le scelte aveva la sua importanza; adesso ci mettiamo in situazioni in cui l'ordine non ha importanza e si può pensare che le scelte avvengono simultaneamente.

Definizione (**combinazione semplice**)
Una *combinazione* (*semplice*) *di n oggetti di classe k* ($0 \le k \le n$) è ogni allineamento di *k* elementi dell'insieme di *n* oggetti dati, cioè ciascuno dei raggruppamenti non ordinati di *k* elementi che si possono formare con gli *n* elementi di un insieme.

Proposizione
Il numero totale di combinazioni di *n* oggetti di classe *k* posti è:

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$ [11]

Infatti, disponendo *k* oggetti scelti fra *n* elementi abbiamo $D_{n,k} = n(n-1)\ldots(n-k+1)$, siccome l'ordine all'interno di ogni raggruppamento non è importante, risultano uguali i raggruppamenti che hanno gli stessi *k* elementi dell'insieme ma ordinati in modo differenti, quindi per evitare di ricontare la stessa combinazione di oggetti dobbiamo dividere per il numero di permutazioni che questi oggetti possono generare. Inoltre si ottiene la formula finale (ultima a destra del secondo uguale), moltiplicando il numeratore e denominatore per $(n-k)!$.

Esercizio
La commissione giudicatrice per un certo esame deve essere composta da 3 professori. Sapendo che i professori disponibili sono 15, in quanti modi si può formare la commissione?

---

[10] Spesso è piuttosto che calcolare la probabilità di un evento conviene calcolare quella (dell'evento) complementare, che nell'esempio è quella che nessuno compia gli anni lo stesso giorno dell'altro, per poi usare la proprietà (*ii*) delle probabilità: $P(A^c) = 1 - P(A)$.

[11] La quantità $\binom{n}{k} = \text{"}n \text{ su } k\text{"} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_{n,k}$, si chiama *coefficiente binomiale*

Risposta. $C_{15,3}=\binom{15}{3}=\frac{15\cdot 14\cdot 13}{3!}=5\cdot 7\cdot 13=455$.

Definizione (**combinazione con ripetizione**)
Una *combinazione con ripetizione di n oggetti di classe k* (0≤*k*) è ogni gruppo di *k* oggetti scelti fra *n* oggetti dati, che possono essere ripetuti.

Proposizione

Il numero totale di combinazioni con ripetizioni di *n* oggetti di classe *k* posti è: $C^*_{n,k}=\binom{n+k-1}{k}$.

<u>*Esercizio*</u>
Supponiamo di avere 5 vasi e 10 caramelle: in quanti modi possiamo mettere le caramelle nei vasi? (Ad esempio, 2 in ciascuno, oppure 10 in un vaso e nessuna negli altri, oppure 5 in due vasi, …)
Risposta. Si tratta di sceglier 10 volte fra 5 oggetti, con ripetizione e non importa l'ordine, quindi:

$$C^*_{5,10}=\binom{15+5-1}{10}=\binom{14}{10}=\frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{4\cdot 3\cdot 2}=1001.$$

<u>*Osservazioni*</u>

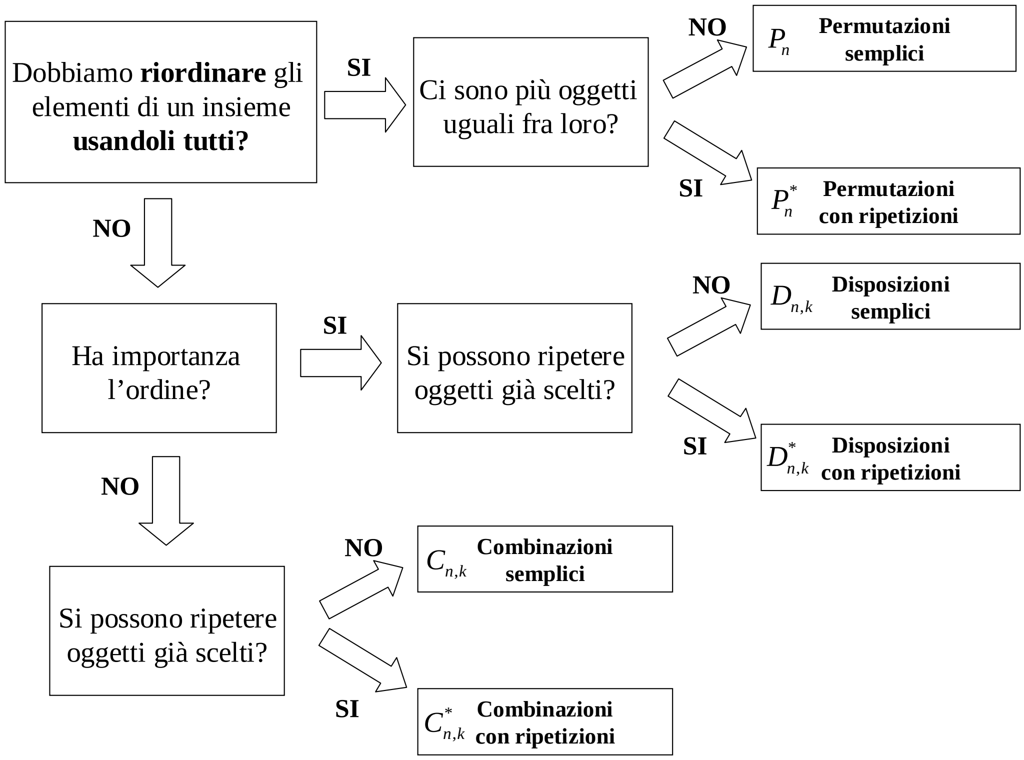
- Nei problemi di conteggio la difficoltà spesso sarà nel capire quale di questi modelli si applica meglio (pensiamo ai vasi e alle caramelle: cosa è che si sceglie, i vasi o le caramelle? I vasi sono diversi, le caramelle no …).
- Ancora più attenti bisogna essere quando si tratta di calcolare le probabilità come $\frac{\text{n° casi favorevoli}}{\text{n° casi possibili}}$, quali casi sono equiprobabili?!

<u>*Esempio*</u> (di Galileo)
Lanciando tre dadi e considerando la somma: qual è la probabilità che esca 9? E 10?
Risposta. Ogni dado dà un numero fra 1 e 6, la situazione può essere modellizzata in due modi:

1. ogni lancio corrisponde a una <u>*terna ordinata*</u> (x_1, x_2, x_3), con possibili ripetizioni; oppure
2. ogni lancio corrisponde ad un <u>*gruppo*</u> di 3 numeri (con possibili ripetizioni): $\{y_1, y_2, y_3\}$.

Nel primo caso importa l'ordine → <u>*disposizioni*</u> con ripetizione di 6 oggetti in 3 posti.
Nel secondo caso non importa l'ordine → <u>*combinazioni*</u> con ripetizione di 6 oggetti di classe 3.
Ma ad essere <u>***equiprobabili***</u> sono le disposizioni e non le combinazioni! Ad esempio la combinazioni {3, 3, 3} può comparire in un solo modo (tutti i tre dadi danno 3), mentre la combinazione {4, 3, 2} può comparire in 3!=6 modi diversi (i 6 riordinamenti della terna 4, 3, 2).
Dunque i casi possibili sono $D^*_{6,3}=6^3=216$, quelli "favorevoli" affinché la somma sia 9 sono:
(1, 2, 6) e i suoi 6 riordinamenti; (1, 3, 5) e i suoi 6 riordinamenti; (2, 3, 4) e i suoi 6 riordinamenti; (2, 2, 5) e i suoi 3 riordinamenti; (1, 4, 4) e i suoi 3 riordinamenti; (3, 3, 3) e il suo unico riordinamento. Per un totale di 25 modi. La probabilità che la somma sia 9 è: $25/216=0.1157$.
<u>*Esercizio*</u>. Provare a calcolare la probabilità di 10.

Ricapitolando



<u>*Esercizi per casa*</u>

1. In quanti modi 8 persone possono sedersi a un tavolo che ha 8 posti?

2. In una gara di 40 concorrenti, di 8 nazioni diverse, 5 per nazione, quante possibili classifiche per nazioni ci sono, per i primi 5 posti?

3. Se una fila del cinema ha 15 posti e ci sono solo 8 persone, in quanti modi si possono sedere?

4. In quanti modi 10 automobili che arrivano a uno snodo autostradale possono distribuirsi in 3 direzioni diverse? Distinguere i 3 casi: *a*. le auto si considerano tutte uguali; *b*. le auto si considerano tutte diverse; *c*. le auto si raggruppano per cilindrata, 5 sono di classe A, 3 di classe B, 2 di classe C.

5. A scommette con B che estrarrà 4 carte di 4 semi diversi da un mazzo di carte di 40 carte (che ne contiene 10 per seme). Qual è la probabilità che A vinca?

6. Carlo e Mario lanciano ciascuno 2 volte una moneta. Qual è la probabilità che Mario ottenga più teste di Carlo?

7. Calcolare la probabilità che, lanciando due dadi, escano: *a*. due 4; *b*. un 3 e un 5; *c*. due numeri pari; *d*. due numeri la cui somma è 9; *e*. due numeri uguali.

8. Da un mazzo di 52 carte se ne estrae una. Calcolare la probabilità che sia *a*. una carta di picche o una figura di cuori; *b*. una figura o una carta rossa.

Modelli probabilistici

Probabilità condizionata e indipendenza

Abbiamo visto che la scelta dei valori che assume la probabilità su certi eventi dipende dalla nostra valutazione. È chiaro che la nostra valutazione può cambiare se si aggiungono nuove informazioni.

Esempio
A Milano i giorni in un anno con temperatura massima sopra i 28° sono il 24%, perciò scelto un giorno a caso la probabilità che si registri una massima superiore ai 28% è 0.24. Se però consideriamo solo i giorni di luglio la percentuale sale al 92%, mentre per quelli di marzo la percentuale è del 3%. Perciò se sappiamo che il giorno scelto a caso è di luglio la probabilità diventa 0.92, se è di marzo è 0.03.

Definizione
Sia B un evento tale che $P(B)>0$. Allora la quantità:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

è detta **probabilità di A, condizionata a B** (o **dato B**).

Esercizi

1. Qual è la probabilità che, lanciando una moneta 10 volte, esca 10 volte croce?
2. E sapendo che nei primi 9 lanci è uscito croce?

Risposta I quesito. Sia A = {esce 10 volte croce} → $P(A)=\frac{\text{n° casi favorevoli}}{\text{n° casi possibili}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$.

Risposta II quesito. Se si è verificato B = {nei primi 9 lanci 9 croci}, allora abbiamo che

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{2}.$$

Osservazione
Calcolare la probabilità di un evento dato B è come cambiare spazio campionario, cioè da Ω ci si restringe a B. Fissato B, la funzione $P(\,.\,|B)$, cioè quella che all'evento A associa il numero $P(A|B)$ *è una probabilità su Ω* (purché $P(B)>0$, altrimenti non è definita).

Definizione
Una famiglia $\{B_j\}_j$, finita (cioè $\{B_j\}_{j=1}^{n}$) oppure numerabile (cioè $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$) è una **partizione di Ω** se

a. $\bigcup_{j=1}^{n} B_j=\Omega$ opp. $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j=\Omega$ (e quindi $B_j\subseteq\Omega\ \ \forall j$);
b. $B_i\cap B_j=\varnothing\quad \forall i\neq j$ (cioè sono disgiunti).

Teorema (**legge delle probabilità totali**)
Sia $\{B_j\}_j$ una partizione di Ω con $P(B_j)>0\quad\forall j$. Allora per ogni evento A

$$P(A)=\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j) & \text{nel caso finito}\\ \sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j)P(B_j) & \text{nel caso numerabile}\end{cases}.$$

Osservazione
Alle volte è più facile calcolare le probabilità condizionate che non condizionate, ed è in questi casi che la legge delle probabilità totali risulta utile.

Esercizio
Si abbiano due urne, l'urna "a" contiene 2 palline rosse e 1 nera; l'urna "b" contiene 3 palline rosse e 2 nere. Si sceglie a caso un'urna e si estrae una pallina. Qual è la probabilità che sia nera?
Risposta. Se sapessimo qual è l'urna scelta non sarebbe difficile, perciò conviene usare il teorema, siano: A = {ho scelto l'urna "a"}, B = {ho scelto l'urna "b"}, N = {estraggo una pallina nera}, R = {estraggo una pallina rossa}. Allora: $P(N/A)=\frac{1}{3}$; $P(N/B)=\frac{2}{5}$; $P(A)=\frac{1}{2}$; $P(B)=\frac{1}{2}$.
Quindi $P(N)=P(N|A)\cdot P(A)+P(N|B)\cdot P(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{11}{30}=0.3\overline{6}$.

NOTA Non sarebbe stata la stessa cosa pensare che le palline fossero tutte in un'urna sola!

Ora chiediamoci: se estraiamo una pallina nera, qual è la probabilità che l'urna da cui stiamo pescando sia la "b"?
In pratica si tratta di "rovesciare" le probabilità condizionate, infatti ci stiamo chiedendo la $P(B|N)$.

$$P(B/N)=\frac{P(B\cap N)}{P(N)} \quad \text{e} \quad P(N/B)=\frac{P(B\cap N)}{P(B)}$$

Da cui ricaviamo:

$$P(B\cap N)=P(B/N)\cdot P(N)=P(N/B)\cdot P(B) \;\rightarrow\; P(B/N)=\frac{P(N/B)\cdot P(B)}{P(N)}=\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{11}{30}}=\frac{6}{11}=0.\overline{54}.$$

Usando la legge delle probabilità totali per scrivere il denominatore si ottiene:

$$P(B/N)=\frac{P(N/B)\cdot P(B)}{P(N)}=\frac{P(N/B)\cdot P(B)}{P(N/A)\cdot P(A)+P(N/B)\cdot P(B)}.$$

Qui abbiamo A e B che partizionano Ω (spazio delle scelte dell'urna) e condizioniamo rispetto ad A e B, nel caso generale si ottiene la *formula di Bayes*.

Teorema (formula di Bayes)
Sia A un evento tale che $P(A)>0$ e $\{B_j\}_j$ una famiglia di eventi tale che siano una partizione di Ω con $P(B_j)>0 \quad \forall j$. Allora $P(B_k|A)=\frac{P(A|B_k)\cdot P(B_k)}{\sum_j P(A|B_j)\cdot P(B_j)}$.

Osservazione
La formula di Bayes serve per "rovesciare" le probabilità condizionate.

Esempio (applicazione della formula Bayes nei test clinici)
In un test clinico, un individuo si sottopone a delle analisi di laboratorio per scoprire se ha o meno una certa malattia. Il test dà risultato *positivo* se indica la presenza della malattia, *negativo* in caso contrario. Ci possono essere degli errori:

1. un individuo sano dà risultato positivo, detto appunto *falso positivo*;
2. un individuo malato dà risultato negativo, detto appunto *falso negativo*.

Siano M = {l'individuo è malato}, S = {l'individuo è sano}, P^+ = {il test risulta positivo}, N^- = {il test risulta negativo}.
Alcune probabilità condizionate sono importanti:

$P(P^+|M)$ = sensibilità del test (la probabilità che un individuo malato risulti positivo).

$P(N^-|S)$ = specificità del test (la probabilità che un individuo sano risulti negativo).

$P(M|P^+)$ = valore predittivo del test (la probabilità che un positivo sia veramente malato).

Utilizzando Bayes: $$P(M \mid P^+) = \frac{P(P^+ \mid M)\cdot P(M)}{P(P^+ \mid M)\cdot P(M) + P(P^+ \mid S)\cdot P(S)}.$$

Osservazione
Per calcolare il valore predittivo oltre a sensibilità e specificità bisogna conoscere anche $P(M)$, cioè la *frequenza relativa con cui la malattia colpisce la popolazione* (dopo di che $P(S) = 1 - P(M)$).

Esercizio
Supponiamo che: il 5% della popolazione abbia la pressione alta; il 75% di chi ha la pressione alta beve alcolici; il 50% di chi ha la pressione normale beve alcolici. Qual è la percentuale dei bevitori che ha la pressione alta?
Risposta. Posto A = {individuo con pressione alta}, N = {individuo con pressione normale}, B = {individuo beve alcolici}. Sappiamo che $P(A) = 0.05$; $P(N) = 1 - P(A) = 0.95$; $P(B|A) = 0.75$; $P(B|N) = 0.5$. Ci chiediamo $P(A|B)$:
$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)\cdot P(A)}{P(B \mid A)\cdot P(A) + P(B \mid N)\cdot P(N)} = \frac{0.75\cdot 0.05}{0.75\cdot 0.05 + 0.5\cdot 0.95} = 0.073$$

Indipendenza

Per rendere conto di quanto la conoscenza di nuove informazioni modifica le nostre valutazioni della probabilità abbiamo introdotto la probabilità condizionata: se voglio la probabilità di un evento A, ma *so che si è verificato B* allora anziché $P(A)$ considererò $P(A|B)$.
Alle volte però può succedere che la nuova informazione non cambi la valutazione della probabilità, ad esempio sapere che oggi la massima temperatura non supererà i 28° non mi dovrebbe dire nulla sull'esito del lancio di un dado che volessimo lanciare!
In generale si dà una definizione matematica:

Definizione Due eventi A e B si dico **indipendenti** se $P(A \cap B) = P(A)\cdot P(B)$. (*)

Nota Bene
La definizione va bene anche nel caso $P(A) = 0$ oppure $P(B) = 0$. Se però $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$ allora (*) è equivalente a: $P(A \mid B) = P(A)$ e $P(B \mid A) = P(B)$.

Osservazioni

- Il nota bene dice che la definizione è "giusta": A e B (che abbiano probabilità positiva) sono indipendenti se e solo se sapere che uno si è verificato non modifica la probabilità dell'altro.
- Se conosciamo $P(A), P(B)$ e $P(A \cap B)$ allora (*) è l'equazione da verificare per decidere se A e B sono indipendenti.
- Altre volte invece si *ritiene a priori che due eventi sono indipendenti* e si usa (*) per calcolare la probabilità dell'intersezione.

Esempi

1. Nell'esempio delle due urne visto in precedenza l'evento "ho scelto l'urna "a"" e l'evento "estraggo una pallina nera" non sono indipendenti (calcolare per credere come *esercizio* …).
2. Se lanciamo due dadi è ragionevole *assumere a priori* che l'evento "il primo dado dà 5" e l'evento "il secondo dado dà 2" siano indipendenti (il risultato di un dado non influenza quello dell'altro).

Osservazione Non è sempre evidente che due eventi sono indipendenti.

Esempio
Lanciamo un dado. Sia A ={esce un pari}, B = {esce un numero ≥3}. Allora $P(A) = 2/6 = 1/2$; $P(B) = 4/6 = 2/3$; $P(A \cap B) = 2/6 = 1/3 = P(A) \cdot P(B) \rightarrow$ A e B sono indipendenti.
Sia C = {esce un numero >3}, allora $P(C) = 1/2$ $P(A \cap C) = 2/6 = 1/3 \neq 1/4\, P(A) \cdot P(C)$ $\rightarrow$ A e C non sono indipendenti.

La definizione di indipendenza vista vale per *coppie di insiemi*, ma si può estendere a *famiglie di eventi*.

Definizione
$A_1, \ldots, A_n$ sono una **famiglia di eventi indipendenti** se ogni volta che ne scegliamo r ($2 \le r \le n$) la probabilità dell'intersezione di questi r è uguale al prodotto delle probabilità di ciascuno di essi:

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j) \quad \forall i \neq j$$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i) \cdot P(A_j) \cdot P(A_k) \quad \forall i \neq j, i \neq k, k \neq j$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Esempio
Lanciando due dadi, gli eventi: A_1={il primo dado dà pari}, A_2={il primo dado dà un numero ≥3}, A_3={il secondo dado dà pari}, A_4={il secondo dado dà un numero ≥3}.

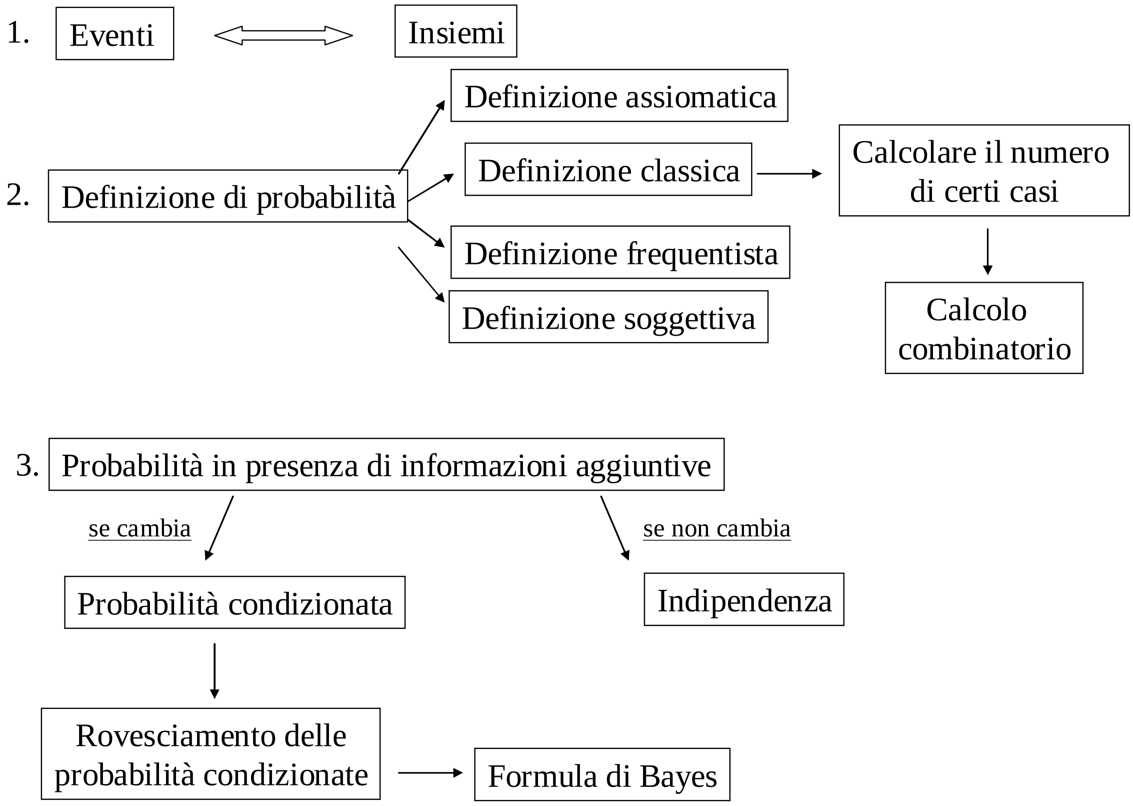
Attenzione
Non basta verificare che gli eventi siano *a due a due indipendenti*

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j) \quad \forall i \neq j,$$

infatti anche così potrebbero non essere *indipendenti come famiglia*.

Esempio (di Berstein)
Sia abbia un tetraedro (solido con 4 facce triangolari) con una faccia gialla, una rossa, una blu e una coi tre colori. Scegliamo una faccia a caso: G = {faccia colore giallo}, R = {faccia colore rosso}, B = {faccia colore blu}. Allora: $P(G) = P(R) = P(B) = 1/2$, $P(G \cup R \cup B) = 1/4 \neq P(G) \cdot P(R) \cdot P(B)$. Ma $P(G \cup R) = P(G \cup B) = P(B \cup R) = 1/4 = P(G) \cdot P(R) = P(G) \cdot P(B) = P(B) \cdot P(R)$.
Dunque G, R e B non sono una famiglia indipendente ma sono a due a due indipendenti.

Ricapitolando



Esercizi per casa

1. In un esame clinico per la diagnosi di una certa malattia il 6% di coloro che sono sottoposti al test risultano positivi (ma non tutti hanno la malattia), mentre il 5% in realtà ha la malattia (ma non tutti risultano positivi). Si determini la probabilità che una persona malata risulti positiva al test, sapendo che la probabilità che un persona che risulta positiva al test sia malata è 0.8.

2. Un'urna contiene 6 palline bianche e 4 nere; se ne estraggono 3 senza reimmissione. Qual è la probabilità di estrarre B, N, N (in quest'ordine)?

3. In una partita di scopa, 40 carte vengono distribuite tra 4 giocatori, 10 carte a testa. Si calcoli la probabilità che un giocatore abbia serviti in una partita: *a*. almeno un sette; *b*. due sette (e non di più); *c*. due sette (e non di più), sapendo che ne ha almeno uno; *d*. il sette di quadri e un altro sette.

Variabili aleatorie discrete e loro distribuzioni

Una *variabile aleatoria* (*casuale*) è una quantità che può assumere diversi valori (è variabile), in dipendenza dal caso (aleatoria).

Esempio
Se giocando alla roulette puntiamo 2 € sul rosso, 6 € sul dispari e 1 € sul 5, la somma che ci verrà data dopo l'uscita del numero (potrebbe essere anche zero …) è una variabile aleatoria, poiché dipende *in modo univoco* dal numero che uscirà, il quale dipende dal caso, è infatti un elemento di $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 36\}$ su cui c'è la probabilità $P(\{\omega_k\}) = 1/37$. Quindi la nostra vincita è una funzione definita su Ω.

Definizione
Data uno spazio campionario discreto Ω, è detta **variabile aleatoria** (**v.a.**) **discreta** una qualunque funzione definita su Ω a valori reali $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Osservazione
Dato $\omega \in \Omega$, $X(\omega)$ è univocamente determinato poiché X è una funzione.

Esercizio
Nell'esempio della roulette, la vincita è determinata univocamente dal numero che uscirà. Allora dov'è il caso?
Risposta. Nella scelta di $\omega \in \Omega$, che è governata da P (P è la probabilità che "vive" su Ω).

Nell'esempio della roulette ogni $\omega \in \{0, 1, \dots, 36\}$ ha probabilità 1/37 di uscire.
Sempre nell'esempio, è chiaro che ci interesserà qual è la probabilità, per esempio, di vincere qualcosa, cioè se X è la variabile "vincita", ci interessa la probabilità che "$X > 0$". In formule:

$$P\left(\omega \in \Omega : X\left(\omega\right) > 0\right)$$

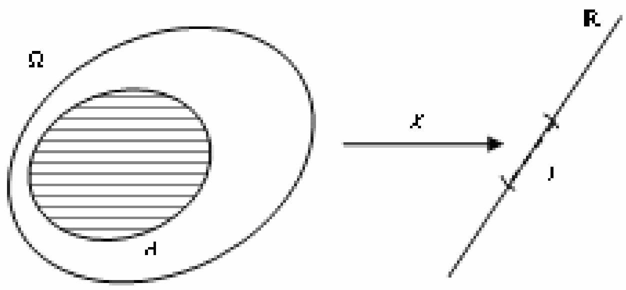
(" probabilità dell'insieme degli elementi di Ω tali che X di ω è maggiore di zero").

Osservazione
La probabilità è definita su Ω, ecco perché abbiamo dovuto scrivere così!

Notazione
In realtà nella pratica spesso "ci si dimentica" di Ω e si usa una notazione più succinta:

$$\left(X = a\right) = \left(\omega \in \Omega : X\left(\omega\right) = a\right),\ \left(X > b\right) = \left(\omega \in \Omega : X\left(\omega\right) > b\right),\ \left(X \in \left(a,b\right]\right) = \left(\omega \in \Omega : X\left(\omega\right) \in \left(a,b\right]\right), \dots$$

Dunque gli "ω" non compaiono, restano sottointesi. $\left(X \in I\right)$ dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un *evento*, cioè un sottoinsieme di Ω, quello degli ω tali che $X(\omega) \in I$.



Se tutti e soli gli elementi di A "vengono mandati in I" da X, allora A è l'evento $(X \in I) = A$.

Osservazione
($X \in I$) coincide con l'insieme $X^{-1}(I)$ delle *controimmagini di I tramite X*.

Facciamo tornare in gioco la probabilità.

Definizione
La **legge** o **distribuzione di una v.a.** è la funzione che associa ad ogni intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ il numero $P(X \in I)$.

Osservazione
La legge di una v.a. è una probabilità $\tilde{P}(I) = P(X \in I)$. A voler essere pignoli $\tilde{P}$ agisce sugli intervalli di $\mathbb{R}$ e noi abbiamo parlato solo di probabilità su spazi campionari discreti … in effetti la trattazione delle probabilità su $\mathbb{R}$ porta a delle complicazioni matematiche che esulano da questa breve trattazione (ecco perché abbiamo saltato i casi continui e le v.a. continue).

Se restiamo ancora un po' nel caso discreto ci accorgiamo di aver "scomodato" $\mathbb{R}$ inutilmente. Infatti una v.a. discreta assume al massimo un'infinità di valori numerabili, cioè valori $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ (Ω, è al più numerabile e ad ogni $\omega \in \Omega$ corrisponde uno e un solo valore …).

Definizione
La v.a. X che indica il *successo* (X=1) o l'*insuccesso* (X=0) in una prova o esperimento aleatorio si chiama **bernoulliana di parametro *p*** e si indica con $X \sim B(p)$.

Esempio
Il lancio di una moneta è una *prova di Bernoulli*, perché può uscire solo testa o croce. Passiamo chiamare "testa" "successo" (1) e "croce" "insuccesso" (0). Allora la v.a. X, che vale 1 se esce testa e 0 se esce croce, è bernuolliana di parametro p = 1/2.

Osservazione
Non è necessario che i risultati dell'esperimento siano solo di due tipi, ma che per i nostri scopi o interessi possiamo identificare due insiemi di risultati, A e B, e chiamare i risultati in A "successo" e quelli in B (= A^c) "insuccesso".

Esempio
Se al gioco della roulette puntiamo sul 15 e sul 26, i risultati possibili sono i numeri da 0 a 36, ma per i nostri interessi sono solo di due tipi: "successo" se esce il 15 o il 26 (dunque l'insieme A = {15, 28}) e "insuccesso" se esce qualcos'altro (cioè A^c).

Se ripetiamo più volte un esperimento di Bernoulli otteniamo il *processo di Bernoulli*.

Definizione
E' detta **processo di Bernoulli** una sequenza di prove di Bernoulli, tutte con lo stesso parametro p e tra loro indipendenti. La sequenza può essere costituita da un numero finito di prove $X_1, X_2, \ldots, X_n$; oppure essere infinita (numerabile) $X_1, X_2, X_3, \ldots$. Nel secondo caso diciamo che il processo è **illimitato**.

Esempi
Lanciare n volte una moneta; giocare alla roulette puntando sul numero 10 finché non si vince (potenzialmente potremmo dover giocare infinite volte …).

Osservazione
Legate a un processo di Bernoulli ci sono delle domande abbastanza naturali:

1. Quanti successi otteniamo in *n* prove? (Ad esempio, quante teste nel lancio di una moneta).
2. Quanto dobbiamo aspettare per vedere un successo? (Ad esempio, per vincere alla roulette).

La risposta in entrambi i casi è data da una v.a.

Definizione
La v.a. *X* che conta il *numero totale di successi in n prove* di un processo di Bernoulli di parametro *p* si chiama **binomiale di parametri *n* e *p***, e si indica con $X \sim B(n, p)$.

Osservazioni

1. Se $n = 1$ riotteniamo una v.a. bernoulliana, cioè $X \sim B(1, p) = B(p)$.
2. *Nota Bene* una *binomiale* può essere vista come la *somma di n v.a. bernoulliane indipendenti e di parametro p*.
   Infatti se $X_1, X_2, \dots, X_n$ sono le v.a. del processo di Bernoulli che stiamo considerando X_i vale: 1 se "in posizione *i*" c'è stato un successo, 0 altrimenti.
   Dunque in $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ci sono tanti 1 quanti sono i successi e quindi $(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \sim B(n, p)$.
3. L'ipotesi di *indipendenza* è fondamentale (cioè il fatto che l'esito di una prova non influenza le altre), perché, ad esempio, se scegliessimo $X_1 = X_2 = \dots = X_n$ allora potremmo avere solo *n* oppure 0 successi.

Proposizione
Se $X \sim B(n, p)$, *X* può assumere i valori interi compresi fra 0 e *n* con probabilità data da[12]:

$$f_X(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Esercizi

1. Un test ha 10 domande con 4 risposte per ogni domanda, una sola delle quali corretta. Per superare il test bisogna rispondere correttamente ad almeno 8 domande. Qual è la probabilità di superare il teste rispondendo a caso?
   Risposta. Ogni domanda è una prova di Bernoulli di parametro 1/4 (la probabilità di rispondere correttamente). Il numero totale di risposte esatte è allora una v.a. $X \sim B(10, 0.25)$. La probabilità si passare il test è $P(X \geq 8)$.
   $$P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = \quad \text{(finita additività)}$$
   $$= \binom{10}{8}(0.25)^8 (0.75)^2 + \binom{10}{9}(0.25)^9 (0.75) + \binom{10}{10}(0.25)^{10} = \dots = 0.004158 = 0.04\%$$
2. È più facile fare almeno un 6 lanciando un dado 4 volte, o fare almeno un doppio 6 lanciando due dadi 24 volte?
   Risposta. Nel primo caso abbiamo 4 prove di Bernoulli di parametro $p=1/6$, perciò $X \sim B(4, 1/6)$ e ci si chiede $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - P(\text{ci sono 4 insucessi})$. Conviene considerare $Y \sim B(4, 5/6)$, dove i "successi" di *Y* sono gli "insuccessi" di *X*:
   $$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - P(Y = 4) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.5177 \cong 52\%.$$

[12] Tale probabilità di assumere i valori interi compresi fra 0 e *n* è detta *densità discreta*.

Per il secondo caso le prove sono 24 e p=1/36. come prima abbiamo $X \sim B(24, 1/36)$ e ci si chiede $P(X \geq 1)$ = ? ed è più comodo considerare $Y \sim B(24, 35/36)$, e quindi

$$P(X \geq 1) = 1 - P(Y = 24) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.4914 \cong 49\% .$$

Quindi è più facile fare almeno un 6 lanciando un dado 4 volte.

3. (*Probabilità di vincere alla lotteria*) Un giocatore compra ogni anno un (solo) biglietto alla lotteria nazionale che vende 5 milioni di biglietti $p = 2 \cdot 10^{-7}$ probabilità di vincita ogni anno (se la fortuna non fa preferenze). Qual è la probabilità di: vincere 2 volte in 5 anni?, vincere *almeno* 2 volte in 5 anni?, non vincere mai in 5 anni?
Risposta. Se ogni anno vengono venduti lo stesso numero di biglietti e se le estrazioni sono indipendenti, allora sia X = "numero di successi in 5 esperimenti i.i.d"

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 \cong 4 \cdot 10^{-13};$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (1-p)^5 - 5p(1-p)^4 \cong 8 \cdot 10^{-13};$$

$$P(X = 0) = (1-p)^5 = 0.999999 .$$

Ora rispondiamo alla domanda: "Quanto bisogna aspettare per avere un successo, cioè il primo?

Definizione
La v.a. X che conta *il numero di prove* necessarie *per ottenere il primo successo* in un processo di Bernoulli illimitato di parametro p si chiama **geometrica di parametro *p*** e si indica con $X \sim G(p)$.

Proposizione
Se $X \sim G(p)$, X può assumere tutti i valore interi a partire da 1, e ha densità discreta

$$f_X(k) = P(X = k) = p(1-p)^{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots) .$$

Esercizio
Lanciamo un dado, guardando se esce il 6. E' un processo di Bernoulli di parametro 1/6 (6 equivale a "successo").

a. Qual è la probabilità che per ottenere 6 occorra lanciarlo più di 6 volte?
b. Qual è la probabilità che dopo aver visto il 6 una prima volta, occorra lanciare il dado esattamente altre 5 volte per vedere il secondo 6?

Risposta.

a. Se $X \sim G(1/6)$, la probabilità è $P(X > 6) = \sum_{k=7}^{\infty} P(X = k) = 1 - \sum_{k=1}^{6} P(X = k) =$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{6} p(1-p)^{k-1} = 1 - \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = 0.335 .$$

b. Dopo che il 6 è uscito una prima volta, è come se ricominciassimo il processo da capo, perciò la v.a. è ancora una $Y \sim G(1/6)$, quindi $P(Y = 5) = p(1-p)^4 = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^4 \cong 0.0803 = 8.03\%$.

Esempio (*Paradosso della scimmia*)
Supponiamo che una scimmia seduta alla tastiera di un computer batta i tasti a caso, cioè con la stessa probabilità e con battute indipendenti. Sia T il tempo che la scimmia abbia di battere la *Divina Commedia* (circa 554000 battute!). Allora $P(A)$=1!!

Come dimostrarlo? Il “prodotto” della scimmia è un’unica sequenza di caratteri (tra cui anche gli spazi), tra cui dobbiamo vedere se c’è, a partire da una qualsiasi posizione, la sequenza dei 554000 caratteri della *Divina Commedia*. Il modello è un processo di Bernoulli che ora definiamo: quando la scimmia batte il primo tasto ha la probabilità 1/100 di scegliere il primo carattere della *Divina Commedia*, se ne sceglie un altro possiamo considerare la seconda battuta come la prima di un secondo tentativo prosegue e la probabilità di scegliere ora il secondo carattere della *Divina Commedia* è 1/100, e così via. Quindi un “tentativo” (che sarà la nostra prova di Bernoulli) è una sequenza di caratteri più o meno lunga, che si conclude in due casi

a. la scimmia batte la *Divina Commedia*, cioè p = probabilità che scimmia batta *Divina Commedia* nel periodo di lunghezza T;
b. la scimmia fa il primo errore.

Dunque la probabilità di “successo” è $p=(1/100)^{554000}=10^{-1108000}$.

Abbiamo modellizzato con un processo di Bernoulli illimitato, di parametro $p=10^{-1108000}$. Ci resta solo da dimostrare che: *in un processo illimitato di Bernoulli di parametro p* (qualsiasi, in (0, 1]) *l’evento A=”il numero di prove necessario per ottenere il primo successo è finito”, ha probabilità pari a* 1. “In formule” se $X\sim G(p)$, $P(X\in\mathbb{N})=1$, ma

$$P(X\in\mathbb{N})=\sum_{k=1}^{\infty}p(1-p)^{k-1}\overset{*}{=}p\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^{k}\overset{**}{=}p\frac{1}{1-(1-p)}=1.$$ [13]

In realtà abbiamo dimostrato di più (avete notato che il fatto che i tasti siano 100 e che la sequenza “giusta” abbia 554000 caratteri non è stato usato?). Abbiamo dimostrato che se abbiamo un numero finito di caratteri e una sequenza finita di caratteri: S, e costruiamo una sequenza infinita di caratteri alternandoli “a caso” (cioè con uguale probabilità e indipendenti), allora *la probabilità che la sequenza S sia “inserita” nella sequenza infinita, a partire da qualche punto, è pari a* 1.
Come caso particolare c’è il processo illimitato di Bernoulli (i “caratteri” sono solo 0 e 1). Quindi *in un processo illimitato di Bernoulli, scelta una qualsiasi successione* $S=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ *di “zeri” e “uni”, la probabilità che questa S compaia prima o poi è pari a* 1.

Se lo schema di Bernoulli è un modello adeguato, prima o poi la scimmia finirà per scrivere la *Divina Commedia*. Anzi, se scrive all'infinito, la scriverà infinite volte!

Eventi rari possono accadere!
Quando si verifica un evento raro, è però possibile che il nostro modello sia inadeguato.
Osservo lanciare una moneta 100 volte con esito 100 teste: si è verificata una delle 2^{100} sequenze possibili in uno schema di Bernoulli arrestato all'esperimento 100?
Vale la pena di verificare se il lanciatore non sia capace di lanciare la moneta in modo che ricada sempre dalla stessa parte, soprattutto se c'e una posta in gioco!

Assenza di memoria
La probabilità che il successo si verifichi dopo k esperimenti ulteriori se non si è verificato fino all'esperimento n:

$$P(X=n+k\mid X>n)=\frac{P(X=n+k,X>n)}{P(X>n)}=\frac{P(X=n+k)}{P(X>n)},$$

[13] * →cambio indice alla sommatoria; **→formula della serie geometrica: $\sum_{n=0}^{\infty}q^n=\frac{1}{1-q}\qquad(0<q<1)$.

ricordando che:

$P(X \in A, X \in B) = P\left(X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B)\right)$, $P(X > n) = P(n \text{ insucessi nei primi } n \text{ esperimenti}) = q^n$

allora:

$$P(X = n + k \mid X > n) = \frac{p(1-p)^{n+k-1}}{(1-p)^n} = p(1-p)^{k-1} = P(X = k)$$

Il ritardo non è influenzato (probabilisticamente) dal tempo di attesa già trascorso.

Esempio

Nel gioco del lotto il fatto che un numero sia ritardatario non modifica la sua probabilità di uscita futura! Calcoliamo la probabilità di uscita di un numero su una certa ruota. Abbiamo due modi di calcolo:

- $\dfrac{\text{numero di cinquine contenenti il numero}}{\text{numero di cinquine possibili}} = \binom{89}{4} \Big/ \binom{90}{5} = \dfrac{1}{18}$;
- $P(\text{"numero estratto"}) = P(\text{"numero 1° estratto"} \cup \ldots \cup \text{"numero 5° estratto"}) = 5 \cdot \dfrac{1}{90} = \dfrac{1}{18}$ [14].

Esercizi per casa

1. Una macchina per confezionare generi alimentari riempie meno del dovuto il 10% delle confezioni. Calcolare la probabilità che su 5 confezioni il numero di quelle sottopeso sia:
   a. esattamente 3; *b*. esattamente 2; *c*. zero; *c*. almeno 1.
2. Se lancio 2 dadi la probabilità di fare 12 è 1/36: dunque mi aspetto che in 36 lanci esca un 12. qual è la probabilità che ciò accada? Qual è il minimo numero di lanci da fare affinché la probabilità di uscita di un 12 sia almeno 0.5?
3. Verificare, utilizzando le densità discrete delle v.a. che hanno leggi *B*(*p*) e *B*(*n*, *p*), soddisfano la condizione $\sum_k p_X(k) = 1$.
4. Il 35% dell'elettorato è a favore del candidato Pinco Pallino. In una sezione elettorale votano 200 persone ("scelte a caso") e *X* è il numero di quelle che sono a suo favore.
   a. Determinare la probabilità che *X* sia maggiore di 75 (scrivere la formula esplicita che assegna questa probabilità, senza eseguire il calcolo numerico).
   b. A votazione conclusa, lo scrutatore inizia lo spoglio delle schede. Determinare la probabilità che il nome Pinco Pallino compaia per la prima volta alla quarta scheda scrutinata (fornire anche il risultato numerico).

[14] Estrazione senza reinserimento.

Valore atteso

Abbiamo visto che se diamo una macchina da scrivere ad una scimmia e la lasciamo fare questa prima o poi scriverà qualsiasi libro voi scegliate.
Naturalmente ci aspettiamo che per fare ciò ci metta abbastanza tempo: è naturale chiedersi "quanto tempo ci mette la scimmia prima di riuscire?" o meglio "quanti tentativi deve fare?"
Queste sono quantità aleatorie (che dipendono cioè dal caso), allora è più ragionevole chiedersi: "*mediamente*, quanti tentativi dovrà fare?"
E ci aspettiamo che la risposta dipenda dal numero di tasti della macchina e da quanto è lunga la sequenza "giusta".
Una formalizzazione rigorosa di quel "*mediamente*" che abbiamo inserito nella domanda, è data dal concetto di *valore atteso*.

Definizione

Se X è una v.a. il suo **valore atteso** o **media** o **speranza matematica** è il numero reale $\mathrm{E}(X) = \sum_k x_k \cdot f_X(x_k) = \sum_k x_k \cdot P(X = x_k) < \infty$, altrimenti si dice che X non ha valore atteso finito.

Osservazioni

- Gli x_k sono i valori che X può assumere, perciò se X assume un numero finito di valori, "$\sum_k$" è una somma finita; se X assume un numero *infinito* di valori "$\sum_k$" è una serie.
- non confondiamo $\sum_k f_X(x_k)$ con la somma (o serie) precedente, infatti $\sum_k f_X(x_k) = 1$ perché $P(X \in \{x_1, x_2, \ldots\})$, mentre in $\sum_k x_k f_X(x_k)$ compaiono anche gli x_k.
- E(X) (se esiste) è un *numero reale* (non è una quantità aleatoria!)
- Se X assume solo un numero finito n di valori: $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ed ognuno con probabilità $\frac{1}{n}$, allora $\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$ il valore atteso è *la media aritmetica dei valori assunti*.
  Questo è un caso particolare di E(X): $\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_X(x_k)$, dove x_k è il *valore assunto* e $f_X(x_k)$ è la *probabilità di assumerlo* ("peso" di x_k). Quindi E(X) può essere visto come *media pesata dei valori assunti* dove "pesano" di più i valori più probabili.
- E(X) può essere diverso da tutti gli x_k (ad esempio la media aritmetica di n numeri può essere diversa da ciascuno), quindi E(X) *non è* il valore più probabile di X semmai è il valore attorno a cui X è "centrata" (ricordiamo la media aritmetica vista in Fisica: "teoria degli errori" e "statistica descrittiva")

Esempi

1. Sia X il punteggio di un dado: $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} k = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3.5$.
2. Sia X la soma del punteggio di due dadi:
$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{6} k \cdot f_X(k) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + \ldots + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7.$$
3. Una lotteria ha i seguenti premi: 1° premio: 3 milioni di euro; 2° premio: 2 milioni di euro; 3° premio: 1 milione di euro; 5 premi da 100000 €; 20 premi da 10000 €; 100 premi da

1000 €. Si vendono 2 milioni di biglietti, ciascuno dei quali costa 5 €. Qual è il valore atteso della vincita? Conviene acquistare un biglietto?
Risposta. Sia X = "vincita con un biglietto". Allora:

$$P(X=3000000)=P(X=2000000)=P(X=1000000)=\frac{1}{2000000};$$

$$P(X=100000)=\frac{5}{2000000};\quad P(X=10000)=\frac{20}{2000000};\quad P(X=1000)=\frac{100}{2000000}$$

$$\mathrm{E}(X)=3000000\cdot P(X=3000000)+2000000\cdot P(X=2000000)+1000000\cdot P(X=1000000)+$$
$$+100000\cdot P(X=100000)+10000\cdot P(X=10000)+1000\cdot P(X=1000)=3.4\text{ €}$$

Dunque, mediamente, spendendo 5 € se ne vincono 3.4 €. Il gioco quindi è iniquo, cioè a sfavore di chi acquista i biglietti.
Naturalmente uno può ritenere che pur essendo il gioco sfavorevole perder 5 € sia un "danno" accettabile vista la possibilità di vincere 3 milioni, ma questo esula dalla matematica … .

4. Assicurarsi può essere visto come un gioco d'azzardo dove si paga un premio s per ricevere una somma di denaro X aleatoria (che dipende dal fatto che avvenga o no l'evento contro cui ci si assicura). Le assicurazioni calcolano E(X) in modo da guadagnare, <u>*mediamente*</u>, s – E(X).

<u>*Proprietà del valore atteso*</u>

a. Linearità

- Se X è una v.a. con E(X) finito, e $a,b\in\mathbb{R}$, allora $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$.
- Se $X_1,\ldots,X_n$ sono v.a. con valore atteso finito, allora $\mathrm{E}(X_1+\ldots+X_n)=\mathrm{E}(X_1)+\ldots+\mathrm{E}(X_n)$

b. Prodotto di indipendenti

- Se $X_1,\ldots,X_n$ sono v.a. <u>*indipendenti*</u> con E(X) finito → $\mathrm{E}(X_1\cdot\ldots\cdot X_n)=\mathrm{E}(X_1)\cdot\ldots\cdot\mathrm{E}(X_n)$

c. Valore atteso di Y = g(X)

Se X è una v.a. e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, allora il valore atteso di $Y = g(X)$ $\mathrm{E}\left[\mathrm{g}(\mathrm{X})\right]=\sum_k g(x_k)\cdot f_X(x_k)$

<u>*Esercizio*</u>
Se X è il punteggio di un dado, quanto vale E(X^2) ?
Risposta. Chiamiamo $Y=g(X)=X^2$, dove $g(x)=x^2$ $\mathrm{E}(Y)=\sum_{k=1}^{6}k^2\frac{1}{6}=\frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36)=15.\overline{16}$.

<u>*Valore atteso delle v.a. legate al processo di Bernoulli*</u>

- $X\sim B(p)\ \Rightarrow\ \mathrm{E}(X)=p$, infatti $\mathrm{E}(X)=1\cdot p+0\cdot(1-p)=p$.
- $X\sim B(n,p)\ \Rightarrow\ \mathrm{E}(X)=\sum_{k=0}^{n}k\cdot\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, la formula risulta un po' complicata da calcolare, ci serve un trucco. Abbiamo visto che X può essere vista come somma di v.a. di Bernoulli: $X=X_1+\ldots+X_n$ con $X_i\sim B(p)$ $\forall i$ da cui, usando la linearità di E:

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i)=np.$$

- $X \sim G(p) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}(X) = \dfrac{1}{p}$, infatti $\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p(1-p)^{k-1} = \dfrac{1}{p}$.

<u>*Esempio*</u> (*paradosso della scimmia*)
Torniamo a chiederci quanti tentativi deve fare la scimmia per scrivere la *Divina Commedia*. I tentativi erano un processo di Bernoulli con parametro $p = 10^{-1108000}$. Il valore atteso di una $G(p)$ (variabile che conta il numero di prove che servono per vedere il primo successo) è $1/p$, perciò serviranno mediamente $10^{1108000}$ tentativi. Ogni tentativo è almeno una battuta, perciò il numero di battute è almeno (mediamente) $10^{1108000}$ battute (a esser precisi l'ultimo tentativo ha 554000 battute, perché è il "successo", ma rispetto a $10^{1108000}$, 554000 è molto piccolo). Se pensiamo che la scimmia batta 10 tasti al secondo, il tempo medio è maggiore o uguale a $10^{1107999}$secondi $\cong 10^{1107991}$ anni (l'età dell'universo è $\cong 10^{10}$ anni !).

<u>*Esercizi per casa*</u>

1. In una linea produttiva la frequenza relativa con cui sono prodotti pezzi difettosi è 0.2. Considerando 10 pezzi prodotti consecutivamente.
   a. Qual è la probabilità che tra questi ce ne siano esattamente 4 difettosi?
   b. Qual è il numero medio di pezzi difettosi?
   c. Qual è la probabilità che il numero di pezzi difettosi non superi il numero medio di pezzi difettosi?

2. Indicare, per ciascuna delle seguenti situazioni, se le ipotesi del modello bernoulliano sono soddisfatte. Consideriamo la produzione industriale di pezzi che possono essere o non essere entro prefissati limiti di tolleranza.
   a. Per evitare la noia, un operaio al tornio passa, di tanto in tanto, da tipi di lavori "facili" ad altri "difficili".
   b. Un altro operaio lavora con un solo tipo di articolo, ma diventa molto trascurato dopo pranzo e poco prima dell'ora di uscita.
   c. Ogni macchinista nell'impianto verifica le dimensioni dei pezzi prodotti, e diventa più attento se trova un pezzo fuori dai limiti di tolleranza.
   d. Alcuni apparecchi hanno una taratura automatica che gradualmente si allontana dal valore desiderato.

3. Un ispettore per il controllo di qualità rifiuta una partita di schede a circuiti stampati se in un campione di 20 schede sottoposte a test vengono trovati 3 o più pezzi difettosi. Determinare il numero atteso di pezzi difettosi e la probabilità di rifiutare una partita se la proporzione di pezzi difettosi nell'intera partita è: *a*. 0.01; *b*. 0.05; *c*. 0.1; d. 0.2.

4. I traghetti da Bellagio per Varenna partono ogni l0 minuti. Il signor Rossi è in vacanza a Bellagio per 6 giorni, ed ogni giorno sceglie a caso un istante in cui recarsi al molo d'imbarco. Lo stesso fa anche il signor Brambilla, che invece trascorre a Bellagio un periodo di 30 giorni.
   a. Calcolare la probabilità *p* che, in un dato giorno, il signor Rossi attenda più di 7 minuti.
   b. Sia *X* la v.a. che denota il numero dei giorni in cui il signor Rossi attende il traghetto per più di 7 minuti. Qual è la distribuzione di *X*? Calcolare E(*X*).
   c. Sia *Y* la v.a. che denota il numero di giorni in cui il signor Brambilla attende il traghetto per più di 7 minuti. Qual è la distribuzione di *Y*? Calcolare E(*Y*).

Probabilità e giochi

Calcolo di probabilità nei giochi: lotto, superenalotto, dadi, roulette

Calcoliamo le probabilità dell'evento: "il giocatore vince al gioco del…"

Lotto

- Estratto semplice $P\left(Estratto\right)=\frac{\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}}=\frac{1}{18}=0.0555\simeq 5.5\%$.
- Ambo $P\left(Ambo\right)=\frac{\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}}=\frac{2}{801}\simeq 0.002496\simeq 0.25\%$.
- Terno $P\left(Terno\right)=\frac{\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}}=\frac{1}{11748}\simeq 0.0000851\simeq 0.0085\%$.
- Quaterna $P\left(Quaterna\right)=\frac{\binom{86}{1}}{\binom{90}{5}}=\frac{86}{\binom{90}{5}}=\frac{1}{511038}\simeq 0.0000019\simeq 0.00019\%$.
- Cinquina $P\left(Cinquina\right)=\frac{1}{\binom{90}{5}}=\frac{1}{43949268}\simeq 0.0000000227\simeq 0.00000227\%$.

Superenalotto

- Tre $P\left(Tre\right)=\frac{\binom{6}{3}\binom{84}{3}}{\binom{90}{6}}\simeq 0.00306\simeq 0.031\%$.
- Quattro $P\left(Quattro\right)=\frac{\binom{6}{4}\binom{84}{2}}{\binom{90}{6}}\simeq 0.0000839\simeq 0.0084\%$.
- Cinque $P\left(Cinque\right)=\frac{\binom{6}{5}\binom{84}{1}}{\binom{90}{6}}=\frac{6\cdot 84}{622614630}\simeq 0.0000008\simeq 0.00008\%$.

- Cinque+uno $P\left(Cinque+Uno\right)=\dfrac{6}{\binom{90}{6}}=\dfrac{6}{622614630}$.
- Sei $P\left(Sei\right)=\dfrac{1}{\binom{90}{6}}=\dfrac{1}{622614630}$.

Dadi

Il gioco dei dadi consiste nel lanciare una coppia di dadi, se esce:

- 7 o 11 il giocatore vince;
- 2, 3 o 12 il giocatore perde;
- un altro numero {4,5,6,8,9,10}→ il "punto" del giocatore, il giocatore deve lanciare i dadi fino a quando non esce:
  - o il suo "punto", nel qual caso vince;
  - oppure 7, nel qual caso perde.

- $P\left(due\right)=\dfrac{n_2}{n_T}=P\left(dodici\right)=\dfrac{n_{12}}{n_T}=\dfrac{1}{36}$.
- $P\left(tre\right)=\dfrac{n_3}{n_T}=P\left(undici\right)=\dfrac{n_{11}}{n_T}=\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$.
- $P\left(quattro\right)=\dfrac{n_4}{n_T}=P\left(dieci\right)=\dfrac{n_{10}}{n_T}=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$.
- $P\left(cinque\right)=\dfrac{n_5}{n_T}=P\left(nove\right)=\dfrac{n_9}{n_T}=\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$.
- $P\left(sei\right)=\dfrac{n_6}{n_T}=P\left(otto\right)=\dfrac{n_8}{n_T}=\dfrac{5}{36}$.
- $P\left(sette\right)=\dfrac{n_7}{n_T}=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$.
- $P\left(\text{"Punto" e vince dopo n lanci}\right)=\left(\dfrac{n_p}{36}\right)^2\left(\dfrac{36-n_7-n_p}{36}\right)^{n-2}$, $n_4=n_{10}=3, n_5=n_9=4, n_6=n_8=5$
- $P\left(\text{"Punto" e vince}\right)=\left(\dfrac{n_p}{36}\right)^2\left[1+\left(\dfrac{36-n_7-n_p}{36}\right)+\left(\dfrac{30-n_7-n_p}{36}\right)^2\dots\right]=\left(\dfrac{n_p}{36}\right)^2\dfrac{1}{1-\dfrac{30-n_p}{36}}=\dfrac{n_p^2}{36\cdot\left(6+n_p\right)}$
- $P\left(\text{"4" e vince}\right)=\left(\text{"10" e vince}\right)=\dfrac{3^2}{36\cdot\left(6+3\right)}=\dfrac{1}{36}$
- $P\left(\text{"5" e vince}\right)=P\left(\text{"9" e vince}\right)=\dfrac{4^2}{36\cdot\left(6+4\right)}=\dfrac{2}{45}$
- $P\left(\text{"6" e vince}\right)=P\left(\text{"8" e vince}\right)=\dfrac{5^2}{36\cdot\left(6+5\right)}=\dfrac{25}{396}$

- $$P(\textit{il giocatore vince}) = P(11) + P(7) + 2\cdot P(4) + 2\cdot P(5) + 2\cdot P(6) = \\ = \frac{2}{36} + \frac{6}{36} + 2\cdot\left(\frac{1}{36}\right) + 2\cdot\left(\frac{2}{45}\right) + 2\cdot\left(\frac{25}{396}\right) \simeq 0.4929 \simeq 49.3\%$$

Roulette

Breve descrizione della versione americana del gioco.

- Ruota/cilindro divisa in 38 settori uguali: 36 numerati da 1 a 36: 18 rossi e 18 neri alternati e 2 due verdi 0 e 00.
- Varie puntate possono essere fatte: **I)** singolo; **II)** rosso, nero, pari, dispari, manque/bassi (1-18), passe/alti (19-36), **III)** dozzine: 1-12 (P), 13-24 (M), 25-36 (D), colonne di dodici n°: I (1--34), II(2—35), III(3--36), **IV)**etc.. (es il resto…)

Alcuni calcoli:

- $P(numero) = \frac{1}{38} \simeq 0.02631 \simeq 2.63\%$
- $P(rosso) = P(nero) = P(pari) = P(dispari) = P(1\text{-}18) = P(19\text{-}36) = \frac{18}{38} \simeq 0.47368 \simeq 47.4\%$
- $P(dozzine) = \frac{12}{38} \simeq 0.31578 \simeq 31.6\%$

Quote e guadagno probabile

Il giocatore di solito non parla in termini probabilità, preferisce parlare di quote, cioè il rapporto tra i casi sfavorevoli e quelli favorevoli.

Dadi
Il sette ha 6 casi favorevoli su 36 e 30 sfavorevoli, quindi le quote sono 5 contro 1 che il sette esce in un lancio. Mentre gli occhi del serpente (cioè il 2) è dato 35 a 1.

Roulette
Le quote per ogni singolo numero sono 37 a 1.

Lotto
Le quote per l'ambo sono 799 a 2.

Superenalotto
Le "quote" per il sei sono 622614629 a 1.

Esercizio
Trovare le quote per tutti i casi studiati nel gioco: dei dadi, della roulette, del Lotto, Superenalotto.

Se le quote contro un evento sono *n* a 1, significa che una *giusto payoff* (profitto = somma spettante al vincitore di una scommessa o gioco d' azzardo) se si vincesse la scommessa dovrebbe essere *n* € per ogni 1 € scommesso.
Naturalmente i payoff nel casinò/lotto non sono in accordo con le giuste quote, infatti esse sono sempre minori:

- **Dadi** il banco paga alla pari 1 a 1.
- **Roulette** paga il singolo numero 35 contro 1 … .
- **Lotto** per l'ambo paga 250 contro 1 … .

Domanda Nel superenalotto esistono le "quote"?

Osservazioni

- Nei giochi è molto importante il valore atteso di v.a.: speranza matematica (*guadagno probabile del giocatore*)
- Giuste quote dovrebbero dare il giusto payoff in un "gioco equo".
- Tutti i giochi del casinò e tutti i giochi/lotterie sono inerentemente iniqui e parziali contro il giocatore.
- Questo dà al casinò e ai gestori dei giochi/lotterie il loro vantaggio, cioè il modo di fare soldi a lungo termine a causa della *legge dei grandi numeri*. Nella roulette il vantaggio è dato dai 2 settori verdi 0 e 00.
- Alcune volte i giocatori hanno cercato di eliminare il vantaggio del casinò cercando di ottenere informazioni addizionali sul gioco incrementando così la loro probabilità di vincere: *sistemi/strategie di gioco*.

Giochi equi e iniqui

Consideriamo la v.a. che rappresenta le vincite di un individuo in un gioco, sia X = "guadagno" del giocatore: positivo, negativo o nulla, la somma di ogni vincita, perdita ed eventuali tasse/quote per giocare.
Il linguaggio dei giocatori usato qui sembra frivolo, ma il modello descritto ha un ampia applicazione: → l'acquisto di un qualsiasi tipo di assicurazione è un "gioco" dove si "vince" quando noi (o gli eredi) riscuotiamo, e le "perdite" sono i premi pagati.

Definizione
Un gioco è detto:

- ***equo*** se $E(X) = 0$
- ***vantaggioso*** se $E(X) > 0$
- ***svantaggioso*** se $E(X) < 0$

Osservazione
Il Casinò ha successo perché i giochi sono sempre sfavorevoli al giocatore.

Esercizi
Calcoliamo il *guadagno probabile del giocatore* nei giochi:

- *Gioco dei dadi*: ha un una speranza (valore atteso/medio) di
  $E(X) = 1\cdot(0.4929) + (-1)\cdot(0.5071) = -0.0142$ → perdita attesa del 1.4 % della posta.
- *Roulette*: puntando 1 € su
  - *rosso* $E(X) = 1\cdot(0.474) + (-1)\cdot(0.526) = -0.052$ →perdita attesa del 5% posta;
  - singolo numero $E(X) = 35\cdot(\frac{1}{38}) + (-1)\cdot\left(\frac{37}{38}\right) = -\frac{2}{38} = -0.052$ → 5%;
  - *gli altri casi per esercizio*.
- *Lotto*: puntando 1 € su
  - Ambo $E(X) = 249\cdot(0.0025) + (-1)\cdot(1-0.0025) = -0.3750$ → perdita attesa del 37,5% della posta
  - *gli altri casi per esercizio* usando vincite www.lottomatica.it:
    estratto semplice: 11.232 volte; *ambo*: 250 volte; *terno*: 4250 volte; *quaterna*: 80000 volte, *cinquina*: 1000000 di volte.

- *Superenalotto*: supponiamo che il jackpot sia 100000000 € = 10^8 €, con 1 € possiamo giocare una schedina con due combinazioni, ognuna delle quali ha la probabilità 1/622614630≅$1{,}61\cdot 10^{-9}$ di vincere il jackpot, da cui segue che si perde 1 € con la probabilità di 622614628/622614630≅$9.99\cdot 10^{-1}$, e si vince il jackpot con la probabilità di $3.22\cdot 10^{-9}$, assumendo per semplicità che non ci siano altri vincitori:

$$\mathrm{E}(X) \cong 10^8\cdot(3.22\ \cdot 10^{-9})+(-1)\cdot\left(9.99\cdot 10^{-1}\right)=0.322-0.999=-0.677$$

→ perdita attesa del 67.7% della posta.

Osservazioni

- Dal punto di vista della speranza (intesa come guadagno probabile) il gioco dei dadi è migliore del gioco della roulette.
- Ha senso giocare al lotto e superenalatto solo se si giocano piccole quantità di denaro, con la quasi certezza di perdere ma con la remota speranza di vincere grosse cifre.
  "L'emozione di un sogno milionario giustifica una piccola cifra giocata, e quasi certamente persa"
- *In termini di quote, un pagamento con le vere quote corrisponde a un gioco equo*.

Sistemi/strategia di gioco

Osservazione

Esiste strategia di gioco che permette di trasformare gioco sfavorevole in uno favorevole?

Esempio

Gioco in cui se punto i guadagno i se vinco e $-i$ se perdo → p probabilità di vincita

$$\mathrm{E}(X)=i\cdot p-i\cdot(1-p)=i(2p-1)$$ → gioco sfavorevole se $p < ½$

Punto 1, se perdo punto 2, se perdo punto 4,…fino a che vinco, poi punto 1…

Dopo n partite perse, ho perso $1+2+\ldots+2^n = 2^{n+1}-1$

Se vinco in partita $n + 1$ guadagno 2^{n+1} → guadagno complessivo 1!

Problema occorre disporre di un capitale illimitato, permesse puntate illimitate.

Osservazioni

- Non è possibile trasformare un gioco sfavorevole in uno favorevole se non si dispone di un capitale illimitato.
- Problema della *rovina del giocatore* con capitale limitato.

Legge dei grandi numeri e giochi

La Legge dei grandi numeri afferma semplicemente che, tante più prove usiamo per calcolare la stima, tanto più questa sarà vicina, *probabilmente*, alla probabilità reale dell'evento A.

Definizione (**Legge dei grandi numeri**)

La media campionaria di n v.a. discrete indipendenti X_i aventi la stessa media converge, al tendere di n all'infinito alla media reale μ delle v.a. X_i: $P\left(\lim_{n\to\infty}\overline{X}_n=\mu\right)=1$.

Vediamo la *Legge dei grandi numeri* cosa dice nel caso del **gioco dei dadi**:

- sia X = guadagno del giocatore ad ogni una giocata con posta di 1€;

- sappiamo che $\mathrm{E}(X) = -0.0142$;
- assumiamo che il giocatore continui a giocare → X_i guadagno al gioco *i*-esimo;
- ogni v.a. $X_i \sim X$ ed è ragionevole assumerle indipendenti;
- S_n = guadagno dopo *n* giocate → $\mathrm{E}(S_n) = (-0.0142)n$ € → perdita;
- poiché il numero *n* delle giocate aumenta velocemente → tale aspettativa diventa sempre più grande senza limite;
- usando la legge dei grandi numeri si può dire di più: "*La perdita media dopo molte giocate è circa di 1,5 centesimi, lo stesso che ci saremmo aspettati dopo una solo giocata*", questa è una notizia realmente molto deprimente per il giocatore, infatti per ogni numero negativo più grande di –0,0142 da esempio –0,13 si ha $\frac{S_n}{n} < -0{,}13 \quad \Rightarrow \quad S_n < (-0{,}13)\cdot n$ (*)
- se il giocatore gioca abbastanza a lungo il suo guadagno diventerà probabilmente sempre più negativo perchè *n* a destra di (*) diventerà sempre più grande → la sua perdita sarà sempre più grande senza limite → *n* cresce;
- →*una piccola perdita media si traduce in un enorme perdita quando il numero di giocate è grande, con probabilità molto vicina a 1, cioè certa*;

<u>*Esercizio*</u> Vedere la *Legge dei grandi numeri* nel caso del gioco: Roulette, Lotto, Superenalotto

<u>*L'errore/fallacia del giocatore*</u>

E' importante non leggere nella Legge dei grandi numeri cose che essa non dice, infatti i giocatori spesso nel desiderio di vincere mal interpretano la Legge dei grandi numeri: dopo un periodo sfortunato, di tentativi in un gioco, si dice che il prossimo tentativo/giocata è più favorevole perché la "Leggi dei grandi numeri" garantisce eventualmente un cambio di fortuna.
L'argomentazione è sbagliata poiché ad esempio ogni lancio dei dadi è *indipendente* dai precedenti lanci, infatti i dadi *non "ricordano"* che cosa è accaduto precedentemente e *non "cercano"* di *pareggiare* il punteggio.

Qual è la base dell'errore/fallacia del giocatore?
La Legge dei grandi numeri dice che, a lungo termine, la <u>*media*</u> in generale si avvicinano alla speranza matematica, cioè il valore atteso (<u>*guadagno probabile del giocatore*</u>). Quindi è vero che non si può perdere sempre, cioè prima o poi si vince, ma non si sa quando, certamente non si sa se la prossima (<u>*indipendenza*</u>), per cui si ha la certezza che la perdita aumenta (<u>*rovina del giocatore*</u>)

<u>*Assicurazioni e giochi*</u>

Vediamo come le assicurazioni calcolano il premio annuo di una assicurazione sulla vita, sottolineando come il risultato renda il "gioco" sfavorevole per il cliente.

- Uomo di 36 anni, polizza vita ventennale, indennizzo familiari in caso di morte 150.000 €
- Sia $p_{36,i}$ probabilità di sopravvivere ancora *i* anni per uomo di 36 anni, 1< *i*< 20
- Tavole di mortalità $p_{36,i} \geq p_{36,i+1}$
- Valore atteso dell'esborso della compagnia di assicurazione $R = 150.000\cdot(1 - p_{36,20})$
- Come calcolare il premio annuo *D* dell'assicurato ? →Guadagno $G = D\sum_{k=1}^{20} p_{36,k} - R$
- Assicurazione calcola *D* in modo che *G* > 0 → <u>*Il gioco è sfavorevole*</u>!

Approfondimento

La *Legge dei grandi numeri* detta pure *legge empirica del caso* ovvero *teorema di Bernoulli* (in quanto la sua prima formulazione è dovuta a Bernoulli) concerne il comportamento della media di una sequenza di *n* v.a. indipendenti ed identicamente distribuite al tendere ad infinito della numerosità della sequenza stessa (*n*). In pratica, la legge dei grandi numeri afferma che, sotto opportune ipotesi (v.a. X_i i.i.d. $\mu = \mathrm{E}\left(X_i\right) < \infty$), la media campionaria di *n* variabili casuali X_i aventi la stessa media converge, al tendere di *n* a infinito, alla media comune delle variabili casuali X_i. Un caso particolare della legge dei grandi numeri si ha quando si afferma che la proporzione di successi in *n* realizzazioni indipendenti di un evento *E* converge, per *n* che tende a infinito, alla probabilità di *E*. Questa legge afferma che la *stima* della probabilità di un evento ricavata da un certo numero di prove (data dalla *variabile di Bernoulli*) "converge" alla probabilità vera dell'evento all'aumentare del numero di prove: supponiamo di avere un evento (come il fatto che lanciando un dado esca il sei) con probabilità sconosciuta *p* (sconosciuta perché il dado potrebbe essere truccato, o semplicemente difettoso: non possiamo saperlo in anticipo). Eseguendo *n* lanci consecutivi otteniamo una stima della probabilità di fare sei con quel dado, data da $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ dove le *X* della somma rappresentano l'esito dei lanci e valgono uno se in quel lancio è uscito il sei, o zero se è uscito un altro numero. La legge dei grandi numeri afferma semplicemente che, quante più prove usiamo per calcolare la stima, tanto più questa sarà vicina, *probabilmente*, alla probabilità reale dell'evento *E*. Per concludere l'esempio, se la nostra stima *X*(*n*) sarà molto vicina a un sesto, che è la probabilità teorica che esca il sei per un dado perfetto, potremo essere ragionevolmente certi che il dado in questione non è polarizzato per il sei (per essere sicuri che il dado non sia truccato in nessun modo dovremmo ripetere il test anche per gli altri cinque numeri). Che cosa significhi *ragionevolmente sicuri* dipende da quanto vogliamo essere precisi nel nostro test: con dieci prove avremmo una stima grossolana, con cento ne otterremmo una molto più precisa, con mille ancora di più e così via, cioè il valore di *n* che siamo disposti ad accettare come sufficiente dipende dal grado di casualità che riteniamo necessario per il dado in questione.

Il problema (Teorema) di Bernoulli sui lanci ripetuti ha a che vedere da vicino con l'eterno sogno del giocatore del Casinò, cioè quello della puntata ripetuta sullo stesso Colore. La regola del gioco è molto semplice. Si inizia a puntare 1 € sul Rosso e si attende il primo esito. In caso positivo si intasca la vincita, diversamente si raddoppia la posta e si continua a giocare. Trascurando l'effetto dello 0 e del 00, che sposta la probabilità a favore del Banco, supponiamo di fare le nostre puntate su una Roulette *onesta* di soli 36 numeri: 18 rossi e 18 neri, ipotesi equivalente a quello del lancio di una moneta con la stessa probabilità del 50% di ottenere Testa o Croce. "*Il ragionamento elementare che sta alla base dell'illusione della vincita* '*certa*' *mediante il raddoppio della posta è quello che, prima o poi, il Rosso dovrà uscire senz'altro*". Ammettendo di avere riserve finanziarie adeguate, è lecito pensare di avere la vittoria in tasca perché prima o poi l'esito favorevole si dovrà sicuramente presentare.

Bernoulli, di fronte a questo problema, si pose per primo la domanda sull' "utilità attesa" che, molto semplicemente, si può riassumere con questo doppio enunciato:

"*Uno scommettitore* '*razionale*' *non rinuncerebbe mai alla possibilità di raddoppiare qualsiasi somma, per quanto estremamente ridotta. Al contrario, nessun scommettitore* '*avveduto*' *accetterebbe una scommessa, per quanto elevata, quando l'utilità procurata risulta sconosciuta*".

Il problema è diventato storico ed è conosciuto come il *Paradosso di San Pietroburgo* poiché proprio in quella città venne formulato per la prima volta[15]. Al tempo di Pietro il Grande, infatti, a San Pietroburgo esisteva già un casinò regolare che permetteva di giocare a qualunque gioco

[15] Della grande famiglia dei Bernoulli, non solo Jacques si occupò di probabilità, ma anche i suoi nipoti Daniel e Nicholas, che nel periodo in cui, i due fratelli, si trovarono ad insegnare matematica a Pietroburgo, nelle loro discussioni emerse un problema che divenne famoso con il nome di "paradosso di Pietroburgo".

d’azzardo in cambio di un prezzo d’entrata, quindi la questione era quanto sarebbe stato disposto a pagare un giocatore per poter partecipare al gioco? Già in quel periodo in Russia si conosceva uno dei principali fondamenti dell’economia per cui l’aspettativa di un guadagno è data dal prodotto del guadagno ottenibile per la probabilità di ottenerlo. In questo senso, la misura dell’aspettativa del guadagno totale è il risultato della somma delle aspettative di guadagno per ogni possibile situazione. Poiché, nel nostro caso, a ogni tiro il guadagno si raddoppia (ma la probabilità di arrivarci si dimezza), l’aspettativa di guadagno a ogni tiro è sempre la stessa: quindi l’aspettativa di guadagno totale diventa infinita. Il giocatore dovrebbe allora essere disposto a giocarsi tutto ciò che ha pur di poter partecipare, ciò contrasta con l’ovvia osservazione che: più si paga per giocare minore è la probabilità che si riesca a guadagnare più di quanto si sia pagato. In parole povere, dobbiamo immaginare 2 giocatori: uno dotato di mezzi normali e l’altro molto facoltoso. Supponiamo dunque che, proporzionalmente alle aspettative, le puntate iniziali siano: 1 Euro per il primo e 100 Euro per il secondo. Supponiamo ora che l’uscita del Rosso sia rispettivamente: al 22° giro per il primo giocatore e al 3° giro per il secondo. Quindi le capacità finanziarie del primo giocatore dopo 21 giri in perdita forse non saranno sufficienti e si troverà, suo malgrado, a dover rinunciare perdendo una somma considerata cospicua per le proprie possibilità. Al contrario, la vincita di 100 Euro netti per il secondo giocatore (-100 -200 +400 = 100) non porterà particolari benefici alla propria ricchezza personale. Dunque:

“***qualunque somma finita non è ritenuta sufficiente a giustificare infinite e possibili scommesse***.”

L’assunto di Bernoulli fu presentato per “criticare” il concetto di gioco equo nel contesto dei giochi onesti e non si tratta di un gioco di parole: egli volle rimarcare che, poiché la probabilità di vincere 1 milione di Euro è circa 1/1.000.000, non si può sostenere che il pagamento di una somma elevata è comunque adeguato all’interesse dello scommettitore. Nel 1713 Bernoulli risolse il paradosso notando che il valore del denaro non è assoluto, e dipende invece da quanto se ne ha: una stessa somma vale tanto per chi ne ha molto meno, e poco per chi ne ha molto di più. Per calcolare l’aspettativa di guadagno si deve dunque moltiplicare la probabilità non per il guadagno effettivo, ma per quanto esso vale per il giocatore, che costituisce la sua cosiddetta utilità. Supponendo ad esempio che l’utilità decresca in maniera logaritmica, il guadagno totale cessa di essere infinito per diventare molto piccolo, e il paradosso scompare. La nozione di utilità è da allora entrata a far parte dell’economia, anche se spesso si censura la sua più ovvia conseguenza: che costa di più accontentare un ricco che molti poveri. Mentre l’utilità ha risolto un paradosso, ne ha dunque introdotto un altro ancora peggiore: il fatto, cioè, che il progetto dell’economia capitalista, che tende appunto a far arricchire i ricchi a scapito dei poveri, è semplicemente antieconomico! Il fatto che l’utilità non sia proporzionale alla quantità di un bene è un principio fondamentale dell’Economia noto come “*principio dell’utilità marginale*”: se 1000 € in più o in meno possono avere un qualche significato per tutti noi, la differenza tra 1.000.000 e 1.001.000 € è praticamente irrilevante.

Appendice B – Soluzioni degli esercizi

Impariamo a contare

1. Con lo schema delle scelte successive, osserviamo che ci sono 8 posti dove far sedere la prima persona, poi 7 posti per la seconda, e così via e dunque in totale si hanno 8! modi. Alternativamente si poteva osservare che i modi di far sedere le persone sono le permutazioni di 8 oggetti (le persone) in 8 posti (le sedie), e P_8= 8!
2. Le classifiche sono disposizioni con ripetizione di 8 oggetti (le nazioni) in 5 posti, perciò le classifiche possibili sono $D^*_{8,5} = 8^5 = 32768$.
3. Poiché i posti sono più delle persone, si tratta di contare le disposizioni di 15 oggetti (i posti) in 3 posti (le persone), cioè $D_{15,8} = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 8 = 259459200$.
4. *a*. La differenza fra un modo e l'altro di scegliere le strade è solo in quante auto scelgono una strada piuttosto che un'altra. Si hanno x_1 auto che vanno nella prima direzione, x_2 nella seconda e x_3 nella terza, con $x_1 + x_2 + x_3 = 10$. li numero di soluzioni (x_1, x_2, x_3) di questa equazione (con x_i interi ≥ 0) $C^*_{3,10} = \binom{12}{10} = \binom{12}{2} = 66$.

   b. Poiché le auto si considerano tutte diverse, possiamo pensarle come 10 posti numerati. Si tratta di contare in quanti modi 3 oggetti (le direzioni) possono essere disposti con ripetizione nei l0 posti. Dunque la risposta è $D^*_{3,10} = 3^{10}$.

   c. Abbiamo 5 auto di tipo *A* che consideriamo tutte uguali fra loro. Ripetendo il ragionamento del punto *a*. esse possono scegliere le tre direzioni in $C^*_{3,5} = \binom{7}{5} = 21$ modi. Analogamente ci sono $C^*_{3,3} = \binom{5}{5} = 10$ modi per le *B* e $C^*_{3,2} = \binom{4}{2} = 6$ modi per le *C*. Le scelte per le tre cilindrate sono scelte successive, perciò si ha un totale di $21 \cdot 10 \cdot 6 = 1260$ scelte.
5. Il numero di possibili estrazioni è $\binom{40}{4}$ (i sottoinsiemi di 4 carte scelte fra tutte le 40). Estrarre 1 carta per seme significa scegliere 1 carta fra le l0 del primo seme, 1 fra le l0 del secondo seme e così via, quindi si hanno $\binom{10}{1}^4 = 10^4$ modi. La probabilità richiesta è quindi $10^4 \Big/ \binom{40}{4} = 0.1094$.
6. Supponiamo che i primi due lanci li faccia Carlo e poi ne faccia due Mario. I casi possibili sono 2^4 = 16 (2 esiti possibili -testa o croce -in ognuno dei 4 lanci). I casi favorevoli a che Mario ottenga più teste di Carlo sono CCCT, CCTC (nessuna testa per Carlo e una per Mario), CTTT, TCTT (una testa per Carlo e due per Mario), e CCTT (nessuna testa per Carlo e due per Mario). Dunque la probabilità richiesta è 5/16 = 0.3125
7. Lo spazio campionario Ω è costituito da tutte le 36 coppie con componenti numeri interi fra 1 e 6, cioè $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_i \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$, dove la prima componente rappresenta il risultato del primo lancio e la seconda componente rappresenta il secondo lancio. Ogni coppia ha la stessa probabilità, cioè 1/36, perciò

   a. *P*({(4,4)}) = 1/36 = 0.0278.

   b. *P*({(3, 5), (5, 3)}) = 2/36 = 0.0556.

c. $P\left(\left\{(\omega_1,\omega_2):\omega_i\in\{2,4,6\}\right\}\right)=9/36 = 0.2500$ (infatti abbiamo 3 possibilità per il primo lancio e 3 per il secondo).

d. $P\left(\left\{(\omega_1,\omega_2):\omega_1+\omega_2=9\right\}\right)=P(\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}) = 4/36 = 0.1111$.

e. $P\left(\left\{(\omega_1,\omega_2):\omega_1=\omega_2\right\}\right)= 6/36 = 0.1667$.

8. Lo spazio campionario n è l'insieme delle 52 carte (ognuna con probabilità 1/52).
   a. Poiché le carte di picche sono 13 e le figure di cuori 3 in totale i casi favorevoli sono 16 e la probabilità richiesta è 16/52 = 0.3077.
   b. Le carte rosse sono 26, restano da contare le figure che non siano rosse, ed esse sono 6 (3 di picche e 3 di fiori). La probabilità richiesta è 32/52 = 0.6154.

Modelli probabilistici

Probabilità condizionata e indipendenza

1. Sia A l'evento "il test risulta positivo" e B l'evento "la persona è malata". I dati sono: P(*A*)=0.06, P(*B*)=0.05 e P(*B*|*A*) = 0.8. Ci viene richiesta P(*A*|*B*), che si ottiene utilizzando i dati (e la definizione di probabilità condizionata):
$$P(A\mid B)=\frac{P(B\mid A)\cdot P(A)}{P(B)}=\frac{0.8\cdot 0.06}{0.05}=0.96\,.$$
2. <u>*I modo*</u>. Contiamo i casi possibili: abbiamo l0 possibilità per la prima estrazione, 9 per la seconda e 8 per la terza, in totale 720 casi. Contiamo i casi favorevoli: 6 possibilità di pescare una bianca alla prima estrazione, 4 possibilità di pescare una nera alla seconda e infine 3 di pescare una nera alla terza estrazione (poiché una nera è già stata estratta alla seconda estrazione). La probabilità è dunque $\frac{6\cdot 4\cdot 3}{720}=0.1$.

   <u>*II modo*</u>. Siano *A* l'evento "la prima pallina estratta è bianca", *B* l'evento "la seconda pallina estratta è nera", *C* l'evento "la terza pallina estratta è nera". Si richiede $P(A\cap B\cap C)$ e basta osservare che (dalla definizione di probabilità condizionata
$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B\mid A)\cdot P(C\mid A\cap B)=\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}=0.1,$$
   infatti P(*A*) = 6/10, P(*B*|*A*) = 4/9 poiché è la probabilità di estrarre dall'urna una pallina nera sapendo che ne è già stata estratta una bianca (e dunque la composizione dell'urna è 5 bianche e 4 nere), mentre $P(C\mid A\cap B)=3/8$ poiché è la probabilità di estrarre dall'urna una pallina nera sapendo che ne sono già state estratte una bianca e una nera (e dunque la composizione dell'urna è 5 bianche e 3 nere).
3. I casi possibili sono $\binom{40}{10}$ (le scelte simultanee di l0 carte fra 40). Sia S_k l'evento "il giocatore ha esattamente *k* sette", con *k* = 0, l, 2, 3, 4.
   a. La probabilità che abbia almeno un sette è uguale $1-P(S_0)$ e $P(S_0)=\binom{36}{10}\Big/\binom{40}{10}$, da cui la probabilità richiesta è 0.7001.

b. $P(S_2) = \dfrac{\binom{4}{2}\binom{36}{8}}{\binom{40}{10}} = 0.2142$.

c. $P(S_2 \mid S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4) = P(S_2) \big/ (1 - P(S_0))$ (osserviamo che gli S_k sono una partizione dell'evento certo Ω). Perciò la probabilità richiesta è $\dfrac{0.2142}{0.7001} = 0.3060$.

d. Sia S_Q l'evento "il giocatore ha il sette di quadri": si richiede la probabilità di $S_2 \cap S_Q$ ovvero la probabilità che abbia il sette di quadri più uno solo degli altri sette. Tale probabilità vale $3\binom{36}{8} \Big/ \binom{40}{10} = 0.1071$.

Variabili aleatorie discrete e loro distribuzioni

1. Descriviamo il problema come un processo di Bernoulli costituito da 5 prove. Se la confezione è stata riempita meno del dovuto diciamo che si è verificato un "successo", altrimenti diciamo che vi è stato un "insuccesso". La probabilità di "successo" è p = 0.1. Quindi la variabile aleatoria X che conta il numero di "successi", cioè il numero di confezioni non completamente riempite, è distribuita come una binomiale di parametri 5 e 0.1, $X \sim B(5,0.1)$. Si ha perciò:

   a. $P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot (0.1)^3 \cdot (0.9)^2 = 0.0081$;

   b. $P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot (0.1)^2 \cdot (0.9)^3 = 0.0729$;

   c. $P(X = 0) = \binom{5}{0} \cdot (0.1)^0 \cdot (0.9)^5 = 0.5905$;

   d. $P(X \geq 1) = 1 - (X = 0) = 1 - 0.5905 = 0.4095$.

2. La variabile aleatoria X che conta quante volte compare il numero 12 in 36 lanci ha legge binomiale $B(36,1/36)$. La probabilità che esca almeno un 12 è quindi data da

   $$P(X \geq 1) = 1 - (X = 0) = 1 - \binom{36}{0} \cdot \left(\frac{35}{36}\right)^{36} = 0.6373.$$

   Perché la probabilità di avere almeno un 12 sia almeno 0.5 occorre che il numero di lanci n sia tale da avere

   $$P(X \geq 1) = 1 - (X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{35}{36}\right)^{n} \geq 0.5$$

   da cui, estraendo il logaritmo naturale, si ricava $n \ln\frac{35}{36} \leq \ln(1 - 0.5) = \ln 0.5$, quindi $n \geq \ln 2 \big/ (\ln 36 - \ln 36) = 24.6$, per cui il numero minimo di lanci è 25.

3. Consideriamo prima la legge $B(p)$. Si ha che $p_x(0) + p_x(1) = (1 - p) + p = 1$

   Invece per la legge $B(n,p)$ si ha, utilizzando la formula del binomio di Newton

   $$\sum_{k=0}^{n} p_x(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + 1 - p)^n = 1.$$

4. Poiché le persone che votano in una sezione possono essere pensate come "scelte a caso", cioè fanno scelte indipendenti le une dalle altre e ciascuna vota Pinco Pallino con probabilità 0.35, si ha che X ha legge binomiale: $X \sim B(200,\ 0.35)$.

   a. $$P(X > 75) = \sum_{k=76}^{200} \binom{200}{k} \cdot (0.35)^k \cdot (0.65)^{200-k} = 0.2067$$ [16].

   b. Lo spoglio delle schede può essere considerato un processo di Bernoulli. Quindi se Y è il numero di prove che occorrono per avere il primo "successo" (voto per Pinco Pallino), si ha $Y \sim G(0.35)$, per cui
   $$P(Y = 4) = (0.35) \cdot (0.65)^3 = 0.0961 .$$
   Inoltre, usando la formula per il valore atteso della legge geometrica $E(Y)=1/0.35=2.86$.

Valore atteso

1. Assumendo che la produzione di un pezzo non influenzi quella dei pezzi successivi, possiamo descrivere il problema usando un processo di Bernoulli. Il "successo" è costituito dalla produzione di un pezzo difettoso mentre l' "insuccesso" è costituito dalla produzione di un pezzo non difettoso. Sia p la probabilità di successo. Considerando la produzione di l0 pezzi e p=0.2, la variabile aleatoria X che conta il numero di pezzi difettosi ha una distribuzione binomiale B~(10, 0.2).

   a. $P(X = 4) = \binom{10}{4} (0.2)^4 \cdot (0.8)^6 = 0.0881$;

   b. $\mathrm{E}(X) = 10 \cdot 0.2 = 2$;

   c. $P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$
   $$= \binom{10}{0} \cdot (0.2)^0 \cdot (0.8)^{10} + \binom{10}{1} \cdot (0.2)^1 \cdot (0.8)^9 + \binom{10}{2} \cdot (0.2)^2 \cdot (0.8)^8 = .$$
   $$= 0.1074 + 0.2684 + 0.3020 = 0.6778$$

2. Se consideriamo la produzione di ogni pezzo come una prova che può avere successo o insuccesso, a seconda che il pezzo sia o non sia entro i limiti di tolleranza, allora
   a. No, la "probabilità di successo" non sarà la stessa in ogni prova.
   b. No, per lo stesso motivo.
   c. No, in questo caso le "prove" non sono indipendenti, perché l'esito "insuccesso" in una prova rende più alta la probabilità di "successo" nella prova successiva.
   d. No, perché la probabilità di "insuccesso" tende ad aumentare.

3. Descriviamo il problema come un processo di Bernoulli costituito da 20 prove, infatti, se il numero di schede della partita è molto grande, gli stati delle schede del campione possono essere considerati indipendenti fra di loro. Quindi se indichiamo come "successo" lo stato di scheda difettosa, il numero X di pezzi difettosi ha una distribuzione binomiale $B(20,p)$, dove p è la proporzione di pezzi difettosi dell'intera partita. La probabilità di rifiutare una partita è quindi data da $P(X \ge 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2)$. Abbiamo quindi nei quattro casi

   a. $X \sim B(20, 0.01)$: $\quad E(X) = 0.2 \quad P(X \ge 3) = 1 - 0.81791 - 0.16523 - 0.01586 = 0.0010$;

   b. $X \sim B(20, 0.05)$: $\quad E(X) = 1 \quad P(X \ge 3) = 1 - 0.35849 - 0.37735 - 0.18868 = 0.0755$;

   c. $X \sim B(20, 0.1)$: $\quad E(X) = 2 \quad P(X \ge 3) = 1 - 0.12158 - 0.27017 - 0.28518 = 0.3231$;

[16] Il valore numerico è stato ovviamente ottenuto usando un opportuno software statistico.

d. $X \sim B(20, 0.2): \quad E(X) = 4 \quad P(X \geq 3) = 1 - 0.01153 - 0.05765 - 0.13691 = 0.7939$.

4. *a*. Il signor Rossi deve attendere più di 7 minuti se nel periodo di l0 minuti compreso tra due partenze, arriva nei 3 minuti successivi alla prima partenza. La probabilità di arrivare in quei 3 minuti è p = 3/10 = 0.3.
   b. Possiamo descrivere la situazione attraverso un processo di Bernoulli composto di 6 esperimenti (i giorni di permanenza del signor Rossi) ognuno del quali avente probabilità di successo p = 0.3. Quindi X ha legge binomiale $X \sim B(6,0.3)$. Per cui si ha E(X) = 6·0.3 = 1.8.
   c. Procedendo in modo analogo ai due punti precedenti si ottiene $Y \sim B(30, 0.3)$. Per cui si ha E(Y) = 30·0.3 = 9.

Appendice C– Verifica (10/02/2007 - I ora)

1. Per che cosa differiscono due permutazioni?
   - ☐ Differiscono per almeno un oggetto.
   - ■ Differiscono per l’ordine.
   - ☐ Differiscono per un oggetto o per l’ordine degli oggetti.

2. Per che cosa differiscono due disposizioni?
   - ☐ Differiscono per almeno un oggetto.
   - ☐ Differiscono per l’ordine.
   - ■ Differiscono per un oggetto o per l’ordine degli oggetti.

3. Per che cosa differiscono due combinazioni?
   - ■ Differiscono per almeno un oggetto.
   - ☐ Differiscono per l’ordine.
   - ☐ Differiscono per un oggetto o per l’ordine degli oggetti.

4. Quanti raggruppamenti di 5 oggetti distinti si possono con 11 oggetti distinti?
   - ☐ 6·5·4·3·2.
   - ☐ 11·10·9·8·7·6.
   - ■ 11·7·4·3.

5. Quanti raggruppamenti di 6 oggetti si possono fare con 6 oggetti distinti?
   - ■ 6·5·4·3·2.
   - ☐ 11·10·9·8·7.
   - ☐ 11·7·4·3.

6. Quanti raggruppamenti ordinati in gruppi di 5 oggetti distinti possiamo ottenere con 11 oggetti distinti?
   - ☐ 6·5·4·3·2.
   - ■ 11·10·9·8·7.
   - ☐ 11·7·4·3.

7. Gli eventi A e B sono fra loro incompatibili. Quali fra le seguenti relazioni è vera?
   - ☐ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)+P(A\cap B)$.
   - ■ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.
   - ☐ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

8. Due eventi A e B sono fra loro indipendenti. Quali fra le seguenti relazioni è vera?
   - ☐ $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(A|B)$.
   - ☐ $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A)$.
   - ■ $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

9. La v.a. aleatoria X assume i seguenti valori: {−7, −5, −1, 3, 5, 11} con probabilità rispettivamente uguali a: {0.12, 0.16, 0.24, 0.28, 0.12, 0,08}. Quale tra le seguenti probabilità è giusta ?
   - ■ $P(\{X=-7\}\cup\{X=-1\})=0.36$.
   - ☐ $P(\{X=-5\}\cup\{X=3\})=0.40$.
   - ☐ $P(\{X=-7\}\cup\{X=3\})=0.46$.

10. La v.a. aleatoria X assume i seguenti valori: {1, 4, 11, 31, 47, 51} con probabilità rispettivamente uguali a: {0.10, 0.15, 0.18, 0.30, 0.15, 0,12}. Quale tra le seguenti probabilità è errata?
    - □ $P(4 < X < 31) = 0.18$.
    - □ $P(X < 35) = 0.73$.
    - ■ $P(4 \le X < 31) = 0.63$.

11. L'espressione $\binom{11}{3} 0.6^3 \cdot 0.4^7$ definisce?
    - □ La probabilità che, eseguendo 11 prove in condizioni diverse, l'evento A si presenta 3 volte essendo $P(E) = 0.6$.
    - □ Il numero di combinazioni di 11 elementi di classe 3.
    - ■ La probabilità che, eseguendo 11 prove tutte nelle stesse condizioni, l'evento A si presenta 3 volte essendo $P(E) = 0.6$.

12. Che cosa afferma la legge dei grandi numeri?
    - □ la probabilità si bilancia dopo un elevato numero di prove.
    - ■ all'aumentare del numero di prove eseguito, le frequenze relative dei due eventi si avvicinano al valore delle rispettive probabilità.
    - □ dopo un elevato numero di prove, le frequenze relative dei due eventi si avvicinano al valore delle rispettive probabilità.

13. Un test accerta l'uso di steroidi il 95% delle volte. Inoltre, il test presenta un 15% di falsi positivi. Sapendo a priori che la probabilità di trovare una persona che fa uso di steroidi è pari al 10%, individuare la probabilità che una persona risultata positiva al test abbia fatto uso di steroidi
    - □ 0.095.
    - ■ 0.413.
    - □ 0.85.

14. Un gioco si definisce equo quando:
    - ■ E(*X*) = 0.
    - □ E(*X*) > 0.
    - □ E(*X*) = 1.

15. Il valore atteso di una v.a. è il numero reale:
    - □ $\sum_k f_X(x_k)$.
    - ■ $\sum_k x_k \cdot f_X(x_k)$.
    - □ $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$.

16. Una moneta è lanciata tre volte. Individuare l'evento {*esce almeno due volte testa*}.
    - □ $\{(TTC),(TCT),(CTT)\}$.
    - □ $\{(TT)\}$.
    - ■ $\{(TTC),(TCT),(CTT),(TTT)\}$.

17. Il teorema di Bayes consente di calcolare la probabilità:
    - ■ a posteriori di un evento.
    - □ incondizionata di un evento.
    - □ a priori di un evento.

18. Si supponga che il 15% della popolazione degli studenti della facoltà di Ingegneria abbia gli occhi di colore azzurro. Scegliendo in modo casuale un campione di 20 studenti da questa popolazione, determinare la probabilità che vi siano 4 persone con gli occhi azzurri.
    - □ 0.182.
    - ■ 0.116.
    - □ 0.85.

19. Sia $X \sim B(n, p)$ con 0<*p*<1. Allora, per ogni *p*, $P(X > 0)$ vale:
    - ■ $1-(1-p)^n$.
    - □ $(1-p)^n$.
    - □ $1-p^n$.

20. Considerati gli eventi *A*, *B* entrambi con probabilità non nulla, tali che $P(B|A) = P(B)$, possiamo affermare che:
    - □ $A \cap B = \varnothing$ (gli eventi *A* e *B* sono disgiunti).
    - □ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
    - ■ $P(A|B) = P(A)$.

Livello di sufficienza 12 risposte esatte.

Bibliografia

- G. Dall'Aglio, *Calcolo delle probabilità*, Zanichelli Editore (2002).
- R. Isaac, *The pleasures of probability*, Springer-Verlag (1995).
- M. Trovato, *Probabilità statistica ricerca operativa*, Ghisetti e Corvi Editore (2004).
- D. Bertacchi, M. Bramanti, G. Guerra, *Esercizi di Calcolo delle Probabilità e Statistica*, Esculapio Editrice (2003)
- A. M. Mood, F. A. Graybill, D. C. Boes, *Introduzione alla statistica*, McGraw Hill, (Singapore, 1974).
- G G. Roussas , *A first course in mathematical statistics*, Addison-Wesley Publishing Company, (Reading, 1973).
- V. Glivenko, *Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilità*, Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, **3** (1933), 92-99.